ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 Записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества 1966

О РАЗЛОЖЕНИЯХ МНОГОМЕРНЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ БЕЗ ГАУССОВОЙ КОМПОНЕНТЫ

И. В. Островский

В теории разложений одномерных вероятностных законов, современное состояние которой отражено в монографии [3], получено большое количество глубоких и разнообразных результатов. Что же касается разложений многомерных вероятностных законов, то о них, насколько мы можем судить, к настоящему времени получены лишь следующие две теоремы:

1) (Г. Крамер [9]). Если сумма двух независимых случайных векторов распределена по закону Гаусса, то и каждый из этих векторов распределен по закону Гаусса.

2) (Г. Тейчер [16]). Если сумма двух независимых случайных векторов распределена по закону Пуассона, то и каждый из этих векторов распределен по закону Пуассона *.

В этой статье изучаются два специальных класса многомерных безгранично делимых законов, не имеющих гауссовой компоненты, и относительно законов, входящих в эти классы, устанавливается, что они имеют лишь безгранично делимые компоненты. Наши основные результаты можно рассматривать как обобщение результатов работы Д. А. Райкова [7].

К исследованию этих специальных классов законов нас побудил следующий вопрос, поставленный Ю. В. Линником [3]: всякий ли безгранично делимый закон с континуальным пуассоновым спектром имеет неразложимые компоненты? Из наших результатов вытекает отрицательный ответ на этот вопрос.

§ 1. Обозначения. Формулировки результатов

Будем придерживаться следующих обозначений: $R^{(n)}$ — вещественное, $C^{(n)}$ — комплексное n-мерные евклидовы пространства; $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, ... — их векторы (точки); $\operatorname{Re}\boldsymbol{x} = (\operatorname{Re} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_n)$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{x} = (\operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Im} x_n)$;

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k; \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}, \text{ если } \boldsymbol{x} \in R^{(n)},$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{|\operatorname{Re}\boldsymbol{x}|^2 + |\operatorname{Im}\boldsymbol{x}|^2}, \quad \text{если } \boldsymbol{x} \in C^{(n)}.$$

Если A и B — два множества в $R^{(n)}$, то через $A + B$ мы обозначаем множество $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y} \in A,\ \boldsymbol{z} \in B\}$, причем если B состоит из

* Этот результат есть многомерный аналог известной теоремы Д. А. Райкова [6] о разложениях закона Пуассона.

единственной точки z, то, вместо $A+B$, пишем $A+z$. Для записи выражения $A_1+A_2+\ldots+A_m$, где $A_1=A_2=\ldots=A_m=A$, мы используем символ $(m)A$. Через $-A$ мы обозначаем множество $\{x: -x\in A\}$.

Множество $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(m)A$ будем обозначать через $M(A)$; это множество можно определять как совокупность всех векторов, представимых в виде линейных комбинаций с натуральными коэффициентами, составленных из векторов множества A.

Все множества из $R^{(n)}$, которые встречаются в дальнейшем, являются борелевскими, и это специально не оговаривается.

Будем обозначать через $\mathbf{M}_+$ класс вполне конечных мер, определенных на классе борелевских множеств в $R^{(n)}$. Если $P\in\mathbf{M}_+$ и $P(R^{(n)})=1$, то меру P будем называть законом распределения вероятностей (з. р.). Функцию множеств, представимую в виде $\mu_1-\mu_2$, где $\mu_1,\mu_2\in\mathbf{M}_+$ будем называть зарядом. Будем говорить, что заряд μ сосредоточен во множестве A, если для любого E имеем $\mu(E)=\mu(E\cap A)$. Очевидно, что заряд μ сосредоточен в A в том и только в том случае, если из $E\cap A=\varnothing$ следует $\mu(E)=0$.

Преобразованием Фурье заряда μ мы называем функцию $\varphi(t;\mu)$, определенную при всех $t\in R^{(n)}$ равенством*

$$\varphi(t;\ \mu)=\int e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}\,d\mu.$$

Как известно, заряд однозначно определяется своим преобразованием Фурье. Преобразование Фурье от з. р. будем называть характеристической функцией (х. ф.) этого з. р.

Сверткой зарядов μ_1 и μ_2 мы называем заряд μ, определенный равенством **.

$$\mu(E)=\int\mu_1(E-x)\,d\mu_2$$

Свертку зарядов μ_1 и μ_2 будем обозначать через $\mu_1*\mu_2$. Напомним, что операция свертки коммутативна и ассоциативна и соотношение $\mu=\mu_1*\mu_2$ эквивалентно соотношению

$$\varphi(t;\ \mu)=\varphi(t;\ \mu_1)\,\varphi(t;\ \mu_2),\ \ t\in R^{(n)}.$$

Для записи выражения $\mu_1*\mu_2*\ldots*\mu_m$, где $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_m=\mu\in\mathbf{M}$, будем и пользовать обозначение μ^{m*}.

Если P, P_1 и P_2 суть з. р. и $P=P_1*P_2$, то з. р. P будем называть композицией з. р. P_1 и P_2, а з. р. P_1 и P_2 — компонентами з. р. P.

Обозначим через ε_c, $c\in R^{(n)}$, з. р., определяемый равенствами

$$\varepsilon_c(E)=1,\ \text{если}\ \ c\in E,\ \ \varepsilon_c(E)=0,\ \text{если}\ \ c\,\bar{\in}\,E.$$

Всякий з. р. P, очевидно, имеет компоненты ε_c и $P_c=P(E+c)$. Эти компоненты называются несобственными. З. р. P, имеющий только несобственные компоненты, называется неразложимым.

Закон P называется безгранично делимым (б. д.), если для каждого $m=2, 3, 4, \ldots$ существует з. р. P_m такой, что $P=P_m^{m*}$. По тео-

* Здесь, как и в дальнейшем, мы понимаем интеграл в смысле Лебега-Стильтьеса и область интегрирования не указываем, если ею является все пространство $R^{(n)}$.

** Правая часть этого равенства имеет смысл, так как $\mu(E-x)$ при $\mu\in\mathbf{M}$ является, как функция от x, измеримой по Борелю.

реме П. Леви ([13] стр. 220) з. р. P является б. д. законом в том и только том случае, когда его х. ф. $\varphi(t; P)$ допускает представление $(t \in R^{(n)})$

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{ i(b, t) - \sum_{j,\,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k + \int \left(e^{i(t,\,x)} - 1 - \frac{i(t,\,x)}{1+|x|^2} \right) d\nu_P \right\}, \quad (1.1)$$

где $b \in R^{(n)}$, $\sum\limits_{j,\,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k$ — неотрицательная квадратичная форма, ν_P — вполне σ-конечная мера на классе борелевских множеств в $R^{(n)}$, удовлетворяющая условию $\int |x|^2 (1+|x|^2)^{-1} d\nu_P < \infty$. Б. д. закон P будем называть б. д. законом без гауссовой компоненты, если

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k \equiv 0.$$

Обозначим через I_0 класс б. д. законов, имеющих лишь б. д. компоненты *.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты работы.

Теорема 1. *Если P — б. д. закон без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P сосредоточена в некотором ограниченном открытом выпуклом множестве A, обладающем свойством $A \cap (2)A = \varnothing$* то $P \in I_0$.

Эта теорема является обобщением следующей теоремы Д. А. Райкова [7]:

Если х. ф. одномерного б. д. закона P допускает представление $\varphi(t; P) = \exp\left\{ i\beta t + \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j (e^{i\varkappa_j t} - 1) \right\}$, где β — вещественно, $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$, $0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_r < 2\varkappa_1$, то $P \in I_0$.

Из теоремы 1 вытекает отрицательный ответ на сформулированный выше вопрос Ю. В Линника, ибо, например, одномерный б. д. закон с х. ф. $\exp\left\{ \int\limits_2^3 (e^{itx} - 1)\, dx \right\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, не имеет неразложимых компонент, а его пуассонов спектр* составляет отрезок [2, 3].

Теорема 2. *Если P — б. д. закон без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P принадлежит $\mathbf{M}_+$ и сосредоточена в некотором множестве A, лежащем в гипероктанте $\{x : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$ и обладающем свойством: любая конечная система векторов из A линейно независима в поле рациональных чисел, то $P \in I_0$.*

Эта теорема обобщает другую теорему Д. А. Райкова [7]:

Если х. ф. одномерного б. д. закона P допускает представление $\varphi(t; P) = \exp\left\{ i\beta t + \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j (e^{i\varkappa_j t} - 1) \right\}$, где β — вещественно, $\lambda_j, \varkappa_j > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$, и числа $\varkappa_j$ линейно независимы в поле рациональных чисел, то $P \in I_0$.

* Как было установлено А. Я. Хинчиным и Д. А. Райковым ([3], стр. 105) класс I_0 не совпадает с классом всех б. д. законов.

* Напомним, что пуасоновым спектром б. д. закона P называется наименьшее замкнутое множество в котором сосредоточена мера ν_P.

Отметим, что множество A, о котором идет речь в теореме 2, может иметь мощность континуума: это следует из установленного Д. А. Райковым и В. Рудиным (см. [1], стр. 209) факта существования совершенных множеств, любая конечная система векторов которых линейно независима в поле рациональных чисел.

