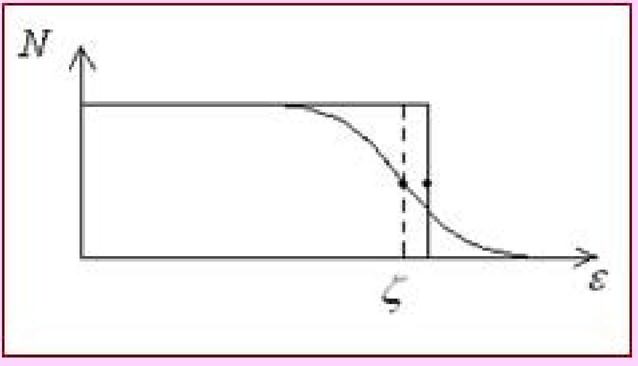
Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет
имени В.Н.Каразина

К 200-летию Харьковского университета

В.В.Ульянов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

Часть первая



Харьков 2011

К 65-летию кафедры теоретической физики
имени академика И.М.Лифшица

В.В.Ульянов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

I

Харьков 2011

УДК 530.145
ББК 22.314я73-1
У 51

У 51 **Ульянов В.В**. Конспект лекций по квантовой статистике. Ч.I/ В.В.Ульянов. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.

Эти лекции составлены по конспекту одного из студентов, слушавших прочитанный автором курс квантовой статистики.

Пособие продолжает серию изданий, приуроченную к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

Посвящается Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики, известному физику-теоретику, воспитавшему многих выдающихся специалистов.

Предназначено для преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

Рецензент –
доктор физ.-мат. наук, профессор А.М.Ермолаев.

Издается по решению кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица от 12 октября 2010 года (протокол № 22)

УДК 530.145
ББК 22.314я73-1

Процедура объяснения макроскопических явлений путем выяснения характера движения отдельных атомных частиц требует развития специального математического аппарата, удобного для исследования поведения гигантских коллективов частиц. Такой аппарат существует и носит название ***статистической физики****.*

М.И.Каганов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однажды, принимая экзамен по читаемому спецкурсу, я заметил у одного из студентов достаточно аккуратный конспект моих лекций.

Я попросил у него этот конспект и переписал его, так как сам конспектов своих лекций не вел, о чем сожалел впоследствии.

И вот теперь в недрах своего архива я обнаружил тетрадку с этим конспектом.

Таким образом, эта часть лекций составлена по конспекту одного из студентов педагогического отделения физического факультета, слушавших прочитанный автором курс квантовой статистики в середине 1970-х годов. Ее подготовил к изданию мой сын Николай, сумевший расшифровать мои весьма неразборчивые каракули и набравший текст, формулы и рисунки на компьютере. Я очень благодарен ему за это.

Умышленно оставляю все в том виде, какой имели эти наброски в то время, лишь введя некоторые цитаты из книг, изданных в разные годы. Я не собирался их публиковать, но сейчас показалось, что они могут служить документальной страничкой истории нашей кафедры.

Посвящается Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики Харьковского университета, известному физику-теоретику. Лев Элеазарович в течение многих лет читал лекции по различным разделам квантовой теории физикам и радиофизикам нашего Университета. Пусть эта небольшая книжечка записей лекций послужит выражением нашей признательности этому человеку, отдавшему лучшие годы своей жизни служению благородному делу университетского образования.

Издание приурочено к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

Пособие предназначено для преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

В.В.Ульянов

<u>Идеальные газы</u>

Основные формулы:

$$Z=\sum_N e^{\frac{\mu N}{T}}\sum_n e^{-\frac{E_{nN}}{T}} \quad , \qquad E_n=\mathcal{N}_k\varepsilon_k \ ,$$

$$Z_k=\sum_{\mathcal{N}_k=0} e^{\frac{\mu\mathcal{N}_k}{T}} e^{-\frac{\varepsilon_k\mathcal{N}_k}{T}}=\begin{cases}1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}\\ \dfrac{1}{1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}}\end{cases}=(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}})^{\pm1} \qquad \text{+ Ферми}$$

$$(\mu<\varepsilon_{\min}) \qquad \text{- Бозе}$$

$$\Omega_k=-T\ln Z_k=\mp T\ln(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}) \ ,$$

$$N_k=\langle\mathcal{N}_k\rangle=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,\lambda}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{T}}\pm1} \quad ,$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mu-\varepsilon_{\min}<0\\ \dfrac{\partial}{\partial N}(E-E_{\min})_{S,\lambda}<0\end{array}}$$

$$\Omega=\sum_k\Omega_k=\mp T\sum_k\ln(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}})=\mp T\int_{(0)}^{\infty}d\varepsilon\Gamma'(\varepsilon)\ln(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}})=$$

$$=\mp T\ln(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}})\Gamma(\varepsilon)\Big|_{(0)}^{\infty}\pm T\int_0^{\infty}\Gamma(\varepsilon)\frac{\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}}d\varepsilon}{1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}}}(-\frac{1}{T})=$$

$$=-\int_{(0)}^{\infty}\Gamma(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}\pm1} \quad , \qquad \Omega<0 \ .$$

Посчитаем число состояний $\Gamma(\varepsilon)=\sum_k\theta(\varepsilon-\varepsilon_k)$ для частиц в объеме V с граничными условиями периодичности, когда $k=(s_z,\vec{p})$, энергия не зависит от спина и используется стандартный переход от суммирования к интегрированию по импульсам

$$\sum_{\vec{p}}\to\frac{V}{h^3}\int d\vec{p} \, .$$

$$\Gamma(\varepsilon) = (2s+1)\frac{V}{h^3}\int d\vec{p}\,\theta[\varepsilon - \varepsilon(\vec{p})] = (2s+1)\frac{V}{h^3}\int\limits_{\varepsilon(\vec{p})<\varepsilon} d\vec{p}\ .$$

В случае квадратичного изотропного закона дисперсии

$$\varepsilon(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m}\ , \qquad \int\limits_{\varepsilon(\vec{p})<\varepsilon} d\vec{p} = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2m\varepsilon})^3\ ,$$

$$\Gamma(\varepsilon) = (2s+1)\frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi(2m\varepsilon)^{3/2}\ .$$

Зависимость Γ от ε степенная $\Gamma(\varepsilon) = A\varepsilon^{3/2}$

(3 – размерность пространства, 2 – закон дисперсии).

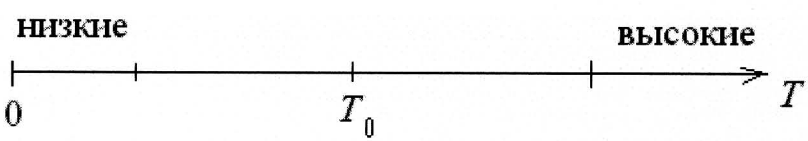
В случае квадратичного, но неизотропного закона дисперсии

$$\varepsilon(\vec{p}) = \frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2} + \frac{p_z^2}{2m_3}$$ объем эллипсоида с полуосями

$$\sqrt{2m_1\varepsilon} \quad \sqrt{2m_2\varepsilon} \quad \sqrt{2m_3\varepsilon}$$

$$\Gamma(\varepsilon) = (2s+1)\frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi(2m^*\varepsilon)^{3/2}\ , \qquad m^* = (m_1 m_2 m_3)^{1/3}\ .$$

Шкала температур:



Высокие температуры

$$E = \int\limits_0^\infty \frac{\Gamma'(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} \pm 1}\ ,$$

$$N=\int_0^\infty \frac{\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}\pm 1} \Rightarrow \frac{dN}{d\varepsilon}=\frac{\Gamma'(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}\pm 1}\ ,$$

$$N_k=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{T}}\pm 1}\to e^{-\frac{\varepsilon_k-\mu}{T}}\ll 1\quad ,\quad e^{-\frac{\mu}{T}}\gg 1\ .$$

Больцмановская статистика соответствует малым числам заполнения

$$N_k \ll 1\,.$$

$$\frac{E}{N}=\frac{\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\frac{d\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}{1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}}}}{\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\frac{d\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}{1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}}}}\simeq \frac{\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}(1\mp e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}})e^{-\frac{\varepsilon}{T}}d\varepsilon}{\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}(1\mp e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}})e^{-\frac{\varepsilon}{T}}d\varepsilon}=$$

$$=T\frac{\int_0^\infty x^{3/2}(1\mp e^{\frac{\mu}{T}-x})e^{-x}dx}{\int_0^\infty x^{1/2}\left(1\mp e^{\frac{\mu}{T}-x}\right)e^{-x}dx}=T\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/2)}\frac{1\mp\frac{e^{\frac{\mu}{T}}}{2^{5/2}}}{1\mp\frac{e^{\frac{\mu}{T}}}{2^{3/2}}}=$$

$$=\frac{3}{2}T(1\pm\frac{1}{2^{5/2}}e^{\frac{\mu}{T}})=\frac{3}{2}T(1\pm B\frac{\hbar^3}{T^{3/2}})\ .$$

Энергия фермионов больше соотв. классического значения, а энергия бозонов – меньше.

