ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1950 Том XXII

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

I.

Г. И. Дринфельд

(Харьков)

1. Исходные формулы так называемой интегральной геометрии являются, вообще говоря, формулами теории геометрических вероятностей. Они дают явные аналитические выражения меры некоторых множеств (точек, положений прямой и т. п.), инвариантной относительно некоторой группы преобразований (в интегральной геометрии — относительно группы евклидовых движений).

В литературе, посвященной теории вероятностей, отмечена связь ее с теорией непрерывных групп преобразований и с теорией интегральных инвариантов. Однако в многочисленных работах по интегральной геометрии теория непрерывных групп преобразований и теория интегральных инвариантов не используются, несмотря на то, что рассматриваемые в интегральной геометрии инвариантные меры являются интегральными инвариантами соответствующей группы преобразований.

В настоящей работе систематически применяется аппарат теории непрерывных групп преобразований и теории интегральных инвариантов. Этот аппарат пригоден принципиально и практически, не только в случае группы евклидовых движений и не только в случае трехмерного пространства.

2. Понятие о кинематической плотности, которым мы прежде всего занимаемся в настоящей статье, принадлежит H. Poincaré. Речь идет о „количестве“ положений подвижной координатной системы, что фактически, в случае двумерного пространства, очевидно, означает рассмотрение меры множества положений направленного линейного элемента. Мы будем рассматривать меры множества положений направленного элемента или ориентированного поверхностного элемента в трехмерном пространстве.

Простые соображения позволяют рассматривать такую меру как интегральный инвариант п р о д о л ж е н н о й группы. Действительно, пусть линейный элемент проходит через точку C и пусть E — пучок кривых, касательных в этой точке к линейному элементу. Если какому-нибудь преобразованию группы подвергнуть все пространство, то одновременно с переходом точки C в точку C_1 линейный элемент, проходящий через C, и пучок E перейдут в линейный элемент и касательный к нему пучок E_1, проходящие через точку C_1. Таким образом, направление линейного элемента преобразуется в направление, не зависящее от кривой, к которой мы вообразим касательным наш линейный элемент. Это означает, что две независимых величины, определяющие направление линейного элемента, можно считать производными: $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$.

Иными словами, при преобразовании точек пространства, величины, определяющие направление линейного элемента, преобразуются как производные. Но это и означает, что если к точке применяется какое-нибудь преобразование группы, то к линейному элементу применяется соответствующее преобразование продолженной группы.

3. Обычно в интегральной геометрии рассматривают меры, являющиеся интегральными инвариантами n-го порядка, где n — число координат.

Представляет интерес рассмотрение интегральных инвариантов всех порядков. В самом деле, если, например, интегральный инвариант пятого порядка дает меру множества всех линейных элементов в некотором объеме, то интегральный инвариант третьего порядка может означать меру множества линейных элементов с фиксированным направлением (сам объем) или меру множества линейных элементов с направлениями, являющимися данными функциями точки, через которую проходит линейный элемент.

С точки зрения теории вероятностей интегральные инварианты низших порядков можно рассматривать как условные вероятности.

Однако и с чисто геометрической (обычной) точки зрения представляет интерес рассмотрение интегральных инвариантов низших порядков.

§ 1. Интеграл

$$\int\limits_{(M_p)} \Omega_p, \tag{1}$$

где Ω_p — альтернирующая диференциальная форма p-го порядка,

$$\Omega_p = A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p};\ \alpha_1, \ldots \alpha_p = 1,\ 2, \ldots n \tag{2}$$

(знак суммы в случае суммирования по индексу, встречающемуся дважды — вверху и внизу, опускаем) является интегральным инвариантом r-членной группы G_r, определямой инфинитезимальными операторами

$$X_k(f) = \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x^i};\ k = 1,\ 2, \ldots r, \tag{3}$$