Теоремы 1 и 2 мы выводим из следующей теоремы о разложениях б. д. законов без гауссовой компоненты:

Теорема 3. *Пусть P — б. д. закон без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P принадлежит $\mathbf{M}_+$, и сосредоточена в некотором ограниченном множестве A типа F_σ, лежащем в гипероктанте $(\boldsymbol{x} : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0)$, причем $0 = \{0, 0, \ldots, 0\} \bar{\in} A$. Если з. р. P_1 является компонентой з. р. P, то его х. ф. имеет вид*

$$\varphi(\boldsymbol{t}; P) = \exp\left\{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}) + \int (e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} - 1)\, d\lambda\right\}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{b} \in R^{(n)}$, λ — заряд, удовлетворяющий условиям:

а) *этот заряд сосредоточен во множестве $A_1 \cap M(A)$, где A_1 — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее множество A,*

б) *при $E \cap (2) M(A) = \varnothing$ имеем $\lambda(E) \geqslant 0$.*

Теорема 3 обобщает следующий результат Д. А. Райкова [7]:

Пусть P — одномерный б. д. закон, х. ф. которого представима в виде

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{i\beta t + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (e^{i\varkappa_j t} - 1)\right\},$$

где β — вещественно, λ_j, $\varkappa_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Если з. р. P_1 является компонентой з. р. P, то его х. ф. имеет вид

$$\varphi(t; P_1) = \exp\left\{i\beta' t + \sum_{s=1}^{r''} \lambda'_s (e^{i\varkappa'_s t} - 1)\right\},$$

где β' и λ'_s — вещественны, а числа $\varkappa'_s$ являются линейными комбинациями чисел $\varkappa_j$ с целыми неотрицательными коэффициентами и, кроме того, удовлетворяют неравенству $\max\limits_s \varkappa''_s \leqslant \max\limits_j \varkappa_j$.

В одномерном случае теоремы 1, 2 и 3 были приведены в нашей заметке [4]. В этом случае доказательство теоремы 3 опиралось на один результат Ю. В. Линника об общем виде компонент б. д. закона с ограниченным пуассоновым спектром ([3], стр. 191, лемма 6). Для рассмотрения многомерного случая потребовалось получить многомерный аналог результата Ю. В. Линника. Этот аналог представляет, как нам кажется, самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть P — б. д. закон, для которого мера ν_P сосредоточена в ограниченном выпуклом множестве $D \subset R^{(n)}$. Обозначим через $H(\boldsymbol{x})$ опорную функцию* множества D. Если з. р. P_1 является компонентой з. р. P, то его х. ф. имеет вид*

* Опорной функцией выпуклого множества $D \subset R^{(n)}$ называется функция $H(\boldsymbol{x})$, определенная на единичной сфере пространства $R^{(n)}$ равенством $H(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\boldsymbol{y} \in D} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P_1) = \exp\{f(\boldsymbol{t})\},$$

где $f(\boldsymbol{t})$ — *целая функция от* n *комплексных переменных* $t_1, \ldots, t_n$ $(\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n))$, *допускающая оценку*

$$|f(\boldsymbol{t})| \leqslant K(1 + |\boldsymbol{t}|^3)\left(1 + \exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\}\right), \quad \boldsymbol{t} \in C^{(n)},$$

где K — *не зависящая от* $\boldsymbol{t}$ *постоянная.*

Отметим, что в теореме 4 не предполагается, что мера ν_P принадлежит $\mathbf{M}_+$ и что з. р. P не имеет гауссовой компоненты.

§ 2. Доказательство теоремы 4

Если х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ n-мерного з. р. P аналитически продолжается до целой функции в $C^{(n)}$, то продолженную функцию будем обозначать снова через $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ и будем говорить, что х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ — целая функция в $C^{(n)}$. Нам понадобятся некоторые свойства таких х. ф.; установим сейчас их наличие.

Лемма 1. *Если х. ф.* $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ — *целая функция в* $C^{(n)}$, *то при всех* $\boldsymbol{t} \in C^{(n)}$ *справедливо равенство.*

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P) = \int e^{i(\mathbf{t},\, \mathbf{x})}\, dP, \tag{2.1}$$

в котором интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в $C^{(n)}$, *и справедливо неравенство*

$$|\varphi(\boldsymbol{t};\ P)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im}\boldsymbol{t},\ P). \tag{2.2}$$

Доказательство. Заметим сначала, что одномерный случай этой леммы хорошо известен и содержится в результатах Д. А. Райкова и П. Леви (см. напр. [3], стр. 60—61). При доказательстве леммы мы будем опираться на ее одномерный случай.

Положим $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Заметим, что если P—n-мерный з. р., то функции $\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P)$ $k = 1, \ldots, n$ суть х. ф. одномерных з. р. $P^{(k)}$, определяемых равенствами $P^{(k)}(E) = P(\{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) \in E\})$.

В условиях леммы функции $\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P)$ являются целыми в $C^{(1)}$ и, следовательно, интегралы $\int e^{-\eta x}\, dP^{(k)}$ сходятся при любом $\eta \in R^{(1)}$. Отсюда заключаем, что при любом $\boldsymbol{r} \in R^{(n)}$

$$\int e^{-(\mathbf{r},\, \mathbf{x})}\, dP = \int \prod_{k=1}^{n} \{e^{-n r_k x_k}\}^{\frac{1}{n}}\, dP \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int e^{-n r_k x_k}\, dP =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int e^{-n r_k x}\, dP^{(k)} < \infty.$$

Поэтому интеграл, стоящий справа в (2.1), сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в $C^{(n)}$ и является, следовательно, целой функцией от t. Поскольку соотношение (2.1) имеет место при $t \in R^{(n)}$ то оно сохранит силу из-за единственности аналитического продолжения всюду в $C^{(n)}$.

Отметим, что соотношение (2.2), являющееся непосредственным следствием (2.1), в одномерном случае играет важную роль в теории разложений вероятностных законов и называется «свойством хребта».

Теперь получим многомерный аналог следующей теоремы Д. А. Райкова — П. Леви ([3], стр. 69).

Если х. ф. $\varphi(t;\ P)$ одномерного з. р. P является целой функцией в $C^{(1)}$, то и х. ф. любой компоненты з. р. P является целой функцией в $C^{(1)}$.

Лемма 2. *Если х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ n-мерного з. р. P является целой функцией в $C^{(n)}$, то и х. ф. любой компоненты з. р. P является целой функцией в $C^{(n)}$.*

Доказательство. Пусть $P=P_1*P_2$. Тогда при всех $\boldsymbol{t}\in R^{(n)}$ справедливо

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P)=\varphi(\boldsymbol{t};\ P_1)\,\varphi(\boldsymbol{t};\ P_2).$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P)=\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P_1)\,\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P_2),\ k=1,\ \ldots,\ n,\ t\in R^{(1)},$$

(мы используем обозначения, введенные при доказательстве леммы 1) и, следовательно, $P^{(k)}=P_1^{(k)}*P_2^{(k)}$, $k=1,\ \ldots,\ n$. Но х. ф. $\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P)$ одномерного закона $P^{(k)}$ — целая функция в $C^{(1)}$. Значит, по теореме Райкова-Леви, и х. ф. $\varphi(t\boldsymbol{e}_k;\ P_j)$ закона $P_j^{(k)}$ — целая функция в $C^{(1)}$ Рассуждая далее так, как при доказательстве леммы 1, приходим к выводу, что х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t};\ P_j)$, $j=1,\ 2,$ — целые функции в $C^{(n)}$. Лемма доказана.

Пусть теперь з. р. P удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда мы имеем ($\boldsymbol{t}\in R^{(n)}$)

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P)=\exp\left\{i(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{t})-\sum_{j,\,k=1}^{n}\gamma_{jk}t_jt_k+\int_D\left(e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}-1-\frac{i(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x})}{1+|\boldsymbol{x}|^2}\right)d\boldsymbol{\nu}_P\right\}.$$

Положим

$$\psi(\boldsymbol{t})=\int_D\left(e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}-1-\frac{i(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x})}{1+|\boldsymbol{x}|^2}\right)d\nu_P. \tag{2.3}$$

Лемма 3. *Функция $\psi(\boldsymbol{t})$ аналитически продолжается до целой функции в $C^{(n)}$. Продолженная функция (будем обозначать ее снова через $\psi(\boldsymbol{t})$) допускает оценку**

$$|\psi(\boldsymbol{t})|\leqslant K_1(1+|\boldsymbol{t}|^2)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\}\right),\ \boldsymbol{t}\in C^{(n)}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из легко проверяемого соотношения

$$e^z=1+z+z^2k(z),\ \text{где}\ |k(z)|<1+e^{\operatorname{Re}z}\ (z\in C^{(1)}),$$

вытекает, что при $\boldsymbol{x}\in R^{(n)}$, $\boldsymbol{t}\in C^{(n)}$ справедлива оценка

$$\left|e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}-1-\frac{i(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x})}{1+|\boldsymbol{x}|^2}\right|=\left|-(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x})^2k(i(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x}))+\frac{i(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^2}{1+|\boldsymbol{x}|^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\boldsymbol{t}|^2|\boldsymbol{x}|^2(1+e^{-\operatorname{Im}(\mathbf{t},\,\mathbf{x})})+\frac{|\boldsymbol{t}|\,|\boldsymbol{x}|^3}{1+|\boldsymbol{x}|^2}\leqslant2|\boldsymbol{x}|^2(1+|\boldsymbol{t}|^2)(1+e^{-(\operatorname{Im}\mathbf{t},\,\mathbf{x})}).$$

Если $\boldsymbol{t}$ пробегает ограниченное множество пространства $C^{(n)}$, а $\boldsymbol{x}\in D$, то величина $(1+|\boldsymbol{t}|^2)(1+e^{-(\operatorname{Im}\mathbf{t},\,\mathbf{x})})$ ограничена некоторой не завися-

* Здесь и ниже буквой K с индексами мы обозначаем положительные постоянные (которые могут зависеть от рассматриваемой функции).