Квантовая поправка порядка $\hbar^3$ - обменная.

Для химпотенциала достаточно брать классическое значение:

$$N = \int_0^\infty \frac{\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} \pm 1} = A\frac{3}{2}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}} d\varepsilon = A\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)T^{3/2}e^{\frac{\mu}{T}} \ ,$$

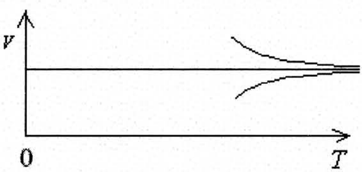
$$e^{\frac{\mu}{T}} = c\frac{\hbar^3}{T^{3/2}}. \qquad \mu = T\ln(c\hbar^3 T^{-3/2}) \simeq$$

$$\simeq -\frac{3}{2}T\ln T \ .$$

Теплоемкость:

$$E = \frac{3}{2}NT \pm \frac{3}{2}NB\frac{\hbar^3}{T^{1/2}} \ ,$$

$$C_V = \frac{3}{2}N\left(1 \mp \frac{1}{2}B\frac{\hbar^3}{T^{3/2}}\right)$$



$$\Omega = -\int \frac{\Gamma(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} \pm 1} \qquad , \qquad E = \int \frac{\varepsilon\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} \pm 1} \ .$$

Для степенной зависимости $\Gamma(\varepsilon)$ Ω и E пропорциональны

$$E = -\frac{3}{2}\Omega = \frac{3}{2}PV \quad , \qquad \frac{3}{2}PV = E,$$

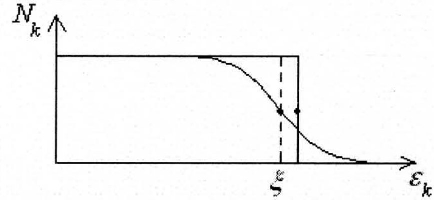
$$PV = NT\left(1 \pm B\frac{\hbar^3}{T^{3/2}}\right) \ .$$

Давление в ферми-газе больше, чем классическое, а в бозе-газе меньше. С понижением температуры эти отклонения еще более усиливаются. Проявление обменных эффектов.

Самостоятельная работа – расчет термических коэффициентов при высоких температурах $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$, $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ и объяснение смысла результатов.

Вырожденный ферми-газ

$$N_k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \xi}{T}} + 1}$$

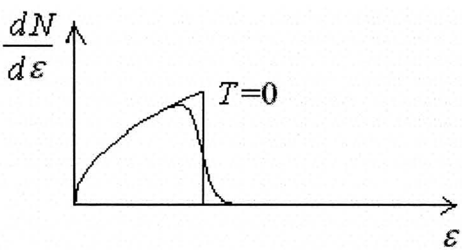


При $T = 0$ ξ_0 - энергия ферми ε_F .

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\xi}{T}}+1} = \int_0^\xi \varphi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}T^2\varphi'(\xi) + \frac{7\pi^4}{360}T^4\varphi'''(\xi) +$$

$$+ O(T^6; e^{-\frac{\xi}{T}}) \; .$$

Для плавно изменяющихся функций



$$\frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{\Gamma'(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\xi}{T}}+1}$$

Теплоемкость ферми-газа

$$\Omega = -\int_0^\infty \frac{\Gamma(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\xi}{T}}+1} \simeq -\left[\int_0^\xi \Gamma(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}T^2\Gamma'(\xi)\right] ,$$

$$S = -\left(\tfrac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{\xi,\lambda} = \frac{\pi^2}{6}2T\Gamma'(\xi) \; , \qquad S = \frac{\pi^2}{3}T\Gamma'(\varepsilon_F) \; ,$$

$$C_\lambda = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\lambda,N} ,$$

$$\boxed{C_\lambda = \frac{\pi^2}{3} T\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}})}\ .$$

$\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ - число частиц на ед. интервал энергии в зоне размытия ступеньки, $T\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ - число частиц, эффективно участвующих в тепловом движении.

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon,\varepsilon_{\mathrm{F}}} = \frac{1}{2}\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}})\ .$$

Для обычного газа $\Gamma'(\varepsilon) = \dfrac{3}{2} A\varepsilon^{1/2} = \dfrac{\Gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}$,

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} T \frac{\Gamma(\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\ , \qquad \boxed{N = \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{F}})}\ ,$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{2}\frac{T}{\varepsilon_{\mathrm{F}}} N\ .$$

$$N = \int_0^\infty \frac{\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\xi}{T}}+1} = \int_0^\xi \Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6}\Gamma''(\xi) = \Gamma(\xi) + \frac{\pi^2 T^2}{6}\Gamma''(\xi)$$

$\boxed{N = \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{F}})}$ при $T = 0$

$$\xi = \varepsilon_{\mathrm{F}} + \delta \quad N = \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{F}} + \delta) + \frac{\pi^2 T^2}{6}\Gamma''(\varepsilon_{\mathrm{F}} + \delta) = \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{F}}) + \delta\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}}) +$$

$$+ \frac{\pi^2 T^2}{6}\Gamma''(\varepsilon_{\mathrm{F}}) \Rightarrow \quad \delta = -\frac{\pi^2 T^2}{6}\frac{\Gamma''(\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}})}$$

$$\boxed{\xi = \varepsilon_{\mathrm{F}} - \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{\Gamma''(\varepsilon_{\mathrm{F}})}{\Gamma'(\varepsilon_{\mathrm{F}})}}$$

$\xi = \left(\dfrac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,\lambda}$ при $T = 0$ $S = 0 \Rightarrow$ $\xi = \varepsilon_{\mathrm{F}}$

Для обычного газа $\Gamma(\varepsilon) = A\varepsilon^{3/2} = \dfrac{(2s+1)V}{h^3}\dfrac{4\pi}{3}(2m\varepsilon)^{3/2}$,

$$N = \frac{V(2m)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}\varepsilon_{\rm F}^{3/2} \Rightarrow \quad \varepsilon_{\rm F} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}(3\pi^2)^{2/3} .$$

Чем плотнее ферми-газ, тем он идеальнее: средняя энергия порядка $\varepsilon_{\rm F} \sim \left(\dfrac{N}{V}\right)^{2/3}$, а средняя энергия кулоновского взаимодействия $\bar{u} \sim \overline{\left(\dfrac{1}{r}\right)} \sim \left(\dfrac{N}{V}\right)^{1/3}$. При большой плотности $\varepsilon_{\rm F} > \bar{u}$.

Численные оценки плотности и энергии для электронного газа в металле

$$\varepsilon_{\rm F} \sim 5\cdot 10^{-27}\cdot 10^{15} \sim 5\cdot 10^{-12} \text{ эрг} \sim 3 \text{ эВ} ,$$

$$\frac{N}{V} \sim 10^{22} ,$$

T_0 - температура вырождения $T_0 \sim \varepsilon_{\rm F} \sim 4\cdot 10^4$ K (при такой температуре металл уже вскипает).

Для обычного же газа

$$\varepsilon_{\rm F} \sim \frac{5\cdot 10^{-27}}{2\cdot 10^3\mu}\cdot 10^{13} \sim \frac{10^{-17}}{\mu} \text{ эрг} , \qquad T_0 \sim \frac{10^{-1}}{\mu} \text{ K} ,$$

а для жидкости $T_0 \sim \dfrac{10}{\xi}$ K .

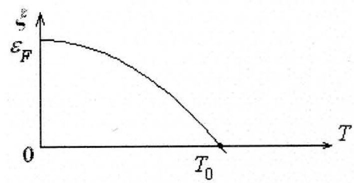
Только в жидком гелии при 2,19 К совершается аналогичный фазовый переход в сверхтекучее состояние.

