

О ПОТЕНЦИАЛАХ М. РИССА. I.

Н. С. Ландкоф

Настоящая статья является развитием идей замечательного мемуара М. Рисса [1]. В этом мемуаре М. Рисс впервые провел весьма глубокое исследование потенциалов порядка α , $0 < \alpha \leq 2$, ввел понятие α -супергармонической функции и доказал основную теорему о представлении α -супергармонических функций потенциалами порядка α . Многие доказательства, как указывает М. Рисс во введении к этому мемуару, лишь намечены им, и позднее, насколько нам известно, не воспроизводились.

Несколько позже О. Фростман [2], опираясь на разработанный им вариационный метод, дал другое доказательство основной теоремы.

Наконец, значительно позднее Ж. Дени [3] в рамках так называемой грубой теории потенциала, в которой как потенциалы, так и ядра являются мерами, а не функциями точки пространства, установил весьма общую теорему типа теоремы М. Рисса. Следует, однако, отметить, что доказательство того, что ядра М. Рисса входят в класс ядер Ж. Дени, вовсе не тривиально.

Мы получим теорему М. Рисса, используя более или менее систематически метод теории обобщенных функций. Едва ли нужно указывать, что образцом нам послужило изящное доказательство Л. Шварца классической теоремы Ф. Рисса о представлении ньютоновых потенциалов (см. [4], стр. 76).

Кроме того, мы вводим понятие α -гармонической функции и соответствующей обобщенной задачи Дирихле, в которой, однако, роль границы области G играет все ее дополнение. Возможно, что эти понятия также представляют некоторый интерес.

§ 1. Леммы об обобщенных функциях. Ядра М. Рисса

1. Под обобщенной функцией T мы будем понимать линейный непрерывный функционал в классе D финитных неограниченно дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in R^p$. При этом сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$ в D определяется требованиями*.

$$\partial^k f_n \rightarrow \partial^k f, \quad |k| = 0, 1, 2, \dots$$

равномерно в R^p и условием равномерной финитности функций f_n .

* $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ обозначает целочисленный вектор в R^p с неотрицательными компонентами,

$$\partial^k \equiv \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_p^{k_p}}, \quad |k| = \sum_{i=1}^p k_i.$$

Множество всех обобщенных функций будем обозначать через D^* . Необходимые для дальнейшего определения и свойства элементов D^* можно найти, например, в работах [4] или [5].

Во многих случаях и, в частности, когда обобщенная функция T задана аналитическим выражением, оказывается возможным расширить ее с сохранением линейности и непрерывности на некоторое функциональное пространство $E \supset D$ с более слабой топологией, чем в D . Этот расширенный функционал мы будем обозначать тем же символом T . С другой стороны, если под E^* понимать множество всех линейных непрерывных функционалов в E , то, очевидно, $E^* \subset D^*$. Таким образом, можно в D^* выделять различные классы обобщенных функций, характеризующиеся погружением D в некоторое функциональное пространство E .

Лемма 1. Пусть $T_1 \in E_1^*$, $T_2 \in E_2^*$, и для некоторого пространства $E_{12} \supset D_{xy}^*$ выполнены условия:

а) из $f(x, y) \in E_{12}$ следует, что при фиксированном y имеем $f(x, y) \in E_1$, а при фиксированном x имеем $f(x, y) \in E_2$;

б) $T_1^{(x)} f(x, y) \in E_2$, $T_2^{(y)} f(x, y) \in E_1$, причем оба эти оператора из E_{12} в E_2 и соответственно в E_1 непрерывны,

с) D_{xy} плотно в E_{12} .

Тогда существует единственный функционал $T_1 \times T_2 \in E_{12}^*$, удовлетворяющий условию

$$(T_1 \times T_2)[f_1(x)f_2(y)] = T_1 f_1(x) \cdot T_2 f_2(y), \quad (1)$$

где $f_1(x) \in D_x$, $f_2(y) \in D_y$.

Обобщенная функция $T_1 \times T_2$ называется прямым произведением T_1 и T_2 , и для нее имеет место «формула Фубини»

$$(T_1 \times T_2)f(x, y) = T_1[T_2^{(y)}f(x, y)] = T_2[T_1^{(x)}f(x, y)] \quad (2)$$

для любой $f(x, y) \in E_{12}$.

Предположим еще, что выполнено условие

d) для любой $f(x) \in D$

$$f(x+y) \in E_{12},$$

причем $f(x) \rightarrow f(x+y)$ есть непрерывный оператор из D в E_{12} .

Тогда формула

$$(T_1 \times T_2)f(x+y) = T_1[T_2^{(y)}f(x+y)] = T_2[T_1^{(x)}f(x+y)] \quad (3)$$

определяет обобщенную функцию из D^* , которую обозначают $T_1 * T_2$ и называют сверткой обобщенных функций T_1 и T_2 .

Замечание. Если условие d) выполняется для любой функции $f(x)$ из $E \supset D$, то свертка $T_1 * T_2$ будет принадлежать классу E^* .

Лемма 2. Пусть $T_i \in E_i^*$, ($i=1, 2, 3$); $T_i \times T_k \in E_{ik}^*$, ($i, k=1, 2, 3$; $i \neq k$), $T_1 \times T_2 \times T_3 \in E_{123}^*$. Предположим, что для всех трех E_{ik} удовлетворяются условия а) — d) и, кроме того,

а') из $f(x, y, z) \in E_{123}$ следует, что при фиксированном x имеем $f(x, y, z) \in E_{23}$ и аналогичные включения имеют место при фиксации y или z ;

б') $T_1^{(x)} f(x, y, z) \in E_{23}$, $T_2^{(y)} f(x, y, z) \in E_{13}$, $T_3^{(z)} f(x, y, z) \in E_{12}$,

причем эти операторы непрерывны:

с') D_{xyz} плотно в E_{123} ,

д') если $f(x) \in D$, то $f(x+y+z) \in E_{123}$, причем отображение $f(x) \rightarrow f(x+y+z)$ непрерывно.

* D_{xy} обозначает пространство D , определенное в $R^{2p} = R^p \times R^p$; элементы D_{xy} будем обозначать $f(x, y)$.

Тогда справедлива формула

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3). \quad (4)$$

Доказательства лемм 1 и 2 достаточно просты и поэтому могут быть здесь опущены.

Из этих лемм можно извлечь такое известное следствие:

Лемма 3. Для существования свертки $T_1 * T_2$ достаточно финитности одного из множителей; для существования свертки $T_1 * T_2 * T_3$, которая определяется, как общее значение (4), достаточно финитности двух из множителей.

Символ $T_n \rightarrow T$ будет обозначать слабую сходимость, т. е. сходимость $T_n(f) \rightarrow T(f)$ для любой $f \in D$. Тогда, как известно, справедлива

Лемма 4. Пусть $T_n \rightarrow T$ и выполнено одно из двух предположений:

(i) обобщенная функция U финитна,

(ii) T_n равномерно финитны.

Тогда

$$U * T_n \rightarrow U * T.$$

2. При $\alpha > 0$ будем называть ядром М. Рисса порядка α функцию

$$k_\alpha(x) = A(p, \alpha) |x|^{\alpha-p}, \quad x \in R^p, \quad (5)$$

где

$$A(p, \alpha) = \pi^{\alpha - \frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (5')$$

Если $0 < \alpha < \frac{p}{2}$, $0 < \beta < \frac{p}{2}$, то, применяя преобразования Фурье, можно установить так называемую формулу композиции:

$$k_\alpha(x) * k_\beta(x) = k_{\alpha+\beta}(x). \quad (6)$$

Для дальнейшего важно освободиться от излишних ограничений на параметры α и β . Применяя метод аналитического продолжения (см., например, [5] стр. 110), можно определить при $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ обобщенную функцию k_α , которая в полосе

$$-2m - 2 < \operatorname{Re} \alpha \leq -2m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

может быть представлена формулой

$$k_\alpha(\varphi) = A(p, \alpha) \int_{R^p} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^m H_k \Delta^k \varphi(0) |x|^{2k} \right\} \frac{dx}{|x|^{p-\alpha}}, \quad (7)$$

где

$$H_k = \frac{\omega_p}{2^k k! p(p+2) \dots (p+2k-2)},$$

а $\omega_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$ — площадь единичной сферы в R^p . При этом

$$k_{-2m} = \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)^m \Delta^m, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

а

$$k_0 = \varepsilon,$$

где ε — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x = 0$. Формула (8) дает повод рассматривать $k_{-\alpha}$, как лапласиан дробного порядка.