щей от t и x постоянной. Поэтому интеграл в (2.3) сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в $C^{(n)}$ и является, следовательно, целой функцией в $C^{(n)}$. Тем самым доказано первое утверждение леммы.

Получим теперь оценку (2.4). Имеем

$$|\psi(t)| \leqslant 2 \int\limits_D |x|^2 (1+|t|^2)(1+e^{-(\operatorname{Im} t,\, x)})\, d\nu_P \leqslant$$

$$\leqslant 2(1+|t|^2)(1+\exp\{\sup_{x\in D}(\operatorname{Im} t, -x)\}) \int\limits_D |x|^2\, d\nu_P =$$

$$= K_1(1+|t|^2)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|}\right)|\operatorname{Im} t|\right\}\right),$$

что и требовалось.

Замечание. Проводя оценку более тщательно (ср. [5]), можно доказать, что

$$|\psi(t)| \leqslant \varepsilon(t)(1+|t|^2)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|}\right)|\operatorname{Im} t|\right\}\right),$$

где $\varepsilon(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$. Это соотношение в одномерном случае установлено Ю. В. Линником ([3], гл. IX).

Итак, в силу леммы 3, х. ф. $\varphi(t;\, P)$ — целая функция в $C^{(n)}$. Пусть мы имеем $P = P_1 * P_2$. Тогда, по лемме 2, х. ф. $\varphi(t;\, P_1)$ и $\varphi(t;\, P_2)$ — тоже целые функции в $C^{(n)}$. Но тогда соотношение

$$\varphi(t;\, P) = \varphi(t;\, P_1)\,\varphi(t;\, P_2) \tag{2.5}$$

имеет место во всем пространстве $C^{(n)}$. Так как $\varphi(t;\, P)$ не обращается в нуль в $C^{(n)}$, то $\varphi(t;\, P_1)$ и $\varphi(t;\, P_2)$ также не обращаются в нуль. Поэтому, полагая

$$f_j(t) = \int\limits_0^1 \left\{[\varphi(t\tau;\, P_j)]^{-1} \sum_{k=1}^n t_k \frac{\partial\varphi(t\tau;\, P_j)}{\partial t_k}\right\} d\tau,\quad j=1,2,$$

видим, что функции $f_j(t)$ — целые в $C^{(n)}$. Очевидно,

$$\varphi(t;\, P_j) = \exp\{f_j(t)\},\quad f_j(0)=0,\quad j=1,\ 2.$$

Будем изучать функцию $f_1(t)$. При $r\in R^{(n)}$, $s\in R^{(n)}$ положим

$$u(r,\, s) = \operatorname{Re} f_1(r+is).$$

Лемма 4. Справедливо неравенство ($r\in R^{(n)}$, $s\in R^{(n)}$):

$$0 \leqslant u(0,\, s) - u(r,\, s) \leqslant K_2(1+|r|^2+|s|^2)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{s}{|s|}\right)|s|\right\}\right).$$

Доказательство. В силу (2.5) имеем

$$\frac{\varphi(is;\, P_1)}{\varphi(r+is;\, P_1)} = \frac{\varphi(is;\, P)}{\varphi(r+is;\, P)}\cdot\frac{\varphi(r+is;\, P_2)}{\varphi(is;\, P_2)}.$$

Отсюда в силу свойства хребта (2.2) получаем неравенство

$$1 \leqslant \left|\frac{\varphi(is;\, P_1)}{\varphi(r+is;\, P_1)}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(is;\, P)}{\varphi(r+is;\, P)}\right|,$$

которое, очевидно, можно переписать так:

$$0 \leqslant u(\boldsymbol{0},\ s) - u(\boldsymbol{r},\ s) \leqslant \sum_{j,\ k=1}^{n} \gamma_{jk} r_j r_k + \psi(is) -$$
$$- \frac{1}{2}[\psi(\boldsymbol{r} + is) - \psi(\boldsymbol{r} - is)].$$

Используя оценку функции ψ, даваемую леммой 3 получаем утверждение доказываемой леммы.

Лемма 5. *При* $\boldsymbol{s} \in R^{(n)}$ *справедливо неравенство*

$$|u(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s})| \leqslant K_3(1 + |\boldsymbol{s}|^2)\left(1 + \exp\left\{H\left(\frac{\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|}\right)|\boldsymbol{s}|\right\}\right).$$

Доказательство. Сначала сделаем следующее общее замечание: если х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ является целой функцией в $C^{(n)}$, то при $\boldsymbol{s} \in R^{(n)}$ справедливо

$$\ln \varphi(i\boldsymbol{s};\ P) \geqslant -K_4|\boldsymbol{s}|. \tag{2.6}$$

Для доказательства рассмотрим функцию $\vartheta(\tau) = \varphi(\boldsymbol{s}\tau;\ P)$, $\tau \in C^{(1)}$. Эта функция является целой в $C^{(1)}$ и удовлетворяет условию $|\vartheta(\tau)| \leqslant \vartheta(i \operatorname{Im} \tau)$. По теореме Дюге ([3], стр. 62), $\ln \vartheta(i\alpha)$ является выпуклой функцией относительно $\alpha \in R^{(1)}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\ln \vartheta(i\alpha) \geqslant \ln \vartheta(0) + \alpha\left(\ln \vartheta(i\tilde{\beta})\right)'_{\beta=0} = \alpha i \vartheta'(0) =$$
$$= \alpha i \left[\sum_{k=1}^{n} s_k \frac{\partial \varphi(i\tilde{\beta}\boldsymbol{s};\ P)}{\partial t_k}\right]_{\beta=0}.$$

Беря $\alpha = 1$ и замечая, что $\vartheta(i) = \varphi(i\boldsymbol{s};\ P)$, получаем (2.6).

Докажем теперь лемму. В силу (2.6) имеем

$$u(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}) = \ln \varphi(i\boldsymbol{s};\ P_1) \geqslant -K_5|\boldsymbol{s}|$$

и, с другой стороны,

$$u(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}) = \ln \varphi(i\boldsymbol{s};\ P_1) = \ln \varphi(i\boldsymbol{s};\ P) - \ln \varphi(i\boldsymbol{s};\ P_2) \leqslant$$
$$\leqslant \ln \varphi(i\boldsymbol{s};\ P) + K_6|\boldsymbol{s}| = -(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{s}) + \sum_{j,\ k=1}^{n} \gamma_{jk} s_j s_k + \psi(i\boldsymbol{s}) + K_6|\boldsymbol{s}|.$$

Используя для оценки функции $\psi(i\eta)$ лемму 3, получаем доказываемое неравенство.

Завершим теперь доказательство теоремы 4. Из лемм 4 и 5 и неравенства

$$|u(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})| \leqslant |u(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s})| + |u(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) - u(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s})|$$

получаем оценку

$$|u(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s})| \leqslant K_7(1 + |\boldsymbol{r}|^2 + |\boldsymbol{s}|^2)\left(1 + \exp\left\{H\left(\frac{\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|}\right)|\boldsymbol{s}|\right\}\right),\ (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s} \in R^{(n)}). \tag{2.7}$$

Обозначим $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, .., 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ и положим $\theta_k(\zeta) = f_1(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{e}_k\zeta)$, $\zeta \in C^{(1)}$. По формуле Шварца имеем

$$\theta_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} \theta_k(e^{i\delta})] \frac{e^{i\delta} + \zeta}{e^{i\delta} - \zeta} d\delta + i \operatorname{Im} \theta_k(0),\ (|\zeta| < 1).$$

Дифференцируя по ζ и полагая затем $\zeta=0$, получим

$$\theta'_k(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\operatorname{Re}\theta_k(e^{i\delta})]\,e^{-i\delta}\,d\delta,$$

откуда

$$\theta'_k(0)\leqslant 2\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}|\operatorname{Re}\theta_k(e^{i\delta})|.$$

Это соотношение в силу определения функции $\theta_k(\zeta)$ можно переписать так:

$$\left|\frac{\partial f_1(\boldsymbol{t})}{\partial t_k}\right|\leqslant 2\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}|u(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_k\cos\delta,\ \boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta)|,\quad (\boldsymbol{r}=\operatorname{Re}\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}=\operatorname{Im}\boldsymbol{t}).$$

В силу (2.7) имеем

$$\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}|u(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_k\cos\delta,\ \boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta)|\leqslant K_7\,(1+(|\boldsymbol{r}|+1)^2+(|\boldsymbol{s}|+1)^2)\times$$
$$\times\left(1+\exp\left\{\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}H\left(\frac{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta}{|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta|}\right)|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}_k\sin\delta|\right\}\right).$$

Так как

$$\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}H\left(\frac{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta}{|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta|}\right)|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta|=$$
$$=\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}\sup_{\boldsymbol{x}\in-D}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_k\sin\delta)\leqslant\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}[\sup_{\boldsymbol{x}\in-D}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{s})+\sup_{\boldsymbol{x}\in-D}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_k\sin\delta)]\leqslant$$
$$\leqslant H\left(\frac{\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|}\right)|\boldsymbol{s}|+K_8,$$

то мы приходим к оценке

$$\left|\frac{\partial f_1(\boldsymbol{t})}{\partial t_k}\right|\leqslant K_9\,(1+|\boldsymbol{t}|^2)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\}\right).$$

Далее имеем

$$f_1(\boldsymbol{t})=\int\limits_0^1\frac{d}{d\tau}f_1(\tau\boldsymbol{t})\,d\tau=\sum_{k=1}^n t_k\int\limits_0^1\frac{\partial f_1(\tau\boldsymbol{t})}{\partial t_k}\,d\tau,$$

откуда

$$|f_1(\boldsymbol{t})|\leqslant\sum_{k=1}^n|t_k|\int\limits_0^1\left|\frac{\partial f_1(\tau\boldsymbol{t})}{\partial t_k}\right|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^n|t_k|\int\limits_0^1 K_9\,(1+|\boldsymbol{t}|^2)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)\tau\,|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\}\right)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant K_{10}\,(1+|\boldsymbol{t}|^3)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\}\right).$$

Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть заряды μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно во множествах $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ типа F_σ. Тогда заряд $\mu=\mu_1*\mu_2$ сосредоточен во множестве $A=A^{(1)}+A^{(2)}$.*

Доказательство. Заметим, что A — множество типа F_σ и, сл
довательно, говорить о сосредоточенности заряда в нем имеет смысл
Действительно, беря неубывающие последовательности $\{A_m^{(1)}\}_m^\infty$
и $\{A_m^{(2)}\}_{m=1}^\infty$ ограниченных замкнутых множеств, сходящиеся соотве
ственно к $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, видим, что множества $A_m^{(1)}+A_m^{(2)}$ также образу
неубывающую последовательность ограниченных замкнутых множес
и что эта последовательность сходится к $A^{(1)}+A^{(2)}=A$.