если он не изменяет своего значения при всех преобразованиях группы, а для этого необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты формы Ω_p Удовлетворяли условиям

$$X_k(A\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p) + \sum_j \Big[Aj\,\alpha_2\ldots\alpha_p \frac{\partial \xi_{kj}}{\partial x^{\alpha_1}} + A\alpha_1\, j \ldots \alpha_p \frac{\partial \xi_{kj}}{\partial x^{\alpha_2}} + \ldots$$
$$+ A\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\, j \frac{\partial \xi_{kj}}{\partial x^{\alpha_p}} \Big] = 0 \tag{4}$$

Известно [см. напр., (2)], что если оператор

$$У(f) = \eta_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{5}$$

удовлетворяет условиям

$$(X_k,\ У)\, f \equiv 0;\ k = 1, 2, \ldots r \tag{6}$$

и интеграл (1) — интегральный инвариант группы G_r, то интеграл

$$\int \overline{\Omega}_{p-1} = \int \left(\sum_i A\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\, i\, \eta_i\right) dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_{p-1}} \tag{7}$$

является интегральным инвариантом $(p-1)$-го порядка той же группы.

Форму $\overline{\Omega}_{p-1}$ будем называть сверткой формы Ω_p с помощью оператора (5).

Теорема 1. Если интеграл

$$\int \Omega_n = \int M\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n \tag{8}$$

интегральный инвариант n-го порядка группы G_r, то для того, чтобы эта группа имела интегральный инвариант $(n-1)$-го порядка

$$\int \Omega_{n-1} = \int A_1 dx^2 \ldots dx^n \pm A_2 dx^3 \ldots dx^n dx^1 + \ldots \pm A_n\, dx^1 \ldots dx^{n-1} \tag{9}$$

(знаки чередуются при четном n), необходимо и достаточно существование оператора (5), удовлетворяющего условиям (6).

Достаточность предусмотрена предыдущим замечанием; необходимость легко доказать, применяя условия инвариантности (4) к формам Ω_n и Ω_{n-1} и полагая

$$A_i = M\eta_i, \quad У(f) = \eta_i \frac{\partial f}{dx^i}.$$

Форма

$$\Omega_{n-1} = M\left\{\eta_1 dx^2 \ldots dx^n \pm \eta_2\, dx^3 \ldots dx^n\, dx^1 + \ldots\right\}$$

является сверткой формы Ω_n с помощью оператора $У(f)$.

Полезно заметить, что повторное свертывание альтернирующей формы с помощью одного и того же оператора приводит к форме, тождественно равной нулю.

Теорема 2. Если интегралы

$$\int \Omega_p, \int \Omega_q \tag{10}$$

суть интегральные инварианты группы G_r, то интеграл

$$\int \Omega_p\, \Omega_q \tag{11}$$

интегральный инвариант той же группы (он может быть тривиальным).

§ 2. Группа евклидовых движений на плоскости определяется инфинитезимальными операторами

$$X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3(f) = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Продолжим группу, положив

$$dy = p\, dx.$$

Инфинитезимальными операторами продолженной группы[1] являются операторы

[1] Коэфициенты операторов продолженной группы вычисляются просто [см., напр., ([3])].

$$\overline{X}_1(f) = X_1(f),\ \overline{X}_2(f) = X_2(f),\ \overline{X}_3(f) = X_3(f) - (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p}. \tag{12}$$

Найдем для этой группы интегральный инвариант 3-го порядк

$$I = \int M\,dx\,dy\,dp\cdot$$

Условия инвариантности (4), напомним — необходимые и доста точные, приводят к системе уравнений

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial M}{\partial y} = 0,\quad (1+p^2)\frac{\partial M}{\partial p} + 2pM = 0,$$

единственным, с точностью до постоянного множителя, решени которой является

$$M = \frac{1}{1+p^2}.$$

Поэтому, интеграл

$$I = \int \frac{dx\,dy\,dp}{1+p^2} = \int dx\,dy\,d\varphi, \tag{13}$$

единственный (с точностью до постоянного множителя) интеграль ный инвариант 3-го порядка.[1]