Важно заметить, что если $\varphi(x) \in D$, но имеет непрерывные производные порядка $2m$ и при $|x| \rightarrow \infty$

$$\varphi(x) = O(|x|^{-N}),$$

то $k_\alpha(\varphi)$ также может быть определена, как аналитическая функция α , регулярная в полосе

$$-2m < \operatorname{Re} \alpha < N$$

(за исключением точек $\alpha = p + 2n$, $n = 0, 1, \dots$). Это обстоятельство позволяет произвести «аналитическое продолжение» формулы (6) и доказать ее справедливость при всех α , β , удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < p, \quad \alpha, \beta \neq p + 2n, \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

В частности, при всех $\alpha \neq p + 2n$

$$k_\alpha * k_{-\alpha} = \varepsilon. \quad (10)$$

В дальнейшем мы параметр α будем считать вещественным.

В соотношениях (6) и (10) мы рассматриваем обе части, как элементы D^* . Но в действительности все члены этих равенств определены на более широких пространствах, чем D , и поэтому возникает вопрос о справедливости (6) и (10) в более широком смысле.

Будем обозначать D^m пространство финитных m раз непрерывно дифференцируемых функций, в котором сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$ определяется условиями

$$\partial^k f_n \rightarrow \partial^k f, \quad |k| = 0, 1, \dots, m,$$

равномерно в R^p и условием равномерной финитности семейства $\{f_n\}$.

Лемма 5. Обозначим $2m_\alpha \geq 0$ наименьшее четное число, которое при $\alpha < 0$ удовлетворяет неравенству $2m > |\alpha|$; при $\alpha \geq 0$ положим $2m_\alpha = 0$. Аналогичный смысл имеет $2m_\beta$. Тогда равенство

$$k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta} \quad (6)$$

имеет место, как равенство обобщенных функций класса $[D^{2m_\alpha+2m_\beta}]^*$.

Доказательство. Так как $D^{2m_\alpha+2m_\beta}$ плотно в D , то достаточно установить, что обе стороны (6) принадлежат $[D^{2m_\alpha+2m_\beta}]^*$.

Пусть $E_\alpha \supset D^{2m_\alpha}$ есть линейное пространство непрерывных функций $f(x)$, имеющих в окрестности нуля непрерывные производные порядка $2m_\alpha$, и суммируемых с весом $(1 + |x|^{p-\alpha})^{-1}$.

Сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$ в E_α обозначает, что

$$\int_{R^p} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |x|^{p-\alpha}} dx \rightarrow 0,$$

и в некоторой окрестности нуля равномерно

$$\partial^k f_n(x) \rightarrow \partial^k f(x), \quad |k| \leq 2m_\alpha.$$

Эта сходимость слабее, чем сходимость в D^{2m_α} , и поэтому $E_\alpha^* \subset [D^{2m_\alpha}]^*$. Из представления (7) вытекает, что $k_\alpha \in E_\alpha^*$.

Следовательно, $k_{\alpha+\beta} \in [D^{2m_{\alpha+\beta}}]^*$. Но нетрудно видеть, что $m_{\alpha+\beta} \leq m_\alpha + m_\beta$, так что

$$D^{2m_{\alpha+\beta}} \supset D^{2m_\alpha + 2m_\beta},$$

и поэтому $k_{\alpha+\beta} \in [D^{2m_\alpha + 2m_\beta}]^*$.

Далее, с помощью леммы 1 устанавливаем, что $k_\alpha \times k_\beta$ будет определено в пространстве $E_{\alpha\beta}$ функций $f(x, y)$ в $R^p \times R^p$, имеющих $2m_\alpha + 2m_\beta$ непрерывных производных и суммируемых вместе со всеми упомянутыми производными с весом $(1 + |x|^{p-\alpha})^{-1} (1 + |y|^{p-\beta})^{-1}$. Сходимость $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$ в $E_{\alpha\beta}$ обозначает, что

$$\int_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k f_n(x, y) - \partial^k f(x, y)|}{(1 + |x|^{p-\alpha})(1 + |y|^{p-\beta})} dx dy \rightarrow 0; |k| \leq 2m_\alpha + 2m_\beta,$$

и в некоторой окрестности нуля равномерно

$$\partial^k f_n(x, y) \rightarrow \partial^k f(x, y), |k| \leq 2m_\alpha + 2m_\beta.$$

Согласно замечанию к лемме 1, для утверждения $k_\alpha * k_\beta \in [D^{2m_\alpha + 2m_\beta}]^*$ достаточно проверить, что для любой $f(x) \in D^{2m_\alpha + 2m_\beta}$ отображение $f(x) \rightarrow f(x + y)$ есть непрерывный оператор из $D^{2m_\alpha + 2m_\beta}$ в $E_{\alpha\beta}$.

Если K — носитель $f(x)$, а $M = \max |f(x)|$, то

$$\int_{R^p} \frac{|f(x + y)|}{1 + |y|^{p-\beta}} dy \leq M \int_{K+y} \frac{dy}{1 + |y|^{p-\beta}} = O\left(\frac{1}{1 + |x|^{p-\beta}}\right),$$

откуда

$$\int_{R^p \times R^p} \frac{|f(x + y)| dx dy}{(1 + |x|^{p-\alpha})(1 + |y|^{p-\beta})} \leq M_1 \int_{R^p} \frac{dx}{1 + |x|^{2p-\alpha-\beta}}.$$

Так как, в силу (9) $\alpha + \beta < p$, то это вместе с совершенно аналогичными оценками для $\partial^k f(x + y)$ показывает, что $f(x + y) \in E_{\alpha\beta}$. Непрерывность отображения $f(x) \rightarrow f(x + y)$ также легко следует из полученных оценок.

Лемма доказана.

Следствие. При $\alpha > 0$ и любой $\varphi(x) \in D^{2m_\alpha}$ функция

$$v(x) = k_{-\alpha} * \varphi(x) = k_{-\alpha}^{(y)} \varphi(x - y)$$

удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x) = k_\alpha * v(x).$$

Полезно заметить также, что при $|x| \rightarrow \infty$

$$v(x) = O(|x|^{-p-\alpha}),$$

§ 2. Супергармонические и гармонические функции дробного порядка

3. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что $0 < \alpha < 2$.

Введем, следуя М. Риссу, меру $\varepsilon_\alpha^{(r)}$, ($r > 0$), с плотностью

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(x) = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} r^\alpha (|x|^2 - r^2)^{-\frac{\alpha}{2}} |x|^{-p} & \text{при } |x| > r, \\ 0 & \text{при } |x| < r. \end{cases} \quad (11)$$

Основное свойство этой функции состоит в том, что при $|x| \geq r$

$$U_{\alpha}^{\varepsilon_{\alpha}^{(r)}}(x) = \int_{R^p} k_{\alpha}(x-y) \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(y) dy = k_{\alpha}(x), \quad (12)$$

а при $|x| < r$

$$U_{\alpha}^{\varepsilon_{\alpha}^{(r)}}(x) \leq k_{\alpha}(x)^{*}. \quad (12')$$

Кроме того,

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)}(1) = \int_{R^p} \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(x) dx = 1.$$

Мера $\varepsilon_{\alpha}^{(r)}$ определяет операцию усреднения

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)}(f) = \int_{R^p} f(x) \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(x) dx,$$

применимую к локально суммируемым функциям $f(x)$, подчиненным условию

$$\int_{|x|>1} \frac{|f(x)|}{|x|^{p+\alpha}} dx < \infty. \quad (13)$$

Обозначим M^{+} класс мер μ , удовлетворяющих условию

$$\int_{|x|>1} \frac{d\mu(x)}{|x|^{p+\alpha}} dx < \infty. \quad (14)$$

Для этих мер потенциал

$$U_{\alpha}^{\mu}(x) = \int_{R^p} k_{\alpha}(x-y) d\mu(y) \leq +\infty$$

(который мы иногда будем обозначать $k_{\alpha} * \mu$) локально суммируем и удовлетворяет условию (13). В самом деле

$$\int_{|x|>1} \frac{U_{\alpha}^{\mu}(x)}{|x|^{p+\alpha}} dx = \int d\mu(y) \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^{p+\alpha} |x-y|^{p-\alpha}}.$$

Но нетрудно проверить, что внутренний интеграл есть $O(|y|^{\alpha-p})$ и это вместе с (14) доказывает утверждение.

Теперь легко, опираясь на (12) и (12'), показать, что всюду в R^p

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)} * U_{\alpha}^{\mu}(x) = \int U_{\alpha}^{\mu}(x-y) \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(y) dy \leq U_{\alpha}^{\mu}(x), \quad (15)$$

причем в точках x , не принадлежащих носителю $S(\mu)$ меры μ , при r меньших расстояния от x до $S(\mu)$

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)} * U_{\alpha}^{\mu}(x) = U_{\alpha}^{\mu}(x). \quad (15')$$

4. Введем теперь следующие определения.