Возьмем любое множество E такое, что $E\cap A=\varnothing$. Имеем

$$\mu(E)=\int\mu_1(E-\boldsymbol{x})\,d\mu_2=\int\limits_{A^{(2)}}\mu_1(E-\boldsymbol{x})\,d\mu_2=\int\limits_{A^{(2)}}\mu_1((E-\boldsymbol{x})\cap A^{(1)})\,d\mu_2.$$

Но подынтегральная функция в последнем интеграле равна нул
ибо при $\boldsymbol{x}\in A^{(2)}$, $E\cap A=\varnothing$, справедливо $(E-\boldsymbol{x})\cap A^{(1)}=\varnothing$. След
вательно, $\mu(E)=0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть меры μ_1 и μ_2 принадлежат $\mathbf{M}_+$, а мера* μ
$=\mu_1*\mu_2$ *сосредоточена во множестве A, лежащем в гипероктан*
$\{\boldsymbol{x}:x_1\geqslant b_1,\ldots,x_n\geqslant b_n\}$, $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}b_k>-\infty$, *причем* $\mu(\{\boldsymbol{b}\})>0$ $(\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n$
Тогда меры μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно во множеств
$A-\boldsymbol{b}^{(1)}$ *и* $A-\boldsymbol{b}^{(2)}$, *где* $\boldsymbol{b}^{(1)}+\boldsymbol{b}^{(2)}=\boldsymbol{b}$, *причем* $\mu_1(\{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^{(1)}\})>$
и $\mu_2(\{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^{(2)}\})>0$.

Доказательство. Сначала отметим, что если E_1, E_2 и E_1
$+E_2$ — борелевские множества, то

$$\mu(E_1+E_2)\geqslant\mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2).\tag{3.}$$

Действительно

$$\mu(E_1+E_2)=\int\mu_1([E_1+E_2]-\boldsymbol{x})\,d\mu_2\geqslant\int\limits_{E_2}\mu_1([E_1+E_2]-\boldsymbol{x})\,d\mu_2\geqslant$$
$$\geqslant\mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2),$$

ибо из $\boldsymbol{x}\in E_2$ следует $[E_1+E_2]-\boldsymbol{x}\supset E_1$.

Далее покажем, что меры μ_1 и μ_2 сосредоточены в гипероктан
вида $\{\boldsymbol{x}:x_1\geqslant a_1,\ldots,x_n\geqslant a_n\}$, $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k>-\infty$ (такой гипероктант буд
обозначать через $\Theta(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$).

Если бы это было не так, например, для меры μ_1, то мож
было бы найти последовательность шаров $U^{(m)}=\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^{(m)}|<$
$m=1,2,\ldots$ такую, что $\lim\limits_{m\to\infty}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}y_k^{(m)}=-\infty$ и $\mu_1(U^{(m)})>0$, $m=1,2,$
Обозначая через U произвольный шар, для которого $\mu_2(U)>0$,
в силу (3.1) имели бы

$$\mu(U^{(m)}+U)\geqslant\mu_1(U^{(m)})\,\mu_2(U)>0,\quad m=1,2,\ldots$$

Но это невозможно, так как $(U^{(m)}+U)\cap\Theta(\boldsymbol{b})=\varnothing$ при достаточ
большом m.

Обозначим теперь через $\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)})$ гипероктант, являющийся пе
сечением всех гипероктантов $\Theta(\boldsymbol{a})$, в которых сосредоточена мера
эта мера сосредоточена также и в $\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)})$. Соответствующий ги
роктант для меры μ_2 обозначим через $\Theta(\boldsymbol{a}^{(2)})$. Из леммы 1 следу
что $\Theta(\boldsymbol{b})\subset\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)})+\Theta(\boldsymbol{a}^{(2)})=\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)})$. С другой стороны, из

* Напомним, что мы условились рассматривать только борелевские множест
а из того, что $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — борелевские, не следует, что $A^{(1)}+A^{(2)}$ — борелевское
стр. 200).

равенства (3.1) легко получаем, что $\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)})\subset\Theta(\boldsymbol{b})$. Поэтому $\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)})=\Theta(\boldsymbol{b})$ и, значит, $\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)}=\boldsymbol{b}$.

Замечая, что $[\{\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)}\}-\boldsymbol{x}]\cap\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)})=\varnothing$ при всех $\boldsymbol{x}\in\Theta(\boldsymbol{a}^{(2)})$, за исключением $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^{(2)}$, получаем

$$\mu(\{\boldsymbol{b}\})=\int\mu_1(\{\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)}\}-\boldsymbol{x})\,d\mu_2=$$

$$=\int\limits_{\Theta(\boldsymbol{a}^{(2)})}\mu_1([\{\boldsymbol{a}^{(1)}+\boldsymbol{a}^{(2)}\}-\boldsymbol{x}]\cap\Theta(\boldsymbol{a}^{(1)}))\,d\mu_2=\mu_1(\{\boldsymbol{a}^{(1)}\})\,\mu_2(\{\boldsymbol{a}^{(2)}\}).$$

Так как по условию $\mu(\{\boldsymbol{b}\})>0$, то $\mu_1(\{\boldsymbol{a}^{(1)}\})>0$ и $\mu_2\{(\boldsymbol{a}^{(2)}\})>0$.

Возьмем любое множество E такое, что $E\cap(A-\boldsymbol{a}^{(2)})=\varnothing$ В силу (3.1) будем иметь

$$\mu_1(E)\,\mu_2(\{\boldsymbol{a}^{(2)}\})\leqslant\mu(E+\boldsymbol{a}^{(2)})=\mu([E+\boldsymbol{a}^{(2)}]\cap A)=0,$$

ибо $[E+\boldsymbol{a}^{(2)}]\cap A=\varnothing$. Тем самым доказано, что мера μ_1 сосредоточена на множестве $A-\boldsymbol{a}^{(2)}$. Аналогично доказывается, что мера μ_2 сосредоточена на $A-\boldsymbol{a}^{(1)}$. Остается положить $\boldsymbol{b}^{(1)}=\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}=\boldsymbol{a}^{(1)}$.

Лемма 3. *Пусть μ — заряд и пусть его преобразование Фурье $\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu)$ аналитически продолжается до целой функции в $C^{(n)}$. Предположим, что продолженная функция (будем обозначать ее снова через $\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu)$) при любом $\theta>0$ допускает оценку*

$$|\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu)|\leqslant C_\theta(1+|\boldsymbol{t}|^d)\exp\left\{\left[H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)+\theta\right]|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\},$$

где d — натуральное число, C_θ — постоянная, зависящая лишь от θ, а $H(\boldsymbol{x})$ — опорная функция замкнутого ограниченного выпуклого множества $D\subset R^{(n)}$. Тогда заряд μ сосредоточен во множестве $-D$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta>0$ и положим $\lambda_\delta(E)=\delta^{-n}\omega^{(n)}(E\cap\{\boldsymbol{x}:|x_1|\leqslant\delta,\,..,\,|x_n|\leqslant\delta\})$, где $\omega^{(n)}$ — лебегова мера в $R^{(n)}$.

Обозначим через μ_δ свертку $\mu*\lambda_\delta^{(d+1)*}$. Так как

$$\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu_\delta)=\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu)\,|\varphi(\boldsymbol{t};\,\lambda_\delta)]^{d+1}=\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu)\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\delta t_k}{\delta t_k}\right]^{d+1}.$$

то функция $\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu_\delta)$ продолжается до целой в $C^{(n)}$ и продолженная функция (мы обозначаем ее снова через $\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu_\delta)$) удовлетворяет условиям:

$$\int|\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu_\delta)|^2\,d\omega^{(n)}<\infty,$$

$$|\varphi\,\boldsymbol{t}:\,\mu_\delta)|\leqslant\widetilde{C}_\theta\exp\left\{\left[H\left(\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{t}}{|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|}\right)+\theta+n(d+1)\,\delta\right]|\operatorname{Im}\boldsymbol{t}|\right\},\quad \boldsymbol{t}\in C^{(n)}.$$

Применяя теорему Полиа-Планшереля (см. напр. [8], стр. 401), получаем для $\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu_\delta)$ представление

$$\varphi(\boldsymbol{t};\,\mu_\delta)=\int e^{i\,(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}\,\psi_\delta(\boldsymbol{x})\,d\omega^{(n)},$$

где $\psi_\delta(\boldsymbol{x})$ — измеримая по Лебегу функция с $\int|\psi_\delta(\boldsymbol{x})|^2\,d\omega^{(n)}<\infty$, равная нулю вне выпуклого множества $-D_\delta$, получаемого из множе-

ства $-D$ присоединением всевозможных шаров с центрами в $-D$ р
диуса $n(d+1)\delta$. Таким образом заряд μ_δ имеет вид

$$\mu_\delta(E)=\int_E \psi_\delta(x)\,d\omega^{(n)}$$

и, следовательно, сосредоточен в $-D_\delta$.