Поведение химпотенциала ферми-газа:

$$\xi = \varepsilon_{\rm F} - \frac{\pi^2}{6}T^2\frac{\Gamma''(\varepsilon_F)}{\Gamma'(\varepsilon_F)} , \qquad \text{для} \qquad \Gamma(\varepsilon) = A\varepsilon^{3/2}$$

$$\Gamma'(\varepsilon_F) = \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F} , \qquad \Gamma''(\varepsilon_F) = \frac{3}{4}\frac{N}{\varepsilon_F^2} ,$$

$$\xi = \varepsilon_F - \frac{\pi^2 T^2}{6}\frac{1}{2\varepsilon_F} = \varepsilon_F (1 - \frac{\pi^2}{12}\frac{T^2}{\varepsilon_F^2}) \ .$$



При некоторой температуре T_0 $\xi = 0$. Это и есть температура вырождения (для обычного газа $T_0 = 0{,}99 \cdot \varepsilon_F$).
При этой температуре и начинают проявляться квантовые свойства.

Посчитаем термические коэффициенты для ферми-газа.

$$E = \int_0^\infty \frac{\varepsilon\,\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\xi}{T}}+1} \text{ , при } T=0 \ E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon \ ,$$

для обычного газа $E_0 = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$, т. е.

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{E_0}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F \ .$$

При малых T можно энергию посчитать так:

$$E = E_0 + \int_0^T c_V dT = \frac{3}{5}N\varepsilon_F + \int_0^T \frac{\pi^2}{2}N\frac{T}{\varepsilon_F}dT = \frac{3}{5}N\varepsilon_F + \frac{\pi^2 T^2 N}{4\varepsilon_F} \ ,$$

$$E = \frac{3}{5}N\varepsilon_F (1 + \frac{5\pi^2 T^2}{12\varepsilon_F^2}) \ .$$

Уравнение состояния получается на основе соотношения $PV = \frac{2}{3}E$

$$PV = \frac{2}{5}N\varepsilon_F\left(1 + \frac{5\pi^2T^2}{12\varepsilon_F^2}\right)$$

$$P_0 = \frac{2}{5}n\varepsilon_F \sim 10^{22}\cdot 10^{-12} = 10^{10}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = 10^4\ \text{атм}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot V = \frac{4}{5}N\varepsilon_F\frac{\pi^2 T5}{12\varepsilon_F^2}, \qquad \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\pi^2}{3}\frac{N}{V}\frac{T}{\varepsilon_F}}.$$

В классическом случае $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{N}{V}$. В силу $P \sim V^{-5/3}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{5}{3}\frac{P}{V} = -\frac{2}{3}\frac{N}{V^2}\varepsilon_F,$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{3}{2}\frac{V^2}{N\varepsilon_F}}$$

В классическом газе $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{P}{V} = -\frac{N}{V^2}T$ $\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T\,\text{кл}} = -\frac{V^2}{NT}$

Сжимаемость ферми-газа очень мала. Ферми-газ – жесткая система (в сжимаемость вносит вклад также и решетка – нулевые колебания).

Тепловое расширение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}\frac{V^2}{N\varepsilon_F}\cdot\frac{\pi^2}{3}\frac{N}{V}\frac{T}{\varepsilon_F} = \frac{\pi^2}{2}\frac{VT}{\varepsilon_F^2}$$

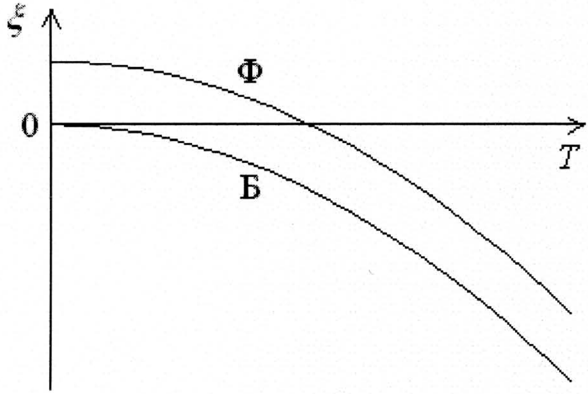
Для классического газа $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{V}{T}$. $\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{\pi^2}{2}\frac{VT}{\varepsilon_F^2}$

По сравнению с классическим значением этот термический

коэффициент имеет очень малую величину (отношение $\sim\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2$).

Ферми- и бозе-газы при температуре вырождения

Для бозонов $\xi < 0$ и $\dfrac{d\xi}{dT} < 0$, а в ферми-газе возможны и немонотонные изменения ξ при низких температурах.



В обычном бозе-газе $\xi \sim -\dfrac{T}{N}$ при $T < T_0$. При $T = T_0$ можно формально положить во всех случаях $\xi = 0$.

Вычисление температуры вырождения:

$$N = \frac{3}{2} A T_0^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x \pm 1} .$$

Типичные интегралы вычисляются следующим образом:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha + 1)\xi(\alpha + 1) \qquad , \qquad \xi(y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^y} ,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{e^x + 1} = \Gamma(\alpha + 1)\xi(\alpha + 1)(1 - \frac{1}{2^\alpha}) ,$$

$$\xi\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}61 ,$$

$$\xi\left(\frac{5}{2}\right) = 1{,}34 .$$

Для ферми-газа: $N = \frac{3}{2} A T_0^{3/2} \Gamma(3/2) \xi(3/2)(1 - \frac{1}{2^{1/2}}) = A\varepsilon_F^{3/2}$,

$T_0 = \frac{\varepsilon_F}{(\text{число})^{2/3}}$, $(\text{число})^{2/3} = (\frac{3}{4}\sqrt{\pi} \cdot 2{,}6 \cdot 0{,}3)^{2/3}$ очень близко к единице.

Более точный подсчет дает $\boxed{T_0 = 0{,}99\varepsilon_F}$.

Для двумерного же газа, например, $T_0 = 1{,}5\varepsilon_F$.

Для бозе-газа:

$$N = \frac{3}{2} A T_0^{3/2} \Gamma(3/2) \xi(3/2) \ .$$

Выражение для T_0 почти то же, что и для ферми-энергии

$$\text{газ } T_0 \sim \frac{10^{-1}}{\mu} K \ .$$

$$\text{Для жидк. } T_0 \sim \frac{10}{\mu} K \ .$$

При столь низких температурах газов фактически не существует.

Энергия при температуре вырождения:

$$\frac{E}{N} = T_0 \frac{\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{e^x \pm 1}}{\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{e^x \pm 1}} = T_0 \frac{\Gamma(5/2)\xi(5/2)}{\Gamma(3/2)\xi(3/2)} \begin{cases} \dfrac{1 - \frac{1}{2^{3/2}}}{1 - \frac{1}{2^{1/2}}} & \text{ферми} \\ 1 & \text{бозе} \end{cases}$$

$E^B = \frac{3}{2} N T_0 \cdot 0{,}5$ квантовые энергии значительные,

$E^F = \frac{3}{2} N T_0 \cdot 1{,}1$ квантовые энергии еще незначительны.

Вероятности для одночастичных состояний

Распределение Гиббса (большое каноническое)

$$W_{\mathcal{N}n} = \frac{1}{Z} e^{\frac{\mu\mathcal{N} - E_{n\mathcal{N}}}{T}} .$$

Для одночастичных состояний k

$$w_{\mathcal{N}}^{k} = \frac{1}{z_k} e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}\mathcal{N}} .$$

Для фермионов:

$$z_k = 1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}} ,$$

$$w_0^k = \frac{1}{1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}}} , \qquad w_1^k = \frac{e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}}}{1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}} + 1} ,$$

$$\overline{\mathcal{N}}_k = \sum_{\mathcal{N}_k} \mathcal{N}_k W_N^k = 0 \cdot w_0^k + 1 \cdot w_1^k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}} + 1} .$$

Если проекция спина не включена в полный набор (энергия частицы не зависит от спина), то для фермиона с половинным спином $k = \{\vec{k}, \pm 1\}$ можно ввести вероятности числа частиц в состоянии с $\vec{k}$:

$$w_0^{\vec{k}} = w_0^{(\vec{k},+1)} \cdot w_0^{(\vec{k},-1)} = \frac{1}{(e^{\frac{\mu - \varepsilon_{\vec{k}}}{T}} + 1)^2} ,$$

$$w_1^{\vec{k}} = w_0^{\vec{k}+1} \cdot w_1^{\vec{k}-1} \cdot w_0^{\vec{k}-1} = \frac{2e^{\frac{\mu - \varepsilon_{\vec{k}}}{T}}}{(e^{\frac{\mu - \varepsilon_{\vec{k}}}{T}} + 1)^2} ,$$

$$w_2^{\vec{k}} = w_1^{\vec{k}+1} \cdot w_1^{\vec{k}-1} = \frac{e^{2\frac{\mu-\varepsilon_{\vec{k}}}{T}}}{(e^{\frac{\mu-\varepsilon_{\vec{k}}}{T}}+1)^2} \ .$$

Как и следует, $w_0 + w_1 + w_2 = 1$, а

$$\overline{\mathcal{N}}_{\vec{k}} = 0 \cdot w_0^{\vec{k}} + 1 \cdot w_1^{\vec{k}} + 2 \cdot w_2^{\vec{k}} = \frac{2}{e^{\frac{\varepsilon_{\vec{k}}-\mu}{T}}+1} .$$

Для бозонов:

$$z_k = \frac{1}{1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}} \ ,$$

$$w_0^k = 1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}} \quad , \qquad w_{1,2,3,\ldots,}^k = 1 - w_0^k = e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}} \ ,$$

$$w_1^k = (1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}})e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}} ,$$

....