Функция $f(x)$ называется α -супергармонической в R^p , если

а) $0 \leq f(x) \neq +\infty$;

в) $f(x)$ полунепрерывна снизу;

с) $f(x)$ удовлетворяет условию (13), и для любой точки $x \in R^p$ и любого $r > 0$

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f) \leq f(x).$$

* См. [1].

Функция $f(x)$, определенная во всем пространстве R^p называется α -гармонической в открытом множестве G , если она удовлетворяет условию (13), непрерывна в G , и для любой точки $x \in G$

$$f(x) = \varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f) \quad (16)$$

при условии, что r меньше расстояния от x до ∂G .

Заметим, что эти определения не имеют локального характера, поскольку носителем $\varepsilon_\alpha^{(r)}$ является вся внешность сферы $|x| < r$.

Выше мы установили, что потенциал $U_\alpha^\mu(x)$ меры μ является α -супергармонической функцией в R^p и α -гармонической функцией в дополнении к $S(\mu)$.

Укажем несколько простых свойств α -супергармонических функций.

(i) В каждой точке $x \in R^p$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) = f(x).$$

(ii) Если $f(x_0) = \inf_{R^p} f(x)$, то $f(x) \equiv f(x_0)$.

(iii) Если $\{f_n(x)\}$ неубывающая последовательность α -супергармонических функций, то

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

либо $\equiv +\infty$, либо α -супергармонична.

(iV) Если $\mu \in \mathfrak{M}^+$, а $f(x)$ α -супергармонична, то

$$f * \mu(x) = \int_{R^p} f(x-y) d\mu(y)$$

либо $\equiv +\infty$, либо α -супергармонична.

Отсюда, в частности, следует, что при фиксированном $r > 0$ функция

$$f^{(r)}(x) = f * \varepsilon_\alpha^{(r)}(x)$$

будет α -супергармонична.

Установим теперь обобщение принципа гармонической миноранты.

Теорема 1. Пусть в R^p заданы две функции: α -супергармоническая функция $f(x)$ и функция $h(x)$, α -гармоническая в открытом множестве G , не содержащем внутри бесконечной точки, и непрерывная в G . Тогда, если

$$f(x) \geq h(x), \quad x \in CG,$$

то это неравенство справедливо и в G .

Если в какой-либо точке $x_0 \in G$ имеем равенство $f(x_0) = h(x_0)$, то $f(x) = h(x)$ почти всюду в R^p ,

Доказательство. Рассмотрим разность

$$d(x) = f(x) - h(x).$$

Она полунепрерывна снизу на $\bar{G}$ и в любой точке s границы G

$$\lim_{x \rightarrow s} d(x) \geq 0, \quad x \in G,$$

ибо

$$\lim_{x \rightarrow s} d(x) = \lim_{x \rightarrow s} f(x) - \lim_{x \rightarrow s} h(x) \geq f(s) - h(s).$$

Следовательно, если $d(x)$ принимает отрицательные значения, то найдется точка $x_0 \in G$ где $d(x)$ достигнет своего абсолютного минимума. В таком случае

$$d(x_0) < \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(d) = \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(f) - \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(h).$$

Но $f(x_0) \geq \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(f)$ и, вычитая это неравенство из предыдущего, получаем

$$-h(x_0) < -\varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(h).$$

При достаточно малом r это противоречит α -гармоничности $h(x)$ в точке x_0 и, таким образом, всюду в R^p $d(x) \geq 0$.

Если допустить, что $d(x_0) = 0$ при $x_0 \in G$, то при достаточно малом $r > 0$ имеем

$$0 = d(x_0) \geq \varepsilon_{\alpha x_0}^{(r)}(d),$$

и поэтому $d(x) = 0$ почти всюду.

С помощью этой теоремы и некоторых аппроксимационных приемов (см. [8], стр. 30) можно доказать следующий принцип мажорирования.

Теорема 2*. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}^+$, и потенциал $U_\alpha^\mu(x)$ конечен μ -почти всюду. Если неравенство

$$U_\alpha^\mu(x) \leq f(x),$$

где $f(x)$ — α -супергармоническая функция, выполнено на $S(\mu)$, то оно справедливо всюду.

5. Установим теперь связь между α -супергармоничностью и обобщенной функцией $k_{-\alpha}$. Она основана на следующих леммах.

Лемма 6. При $r \rightarrow 0$

$$\frac{1}{r^\alpha} (\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)}) \rightarrow Qk_{-\alpha},$$

где $Q > 0$ зависит лишь от α и p .

Доказательство. Для любой функции $\varphi(x) \in D$ имеем

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)})(\varphi) &= \int_{|x| > r} [\varphi(0) - \varphi(x)] \varepsilon_\alpha^{(r)}(x) dx = \\ &= \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} r^\alpha \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho(\rho^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{|x|=1} [\varphi(0) - \varphi(\rho x)] d\omega = \\ &= \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} r^\alpha \omega_p \int_r^\infty \frac{\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0, \rho)}{\rho(\rho^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} d\rho, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\varphi}(0, \rho) = \frac{1}{\omega_p} \int_{|x|=\rho} \varphi(x) d\omega$$

* Эта теорема известна в более сильной формулировке: когда предполагается, что основное неравенство имеет место не во всех точках носителя $S(\mu)$, а μ -почти всюду (если $f(x)$ непрерывна, то обе формулировки эквивалентны). Однако нам неизвестно доказательство этого более сильного результата, не опирающееся на теорему 4.

есть среднее значение $\varphi(x)$ на сфере радиуса ρ с центром в точке O . Следовательно,

$$\frac{1}{r^\alpha} (\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)}) (\varphi) = -\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \omega_p \int_r^\infty \frac{\tilde{\varphi}(0, \rho) - \varphi(0)}{\rho(\rho^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} d\rho,$$

и в силу гладкости $\varphi(x)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^\alpha} (\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)}) (\varphi) = -\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \omega_p \int_0^\infty \frac{\tilde{\varphi}(0, \rho) - \varphi(0)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho.$$

Так как согласно (7)

$$k_{-\alpha}(\varphi) = A(p, \alpha) \omega_p \int_0^\infty \frac{\tilde{\varphi}(0, \rho) - \varphi(0)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho,$$

то в силу (5')

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^\alpha} (\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)}) (\varphi) = \frac{2\pi^\alpha}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+\alpha}{2}\right)} k_{-\alpha}(\varphi).$$

Замечание. Для справедливости последней формулы достаточно предположить, что $\varphi(x) \in E_{-\alpha}$, т. е., поскольку $0 < \alpha < 2$, что $\varphi(x)$ имеет в окрестности нуля две непрерывные производные и удовлетворяет условию (13).

Лемма 7. Если $f(x)$ α -супергармоническая функция, то

$$\mu = k_\alpha * f$$

есть мера. При этом свертка $k_{-\alpha} * f$ понимается, как обобщенная функция, определяемая равенством

$$(k_{-\alpha} * f)(\varphi) = k_{-\alpha} \int f(y) \varphi(x+y) dy.$$

Доказательство. Согласно теореме Л. Шварца, достаточно установить, что для всякой функции $\varphi(x) \in D$, $\varphi(x) \geq 0$,

$$(k_{-\alpha} * f)(\varphi) \geq 0.$$

Так как

$$\psi(x) = \int f(y) \varphi(x+y) dy \in E_{-\alpha},$$

то в силу последнего замечания

$$(k_{-\alpha} * f)(\varphi) = k_{-\alpha}(\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{Qr^\alpha} (\varepsilon - \varepsilon_\alpha^{(r)})(\psi),$$

и поэтому достаточно убедиться в том, что $\psi(x)$ есть α -супергармоническая функция. Но это следует из свойства (IV).

§ 3. Обобщенная теорема Эванса

6. Сформулированное ниже предложение указано М. Риссом. Доказательство, которое мы приводим, является новым.

Теорема 3. Пусть $\{U_{\alpha}^{\mu_n}(x)\}$ — неубывающая последовательность потенциалов мер. Тогда либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) \equiv +\infty,$$

либо всюду в R^p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) = U_{\alpha}^{\mu}(x) + A, \quad (17)$$

где $\mu \in \mathfrak{M}^+$, и $A \geq 0$.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) \not\equiv +\infty$. Докажем сначала, что (17) имеет место почти всюду в R^p .

Для этого заметим, что

1) последовательность мер $\{\mu_n\}$ слабо ограничена, т. е. для всякого компакта $K \subset R^p$ $\mu_n(K) < \text{const}$.