Пусть $\mu=\mu^{(1)}-\mu^{(2)}$, где $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}\in \mathbf{M}_+$, а E — интервал в R
являющийся интервалом непрерывности и для $\mu^{(1)}$, и для $\mu^{(2)}$. Ес
мы покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta(E)=\mu(E), \qquad (3$$

то отсюда будет следовать утверждение леммы.

Но $\mu^{(j)}*\lambda_\delta^{(d+1)*}\in \mathbf{M}_+$ $(j=1,\ 2)$, и при $\delta\to 0$

$$\varphi(t;\ \mu^{(j)}*\lambda_\delta^{(d+1)})=\varphi(t;\ \mu^{(j)})\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\delta t_k}{\delta t_k}\right]^{d+1}\to\varphi(t;\ \mu^{(j)})$$

равномерно на любом ограниченном множестве в $R^{(n)}$. Использ
принцип непрерывного соответствия ([2], стр. 129) между мера
и $\mathbf{M}_+$ и их преобразованиями Фурье, получаем, что $\lim\limits_{\delta\to 0}(\mu^{(j)}*\lambda_\delta^{(d+1)*}(E)$
$=\mu^{(j)}(E)$ для каждого $E\subset R^{(n)}$, являющегося интервалом непреры
ности для $\mu^{(j)}$, откуда следует (3.2).

Приступим к доказательству теоремы 3.

Пусть P — закон, удовлетворяющий условиям теоремы 3 и пус
$P=P_1*P_2$, где P_1 и P_2 — некоторые з. р. По теореме 4 х. ф. $\varphi(t;$
имеет вид

$$\varphi(t;\ P_1)=\exp f(t),$$

где $f(t)$ — целая функция в $C^{(n)}$, допускающая оценку

$$|f(t)|\leqslant K(1+|t|^3)\left(1+\exp\left\{H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|}\right)|\operatorname{Im} t\,|\right\}\right), \qquad (3$$

где K — не зависящая от t постоянная, а $H(x)$ — опорная функ
множества $-A_1$.

Так как закон P не имеет гауссовой компоненты и $\nu_P\in\mathbf{M}_+$,
выражение (1.1) для его х. ф. $\varphi(t;\ P)$ можно записать в виде

$$\varphi(t;\ P)=\exp\left\{i(b',\ t)+\int(e^{i(t,\,x)}-1)\,d\nu_P\right\}.$$

где $b'\in R^{(n)}$. Будем считать, что $b'=0$. Это, очевидно, не уменьш
общности наших рассуждений.

Имеем

$$\varphi(t;P)=\exp\left\{\int(e^{i(t,\,x)}-1)\,d\nu_P\right\}=e^{-\nu_P(A)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left\{\int e^{i(t,\,x)}\,d\nu_P\right\}^m=$$

$$=e^{-\nu_P(A)}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int e^{i(t,\,x)}\,d\nu_P^{m*}\right\}=e^{-\nu_P(A)}\int e^{i(t,\,x)}d\left\{\varepsilon_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\nu_P^{m*}}{m!}\right\}$$

Поэтому

$$P=e^{-\nu_P(A)}\left(\varepsilon_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\nu_P^{m*}}{m!}\right).$$

В силу леммы 1 отсюда следует, что закон P сосредоточен во множестве

$$\{\mathbf{0}\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} (m) A = \{\mathbf{0}\} \cup M(A). \tag{3.4}$$

Это множество лежит в гипероктанте $\{\boldsymbol{x} : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$, а $P(\{\mathbf{0}\}) = e^{-\gamma_P(A)} > 0$. Поэтому применима лемма 2, и мы заключаем, что законы P_1 и P_2 сосредоточены соответственно во множествах $[\{\mathbf{0}\} \cup M(A)] - \boldsymbol{b}^{(1)}$ и $[\{\mathbf{0}\} \cup M(A)] - \boldsymbol{b}^{(2)}$, где $\boldsymbol{b}^{(1)} + \boldsymbol{b}^{(2)} = 0$, причем $P_1(\{\boldsymbol{b}^{(2)}\}) > 0$ и $P_2(\{\boldsymbol{b}^{(1)}\}) > 0$.

В дальнейшем мы будем считать, что $\boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{b}^{(2)} = 0$. Это не уменьшает общности нашего исследования, так как вместо законов P_j, $j = 1, 2$, можно рассматривать их „сдвиги“ $P_j * \varepsilon_{-\mathbf{b}^{(j)}}$, $j = 1, 2$. Очевидно, композиция этих „сдвигов“ тоже равна P, а х. ф. „сдвига“ отличается от х. ф. соответствующего закона P_j лишь множителем $\exp(i(\boldsymbol{b}^{(j)}, \boldsymbol{t}))$. Итак, законы P_1 и P_2 у нас сосредоточены во множестве (3.4) и $P_j(\{\mathbf{0}\}) > 0$ $j = 1, 2$.

Очевидно, мера $\widetilde{P}_1 = P_1 - P_1(\{\mathbf{0}\})\varepsilon_0$ принадлежит $\mathbf{M}_+$ и

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P_1) = P_1(\{\mathbf{0}\}) + \int e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}\, d\widetilde{P}_1.$$

Так как мера $\widetilde{P}_1$ сосредоточена в гипероктанте $\{\boldsymbol{x} : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$ с исключенной точкой $\mathbf{0}$, то числа $s_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ можно выбрать столь большими, чтобы выполнялось неравенство

$$\int e^{-(\mathbf{s},\,\mathbf{x})}\, d\widetilde{P}_1 < P_1(\{\mathbf{0}\}),\quad \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n).$$

Положим

$$\widetilde{P}_{1s}(E) = \int_E e^{-(\mathbf{s},\,\mathbf{x})}\, d\widetilde{P}_1.$$

Очевидно, что мера $\widetilde{P}_{1s}$ принадлежит $\mathbf{M}_+$, удовлетворяет условию $\widetilde{P}_{1s}(R^{(n)}) < P_1(\{\mathbf{0}\})$ и сосредоточена в том же множестве, что и $\widetilde{P}_1$, а именно на $M(A)$.

При $\boldsymbol{t} \in R^{(n)}$ имеем

$$f(\boldsymbol{t} + i\boldsymbol{s}) = \ln \varphi(\boldsymbol{t} + i\boldsymbol{s};\ P_1) = \ln \left\{ P_1(\{\mathbf{0}\}) + \int e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}\, d\widetilde{P}_{1s} \right\} =$$

$$= \ln P_1(\{\mathbf{0}\}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\,[P_1(\{\mathbf{0}\})]^m} \left\{ \int e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})} d\widetilde{P}_1 \right\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\mu_s = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\,[P_1(\{\mathbf{0}\})]^m}\, \widetilde{P}_{1s}^{m*}. \tag{3.5}$$

Этот ряд, очевидно, сходится абсолютно и равномерно на классе борелевских множеств и, следовательно, μ_s является зарядом. Ясно, что заряд μ_s сосредоточен во множестве $M(M(A)) = M(A)$ и

$$f(t + is) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{i(t,x)}\, d\mu_s \quad (t \in R^{(n)}). \tag{3.6}$$

Так как $f(t)$ — целая функция от t и удовлетворяет неравенств (3.3), то $f(t + is)$ — тоже целая функция от t и тоже удовлетворя (3.3) — только, возможно, с другой постоянной K (заметим, чт

$$H\left(\frac{\operatorname{Im} t + s}{|\operatorname{Im} t + s|}\right) |\operatorname{Im} t + s| = \sup_{x \in -A_1} (x, \operatorname{Im} t + s) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in -A_1} (x, \operatorname{Im} t) + \sup_{x \in -A_1} (x, s)).$$

Отсюда следует, что справедливо неравенство

$$|f(t + is)| \leqslant 2K(1 + |t|^3) \exp\left\{H^+\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|}\right) |\operatorname{Im} t|\right\}, \quad t \in C^{(n)}, \tag{3.7}$$

где $H^+(x) = \max\{H(x), 0\}$. Заметим, что $H^+(x)$ является опорн функцией наименьшего замкнутого выпуклого множества (буде обозначать его через — A_2), содержащего множество $\{0\} \cup (-A_1)$.

В силу (3.6), (3.7) и леммы 3 заключаем, что заряд μ_s сосред точен во множестве A_2. Так как ранее мы установили, что этот з ряд сосредоточен и во множестве $M(A)$, то он сосредоточен $A_2 \cap M(A)$.

Так как множество A, а, следовательно, и A_2, ограничено, то прав часть соотношения (3.6) является целой функцией от t и соотношен (3.6) имеет место во всем пространстве $C^{(n)}$. Положим

$$\lambda(E) = \int_E e^{(s,x)} d\mu_s. \tag{3.8}$$

Очевидно, заряд λ сосредоточен во множестве $A_2 \cap M(A)$ и справедли

$$f(t) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{i(t,x)}\, d\lambda. \tag{3.9}$$

Так как $f(0) = 0$, то $\ln P_1(\{0\}) = -\lambda(R^{(n)})$, и из (3.9) следует соотн шение

$$f(t) = \int (e^{i(t,x)} - 1)\, d\lambda.$$

Покажем, что множество $A_2 \cap M(A)$ совпадает с $A_1 \cap M(A)$. Д этого заметим, что если D_1 и D_2 — два замкнутых выпуклых мн жества с опорными функциями соответственно $H_1(x)$ и $H_2(x)$, опорной функцией множества $D_1 + D_2$ является $H_1(x) + H_2(x)$. Если множество $A_1 \cap M(A)$ не совпадало с $A_2 \cap M(A)$, то существовал вектор y, удовлетворяющий условиям $y \overline{\in} A_1$, $y \in A_2$, $y \in M(A)$. То можно было бы найти вектор $x \in R^{(n)}$, $|x| = 1$, такой, (что $(x, y) > H(x)$, $(x, y) \leqslant H^+(x)$ и, следовательно, $H(x) < 0$. Так как п некотором натуральном m мы имели бы $y \in (m) A \subset (m) A_1$, то долж было бы выполняться еще и неравенство $(x, y) \leqslant mH(x)$, что н возможно.