(Для больцмановского газа $e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}} << 1$).

$$\left\langle \mathcal{N}_k \right\rangle = \sum_{N_k=0}^{\infty} \mathcal{N}_k w_N^k = (1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}) \sum_{N=0}^{\infty} N e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}N} =$$

$$= (1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}) \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)} \sum_N e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}N} = (1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}) \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\mu}{T}\right)} \frac{1}{1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}} =$$

$$= (1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}) \frac{e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}}}{(1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}})^2} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{T}}-1} \ .$$

Флуктуации числа частиц в ферми- и бозе-газе

В большом каноническом распределении Гиббса можно выделить распределение вероятностей числа частиц:

$$W_N = \frac{1}{z}\sum_n e^{\frac{\mu N}{T}} e^{-\frac{E_{kN}}{T}} = e^{\frac{\mu N}{T}}\frac{z_N}{z}, \qquad z = \sum_N e^{\frac{\mu N}{T}} z_N ,$$

$$N = \langle N \rangle = \sum_N N W_N ,$$

$$T\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu} = \sum N^2 e^{\frac{\mu N}{T}}\frac{z_N}{z} - T\sum N e^{\frac{\mu N}{T}} z_N \cdot \frac{\partial z}{z\partial \mu} =$$

$$= \overline{N^2} - \overline{N}\frac{T}{z}\frac{\partial z}{\partial \mu} ,$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \mu} = \sum \frac{N}{T}\frac{e^{\frac{\mu N}{T}} z_N}{z} = \frac{\overline{N}}{T} ,$$

$$T\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu} = \overline{N^2} - (\overline{N})^2 = D_N ,$$

$$\Delta N = \sqrt{D_N} = \sqrt{\overline{(N-\overline{N})^2}} = \sqrt{\overline{N^2} - (\overline{N})^2} , \qquad \boxed{D_N = T\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}}.$$

Флуктуации чисел заполнения одночастичных состояний (населенностей, заселенностей).

В ферми-газе ожидается уменьшение флуктуаций по сравнению с классической картиной – эффективное отталкивание стабилизирует систему:

$$D_{N_k} = T\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{(e^{\frac{\varepsilon_k - \xi}{T}}+1)^2} = \overline{N}_k - (\overline{N}_k)^2 .$$

Если $T = 0$, то $D_N = 0$.

В бозе-газе ожидается возрастание флуктуаций:

$$\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\xi}{T}}-1}=\frac{e^{\varepsilon_k-\xi}}{(e^{\frac{\varepsilon_k-\xi}{T}}-1)^2}=\overline{N}_k+(\overline{N}_k)^2 \ .$$

В больцмановском же газе $D_{N_k}=\overline{N}_k$. Обменные квантовые поправки $\pm(\overline{N}_k)^2$.

При низких температурах ($T<T_0$) применять методы расчета, основанные на большом каноническом распределении Гиббса в бозе-газе нельзя.

Для всего газа в целом

$$D_N=T\frac{\partial\overline{N}}{\partial\xi}=T\frac{\partial}{\partial\xi}\sum_k\overline{N}_k=\sum_k D_{N_k}=\overline{N}\mp\sum_k\overline{N}_k^2 \ .$$

Например, в ферми-газе при низких температурах

$$D_N=T\frac{\partial\overline{N}}{\partial\xi}\simeq T\frac{\partial N}{\partial\varepsilon_F}=T\nu(\varepsilon_F) \ ,$$

$$\Gamma(\varepsilon_F)=N \ , \quad \Gamma'(\varepsilon_F)=\frac{\partial N}{\partial\varepsilon_F},$$

для обычного газа $\nu(\varepsilon_F)=\dfrac{3}{2}\dfrac{\Gamma(\varepsilon_F)}{\varepsilon_F}=\dfrac{3}{2}\dfrac{N}{\varepsilon_F}$,

$$D_N=N\cdot\frac{3}{2}\frac{T}{\varepsilon_F} \ .$$

<u>Пример бозе-газа – газ фотонов</u>

Постараемся узнать, сколько фотонов в 1 см^3 при нормальных условиях.

Число фотонов в силу возможности их рождения и уничтожения само находится из условия равновесия

$$\frac{\partial F}{\partial N}=\mu=0 \ ,$$

$$dN=\frac{\Gamma'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T}}-1} \quad , \qquad \Gamma(\varepsilon)=2\cdot\frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi p^3=$$

$$=\frac{8\pi V\varepsilon^3}{3h^3c^3}=\frac{V\varepsilon^3}{3\hbar^3c^3\pi^2} \ ,$$

$$\Gamma'(\varepsilon)=\frac{V\varepsilon^2}{\pi^2\hbar^3c^3} \ \ (\varepsilon=cp) \ ,$$

$$dN=\frac{V\varepsilon^2}{\pi^2c^3\hbar^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T}}-1} \ .$$

Отсюда, во-первых, полное число фотонов в единице объема

$$\frac{N}{V}=\frac{1}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^2d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T}}-1}=\left(\frac{T}{c\hbar}\right)^3\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2dx}{e^x-1}=\left(\frac{T}{c\hbar}\right)^3\frac{\Gamma(3)\varsigma(3)}{\pi^2} \ ,$$

$$\varsigma(3)\simeq 1{,}2 \quad , \qquad \frac{N}{V}\simeq 0{,}24\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 .$$

Для $T=300\ K$

$$\frac{N}{V}=0{,}24\left(\frac{1{,}38\cdot10^{-16}\cdot300}{3\cdot10^{10}\cdot10^{-27}}\right)^3\simeq10^9\ \text{см}^{-3} \ ,$$

а во-вторых, формула Планка на основе $\varepsilon=\hbar\omega$

$$dN_\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\Rightarrow$$

$$\rho(\omega,T)=\frac{1}{V}\frac{dN}{d\omega}\hbar\omega \ ,$$

$$\boxed{\rho(\omega)=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}} \ .$$

Возмущение плотности состояний

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0(\varepsilon) + \Gamma_1(\varepsilon)\ .$$

Найти $\Delta\varepsilon_F$ и ΔC_V .

1) $N = \Gamma_0(\varepsilon_F^0) = \Gamma(\varepsilon_F) = \Gamma_0(\varepsilon_F) + \Gamma_1(\varepsilon_F) =$

$$= \Gamma_0(\varepsilon_F^0 + \Delta\varepsilon_F) + \Gamma_1(\varepsilon_F^0 + \Delta\varepsilon_F)\ .$$

В первом приближении

$\simeq \Gamma_0(\varepsilon_F^0) + \Delta\varepsilon_F \nu_0(\varepsilon_F^0) + \Gamma_1(\varepsilon_F^0)$, так что

⊛ $\Delta\varepsilon_F \nu_0(\varepsilon_F^0) + \Gamma_1(\varepsilon_F^0) = 0$

Отсюда $\boxed{\Delta\varepsilon_F = -\dfrac{\Gamma_1(\varepsilon_F^0)}{\nu_0(\varepsilon_F^0)}}$.