2) при всяком $r > 0$

$$\int_{|x| > r} \frac{d\mu_n(x)}{|x|^{p-\alpha}} < \text{const}$$

В самом деле, если 1) не выполнено, то для некоторого K и последовательности $\{n_i\}$ $\mu_{n_i}(K) \rightarrow \infty$. Но тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_{n_i}}(x) \geq A(p, \alpha) \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\mu_{n_i}(x)}{|x-y|^{p-\alpha}} \equiv +\infty,$$

что противоречит предположению. Аналогично доказывается 2), если учесть следующее легко проверяемое неравенство

$$\int_{R^p} \frac{d\mu_n(y)}{|x-y|^{p-\alpha}} \geq \left(\frac{|x|+1}{2|x|+1} \right)^{p-\alpha} \int_{|y| > |x|+1} \frac{d\mu_n(y)}{|y|^{p-\alpha}}.$$

В силу теоремы о слабой компактности мер мы можем считать, что $\mu_n \rightarrow \mu$.

Положим теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) = F(x),$$

и рассмотрим произвольную непрерывную финитную функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$\int_{R^p} f(x) dx = 0.$$

Из 1) и 2) следует локальная суммируемость $F(x)$, так как при любом n

$$\int_{|x| < r} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) dx = A(p, \alpha) \int d\mu_n(y) \int_{|x| < r} \frac{dx}{|x-y|^{p-\alpha}} < \text{const}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R^p} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) f(x) dx = \int_{R^p} F(x) f(x) dx.$$

С другой стороны,

$$\int_{R^p} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) f(x) dx = \int_{R^p} U_{\alpha}^f(x) d\mu_n(x).$$

Но нетрудно убедиться, раскладывая $|x - y|^{\alpha-p}$ в ряд по отрицательным степеням $|x|$, что

$$U_{\alpha}^f(x) = A(p, \alpha) \int \frac{f(y) dy}{|x - y|^{p-\alpha}} = O\left(\frac{1}{|x|^{p+1-\alpha}}\right).$$

Следовательно,

$$\int_{|x|>r} U_{\alpha}^f(x) d\mu_n(x) < Q_1 \int_{|x|>r} \frac{d\mu_n(x)}{|x|^{p+1-\alpha}} < \frac{Q_1}{r} \int_{|x|>r} \frac{d\mu_n(x)}{|x|^{p-\alpha}},$$

и это выражение в силу 2) равномерно стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Если учесть еще непрерывность $U_{\alpha}^f(x)$, то мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R^p} U_{\alpha}^f(x) d\mu_n(x) = \int_{R^p} U_{\alpha}^f(x) d\mu(x) = \int_{R^p} U_{\alpha}^{\mu}(x) f(x) dx.$$

Итак, для всякой непрерывной финитной функции $f(x)$, ортогональной к 1,

$$\int_{R^p} F(x) f(x) dx = \int_{R^p} U_{\alpha}^{\mu}(x) f(x) dx.$$

Отсюда, как известно, вытекает, что почти всюду в R^p

$$F(x) = U_{\alpha}^{\mu}(x) + A,$$

где A постоянная. Так как

$$U_{\alpha}^{\mu}(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_n}(x) = F(x),$$

то $A \geq 0$.

Итак, (17) доказано почти всюду в R^p . Но согласно свойству (iii), п^о 4, $F(x)$ есть α -супергармоническая функция, и поэтому из (i) следует, что (17) имеет место во всех точках R^p .

З а м е ч а н и е. Теорема 3 верна также при $\alpha \geq 2$. Основная часть приведенного доказательства не использует предположения $\alpha < 2$. В заключительном рассуждении следует, учесть, что при $\alpha \geq 2$ $U_{\alpha}^{\mu}(x)$ и $F(x)$ являются обычными супергармоническими функциями.

§ 4. Обобщенный интеграл Пуассона

7. Следующую функцию $\check{P}_r(y, x)$, введенную М. Риссом, можно рассматривать как аналог ядра Пуассона для внешности сферы S_r радиуса r :

$$\check{P}_r(y, x) = \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi \alpha}{2} \frac{(|x|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(r^2 - |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{|x - y|^p},$$

$$|y| < r, |x| > r. \quad (18)$$

Как указано в [1], для любой точки y_0 внутри S_r имеем

$$\frac{1}{|y_0 - x|^{p-\alpha}} = \int_{|y|<r} \frac{1}{|y_0 - y|^{p-\alpha}} \check{P}_r(y, x) dy,$$

$$(|x| > r). \quad (19)$$

Пусть ν — заряд с носителем $S(\nu)$, лежащим вне сферы S_r . Определим абсолютно непрерывный заряд ν' с носителем $S(\nu')$, принад-

лежащим S_r , формулой

$$v'(y) = \int_{S(y)} \check{P}_r(y, x) dv(x), \quad |y| < r.$$

Тогда, проинтегрировав (19) по $dv(x)$, получим

$$U_\alpha^\nu(y_0) = U_\alpha^{\nu'}(y_0), \quad |y_0| < r \quad (20)$$

Этим решена так называемая проблема выметания на сферу S_r : любой заряд ν вне S_r может быть заменен зарядом на S_r , причем так, что потенциал внутри S_r не изменяется. Подобным же образом можно ввести аналог ядра Пуассона для внутренности сферы S_r . Им является функция

$$\hat{P}_r(y, x) = \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \frac{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(|y|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{|x - y|^p}, \quad (21)$$

$$|y| > r, \quad |x| < r,$$

которая при $x = 0$ совпадает с $\varepsilon_\alpha^{(r)}(y)$ (см. (11)).

Для любой точки y_0 , $|y_0| > r$, имеем внутри сферы S_r равенство (см. [1])

$$\frac{1}{|y_0 - x|^{p-\alpha}} = \int_{\substack{|y| > r \\ |x| < r}} \frac{1}{|y_0 - y|^{p-\alpha}} \hat{P}_r(y, x) dy, \quad (22)$$

Из него, как и выше, можно получить решение проблемы выметания заряда ν внутри S_r на внешность сферы;

$$U_\alpha^\nu(y_0) = U_\alpha^{\nu'}(y_0), \quad |y_0| > r, \quad (23)$$

где

$$v'(y) = \int_{S(y)} \hat{P}_r(y, x) dv(x), \quad |y| > r,$$

заряд на $|y| \geq r$.

Аналогия функции $\check{P}_r(y, x)$ с ядром Пуассона наиболее полно обнаруживается в следующей лемме.

Лемма 8. Пусть $f(x)$ любая измеримая функция в S_r , для которой

$$\int_{|x| < r} \frac{|f(x)|}{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx < \infty.$$

Положим

$$\check{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq r, \\ \int_{|y| < r} f(y) \check{P}_r(y, x) dy, & |x| > r. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда $\check{f}(x)$ будет α -гармонической функцией в области $|x| > r$.

Доказательство. Функция $\check{f}(x)$ очевидно непрерывна при $|x| > r$, и при $x \rightarrow \infty$

$$\check{f}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{p-\alpha}}\right), \quad (25)$$

так что условие (13) выполнено.

Покажем, что для любого δ , $0 < \delta < |x| - r$,

$$\check{f}(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}), \quad (26)$$

откуда и будет следовать справедливость леммы.

Пусть сначала

$$f(x) = U_{\alpha}^{\nu}(x),$$

где заряд ν сосредоточен в шаре $|x| < r$. Интегрируя равенство (19) с $d\nu(y_0)$, получим, что при $|x| > r$ справедливо равенство

$$U_{\alpha}^{\nu}(x) = \int_{|y| < r} U_{\alpha}^{\nu}(y) \check{P}_r(y, x) dy.$$

Иначе говоря,

$$\check{U}_{\alpha}^{\nu}(x) \equiv U_{\alpha}^{\nu}(x).$$

Но, как мы видели в $n^{\circ} 4$, $U_{\alpha}^{\nu}(x)$ является α -гармонической функцией вне $S(\nu)$ и, в частности, при $|x| > r$.

Пусть теперь функция $f(x)$, заданная в шаре $|x| \leq r$, имеет там две непрерывных производных. Сохраняя непрерывность этих производных, ее можно продолжить до финитной функции $f_1(x)$, определенной во всем R^n . По следствию из леммы 5

$$f_1(x) = U_{\alpha}^{\psi}(x), \quad x \in R^n.$$

Пусть ψ_1 — часть заряда ψ вне сферы S_r . Выметая согласно (20) ψ_1 на сферу S_r , получим новый заряд ψ'_1 . Положив $\nu = \psi - \psi_1 + \psi'_1$, получим заряд, сосредоточенный в шаре $|x| < r$, причем

$$f(x) = U_{\alpha}^{\nu}(x), \quad |x| < r.$$

Как мы видели, $\check{f}(x)$ будет в этом случае α -гармонической функцией в области $|x| > r$.