Остается показать, что если $E \cap (2) M(A) = \varnothing$, то $\lambda(E) \geqslant 0$. Для этого воспользуемся соотношениями (3.5) и (3.8). Поскольку заряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\,[P_1(\{0\})]^m} \tilde{P}_{1s}^{m*}$$

сосредоточен во множестве $\bigcup\limits_{m=2}^{\infty} (m) M(A) = (2) M(A)$, то

$$\mu_s(E) = [P_1(\{0\})]^{-1} \tilde{P}_{1s}(E) \geqslant 0.$$

если $E \cap (2) M(A) = \varnothing$. В силу (3.8) тогда и $\lambda(E) \geqslant 0$, что и требовалось.

В одномерном случае мы можем усилить теорему 3 следующим образом.

Теорема 3′. *Пусть P — одномерный б. д. закон, х. ф. которого представима в виде*

$$\varphi(t;\, P) = \exp\left\{i\beta t + \int (e^{itx} - 1)\, d\nu + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{i\varkappa_m t} - 1)\right\},$$

где β — вещественно, $\nu \in \mathbf{M}_+$, $\lambda_m \geqslant 0$, $\varkappa_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и выполнены условия:

1) *мера ν сосредоточена в ограниченном множестве $A \subset (0, \infty)$ типа F_σ,*

2) *$\varkappa_1 > c = \sup\limits_{x \in A} x$, а все числа $\varkappa_{m+1}/\varkappa_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ суть натуральные отличные от единицы,*

3) *существует постоянная $K > 0$ такая, что*

$$\lambda_m = O(\exp\{-K\varkappa_m^2\}),\ m \to +\infty.$$

Если P_1 — компонента закона P, то мы имеем

$$\varphi(t;\, P_1) = \exp\left\{i\beta' t + \int (e^{itx} - 1)\, d\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (e^{i\varkappa_m t} - 1)\right\}, \tag{3.10}$$

где β' — вещественно, λ — заряд, сосредоточенный во множестве $(0, c] \cap M(A)$ и удовлетворяющий условиям:

а) *$\lambda(E) \geqslant 0$, если $E \cap (2) M(A) = \varnothing$,*

б) *$\lambda(\{c\}) \geqslant 0$, а числа λ'_m таковы, что $0 \leqslant \lambda'_m \leqslant \lambda_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство опирается на следующий результат автора [5], представляющий некоторое усиление одного результата Ю. В. Линника ([3], стр. 212, теорема 9, 12. 1).

Теорема ([5]). *Пусть P — одномерный закон, х. ф. которого представима в виде*

$$\varphi(t;\, P) = \exp\left\{l(it) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{i\varkappa_m t} - 1)\right\},$$

где $l(z)$ — целая функция в $C^{(1)}$, вещественная при $z \in R^{(1)}$ и допускающая оценку

$$l(z) = O((|z|^2 + 1)\exp\{c\,|\mathrm{Re}\, z|\}),\ z \in C^{(1)},$$

(c — положительная постоянная); $\varkappa_1 > c$, а все числа $\varkappa_{m+1}/\varkappa_m$ $(m = 1, 2 \ldots)$ суть натуральные отличные от единицы; существует

постоянная $K>0$ *такая, что*

$$\lambda_m = O(\exp\{-K\varkappa_m^2\}),\quad m\to+\infty.$$

Если P_1 — *компонента закона* P, *то мы имеем*

$$\varphi(t, P_1) = \exp\left\{l_1(it) + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda'_m(e^{i\varkappa_m t}-1)\right\},$$

где $l_1(z)$ — *целая функция в* $C^{(1)}$, *вещественная при* $z\in R^{(1)}$ *и допу*
кающая оценку

$$l_1(z) = O((|z|^3+1)\exp\{c|\operatorname{Re} z|\}),\quad z\in C^{(1)}; \tag{3.1}$$

а числа λ'_m *таковы, что* $0\leqslant\lambda'_m\leqslant\lambda_m$ $(m=1, 2, \ldots)$.

Если закон P удовлетворяет условиям теоремы 3, то он удовлетворяет и условиям последней теоремы $(l(z)=\beta z+\int(e^{zx}-1)\,d\nu)$. Поэтому для х. ф. $\varphi(t; P_1)$ имеет место представление

$$\varphi(t; P_1) = \exp\{f(t)\},$$

где

$$f(t) = l_1(it) + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda'_m(e^{i\varkappa_m t}-1) \tag{3.1}$$

— очевидно является целой функцией в $C^{(1)}$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы придем к заключению, что при вещественных t и достаточно больш $s>0$ справедливо соотношение

$$f(t+is) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{itx}\,d\mu_s, \tag{3.1}$$

где μ_s — заряд, определяемый формулой (3.5) и сосредоточенный множестве $M(A\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\varkappa_m\})$.

Положим

$$\mu'_s = \mu_s - \sum_{m=1}^{\infty}\lambda'_m e^{-\varkappa_m s}\,\varepsilon_{\varkappa_m}. \tag{3.1}$$

Из (3.12) и (3.13) получаем, что при вещественных t

$$\int e^{itx}\,d\mu'_s = l_1(i(t+is)) - \ln P_1(\{0\}) - \sum_{m=1}^{\infty}\lambda'_m e^{-\varkappa_m s}.$$

Учитывая оценку (3.11) для функции $l_1(z)$ и применяя лемму 3, з ключаем, что заряд μ'_s сосредоточен на отрезке $[-c, c]$, а, следов тельно, и на множестве $[-c, c]\cap M(A\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\varkappa_m\}) = (0, c]\cap M(A)$.

Из (3.13) и (3.14) вытекает, что

$$f(t+is) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{itx}\,d\mu'_s + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda'_m e^{-\varkappa_m s}\,e^{i\varkappa_m t}.$$

Полагая $\lambda(E)=\int\limits_E e^{xs}d\mu_s'$, видим, что заряд λ сосредоточен во множестве $(0, c]\cap M(A)$ и справедливо соотношение (3.10). То, что $\lambda(E)\geqslant 0$ при $E\cap(2)\ M(A)=\varnothing$, доказывается так же, как и в теореме 3. Остается установить, что $\lambda(\{c\})\geqslant 0$.

Для этого воспользуемся „свойством хребта" (2.2). Запишем тождество, вытекающее из (3.10) и того обстоятельства, что числа $\varkappa_{m+1}/\varkappa_m$ — натуральные:

$$\left|\frac{\varphi(i\tau;\ P_1)}{\varphi\left(\frac{2\pi}{\varkappa_1}+i\tau;\ P_1\right)}\right|=\exp\left\{2\int e^{-\tau x}\sin^2\frac{\pi x}{\varkappa_1}\,d\lambda\right\},\quad \tau\in R^{(1)}.$$

В силу «свойства хребта» левая часть этого соотношения не меньше единицы, и поэтому выражение, стоящее справа под знаком exp, не отрицательно. Так как при $\tau\to-\infty$

$$\int e^{-\tau x}\sin^2\frac{\pi x}{\varkappa_1}\,d\lambda=(\lambda(\{c\})+o(1))\,e^{-\tau c}\sin^2\frac{\pi c}{\varkappa_1},$$

то соотношение $\lambda(\{c\})<0$ невозможно, что и требовалось.

§ 4. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Сначала сделаем следующее замечание. Условие теоремы 3, состоящее в том, что множество A лежит в гипероктанте $\{\boldsymbol{x}: x_1\geqslant 0, \ldots, x_n\geqslant 0\}$, можно ослабить, заменив его следующим: множество A лежит в „косоугольном" гипероктанте $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n,\ \alpha_1\geqslant 0, \ldots, \alpha_n\geqslant 0\}$, где $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — линейно независимые орты в $R^{(n)}$.

Действительно, пусть P—закон, удовлетворяющий условиям теоремы 3 в таком варианте. Рассмотрим линейное преобразование $\boldsymbol{y}=F\boldsymbol{x}$ пространства $R^{(n)}$ на себя, определяемое соотношениями $F\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0, \ldots 0)$, $F\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $F\boldsymbol{e}_n=(0, 0, 0, \ldots, 1)$, и переводящее, следовательно, наш „косоугольный" гипероктант в прямоугольный $\{\boldsymbol{y}: y_1\geqslant 0, \ldots, y_n\geqslant 0\}$. Положим $P_F(E)=P(\{\boldsymbol{x}: F\boldsymbol{x}\in E\})$. Если $P=P_1 * P_2$, то, очевидно, $P_F=P_{1F} * P_{2F}$. Поэтому, применяя теорему 3 (в первоначальном варианте), получим выражение для $\varphi(\boldsymbol{t};\ P_{1F})$. Переходя от P_{1F} к P_1 при помощи обратного преобразования F^{-1}, убеждаемся в справедливости замечания.