2) Если $\Gamma_1(\varepsilon)$ - плавная функция, то

$$C_\lambda = T\tfrac{\pi^2}{3}\Gamma'(\varepsilon_F) = \tfrac{\pi^2}{3}T\nu(\varepsilon_F)\ ,$$

$$\nu(\varepsilon_F) = \nu_0(\varepsilon_F^0 + \Delta\varepsilon_F) + \nu_1(\varepsilon_F^0 + \varepsilon_F) \simeq$$

$\simeq \nu_0(\varepsilon_F^0) + \Delta\varepsilon_F \nu_0'(\varepsilon_F^0) + \nu_1(\varepsilon_F^0)$, но из ⊛

следует, что

$$\Delta\varepsilon_F \nu_0'(\varepsilon_F^0) + \nu_0(\varepsilon_F^0)\frac{d\Delta\varepsilon_F}{d\varepsilon_F^0} + \nu_1(\varepsilon_F^0) = 0,$$

так что

$$\boxed{\nu(\varepsilon_F) = \nu_0(\varepsilon_F^0)[1 - \frac{d}{d\varepsilon_F^0}\Delta\varepsilon_F]},\ \text{а}$$

для теплоемкости это дает

$$\boxed{C_\lambda = C_\lambda^0[1 - \frac{d}{d\varepsilon_F^0}\Delta\varepsilon_F]}\ .$$

3) $\begin{cases} E = \Omega + \varsigma N \\ T = 0 \end{cases}$ $\qquad \Delta E = -\int\limits_0^{\varepsilon_F^0}\Gamma_1(\varepsilon)d\varepsilon$

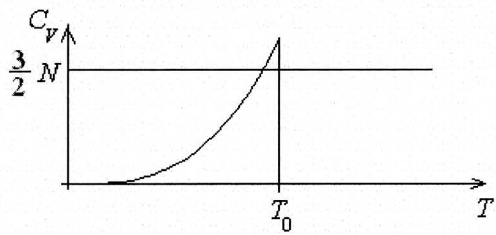
Вырожденный бозе-газ

При $T < T_0$ при расчете энергии и теплоемкости можно считать $\mu = 0$. Для обычного газа

$$E = \int_0^\infty \frac{\varepsilon \nu(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} - 1} = \frac{3}{2} A T^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} =$$

$$= \frac{3}{2} A T^{3/2} \Gamma(5/2) \varsigma(5/2) \quad , \qquad E \sim T^{5/2} \ ,$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{5}{2} \frac{E}{T} \sim T^{3/2}$$



$$C_V(T_0) = \frac{5}{2} \frac{E(T_0)}{T_0} \ ,$$

$$E(T_0) \simeq \frac{E_{\text{кл}}(T_0)}{2} = \frac{3}{4} N T_0 \ ,$$

$$C_V(T_0) \simeq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} N \ .$$ Более точно $C_V(T_0) = \frac{3}{2} N \cdot 1{,}28$,

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T_0=0} = \frac{3}{2} \frac{C_V(T_0)}{T_0} = 2{,}89 \frac{N}{T_0} \ .$$

Бозе-конденсация

Для вычисления химического потенциала при $T < T_0$ формула не пригодна. Возникает парадокс Эйнштейна исчезновения частиц.

$$N = \frac{3}{2} A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} \ .$$

Разрешается тем, что при $T < T_0$ по этой формуле при $\mu = 0$ (фактически μ очень мало при $T < T_0$) учитывают не все частицы, а лишь вне основного состояния – конденсата, так что полное число частиц

$$N = N_0 + N'(T) = N_0 + \frac{3}{2} A \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} - 1} \ ,$$

$$N = N_0 + \frac{3}{2} A T^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \varsigma(3/2), \text{ а при } T = T_0$$

$$N = \frac{3}{2} A T_0^{3/2} \Gamma(3/2) \varsigma(3/2), \text{ т. е.}$$

$$N'(T) = N\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}, \text{ а}$$

$$\boxed{N_0 = N[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}]} .$$

<u>Скачок производной теплоемкости (фазовый переход 3-го рода)</u>

В области $T > T_0$ в окрестности T_0 можно пользоваться малостью химического потенциала.

$$E = \frac{3}{2} A T^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^{x+\xi} - 1} = \qquad \xi = -\tfrac{\mu}{T}$$

$$= \frac{3}{2} A T^{5/2} [\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} + \xi \int_0^{\infty} x^{3/2} dx \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{e^{x+\xi} - 1}\right)_{\xi=0}] =$$

$$= \frac{3}{2} A T^{5/2} [\Gamma(5/2)\varsigma(5/2) + \xi \int_0^{\infty} x^{3/2} dx \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e^x - 1}] =$$

$$= \frac{3}{2} A T^{5/2} [\Gamma(5/2)\varsigma(5/2) - \frac{3}{2} \xi \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1}] =$$

$$= E_0(T) - \frac{3}{2} \xi A T^{5/2} \Gamma(3/2) \varsigma(3/2) =$$

$$= E_0(T) = E_0(T) + \frac{3}{2}\xi T N'(T) \ ,$$

$$\boxed{E(T) = E_0(T) + \frac{3}{2}\mu N'(T)} \ .$$

Энергия непрерывна в силу непрерывности μ. То же для C_V в силу непрерывности $\frac{\partial\mu}{\partial T}$, а скачок производной $\frac{\partial C_V}{\partial T}$ определяется скачком C_V:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T_0+0} = \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T_0-0} + \frac{3}{2}N\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_{T_0+0} .$$

(Другой путь: $E = -\frac{3}{2}\Omega \Rightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial\mu}\right)_T = -\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_T = -\frac{3}{2}N(\mu,T) \simeq$

$\simeq \frac{3}{2}N(0,T) = \frac{3}{2}N'(T)$, так что

$$E = E_0(T) + \frac{3}{2}\mu N'(T) \quad .)$$

Остается показать, что $\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{T\neq 0} = 0$, а $\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_{T_0\neq 0} \neq 0$, и найти $\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_{T_0+0}$.

$$N = \frac{3}{2}AT^{3/2}[\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x-1} + \int_0^\infty x^{1/2}dx(\frac{1}{e^{x+\xi}-1} - \frac{1}{e^x-1})] =$$

$$= \frac{3}{2}AT^{3/2}[\Gamma(3/2)\varsigma(3/2) + \xi^{3/2}\int_0^\infty y^{1/2}dy(\frac{1}{e^{\xi(1+y)}-1} - \frac{1}{e^{\xi y}-1})] =$$

$$= \frac{3}{2}AT^{3/2}[\Gamma(3/2)\varsigma(3/2) + \xi^{1/2}\int_0^\infty y^{1/2}dy(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{y})] =$$

$$=\frac{3}{2}AT^{3/2}[\Gamma(3/2)\varsigma(3/2)-\xi^{1/2}\int_0^\infty\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}]=$$

$$=\frac{3}{2}AT^{3/2}[\Gamma(3/2)\varsigma(3/2)-\pi\sqrt{\frac{|\mu|}{T}}]=\frac{3}{2}AT_0^{3/2}\Gamma(3/2)\varsigma(3/2),$$

$$\Gamma\varsigma-\pi\sqrt{\frac{|\mu|}{T}}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}\Gamma\varsigma,$$

$$\sqrt{\frac{|\mu|}{T}}=\frac{\Gamma\varsigma}{\pi}[1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}],$$

$$\mu=-T\left(\frac{\Gamma\varsigma}{\pi}\right)^2[1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}]^2,$$

$$1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}=\frac{T^{3/2}-T_0^{3/2}}{T^{3/2}}\simeq\frac{\frac{3}{2}T_0^{1/2}(T-T_0)}{T_0^{3/2}}=\frac{3}{2}\frac{T-T_0}{T_0},$$

$$\boxed{\mu=-\frac{9}{4}[\frac{\Gamma(3/2)\varsigma(3/2)}{\pi}]^2\frac{(T-T_0)^2}{T_0}},$$

$$\mu_0''=-\frac{9}{2}[\frac{\Gamma(3/2)\varsigma(3/2)}{\pi}]^2\frac{1}{T_0},$$

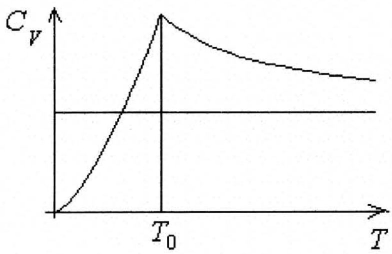
$$\Delta\frac{\partial C_V}{\partial T}=\frac{3}{2}\mu_0''\frac{N}{T}=-\frac{N}{T_0}\cdot\frac{27}{4}\left[\frac{\Gamma\varsigma}{\pi}\right]^2=$$