Пусть, наконец, $f(x)$ любая функция, удовлетворяющая условиям леммы. Существует последовательность функций $f_n(x)$, имеющих две непрерывных производных и сходящаяся к $f(x)$ в пространстве $L(S_r)$ с весом $(r^2 - |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$, т. е. такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| < r} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx = 0. \quad (27)$$

По доказанному при любом n $f_n(x)$ удовлетворяет условию (26)

$$\check{f}_n(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\check{f}_n), \quad |x| > r.$$

Но из (27) следует, во-первых, что при всяком фиксированном x , $|x| > r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{f}_n(x) = \check{f}(x), \quad (28)$$

а во-вторых, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}_n) = \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}). \quad (29)$$

Первое достаточно очевидно; докажем второе.

Имеем (см. (24))

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha x}^{(6)}(\check{f}_n) &= \int \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) \check{f}_n(y) dy = \int_{|y| < r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) f_n(y) dy + \\ &+ \int_{|y| > r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) dy \int_{|z| < r} f_n(z) \check{P}_r(z, y) dz = \int_{|y| < r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) f_n(y) dy + \\ &+ \int_{|z| < r} f_n(z) dz \int_{|y| > r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) \check{P}_r(z, y) dy.\end{aligned}$$

Так как функция $\varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y)$ ограничена в шаре $|y| < r$, то первый интеграл стремится, в силу (27), к $\int_{|y| < r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) f(y) dy$. Далее,

$$\begin{aligned}&\int_{|y| > r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) \check{P}_r(z, y) dy = \\ &= \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{-\frac{p}{2}-1} \sin \frac{\pi \alpha}{2} (r^2 - |z|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{|y| > r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) (|y|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p}.\end{aligned}$$

При любом $\eta > 0$ и $|z| < r$

$$\int_{|y| > r+\eta} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) (|y|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p} = O(1).$$

Взяв η так, чтобы сферы $|y| < r + \eta$ и $|x-y| < \delta$ не пересекались, и учитывая ограниченность $\varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y)$ в кольце $r < |y| < r + \eta$, получим

$$\begin{aligned}&\int_{r < |y| < r+\eta} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) (|y|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p} < \\ &< Q \int_{r < |y| < r+\eta} (|y|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dy}{|z-y|^p} = O(1),\end{aligned}$$

так как последний интеграл равномерно сходится при $|z| \leq r$.

Итак,

$$\int_{|z| < r} f_n(z) dz \int_{|y| > r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) P_r(z, y) dy = \int_{|z| < r} f_n(z) \cdot O\left((r^2 - |z|^2)^{-\frac{2}{\alpha}}\right) dz$$

и в силу (27), этот интеграл стремится к

$$\int_{|z| < r} f(z) dz \int_{|y| > r} \varepsilon_{\alpha}^{(6)}(x-y) \check{P}_r(z, y) dy.$$

Тем самым доказано (29). Вместе с (28) это дает (26), и лемма доказана.

Аналогичный результат может быть доказан и для внутренности сферы S_r : функция

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \geq r \\ \int_{|y| > r} f(y) \hat{P}_r(y, x) dy, & |x| < r, \end{cases} \quad (30)$$

будет при естественных ограничениях на функцию $f(x)$, заданную вне S_r , α -гармонической внутри S_r .

8. Вернемся к α -супергармоническим функциям и докажем еще несколько их свойств.

Лемма 9. Пусть $f(x)$ — α -супергармоническая функция в R^p , а $\check{f}(x)$ и $\hat{f}(x)$ определены равенствами (24) и, соответственно, (30). Тогда

$$\check{f}(x) \leq f(x); \hat{f}(x) \leq f(x). \quad (31)$$

Доказательство. Если $f(x)$ непрерывна, то (31) является следствием леммы 8 и теоремы 1*.

В общем случае рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = f * m^{(\frac{1}{n})}(x) \quad **$$

непрерывных функций, которые, согласно свойству (IV), п. 4, будут α -супергармоничны. Как только что указывалось,

$$\check{f}_n(x) \leq f_n(x), \hat{f}_n(x) \leq f_n(x). \quad (31')$$

При $n \rightarrow \infty$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду в R^p и, кроме того,

$$\int_{|x| < r} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{(r^2 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx \rightarrow 0, \quad \int_{|x| < r} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|x|^p (|x|^2 - r^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx \rightarrow 0.$$

Из последних соотношений вытекает, что

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x) &\rightarrow \hat{f}(x), \quad |x| < r, \\ \check{f}_n(x) &\rightarrow \check{f}(x), \quad |x| > r. \end{aligned}$$

Переходя в (31') к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим, что (30) имеют место почти всюду в R^p . Для того чтобы доказать их справедливость в любой точке R^p , достаточно подвергнуть проверке только точки $|x| > r$ для неравенства $\check{f}(x) \leq f(x)$ и только точки $|x| < r$ для неравенства $\hat{f}(x) \leq f(x)$. Так как из доказанного вытекает справедливость неравенств

$$\varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\hat{f}) \leq \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f); \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\check{f}) \leq \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f),$$

а в указанных точках функции $\check{f}(x)$, соответственно $\hat{f}(x)$ непрерывны, то при $r \rightarrow 0$ в силу свойства (i), п. 4, получим

$$\check{f}(x) \leq f(x), \quad \hat{f}(x) \leq f(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $f(x)$ α -супергармоническая функция, то при фиксированном x

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)} * f(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(f)$$

есть невозрастающая функция переменной r .

В самом деле, пусть $r_1 < r$. Будем, для простоты записи, считать, что $x = 0$. Построив по (30) функцию $\hat{f}(x)$, α -гармоническую в шаре $|x| < r$, и пользуясь (31), получим

$$\hat{f}(0) = \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(f) = \varepsilon_{\alpha}^{(r_1)}(\hat{f}) \leq \varepsilon_{\alpha}^{(r_1)}(f).$$

* В случае $\check{f}(x)$ теорему 1 следует применять к области $r < |x| < \infty$.

** $m^{(r)}$ обозначает меру, полученную равномерным распределением единичной массы по шару радиуса r с центром в нуле.

Для последующего важно заменить свойство с) в определении α -супергармонической функции более слабым по форме требованием:

с') $f(x)$ удовлетворяет условию (13), и для любой точки $x \in R^p$ найдется такое $r(x)$, что для всякого r , $0 < r < r(x)$

$$\varepsilon_a^{(r)} \circ f(x) = \varepsilon_{ax}^{(r)}(f) \leq f(x).$$

Обозначим для краткости σ_a класс α -супергармонических функций, а σ'_a — класс функций, удовлетворяющих условиям а), в) п. 4 и только что введенному условию с').

Включение $\sigma_a \subset \sigma'_a$ очевидно. Но на самом деле $\sigma_a \equiv \sigma'_a$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что

1) функции из σ'_a подчиняются принципу α -гармонической миноранты (теорема 1);

2) функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям а), в), (13), п. 4 и принципу α -гармонической миноранты, входит в σ_a .

Утверждение 1) вытекает из того, что при доказательстве теоремы 1 было использовано именно свойство с'), а не с).

Докажем 2). Пусть $\{f_n(x)\}$ неубывающая последовательность непрерывных в R^p функций, сходящаяся к $f(x)$. Тогда функции $\hat{f}_n(x)$ будут также непрерывны в R^p и α -гармоничны внутри сферы S_r . Так как при $|x| \geq r$

$$\hat{f}_n(x) = f_n(x) \leq f(x),$$

то применяя принцип α -гармонической миноранты, получим

$$\hat{f}_n(0) = \varepsilon_a^{(r)}(f_n) \leq f(0),$$

и отсюда в силу монотонной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$

$$\varepsilon_a^{(r)}(f) \leq f(0).$$

Но $r > 0$ любое, и точка 0 может быть, конечно, заменена любой точкой R^p . Следовательно, $f(x)$ α -супергармонична.

Итак, доказано, что

$$\sigma'_a \equiv \sigma_a.$$

Это обстоятельство позволит весьма просто доказать следующее утверждение.

Лемма 10. Если $f(x)$ α -супергармоническая функция, то функции $\hat{f}(x)$ и $\check{f}(x)$ также α -супергармоничны.