Пусть теперь закон P удовлетворяет условиям теоремы 1. Из условия $A\cap(2)A=\varnothing$ легко следует, что точка $\boldsymbol{0}$ не может быть предельной точкой множества A. Поэтому из $\int|\boldsymbol{x}|^2(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{-1}d\nu_P<\infty$ следует $\nu_P(A)<\infty$ и, значит, $\nu_P\in\mathbf{M}_+$. В силу выпуклости и того, что $\boldsymbol{0}\,\bar{\in}\,A$, множество A лежит в некотором косоугольном гипероктанте рассмотренного в замечании вида. Применяя замечание, заключаем, что х. ф. любой компоненты P_1 закона P имеет вид (1.2). В силу условий, которые мы наложили на множество A, имеем $A_1\cap M(A)=A$, $A\cap(2)M(A)=\varnothing$, поэтому $\lambda\in\mathbf{M}_+$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 3' следует, что в одномерном случае теорема 1 допускает усиление.

Теорема 1'. *Пусть P — б. д. закон, х. ф. которого представима в виде*

$$\varphi(t, P) = \exp\left\{i\beta t + \int\limits_{[b,\, c]} (e^{itx} - 1)\, d\nu + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{i\varkappa_m t} - 1)\right\}.$$

где β — *вещественно*; $0 < b < c \leqslant 2b < \infty$; $\nu \in \mathbf{M}_+$; $\varkappa_1 > c$, *а числа* $\varkappa_{m+1}/\varkappa_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — *натуральные отличные от единицы*; $\lambda_m \geqslant$ > 0 $(m = 1, 2, \ldots)$ *и существует постоянная* $K > 0$ *такая, что*

$$\lambda_m = O(\exp\{-K\varkappa_m^2\}),\ m \to +\infty.$$

Тогда $P \in I_0$.

Заметим, что теорема 1′ даже при $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$ несколько сильнее одномерного случая теоремы 1, ибо если $c = 2b$, то

$$[b, c] \cap (2)[b, c] = \{c\} \neq \varnothing.$$

Заметим также, что условие $c \leqslant 2b$ существенно для справедливости утверждения теоремы 1′. Это непосредственно вытекает из следующего результата Р. Шимицу [15], представляющего усиление известной теоремы Г. Крамера [10].

Теорема. ([15]). *Пусть* P — *одномерный б. д. закон. Если можно указать постоянные* k, b *и* c, $k > 0$, $0 < b < 2b < c < \infty$, *такие, что для любого* $E \subset R^{(1)}$

$$\nu_P(E) \geqslant k\omega^{(1)}(E \cap [b, c]) \quad (\omega^{(1)} \text{— лебегова мера в } R^{(1)})$$

то закон P *не принадлежит к* I_0.

Доказательство теоремы 2. Пусть P — закон, удовлетворяющий условиям теоремы и пусть $P = P_1 * P_2$. Так как в любом ν_P-измеримом множестве содержится подмножество с тем же значением ν_P и типа F_σ, то можно считать множество A множеством типа F_σ. Поэтому применима теорема 3, и мы имеем

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P_j) = \exp\left\{i(\boldsymbol{b}_j,\ \boldsymbol{t}) + \int (e^{i(\mathbf{t},\, \mathbf{x})} - 1)\, d\lambda_j\right\},\ j = 1, 2,$$

где $\boldsymbol{b}_j \in R^{(n)}$, а заряды λ_j сосредоточены во множестве $A_1 \cap M(A)$. Будем считать, что $\boldsymbol{b}_j = 0$, $j = 1, 2$, — это, конечно, не уменьшает общности.

Так как векторы множества A линейно независимы в поле рациональных чисел, то среди множеств A, $(2)A$, $(3)A$, ... никакие два не имеют общих точек. Поэтому $A \cap (2)M(A) = \varnothing$ и, следовательно, при любом $E \subset A$ справедливо $\lambda_j(E) \geqslant 0$, $j = 1, 2$.

Положим

$$b_k = \sup_{\boldsymbol{x} \in A} x_k,\ D_0 = \{\boldsymbol{x} : 0 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant b_n\},$$

$$D_1 = \left\{\boldsymbol{x} : 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{b_1}{2}, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{b_n}{2}\right\},$$

$$\overline{\lambda}_{j1}(E) = \lambda_j(E \cap A \cap [D_0 \setminus D_1]),\ \lambda_{j1} = \lambda_j - \overline{\lambda}_{j1}. \tag{4.1}$$

Заметим, что множества A и A_1 лежат в D_0 и $\overline{\lambda}_{j1} \in \mathbf{M}_+$.

Рассмотрим заряд

$$P_{j1} = e^{-\lambda_{j1}(R^{(n)})}\left\{\varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j1}^{m*}}{m!}\right\}.$$

Покажем, что этот заряд является вероятностным законом. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $P_{j1} \in \mathbf{M}_+$.

Легко видеть, что заряд λ_{j1} сосредоточен во множестве $\{D_0 \cap M(A)\} \setminus \{[D_0 \setminus D_1] \cap A\}$, которое, как нетрудно проверить, совпападает с $M(A \cap D_1) \cap D_0$. Поэтому заряд P_{j1} сосредоточен во множестве

$$\{0\} \cup M(M(A \cap D_1) \cap D_0) = \{0\} \cup M(A \cap D_1). \tag{4.2}$$

Рассмотрим разность

$$e^{\lambda_j (R^{(n)})} P_j - e^{\lambda_{j1} (R^{(n)})} P_{j1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{m*} - \lambda_{j1}^{m*}}{m!}. \tag{4.3}$$

Так как

$$\lambda_j^{m*} - \lambda_{j1}^{m*} = (\lambda_{j1} + \overline{\lambda}_{j1})^{m*} - \lambda_{j1}^{m*} \quad \sum_{r=1}^{m-1} C_m^r \overline{\lambda}_{j1}^{r*} * \lambda_{j1}^{(m-r)*} + \overline{\lambda}_{j1}^{m*},$$

то заряд $\lambda_j^{m*} - \lambda_{j1}^{m*}$ сосредоточен во множестве

$$Q_m = \bigcup_{r=1}^{m-1} \{(r) [A \cap (D_0 \setminus D_1)] +$$
$$+ (m-r) [M(A \cap D_1) \cap D_1]\} \cup (m) [A \cap (D_0 \setminus D_1)].$$

Всякий вектор $e \in Q_m$ принадлежит $M(A)$, причем в представлении вектора e линейной комбинацией с натуральными коэффициентами векторов из A векторы из $A \cap (D_0 \setminus D_1)$ обязательно должны участвовать. Поэтому $e \overline{\in} M(A \cap D_1)$. Мы приходим к заключению, что множество $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$, в котором сосредоточен заряд (4.3), не пересекается с множеством (4.2), в котором сосредоточен заряд P_{j1}.

Отсюда следует, что для любого $E \subset \{0\} \cup M(A \cap D_1)$ справедливо $e^{\lambda_j (R^{(n)})} P_j(E) - e^{\lambda_{j1} (R^{n)})} P_{j1}(E) = 0$ и, значит, $P_{j1}(E) \geqslant 0$. Тем самым доказано, что $P_{j1} \in \mathbf{M}_+$, $j = 1, 2$.

Положим $E_{31} = P_{11} * P_{21}$. Так как, очевидно,

$$\varphi(t;\ P_{j1}) = \exp\left\{\int (e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} - 1)\, d\lambda_{j1}\right\},\ j = 1, 2,$$

то

$$\varphi(t;\ P_{31}) = \exp\left\{\int (e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} - 1)\, d(\lambda_{11} + \lambda_{21})\right\}.$$

Поскольку

$$(\lambda_{11} + \lambda_{21})(E) = (\lambda_1 + \lambda_2)(E) - (\overline{\lambda}_{11} + \overline{\lambda}_{21})(E) =$$
$$= \nu_P\, E) - \nu_P (E \cap A \cap (D_0 \setminus D_1)) = \nu_P (E \cap A \cap D_1),$$

то заряд $\lambda_{11} + \lambda_{21}$ принадлежит $\mathbf{M}_+$ и сосредоточен во множестве $A \cap D_1$. Применяя теорему 3 к законам P_{31}, P_{11} и P_{21}, получаем, что заряды λ_{j1}, $j = 1, 2$, сосредоточены во множестве $D_1 \cap M(A \cap D_1)$. Отсюда, в силу (4.1), заключаем, что при любом $E \subset D_0/D_1$ имеем $\lambda_j(E \geqslant 0,\ j=1, 2$.

Далее положим

$$D_2 = \left\{x : 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{b_1}{2^2},\ \ldots,\ 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{b_n}{2^2}\right\},$$

$$\overline{\lambda}_{j2}(E) = \lambda_{j1}(E \cap A \cap [D_1/D_2]),\ \lambda_{j2} = \lambda_{j1} - \overline{\lambda}_{j2},\ j = 1, 2.$$

Рассматривая заряд

$$P_{j2}=e^{-\lambda_{j2}(R^{(n)})}\left\{\varepsilon_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{j2}^{m*}}{m!}\right\},\quad j=1,2,$$

мы с помощью рассуждений, повторяющих приведенные выше, устанавливаем, что при $E\subset D_1\diagdown D_2$ справедливо $\lambda_{j1}(E)\geqslant 0$, $j=1, 2$.

Поскольку при $E\subset D_1\diagdown D_2$ имеем $\lambda_j(E)=\lambda_{j1}(E)$, то при $E\subset D_1\diagdown D_2$ неравенство $\lambda_j(E)\geqslant 0$ также справедливо.