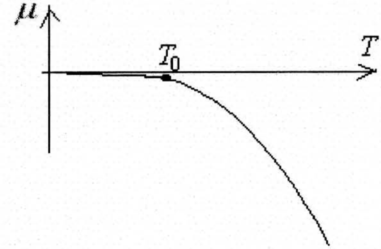
$$=-\frac{N}{T_0}\cdot\frac{27}{4}[\frac{\sqrt{\pi}\,2,6}{2\pi}]^2=-\frac{N}{T_0}\frac{27}{16\pi}2,6^2=$$

$$=-3,66\frac{N}{T_0}.$$

Итак, $\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T_0-0} = 2{,}89\frac{N}{T_0}$,

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T_0+0} = -0{,}77\frac{N}{T_0} \ .$$





<u>Двумерные газы</u>

$$N = \int\limits_0^\infty \frac{\nu(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}} \pm 1} \quad , \qquad \Gamma(\varepsilon) = A\varepsilon \quad , \qquad \nu(\varepsilon) = A \ .$$

Для фермионов

$$N = \int\limits_0^\infty \frac{Ad\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}} + 1} = -AT\int\limits_0^\infty \frac{de^{\frac{\varsigma-\varepsilon}{T}}}{1+e^{\frac{\varsigma-\varepsilon}{T}}} =$$

$$= -AT\ln(1+e^{\frac{\varsigma-\varepsilon}{T}})\Big|_0^\infty = AT\ln(1+e^{\frac{\varsigma}{T}}) \ .$$

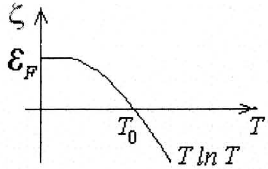
В силу $N = \Gamma(\varepsilon_F) = A\varepsilon_F$

$$\varepsilon_F = T\ln(1+e^{\frac{\varsigma}{T}}) ,$$

$$\varsigma = T\ln(e^{\frac{\varepsilon_F}{T}} - 1) = \varepsilon_F + T\ln(1-e^{-\frac{\varepsilon_F}{T}}) \ .$$

При $\varsigma = 0 \quad \varepsilon_F = T_0\ln 2$.

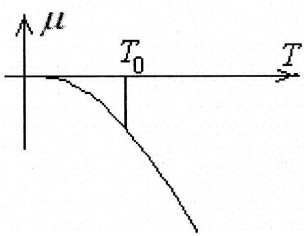
При $T << \varepsilon_F$



$$\varsigma = \varepsilon_F - Te^{-\frac{\varepsilon_F}{T}}$$

Для бозе-газа $N = -AT\ln(1 - e^{\frac{\mu}{T}})$,

$$\mu = T\ln(1 - e^{-\frac{N}{AT}}) \ .$$



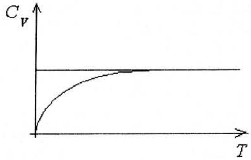
При $T < T_0 = \dfrac{N}{A}$ $\qquad \mu \simeq -T\,e^{-\frac{T_0}{T}}$

При конечных температурах $\mu \neq 0$, так что конденсация не происходит и фазового перехода нет, хотя при $T < T_0$ фактически $|\mu| << 1$, т.е.

$$e^{-\frac{\mu}{T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_0}{T}}} \simeq 1$$

Ход химпотенциала с температурой одинаков у обоих газов с добавкой ε_F у ферми-газа (сдвиг графика).

Интересно, что теплоемкости ферми- и бозе-газа имеют одинаковый температурный ход, хотя численно различаются



Парамагнетизм ферми-газа

$\vec{H}$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{\vec{k}} \pm \mu H$$

Рассматриваем нейтральные частицы, хотя практически парамагнетизм не зависит от динамических свойств (обратное неверно).

$$\nu(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) =$$

$$= \sum_{\vec{k}} [\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}} - \mu H) + \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}} + \mu H)] \ .$$

Аналогично и Γ, так что

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial H^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \varepsilon^2} .$$

$$\Omega = -\int_0^\infty \frac{\Gamma(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varsigma}{T}} + 1} .$$

$$M = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial H}\right)_{T,\varsigma,\lambda} \text{ - магнитный момент}$$

$$M = \int_0^\infty \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial H} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varsigma}{T}} + 1} .$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \simeq \int_0^\infty \frac{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial H^2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varsigma}{T}} + 1} = \mu^2 \int_0^\infty \frac{\nu'(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varsigma}{T}} + 1} \simeq$$

(ς также зависит от H)

$$\simeq \mu^2 \nu(\varsigma) \simeq \mu^2 \nu(\varepsilon_F) \simeq \mu^2 \nu_0(\varepsilon_F^0) \ .$$

Итак, магнитная восприимчивость в слабом магнитном поле равна

$$\boxed{\chi = \mu^2 \nu_0(\varepsilon_F^0)} \ .$$

Для обычного газа формула Паули для парамагнитной восприимчивости

$$\boxed{\chi = \frac{3}{2}\mu^2 \frac{N}{\varepsilon_F^0}} \qquad \text{в силу}$$

$$\nu_0(\varepsilon_F^0) = \frac{3}{2}\frac{\Gamma_0(\varepsilon_F^0)}{\varepsilon_F^0} = \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F^0} .$$

Оценим поправку μH по сравнению с ε_F^0

$$\varepsilon_F \sim \text{эв} \sim 10^{-12} \text{ эрг},$$

$$\mu H \sim 10^{-20} \frac{\text{эрг}}{\text{эрст}} \cdot H \text{ эрст}.$$

Таким образом, даже для $H \sim 10^5$ ое $\mu H \sim 10^{-15}$ эрг, т. е.

$$\left(\frac{\mu H}{\varepsilon_F}\right)^2 \sim 10^{-6} .$$

Средняя длина волны де Бройля

Характерная длина волны в газе $d \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$,

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad , \quad \overline{\lambda} = h\left(\overline{\frac{1}{p}}\right) = \frac{h}{\sqrt{2m}}\overline{\varepsilon^{-1/2}} ,$$

$$\overline{\varepsilon^{-1/2}} = \frac{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}+1}}{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}+1}} \simeq^{T \gg T_0} \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{T}}d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon} = \frac{T}{T^{3/2}\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi T}} .$$

Таким образом, «классическая» средняя длина волны де Бройля

$$\overline{\lambda}_{\text{кл}} = \frac{2h}{\sqrt{2\pi m T}} .$$

При $T >> T_0$

$$\bar{\lambda} << \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} .$$

Температуре вырождения соответствует $\bar{\lambda}(T_0) \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$.

Можно с таким же успехом посчитать $\overline{\varepsilon^{-1/2}}$ при $T = T_0$ (т. е. для $\varsigma = 0$). Того же порядка $\bar{\lambda}$ и для вырожденного ферми-газа (для обычного бозе-газа при $T < T_0$ $\bar{\lambda} \to \infty$).

Найти $\bar{\lambda}$ для вырожденного ферми-газа.

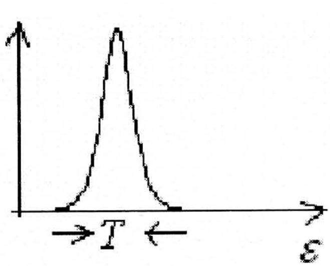
<u>Асимптотическая формула Зоммерфельда</u>

$$I = \int_0^\infty \frac{\varphi(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}+1} = \int_0^\infty \frac{d\int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon')d\varepsilon'}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}+1} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^\infty \frac{\int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon')d\varepsilon' e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}}{(e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}+1)^2} d\varepsilon = \frac{1}{4T}\int_0^\infty \frac{\int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon')d\varepsilon' d\varepsilon}{ch^2 \frac{\varepsilon-\varsigma}{2T}} .$$

Функция $\dfrac{1}{4Tch^2 \dfrac{\varepsilon-\varsigma}{2T}}$ - размазанная δ -функция