Доказательство. Будем для определенности рассматривать функцию $\check{f}(x)$. Покажем, что она полунепрерывна снизу. В проверке нуждаются только точки на сфере $|x| = r$. Следовательно, нужно показать, что если $x_n \rightarrow x$, $|x_n| > r$, $|x| = r$, то

$$\check{f}(x) = f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \check{f}(x_n).$$

Но это легко следует из формулы

$$\check{f}(x_n) = \int_{|y| < r} f(y) \check{P}_r(y, x_n) dy,$$

полунепрерывности $f(y)$ и того, что при $x_n \rightarrow x$

$$\check{P}_r(y, x_n) \rightarrow \varepsilon_x.$$

Проверим теперь условие $c')$. В точках x , $|x| \leq r$, выполняется даже более сильное условие $c)$, ибо при любом $\delta > 0$ в силу (31)

$$\check{f}(x) = f(x) \geq \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(f) \geq \varepsilon_{\alpha x}^{(\delta)}(\check{f}).$$

В точках же x , $|x| > r$, функция $\check{f}(x)$ в силу леммы 8 будет α -гармонической, т. е. при $r < r(x)$

$$\check{f}(x) = \varepsilon_{\alpha x}^{(r)}(\check{f}).$$

Следовательно, условие $c')$ выполнено всюду, и $\check{f}(x) \in \sigma'_\alpha \equiv \sigma_\alpha$. Лемма доказана.

§ 5. Теорема М. Рисса о представлении α -супергармонических функций

Основная теорема М. Рисса состоит в следующем.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ α -супергармоническая функция в R^p , ($p \geq 3$). Тогда имеет место единственное представление вида

$$f(x) = U_\alpha^\mu(x) + A, \quad (32)$$

где $\mu \in \mathbb{M}^+$, а постоянная A неотрицательна.

При этом, если $f(x)$ α -гармонична в G , то $\mu(G) = 0$.

Основой доказательства теоремы 4 являются следующие леммы.

Лемма II. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < p$ и $f(x)$ — локально суммируемая функция, удовлетворяющая условию

$$f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{p-\beta}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Тогда почти всюду в R^p

$$f(x) = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f). \quad (34)$$

Доказательство. Следует доказать, что равенство

$$(k_\alpha * k_{-\alpha}) * f = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f) \quad (34')$$

имеет место как равенство обобщенных функций. Для этого нужно рассмотреть пространства $E_1, E_2, E_3, E_{12}, E_{23}, E_{123}$, на которых можно определить обобщенные функции $k_\alpha, k_{-\alpha}, f, k_\alpha \times k_{-\alpha}, k_{-\alpha} \times f, k_\alpha \times k_{-\alpha} \times f$ соответственно и проверить для них выполнение условий а), в), с), d) и а'), б'), с'), d'). Нетрудно видеть, что эти пространства можно выбрать следующим образом:

(i) E_1 состоит из непрерывных функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^{p-\alpha}} dx < \infty.$$

При этом $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в E_1 , если

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|}{|x|^{p-\alpha}} dx \rightarrow 0.$$

E_3 определяется точно так же с заменой α на β .

(ii) E_2 состоит из непрерывных функций, имеющих в окрестности

нуля две непрерывных производных и удовлетворяющих условию

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^{p+\alpha}} dx < \infty,$$

При этом $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ в E_2 , если

$$\int_{R^p} \frac{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|}{1+|x|^{p+\alpha}} dx \rightarrow 0$$

и

$$\partial^k \varphi_n \rightarrow \partial^k \varphi, \quad |k| \leq 2$$

равномерно в некоторой окрестности нуля.

(iii) E_{12} состоит из функций $\varphi(x, y)$, имеющих две непрерывные производные в $R^p \times R^p$ и удовлетворяющих условию

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi(x, y)|}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})} dx dy < \infty, \quad |k| \leq 2.$$

При этом $\varphi_n(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ в E_{12} , если

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi_n(x, y) - \partial^k \varphi(x, y)|}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})} dx dy \rightarrow 0, \quad |k| \leq 2,$$

и

$$\partial^k \varphi_n(x, y) \rightarrow \partial^k \varphi(x, y), \quad |k| \leq 2,$$

равномерно в некоторой окрестности нуля в $R^p \times R^p$.

(iv) E_{23} состоит из функций $\varphi(y, z)$, имеющих две непрерывные производные в $R^p \times R^p$ и удовлетворяющих условию

$$\iint_{R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi(y, z)|}{(1+|y|^{p+\alpha})|z|^{p-\beta}} dy dz < \infty, \quad |k| \leq 2.$$

Сходимость в E_{23} определяется так же, как (iii).

(v) E_{123} состоит из функций $\varphi(x, y, z)$ имеющих две непрерывные производные в $R^p \times R^p \times R^p$ и удовлетворяющих условию

$$\iiint_{R^p \times R^p \times R^p} \frac{|\partial^k \varphi(x, y, z)|}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})|z|^{p-\beta}} dx dy dz < \infty, \quad |k| \leq 2.$$

Сходимость в E_{123} определяется таким же способом, как в (iii).

Проверка условий а), в), с) d); а'), б'), с') достаточно проста, и мы ее опустим. Проверим d'). Пусть $\varphi(x) \in D$, и нам нужно убедиться в том, что $\varphi(x+y+z) \in E_{123}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{R^p} \frac{|\varphi(x+y+z)| dx}{|x|^{p-\alpha}} &= \int_{S(\varphi)} \frac{|\varphi(\xi)| d\xi}{|\xi-y-z|^{p-\alpha}} = O\left(\frac{1}{1+|y+z|^{p-\alpha}}\right), \\ \iint_{R^p \times R^p} \frac{|\varphi(x+y+z)| dx dy}{|x|^{p-\alpha}(1+|y|^{p+\alpha})} &= \int_{R^p} O\left(\frac{1}{1+|y+z|^{p-\alpha}}\right) \frac{dy}{1+|y|^{p+\alpha}} = \\ &= O\left(\frac{1}{1+|z|^{p-\alpha}}\right). \end{aligned}$$

$$\iiint_{R^p \times R^p \times R^p} \frac{|\varphi(x+y+z)| dx dy dz}{|x|^{p-\alpha} (1+|y|^{p+\alpha}) |z|^{p-\beta}} = \int_{R^p} O\left(\frac{1}{1+|z|^{2p-\alpha-\beta}}\right) dz.$$

Следовательно, при условии леммы этот интеграл конечен. Аналогично проверяются производные $\partial^k \varphi(x+y+z)$, $|k| \leq 2$, и непрерывность отображения $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+y+z)$, и, таким образом, условие d') выполнено.

Итак, равенство (34') имеет место и лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $f(x)$ α -супергармоническая функция, удовлетворяющая при $x \rightarrow \infty$ условию

$$f(x) = \frac{a}{|x|^{p-\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{p-\beta}}\right), \quad \beta < p - \alpha.$$

Тогда

$$f(x) = k_\alpha * \mu = U_\alpha^\mu(x), \quad (35)$$

где $\mu = k_{-\alpha} * f$.

Доказательство. Положим

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a}{|x|^{p-\alpha}}.$$

Эта функция удовлетворяет условию (33), и по лемме 11 почти всюду

$$f_1(x) = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f_1).$$

Но

$$k_{-\alpha} * f_1 = k_{-\alpha} * f - a_1 \varepsilon,$$

где $a_1 = \frac{a}{A(p, \alpha)}$. Следовательно,

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a}{|x|^{p-\alpha}} = k_\alpha * (k_{-\alpha} * f) - a_1 k_\alpha$$

или

$$f(x) = k_\alpha * \mu = U_\alpha^\mu(x)$$

почти всюду. Но тогда, в силу свойства (i), п. 4 и α -супергармоничности потенциала $U_\alpha^\mu(x)$ мы получаем равенство (35) во всех точках R^p .

Теперь мы приведем

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию $f_n(x)$ совпадающую с $\tilde{f}(x)$, построенной для $|x| > n$. Согласно лемме 10 она α -супергармонична. Кроме того, при $x \rightarrow \infty$

$$\tilde{P}_r(y, x) = \frac{c_1(y)}{|x|^{p-\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{p+1-\alpha}}\right),$$

что нетрудно получить из (18) разложением правой части в ряд. Следовательно, согласно (24)

$$f_n(x) = \frac{a}{|x|^{p-\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{p+1-\alpha}}\right),$$

и так как $\alpha < 2$, то $2\alpha - 1 < p$, и по лемме 12

$$f_n(x) = U_\alpha^{\mu_n}(x),$$

где $\mu_n = h_{-\alpha} * f_n$ есть финитная мера, сосредоточенная в шаре $|x| \leq n$. Покажем, что

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x); \quad (36)$$

тогда в силу очевидного соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

результат будет вытекать из теоремы 3.

Так как $f_{n+1}(x)$ α -супергармоническая, а $f_n(x)$ непрерывна и α -гармонична на множестве $|x| > n+1$, то в силу теоремы 1 неравенство (36) достаточно проверить при $|x| \leq n+1$ и на бесконечности.