Продолжая далее, получим следующий результат. Пусть $D_q=\left\{\boldsymbol{x}: 0\leqslant x_1\leqslant\frac{b_1}{2^q},\ldots,0\leqslant x_n\leqslant\frac{b_n}{2^q}\right\}$, $q=0, 1, 2, ..$ Если $E\subset D_q\diagdown D_{q+1}$ то $\lambda_j(E)\geqslant 0$, $j=1,2$.

Но это означает, что $\lambda_j\in\mathbf{M}_+$, ибо при любом E имеем

$$\lambda_j(E)=\lambda_j(E\cap D_0)=\sum_{q=0}^{\infty}\lambda_j(E\cap(D_q\diagdown D_{q+1}))\geqslant 0.$$

Теорема доказана.

При помощи теоремы 3′ нетрудно получить, что в одномерном случае теорема 2 допускает следующее усиление.

Теорема 2′. *Пусть P — одномерный б. д. закон, х. ф. которого допускает представление*

$$\varphi(t;P)=\exp\left\{i\beta t+\int(e^{itx}-1)\,d\nu+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(e^{i\varkappa_m t}-1)\right\},$$

где β — вещественно; $\nu\in\mathbf{M}_+$, $\lambda_m\geqslant 0$, $\varkappa_m>0$ $(m=1, 2, \ldots)$ и выполнены следующие условия:

1) *мера ν сосредоточена в ограниченном множестве $A\subset(0,\infty)$, любая конечная система чисел которого линейно независима в поле рациональных чисел:*

2) *число $\varkappa_1>\sup\limits_{x\in A}x$ не выражается линейной комбинацией чисел множества A с рациональными коэффициентами; числа $\varkappa_{m+1}/\varkappa_m$ $(m=1, 2, \ldots)$ суть натуральные, отличные от единицы;*

3) *существует постоянная $K>0$ такая, что*

$$\lambda_m=O(\exp\{-K\varkappa_m^2\}),\quad m\to+\infty.$$

Тогда $P\in I_0$.

§ 5. Некоторые следствия теоремы 1

Из теоремы 1 вытекает, что класс I_0 является «базисом» в классе всех n-мерных б. д. законов в следующем смысле:

Всякий n-мерный б. д. закон P представляется в виде

$$P=P_0*P_1*P_2*\ldots,$$

где $P_m\in I_0$, $m=0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Легко видеть, что существует последовательность ограниченных выпуклых множеств D_1, $D_2, \ldots$, обладающих свойствами*:

$$1)\ D_j \cap D_k = \varnothing\ (k \neq j).\ 2)\ \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = R^{(n)} \setminus \{\mathbf{0}\},$$

3) $\overline{D}_k \cap (2)\overline{D}_k = \varnothing$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (черта означает замыкание).

Представим х. ф. $\varphi(\boldsymbol{t};\ P)$ закона P формулой Леви (1.1). Обозначим через $P_0, P_1, P_2, \ldots$ законы, х. ф. которых задаются равенствами

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P_k) = \exp\left\{\int_{D_k}\left(e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})} - 1 - \frac{i(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x})}{1 + |\boldsymbol{x}|^2}\right) d\nu_P\right\},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\varphi(\boldsymbol{t};\ P_0) = \exp\left\{i(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{t}) - \sum_{j,\,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k\right\}.$$

Тогда, очевидно, $P = P_0 * P_1 * P_2 * \ldots$. Закон P_0 принадлежит I_0 в силу цитированной в начале статьи теоремы Крамера [9]. Принадлежность к I_0 законов P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ вытекает из теоремы 1: достаточно заметить, что из $\overline{D}_k \cap (2)\overline{D}_k = \varnothing$ следует существование ограниченного открытого выпуклого множества $A \supset D_k$, такого, что $A \cap (2)A = \varnothing$.

Отметим еще одно предложение, получающееся при помощи теоремы 1 и представляющее, по нашему мнению, интерес.

Проекцией n-мерного закона P на орт $\boldsymbol{e} \in R^{(n)}$ называется одномерный закон $P_{\boldsymbol{e}}$, определяемый равенством

$$P_{\boldsymbol{e}}(E) = P(\{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}) \in E\})$$

(E — любое одномерное борелевское множество). Поскольку х. ф. закона P связана с х. ф. его проекции $P_{\boldsymbol{e}}$ соотношением $\varphi(t;\ P_{\boldsymbol{e}}) = \varphi(t\boldsymbol{e};\ P)$, то проекция б. д. закона на любой орт является одномерным б. д. законом (причем $\nu_{P_{\boldsymbol{e}}}(E) = \nu_P(\{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}) \in E\})$). Мы покажем, что проекция закона класса I_0 может не принадлежать классу I_0. Более того:

Существуют законы класса I_0, у которых все проекции, за исключением двух, не принадлежат I_0.

Для доказательства этого утверждения мы используем, кроме теоремы 1, результат Р. Шимицу [15], сформулированный нами в § 4.

Рассмотрим б. д. закон P без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P фигурирующая в представлении х. ф. $\varphi(t;\ P)$ формулой Леви, дается соотношением

$$\nu_P(E) = \omega^{(n)}(E \cap A),\ A = \{\boldsymbol{x} : 1 < x_1 < 2,\ x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}.$$

Поскольку $A \cap (2)A = \varnothing$, то по теореме 1 имеем $P \in I_0$. Используя соотношение $\nu_{P_{\boldsymbol{e}}}(E) = \nu_P(\{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}) \in E\})$, убеждаемся, что для любого

---

* В одномерном случае такую последовательность получим, объединяя две последовательности полуинтервалов $\{[v^m,\ v^{m+1})\}_{m=-\infty}^{\infty}$ и $\{(-v^{m+1},\ -v^m]\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $1 < v < 2$. В двумерном случае последовательность $D_1, D_2, \ldots$ можно построить объединяя четыре последовательности прямоугольников

$$\{\{\boldsymbol{x} : v^m \leqslant x_1 < v^{m+1},\ -v^{m+1} < x_2 < -v^m\}\}_{m=-\infty}^{\infty},$$

$$\{\{\boldsymbol{x} : -v^{m+1} < x_1 \leqslant v^m,\ -v^{m+1} < x_2 < v^{m+1}\}\}_{m=-\infty}^{\infty},\ \{\{\boldsymbol{x} : -v^m < x_1 < v^m,\ v^m \leqslant x_2 < v^{m+1}\}\}_{m=-\infty}^{\infty},\ \{\{\boldsymbol{x} : -v^m < x_1 < v^m,\ -v^{m+1} < x_2 \leqslant v^{m+1}\}\}_{m=-\infty}^{\infty},\ 1 < v < 2$$

Очевидно, аналогичное построение можно провести и в общем случае.

орта $e \in R^{(n)}$, за исключением $(1, 0, 0. \ldots, 0)$ и $(-1, 0, 0, \ldots, 0$, найдутся постоянные k, b и c, $k > 0$, $0 < b < 2b < c < \infty$, такие что $\nu_{P_e}(E) \geqslant k\omega^{(1)}(E \cap [b, c])$. Применяя теорему Шимицу, убеждаемся в справедливости доказываемого.

Замечание. Крамер и Волд показали [11], что закон вполне определяется совокупностью всех своих проекций *. Этот факт позволяет в ряде случаев (см. напр. [2], стр. 128—138) свести посредством проектирования многомерную задачу к одномерной. Однако применение этого приема (известного под названием приема Крамера-Волда) в вопросах о разложениях многомерных законов представляется затруднительным **. С одной стороны, при проектировании «разложимость» закона может существенно улучшиться: Леви [14] построил пример неразложимого закона, у которого все проекции безгранично делимы. С другой стороны, построенный нами выше пример *** показывает, что при проектировании может произойти и ухудшение «разложимости».

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960.

2. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, М., 1947.

3. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, Л., 1960.

4. И. В. Островский. О разложениях безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. ДАН СССР, **161**, № 1 (1965), 48—51.

5. И. В. Островский. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **79** (1965), 198—235.

6. Д. А. Райков. О разложении закона Пуассона, ДАН, **14** (1937), 9—12.

7. Д. А. Райков. О разложении законов Гаусса и Пуассона, «Изв. АН СССР, серия матем.», **2** (1938), 91—124.

8. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.

9. H. Cramér. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Zeitschr, **41** (1936), 405—414.

10. H. Cramér. On the factorisation of certain probability distribution. Arkiv för mat., **1**, № 7, (1949), 61—65.

11. H. Cramér, H. Wold. Some theorems on distribution functions. J. Lond. Math. Soc., **11** (1936), 290—294.

12. H. Kellerer. Linearkombinationen zufälliger Größen und ihre gemeinsame Verteilung. Math. Zeitschr., **84** (1964), 403—414.

13. P. Lévy. Theorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

14. P. Lévy. The arithmetical character of the Wishart distribution, Proc. Cambr. Phil. Soc., **44** № 2 (1948), 295—297 .

15. R. Shimizu. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with a continuous Poisson spectrum, Annals of the Institute Statistical Mathematics, **16** (1964), 387—407.

16. H. Teicher. On the multivariate Poisson distribution. Scand. Actuarietids., № 1—2 (1954), 1—9.

---

* Этот результат усилен в недавней работе Келлерера [12].

** Хотя именно этим приемом Крамер [9] доказал теорему о разложениях многомерного закона Гаусса.

*** Менее интересный пример получим, рассматривая закон P с х. ф. $\varphi(t; P) = 2^{-n}\prod_{k=1}^{n}(1 + e^{it_k})$. Этот закон разложим, но его проекции на орты координатных осей неразложимы. Нетрудно показать, что разложимый n-мерный закон обладает следующим свойством: если мы имеем совокупность из $s > 2n - 2$ ортов, из которых любые n линейно независимы, то среди проекций на эти орты найдутся разложимые.