Далее обрезаются пределы симметрично (отбрасываются эксп. малые члены)



$$I = \int\limits_{(\varsigma)} \frac{\int\limits_0^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon')d\varepsilon' d\varepsilon}{4Tch^2 \dfrac{\varepsilon-\varsigma}{2T}} + O(e^{-\frac{\varsigma}{T}}) =$$

$$= \int\limits_{(\varsigma)} \frac{1}{4Tch^2 \dfrac{\varepsilon-\varsigma}{2T}} [\int\limits_0^{\varsigma} \varphi(\varepsilon')d\varepsilon' + (\varepsilon-\varsigma)\varphi(\varsigma) + \frac{(\varepsilon-\varsigma)^2}{2}\varphi'(\varsigma) +$$

$$+ \frac{(\varepsilon-\varsigma)^3}{6}\varphi''(\varsigma) + \frac{(\varepsilon-\varsigma)^4}{24}\varphi'''(\varsigma)] + O(e^{-\frac{\varsigma}{T}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{ch^2 x} [\int\limits_0^{\varsigma} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{4T^2x^2}{2}\varphi'(\varsigma) + \frac{16T^4x^4\varphi'''(\varsigma)}{24}] =$$

$$= \int\limits_0^{\varsigma} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}T^2\varphi'(\varsigma) + \frac{7\pi^4}{360}T^4\varphi'''(\varsigma) + O(T^6; e^{-\frac{\varsigma}{T}}),$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx \;, \qquad \circledast$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{ch^2 x} = 1 \;, \qquad \overbrace{\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{ch^2 x} = \frac{\pi^2}{12} \quad \int\limits_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{ch^2 x} = \frac{7\pi^4}{240}}$$

(К интегралам вновь добавляются хвосты $\sim e^{-\frac{\varsigma}{T}}$.)

Окончательно формула Зоммерфельда

$$\boxed{\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varsigma}{T}}+1} = \int\limits_0^{\varsigma} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2T^2}{6}\varphi'(\varsigma) + \frac{7\pi^4T^4}{360}\varphi'''(\varsigma) + O(T^6; e^{-\frac{\varsigma}{T}})} \,.$$

Характерные интегралы в теории ферми- и бозе-газов

1) $I_B = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}dx}{e^x - 1} = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha}dx \sum\limits_{s=1}^{\infty} e^{-sx} = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-sx} dx =$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}y^{\alpha}e^{-y}dy=\Gamma(\alpha+1)\varsigma(\alpha+1)\ ,$$

$$I_B=\Gamma(\alpha+1)\varsigma(\alpha+1).$$

2) $$I_F=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}dx}{e^x+1}=\int_0^{\infty}x^{\alpha}dx\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}e^{-sx}=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-sx}dx=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}y^{\alpha}e^{-y}dy=\Gamma(\alpha+1)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s^{\alpha+1}}\ .$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s}}{s^{\alpha+1}}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{\alpha+1}}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}-1}{s^{\alpha+1}}=\varsigma(\alpha+1)-$$

$$-\frac{2}{2^{\alpha+1}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha+1}}=\varsigma(\alpha+1)(1-\frac{1}{2^{\alpha}})\ .$$

$$I_F=\Gamma(\alpha+1)\varsigma(\alpha+1)(1-\frac{1}{2^{\alpha}}).$$

Итак, $$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}dx}{e^x\pm1}=\Gamma(\alpha+1)\varsigma(\alpha+1)\begin{cases}1-\dfrac{1}{2^{\alpha}}\\ 1\end{cases}}.$$

С помощью полученной формулы (для ферми) можно получить и значения интегралов ⊛:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{ch^2x}=4\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(e^x+e^{-x})^2}=4\int_0^{\infty}\frac{x^2dxe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{y^2e^y}{(e^y+1)^2dy}=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}y^2d\frac{1}{e^y+1}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{ydy}{e^y+1}=\Gamma(2)\varsigma(2)(1-\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{12}\text{, так как }\varsigma(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^4dx}{ch^2x}=\frac{1}{8}\int_0^{\infty}\frac{y^4dye^y}{(e^y+1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{y^3dy}{e^y+1}=\frac{1}{2}\Gamma(4)\varsigma(4)(1-\frac{1}{8})=$$

$$=\frac{7\pi^4}{240}\text{, так как }\varsigma(4)=\frac{\pi^4}{90}.$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е
О квантовой статистике

Объединение механики со статистической физикой привело к возникновению молекулярно-кинетической теории газов, жидкостей и твердых тел.

М.И.Каганов

Как ни парадоксально, теория твердого тела основывается на теории квантовых газов.

М.И.Каганов

Газ – макроскопический физический объект, на примере которого легко проследить, как строится объяснение по схеме «макро… через микро…».

М.И.Каганов

Статистика Бозе-Эйнштейна была, насколько я знаю, последним значительным положительным вкладом Эйнштейна в физическую статистику. Его дальнейшие усилия в этом направлении, хотя и представляли большую ценность, так как побуждали к дальнейшему размышлению и обсуждению, в основном были только критическими.

Макс Борн

Раз только квантовая механика и квантовая статистика были установлены, они, конечно, позволили сделать бесчисленные аналитические предсказания, многие из которых были подтверждены экспериментом.

Макс Борн

Наука значительно более консервативна, чем это принято думать.

М.И.Каганов

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Студенческий конспект содержит не полный курс лекций.

Нужно иметь в виду, что эти лекции читались теоретикам-педагогам, для которых материал отбирался в соответствии с укороченной и упрощенной программой курса (в отличие от более подробной и полной программы для теоретиков-производственников).

Как уже отмечалось в «Предисловии», я старался не переделывать текст, а лишь проставил знаки препинания, которыми обычно пренебрегают в студенческих конспектах, да кое-где исправил замеченные неточности.

Еще раз нужно подчеркнуть, что материал прошел три стадии возможных искажений: при записи слушателем реально читаемых лекций, при переписывании с расшифровкой этого конспекта, а также при компьютерном наборе. На всех стадиях, конечно, вносились некие искажения, но все равно ответственность за допущенные ошибки лежит на мне, хотя я старался проверять рукопись перед печатью. Однако прошло ведь 40 лет со времени чтения этих лекций, а я тогда не вел их записей.

ДОПОЛНЕНИЕ

В части тиража к пособию прилагается компакт-диск с электронными версиями следующих книг автора по квантовой теории (файлы формата pdf).

1. Ульянов В.В. Задачи по квантовой механике и квантовой статистике. - Х.: Высш. шк., 1980. - 216 с.
2. Ульянов В.В. Интегральные методы в квантовой механике. - Х.: Высш. шк., 1982. - 160 с.
3. Ульянов В.В. Методы квантовой кинетики. - Х.: Высш.шк., 1987. - 144 с.
4. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 1-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2002. - 40 с.
5. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 2-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2002. - 28 с.
6. Ульянов В.В. Вступ до квантової кінетики. - Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2004. - 164 с.
7. Василевская Ю.В., Ульянов В.В. Новые квазиточнорешаемые модели в квантовой теории спиновых систем. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2005. - 124 с.
8. Ульянов В.В. Конспект вводных лекций по квантовой механике. Часть 3-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 52 с.
9. Ульянов В.В. Конспект вводных лекций по квантовой механике. Часть 4-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 52 с.
10. Ульянов В.В. Конспект лекций по квантовой статистике. Часть 1-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Володимир Володимирович Ульянов
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З КВАНТОВОЇ СТАТИСТИКИ
Частина перша

Навчальний посібник

Російською мовою

Відповідальний за випуск Г.І.Рашба

Підп. до друку 10.04.2011. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк ризографічний.
Умов. друк. арк. 2,1 . Тираж 50 пр. Ціна договірна.

Надруковано з готових оригінал-макетів у друкарні ФОП "Азамаєв В.Р."
Свідоцтво про державну реєстрацію ВО2 № 229278 від 25.11.1998 р.
Свідоцтво про внесення суб'єкта визначеної справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ХК № 135 від 23.02.05 р.
м.Харків, вул. Познанська 6, к. 84 тел. 8(057) 362-01-52

Издания кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица (вклад Ульяновых)

К 200-летию Харьковского университета

Серия монографий и учебных пособий

1. В.В.Ульянов. ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ КІНЕТИКИ. – 2004.
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов
   НОВЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ. – 2005.
3. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов
   ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ(+CD). – 2005.
4. А.В.Лымарь, В.В.Ульянов. ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ. Ч. 2 (+CD). – 2010.
5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сост. В.В.Ульянов. – 2009.
6. В.В.Ульянов. О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ. – 2002.

7,8. В.В.Ульянов, Н.В.Ульянов. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ. Ч. 1, 2 (+CD). – 2011, 2012.

9,10,11,12. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 1, 2, 3, 4. – 2002, 2011.

13,14. В.В.Ульянов. ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ. Ч. 1, 2. – 2011.

15. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 1. – 2003.
16. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 2. – 2003.
17. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 3. – 2004.
18. А.М.Ермолаев, Н.В.Ульянов. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ПРОВОДНИКАХ С ПРИМЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ЭЛЕКТРОНОВ. – 2006.
19. A.M.Ermolaev, N.V.Ulyanov. ELECTRON SPIN WAVES IN NONMAGNETIC CONDUCTORS WITH RESONANCE STATES OF ELECTRONS. – 2008.
20. О.М.Єрмолаєв, В.В.Ульянов. СТИСЛИЙ НАРИС ІСТОРІЇ КАФЕДРИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМЕНІ АКАДЕМІКА І.М.ЛІФШИЦЯ. – 2008.

Серия воспоминаний об ученых-физиках

1. В.В.Ульянов
   ИЛЬЯ МИХАЙЛОВИЧ ЛИФШИЦ. – 2001, 2007(+DVD).
2. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   МОИСЕЙ ИСААКОВИЧ КАГАНОВ. – 2001.
3. В.В.Ульянов. ЛЕВ ЭЛЕАЗАРОВИЧ ПАРГАМАНИК. – 2002.
4. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
   ЛЕОНИД СТЕПАНОВИЧ ГУЛИДА. – 2002.
5. В.В.Ульянов
   БОРИС ИЕРЕМИЕВИЧ ВЕРКИН. – 2002.
6. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   АРНОЛЬД МАРКОВИЧ КОСЕВИЧ. – 2002.
7. В.В.Ульянов
   ВИКТОР МОИСЕЕВИЧ ЦУКЕРНИК. – 2002.
8. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   ВАЛЕНТИН ГРИГОРЬЕВИЧ ПЕСЧАНСКИЙ. 2002.
9. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   ЭМАНУИЛ АЙЗИКОВИЧ КАНЕР. – 2002.
10. А.М.Ермолаев, Ю.П.Степановский, В.В.Ульянов
    АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР. – 2002.
11. В.В.Ульянов
    АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЖЕЛЕХОВСКИЙ. – 2003.
12. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
    ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЧ ГАЛАЙКО. – 2003.
13. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    ИГОРЬ ИВАНОВИЧ ФАЛЬКО. – 2003.
14. Г.И.Рашба, В.В.Ульянов
    АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЕРМОЛАЕВ. –2003.
15.
16. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    ОЛЕГ ИВАНОВИЧ ЛЮБИМОВ. – 2005.
17. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ. – 2008.
18. В.В.Ульянов. ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА-ТЕОРЕТИКА. Ч.1. – 2008.
19. В.В.Ульянов. К 95-ЛЕТИЮ Л.Э.ПАРГАМАНИКА. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ (2-е изд., доп.). – 2010.
21. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов. М.И.КАГАНОВ В ХГУ. – 2011.
22. В.В.Ульянов. К 90-летию М.И.Каганова. – 2011 (CD).

Серия воспоминаний о Детях физмата

1. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ ШАРАПОВ. – 2002, 2007.
2. В.В.Ульянов. НА УНИВЕРСИТЕТСКОЙ. – 2002, 2007.
3. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ГАВРИЛОВИЧ КЛАДКОВОЙ (Мой друг Толька). – 2002, 2007(CD).
4. ЛЕГЕНДЫ И БЫЛИ СТАРОГО ФИЗМАТА
   Ч.I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Дзюба А.С., Перваков В.А., Сизова З.И., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2002.
   Ч. I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Гапон Э.В, Иванов И.Г., Кондратьев Б.В., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Хижковый В.П., Шарапов А.И. - 2002.
   Ч.I I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Козинец В.В., Кондратьев Б.В., Николаев Г.Т., Ульянов В.В.,Шарапов А.И.- 2002.
   Ч.IV. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2002.
   Ч.V. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Валиев Б.М., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Сизова З.И., Ульянов В.В. - 2002.
   Ч.VI. Сборник рассказов. Барьяхтар В.Г., Гребенник И.П., Креснин А.А., Манжелий В.Г., Пустовалов В.В., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.VII. Сборник стихов. Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2003.
   Ч.VIII. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.IX. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003..
   Ч.X. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Ульянов В.В., Хижковый В.П., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.XI. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2003.
   Ч.XII. Сборник рассказов. Боярский Л.А., Гребенник И.П., Малеев В.Я., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2004.
   Ч.XIII. Сборник рассказов. Ковинько Н.М., Мазель Е.З., Ривкина Э.М., Розенберг В.Я., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2008.
   Ч.XIV. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Евланов М.В., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Таранова Г.М., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2009.
   Ч.XV. Сборник рассказов. Креснин А.А., Ульянов В.В., Федченко Л.Ю., Хайтман Е.Н., Яровая Р.Г. - 2009.
   Ч.XVI. Сборник рассказов. Рофе-Бекетов Ф.С., Татарченко Л.П., Ульянов В.В. – 2009.
5. В.В.Ульянов. КАК МЫ ПРАЗДНОВАЛИ 50-ЛЕТИЕ ОКОНЧАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА (+CD). – 2007.

Серия воспоминаний о жизни в XX веке

1. В.В.Ульянов. Д О В О Й Н Ы (1934-1941). – 2002.
2. В.В.Ульянов. В О Е Н Н Ы Е Г О Д Ы (1941-1945). – 2002.
3. В.В.Ульянов. В Ш К О Л Е (1945-1952). – 2002.
4. В.В.Ульянов
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1934-1950). – 2003.
5. В.В.Ульянов
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1951-1954). – 2003.
6. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1955-1957). – 2003.
7. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1958-1961). – 2003.
8. В.В.Ульянов. Д В А Д Н Я В А Л У Ш Т Е. – 2003.
   (Волейбольные грёзы)
9. В.В.Ульянов. Д В А Д Ц А Т Ы Й Д О М. – 2003.
10. В.В.Ульянов. 5 0 Л Е Т С П У С Т Я. – 2003.
11. В.А.Ульянов
    ВОСПОМИНАНИЯ ДЕТСТВА И ЮНОСТИ. – 2003.
12. В.А.Ульянов. МОЯ ПОЕЗДКА В США И ОБРАТНО. – 2003.
13. В.А.Ульянов. С Т Р А Н И Ч К И Ж И З Н И. – 2003.
14. В.В.Ульянов
    Р О Д О С Л О В Н А Я Н А Ш Е Й С Е М Ь И. – 2004.
15. В.В.Ульянов. П О Л В Е К А В У Н И В Е Р С И Т Е Т Е. – 2004.
16. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
    Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1962-1967)+CD. – 2006.
17. В.В.Ульянов.ПОЛВЕКА В УНИВЕРСИТЕТЕ(2-е изд., доп.).– 2007.
18. В.В.Ульянов. ВИКТОР ЕВГЕНЬЕВИЧ РУБАНОВИЧ(+CD). – 2008.
19. В.В.Ульянов. НОВОЕ О ПУШКИНЕ И ГОГОЛЕ. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ИЗДАНИЯ. ВЫСТАВКА КНИГ. – 2009 (CD).
21. Н.В. и И.П.Ульяновы. ЧЕРНОГОРИЯ. ИЮЛЬ 2009. – 2009 (CD).
22. Н.В.Ульянов, И.П.Ульянова. ПО ЮГУ ЕВРОПЫ. – 2009 (CD).
23. В.В.Ульянов. К 150-ЛЕТИЮ А.П.ЧЕХОВА. – 2010 (CD).
24. В.В.Ульянов. К 170-ЛЕТИЮ П.И.ЧАЙКОВСКОГО. – 2010 (CD).
25. Н.В. и И.П.Ульяновы. БОЛГАРИЯ И РУМЫНИЯ. – 2010 (CD).
26. В.В. и Н.В.Ульяновы. МИСХОР – АВГУСТ 2010. – 2010 (CD).
27. В.В.Ульянов. К 110-летию В.А.Ульянова.Рисунки отца.–2011(CD).
28. В.В.Ульянов
    М О Я М У З Ы К А Л Ь Н А Я И С Т О Р И Я (+DVD).– 2011.
29. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
    Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1968-1973)+DVD. – 2011.

Квантовая механика не только вмешалась в жизнь отдельной микроскопической частицы, но и пересмотрела жизнь коллективов частиц. Возникла *квантовая статистика*, выяснившая, что между частицами существует *несиловое взаимодействие*.

М.И.Каганов