Но при $|x| \leq n$ (36) превращается в равенство, ибо $f_n(x) = f_{n+1}(x) = f(x)$; при $n < |x| \leq n+1$ оно следует из (31), так как в этой области $f_{n+1}(x) = f(x)$, а на бесконечности обе функции обращаются в нуль. Следовательно, неравенство (36), а вместе с тем и теорема 4 в части существования представления (32) доказаны.

Далее, нетрудно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(U_{\alpha}^{\mu}) = 0.$$

Поэтому величина

$$A = \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_{\alpha}^{(r)}(f)$$

представляет собой именно ту константу, которая фигурирует в представлении (32). Это доказывает единственность представления (32).

Последнее утверждение теоремы легко следует из конструкции меры μ .

§ 6. Обобщенная задача Дирихле

10. Мы используем метод, изложенный для классического случая $\alpha = 2$ в [6].

Пусть G — произвольное открытое множество, для которого $\overline{CG} \neq \emptyset$. Обозначим $\mathfrak{E}_{CG}$ пространство всех непрерывных на замкнутом множестве $\overline{CG}$ функций, стремящихся на бесконечности к нулю (если ∞ принадлежит $\overline{CG}$). Метрика в $\mathfrak{E}_{CG}$ предполагается равномерной. Пусть далее $\mathfrak{H}_{CG} \subset L_{CG}$ линейное многообразие функций, которые можно продолжить до функций, непрерывных во всем R^p и α -гармонических в G . Будем говорить, что для функций $f(x) \in \mathfrak{H}_{CG}$ проблема Дирихле разрешима, а упомянутое продолжение $h_f(x)$ функции $f(x)$ будем называть решением проблемы Дирихле для $f(x)$.

Из следующей простой леммы вытекает единственность такого решения, а также замкнутость $\mathfrak{H}_{CG}$ в $\mathfrak{E}_{CG}$.

Лемма 13. Пусть $h(x) \not\equiv 0$ непрерывна в R^p , α -гармоническая в G и стремится к нулю на бесконечности. Тогда для любой точки $x \in G$

$$|h(x)| < \max_{R^p} |h(y)| \quad (37)$$

и, следовательно,

$$\max_{R^p} |h(y)| = \max_{CG} |h(y)|.$$

Доказательство. Предположим, что

$$|h(x_0)| = \max_{R^p} |h(y)|, \quad x_0 \in G,$$

и для определенности допустим, что $h(x_0) > 0$. Тогда для всех точек $y \in R^p$ имеем $h(y) \leq h(x_0)$. С другой стороны, согласно (16) при достаточно малом $r > 0$

$$h(x_0) = \varepsilon_{ax_0}^{(r)}(h).$$

Отсюда, учитывая непрерывность $h(y)$, легко получим, что $h(y) \equiv h(x_0)$, что невозможно, ибо $h(y) \rightarrow 0$ на бесконечности.

Теорема 5. Пусть ν — произвольный конечный заряд в R^p . Существует заряд $\Delta\nu$ с носителем на CG такой, что для любой функции $f(x) \in \mathfrak{H}_{CG}$

$$\int_{R^p} h_f(x) d\nu(x) = \int_{CG} f(x) d\Delta\nu(x) \quad (38)$$

и

$$\text{var } \Delta\nu \leq \text{var } \nu.$$

Доказательство. В силу леммы 13 выражение

$$F[f] = \int h_f(x) d\nu(x)$$

представляет собой линейный непрерывный функционал в пространстве $\mathfrak{H}_{CG}$. Его можно продолжить с сохранением нормы на $\mathfrak{C}_{CG}$ и после этого представить в виде

$$F[f] = \int_{CG} f(x) d\Delta\nu(x).$$

Замечания. 1) Заряд $\Delta\nu$ будем называть ассоциированным с ν .

2) Если μ мера, то, применяя теорему о продолжении позитивного функционала, получим, что $\Delta\mu$ также является мерой.

3) Для единственности $\Delta\nu$ при любом ν необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{H}_{CG} \equiv \mathfrak{C}_{CG}$, т. е. чтобы задача Дирихле была разрешима для любой непрерывной на CG функции, стремящейся к нулю на бесконечности. В этом случае будем множество G называть регулярным.

Теорема 6. Для любой точки $y \in \bar{CG}$

$$U_x^\Delta(y) = U_x^\nu(y). \quad (39)$$

Доказательство. Достаточно проверить это равенство, предполагая ν мерой.

Рассмотрим шар T_r с центром в y радиуса r , настолько малого, что $T_r \subset \bar{CG}$. Если $m^{(r)}$ есть единичная масса, равномерно распределенная на T_r , то нетрудно видеть, что

$$U_x^{m^{(r)}}(x) \in \mathfrak{H}_{CG}.$$

В таком случае согласно (38)

$$\int U_x^{m^{(r)}}(x) d\nu(x) = \int U_x^{m^{(r)}}(x) d\Delta\nu(x)$$

или

$$\int U_x^\nu(x) dm^{(r)}(x) = \int U_x^{\Delta\nu}(x) dm^{(r)}(x).$$

Отсюда при $r \rightarrow 0$ получаем требуемое.

Следствие. Предположим, что выполнено следующее условие Пуанкаре:

(P) Каждая точка $x \in \partial G$ является вершиной конуса вращения, лежащего в некоторой окрестности x в CG .

Тогда равенство (39) имеет место во всех точках ∂G .

Таким образом, в последнем случае, ассоциированный заряд Δv решает проблему выметания заряда v на CG .

Если потенциал $U_\alpha^\nu(x)$ ограничен на CG , то Δv будет определен однозначно.

11. В этом пункте мы будем предполагать, что проблема выметания на CG разрешима (например, выполнено условие (P)).

Пусть $y \in G$; образуем функцию Грина

$$G(x, y) = U_\alpha^y(x) - U_\alpha^{\Delta y}(x).$$

Нетрудно, пользуясь α -гармоничностью $G(x, y)$ в $G \setminus \{y\}$ и рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, показать, что $G(x, y) > 0$, $x \in G$. Легко также проверить симметрию функции Грина:

$$G(x, y) = G(y, x).$$

Лемма 14. Пусть $y \in G$ и $y \rightarrow y_0 \in \partial G$. Тогда имеет место слабая сходимость

$$\Delta \varepsilon_y \rightarrow \varepsilon_{y_0}.$$

Доказательство. Достаточно проверить соотношение

$$\Delta \varepsilon_y(\varphi) \rightarrow \varphi(y_0)$$

для всех финитных неограниченно дифференцируемых функций. Согласно следствию из леммы 5 такая функция $\varphi(x)$ допускает представление

$$\varphi(x) = \int_{R^p} k_\alpha(x-z) \psi(z) dz,$$

где $\psi(z) = O(|z|^{-\alpha})$. В таком случае,

$$\begin{aligned} \varphi(y_0) - \Delta \varepsilon_y(\varphi) &= \int_{R^p} \psi(z) [k_\alpha(y_0-z) - U_\alpha^{\Delta y}(z)] dz = \\ &= \int_{R^p} \psi(z) [k_\alpha(y-z) - U_\alpha^{\Delta y}(z)] dz + \int_{R^p} \psi(z) [k_\alpha(y_0-z) - k_\alpha(y-z)] dz. \end{aligned}$$

При $y \rightarrow y_0$ второй интеграл стремится к нулю. Первый интеграл перепишем в виде

$$\int_G \psi(z) [k_\alpha(y-z) - U_\alpha^{\Delta y}(z)] dz = \int_G \psi(z) G(y, z) dz,$$

и так как

$$\left| \int_G \psi(z) G(y, z) dz \right| \leq \max_G |\psi(z)| \int_G G(y, z) dz,$$

то нужно лишь показать, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_G G(y, z) dz = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_G G(y, z) dz &= \int_{|y_0 - z| < \delta} G(y, z) dz + \int_{|y_0 - z| > \delta} G(y, z) dz < \\ &< \int_{|y_0 - z| < \delta} k_\alpha(y - z) dz + \int_{|y_0 - z| > \delta} G(y, z) dz. \end{aligned}$$

при достаточно малом δ первый интеграл делается сколь угодно малым равномерно по y , между тем как во втором интеграле при

$|y - y_0| < \frac{1}{2}\delta$ имеем $G(y, z) < \left(\frac{2}{\delta}\right)^{p-\alpha}$, так что можно сделать предельный переход $y \rightarrow y_0$ под знаком интеграла и получить нуль.

Замечание. Если $y_0 \in G$, то при $y \rightarrow y_0$ легко устанавливается слабая сходимость

$$A\varepsilon_y \rightarrow A\varepsilon_{y_0}.$$

Теорема 7. Пусть для множества G разрешима проблема выметания на CG . Тогда G регулярно, т. е. для любой функции $f(x)$ из $\mathfrak{E}_{CG}$ обобщенная проблема Дирихле разрешима, и ее решение дается формулой

$$h_f(y) = \int_{CG} f(x) dA\varepsilon_y(x); \quad y \in G. \quad (40)$$

Доказательство. Из леммы 14 и замечания к ней следует непрерывность $h_f(y)$.

Неравенство

$$|h_f(y) - h_g(y)| \leq \int_{CG} |f(x) - g(x)| dA\varepsilon_y(x) \leq \max_{CG} |f(x) - g(x)|$$

показывает, что из равномерной на CG сходимости $f_n(x) \rightarrow f(x)$ следует равномерная во всем пространстве сходимость $h_{f_n}(y) \rightarrow h_f(y)$. Поэтому α -гармоничность $h_f(y)$ в G достаточно установить для какого-либо класса функций, плотного в $\mathfrak{E}_{CG}$. В качестве такого класса мы возьмем множество всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций в R^p (точнее, их сужения на CG). Если $\varphi(x)$ такая функция, то согласно следствию из леммы 5 она допускает представление

$$\varphi(x) = U_\alpha^\nu(x).$$

Пусть ν_1 — часть ν в области G . Проведя выметание ν_1 на CG , образуем заряд

$$\nu_2 = (\nu - \nu_1) + A\nu_1,$$

сосредоточенный на CG . Очевидно, на CG

$$\varphi(x) = U_\alpha^{\nu_2}(x).$$

Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} h_\varphi(y) &= \int_{CG} U_\alpha^{\nu_2}(x) dA\varepsilon_y(x) = \\ &= \int_{CG} U_\alpha^{A\varepsilon_y}(x) d\nu_2(x) = \int_{CG} k_\alpha(x - y) d\nu_2(x) = U_\alpha^{\nu_2}(y), \end{aligned}$$

и это показывает, что $h_\varphi(y)$ α -гармонична в G .

Замечание. Можно показать, что если $\overline{CG}$ есть компакт, то $h_f(y)$, определенная формулой (40), стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$.

12. Если G есть шар $|x| < r$, то мера Λ_{ε_y} , ($|y| < r$), в силу упомянутой в конце п° 10 единственности, совпадает с ядром Пуассона $\hat{P}_r(x, y)$.

Предположим теперь, что G — какое либо ограниченное множество, для которого проблема выметания на CG разрешима. Пусть T — шар $|x| < r$, содержащий G . Тогда для любой точки x , $|x| > r$,

$$\Lambda_{\varepsilon_y}(x) \leq \hat{P}_r(x, y),$$

так как $\hat{P}_r(x, y)$ можно (в силу того же замечания о единственности) получить из Λ_{ε_y} , выметая часть Λ_{ε_y} в T на CT . Это показывает, что при $x \rightarrow \infty$

$$\Lambda_{\varepsilon_y}(x) = O(|x|^{-p-\alpha}).$$

С помощью теоремы 7 можно получить следующий более общий результат.

Теорема 7'. Пусть для ограниченного множества G проблема выметания на CG разрешима. Тогда для любой функции $f(x)$, непрерывной на CG и удовлетворяющей условию

$$\int_{CG} \frac{|f(x)|}{1 + |x|^{p+\alpha}} dx < \infty, \quad (41)$$

обобщенная задача Дирихле разрешима, и решение ее дается формулой (40).

Справедливо также предложение, обратное теореме 7. А именно, если G регулярно, то проблема выметания на CG разрешима.

Теорема 8. Пусть $f(x)$ — α -супергармоническая функция, и G — регулярное множество с компактной границей. Тогда для любой конечной меры μ имеем

$$\int f(x) d\mu(x) \geq \int_{CG} f(x) d\Lambda_{\mu}(x). \quad (42)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на CG . Тогда, в силу теоремы 7', существует решение $h_f(x)$. Внутри G , согласно теореме 1* имеет место неравенство $h_f(x) \leq f(x)$, и поэтому, в силу (38)

$$\int f(x) d\mu(x) \geq \int h_f(x) d\mu(x) = \int_{CG} f(x) d\Lambda_{\mu}(x).$$

В общем случае $f(x)$ есть предел неубывающей последовательности (см. (IV), п° 4 и следствие из леммы 9).

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n}\right)_{\varepsilon_{ax}}(f)$$

непрерывных α -супергармонических функций, и неравенство

$$\int f_n(x) d\mu(x) \geq \int_{CG} f_n(x) d\Lambda_{\mu}(x)$$

после предельного перехода $n \rightarrow \infty$ дает (42).

* Если G — бесконечная область, то теорему 1 следует применить к $G - \{\infty\}$ и учесть замечание к теореме 7.

Следствие. Внутри G

$$U_{\alpha}^{\Delta\mu}(x) \leq U_{\alpha}^{\mu}(x). \quad (43)$$

Теперь мы можем с помощью указанной ниже аппроксимационной техники произвести выметание на произвольное замкнутое множество $F \subset R^n$.

Всякое замкнутое множество F можно представить, как предел убывающей последовательности замкнутых множеств $\{F_k\}_1^{\infty}$ с компактными границами и с регулярным дополнением. Это можно сделать, например, следующим образом. Пусть $S_k(x)$ есть открытый шар с центром в x радиуса k^{-1} , а $T_k = \{x : |x| \geq k\}$. Тогда можно положить

$$F_k = T_k \cup \left(\bigcup_{x \in F} S_k(x) \right).$$

Опишем кратко дальнейшую конструкцию. Если μ произвольная конечная мера, то мы можем произвести выметание части μ из CF_1 на F_1 , оставляя часть μ на F_1 без изменения. Обозначим μ_1 полученную меру. Затем мы переходим к μ_1 и F_2 и продолжаем этот процесс. В силу (43) потенциалы $\{U_{\alpha}^{\mu_k}(x)\}$ образуют невозрастающую последовательность, и по теореме Брело (см. [7]) имеет место слабая сходимость $\mu_k \rightarrow \Delta\mu$, причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_{\alpha}^{\mu_k}(x) = U_{\alpha}^{\Delta\mu}(x)$$

квази всюду, т. е. всюду, кроме, возможно, множества нулевой α -емкости.

Полученная нами мера $\Delta\mu$ обладает следующими свойствами:

$$(i) U_{\alpha}^{\Delta\mu}(x) = U_{\alpha}^{\mu}(x) \text{ квази всюду на } F,$$

$$(ii) U_{\alpha}^{\Delta\mu}(x) \leq U_{\alpha}^{\mu}(x) \text{ всюду,}$$

(iii) мера $\Delta(\mu - \mu_F)$, где μ_F — часть μ на F , C -абсолютно непрерывна, т. е. равна нулю на любом множестве нулевой α -емкости.

Эти свойства полностью характеризуют меру $\Delta\mu$, которая, таким образом, не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{F_k\}$.

Из (iii) следует, что если F имеет нулевую α -емкость, то

$$\Delta(\mu - \mu_F) \equiv 0.$$

Теперь для произвольного открытого множества G мы определяем функцию Грина формулой

$$G(x, y) = U_{\alpha}^{\varepsilon_y}(x) - U_{\alpha}^{\Delta\varepsilon_y}(x), \quad y \in G,$$

(если CG имеет нулевую α -емкость, то $G(x, y) = k_{\alpha}(x - y)$).

Те точки $x \in F$, для которых при некотором $y \in G$ $G(x, y) > 0$, называются иррегулярными точками F . Их множество имеет нулевую α -емкость.

Формула (40) определяет теперь для любой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (41), α -гармоническую функцию $h_f(y)$, которая во всех точках oG , кроме иррегулярных точек CG , непрерывна и равна $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Riesz. Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels. Acta Sci. Szeged, 9 (1938), 1—42.
2. O. Frostman. Les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire. Ark. Mat. Astr. Fys., 26A (1939).
3. J. Deny. Familles fondamentales. Noyaux associés. Ann. Inst. Fourier, 3 (1952), 73—101.
4. L. Schwarz. Théorie des distribution, t. I. II. Paris, 1950—51.
5. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1958.
6. Н. С. Ландкоф. Некоторые применения функционального анализа в теории гармонических функций. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 1 (1965), 182—193.
7. M. Brelot, G. Choquet. Le théorème de convergence en théorie du potentiel. J. Madras Univ., B 27, № 1, (1957), 277—286.
8. M. Brelot. Lectures on potential theory. Bombay, 1960.