§ 3. Инфинитезимальными операторами группы евклидовых дви жений в пространстве являются операторы

$$X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x},\quad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y},\quad X_3(f) = \frac{\partial f}{dz},$$

$$X_4(f) = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y},\ X_5(f) = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z},\ X_6(f) = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{14}$$

Продолжим группу, *положив*

$$dz = p\,dx,\quad dy = q\,dy,$$

т. е. будем рассматривать движение кривой. Инфинитезимальны операторами продолженной группы являются операторы

$$\begin{aligned}
&\overline{X}_1(f) = X_1(f(,\quad \overline{X}_2(f) = X_2(f),\quad \overline{X}_3(f) = X_3(f),\\
&\overline{X}_4(f) = X_4(f) + q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q} = X_4(f) + U(f),\\
&\overline{X}_5(f) = X_5(f) - (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p} - pq\frac{\partial f}{\partial q} = X_5(f) - V(f),\\
&\overline{X}_6(f) = X_6(f) + pq\frac{\partial f}{\partial p} + (1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q} = X_6(f) + W(f).
\end{aligned} \tag{15}$$

Найдем для этой группы интегральный инвариант

$$J = \int M\,dx\,dy\,dz\,dp\,dq.$$

[1] Выражение (13) для кинематической плотности (инвариантной меры множеств положений линейного элемента) известно, но наш вывод этого выражения обладае *как нам кажется, некоторыми преимуществами* (см., напр., ([1])).

Условия инвариантности (4) приводят к системе уравнений, из которой следует

Теорема 3. Единственным (с точностью до постоянного множителя) интегральным инвариантом 5-го порядка группы (15) является интеграл

$$\int \frac{dx\,dy\,dz\,dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} = -\int \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}\,dx\,dy\,dz\,d\beta\,d\gamma, \tag{16}$$

где α, β, γ — углы, образованные касательным к кривой линейным элементом с координатными осями.

Выражения

$$\delta v = dx\,dy\,dz, \quad \delta\varphi = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}\,d\beta\,d\gamma$$

являются, соответственно, элементом объема и элементом телесного угла.

§ 4. Покажем теперь, что существует единственный оператор

$$Z(f) = a_1\frac{\partial f}{\partial x} + a_2\frac{\partial f}{\partial y} + a_3\frac{\partial f}{\partial z} + a_4\frac{\partial f}{\partial p} + a_5\frac{\partial f}{\partial q}, \tag{17}$$

удовлетворяющий условиям

$$(\bar{X}_k,\ Z)\,f \equiv 0; \quad k = 1, 2, \ldots 6. \tag{18}$$

Равенства (18) эквивалентны следующим:

$$\begin{array}{lll} U(a_1) = 0, & V(a_1) + a_3 = 0, & W(a_1) + a_2 = 0, \\ U(a_2) + a_3 = 0, & V(a_2) = 0, & W(a_2) - a_1 = 0, \\ U(a_3) - a_2 = 0, & V(a_3) - a_1 = 0, & W(a_3) = 0, \end{array} \tag{19}$$

$$\begin{array}{lll} U(a_4) - a_5 = 0, & V(a_4) - 2p\,a_4 = 0, & W(a_4) - qa_4 - pa_5 = 0, \\ U(a_5) + a_4 = 0, & V(a_5) - qa_4 - pa_5 = 0, & W(a_5) - 2q\,a_5 = 0, \end{array} \tag{20}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x} = \frac{\partial a_i}{\partial y} = \frac{\partial a_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots 5. \tag{21}$$

Символы U, V, W определены формулами (15).

Уравнения (20) удовлетворяются только при $a_4 = a_5 = 0$.

Интегрирование уравнений (19) требует весьма простых вычислений, которые мы приводить не будем.

С точностью до одного и того же постоянного множителя единственно возможными значениями величин a_1, a_2, a_3 являются

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad a_2 = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad a_3 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Таким образом, единственным оператором (17), удовлетворяющим условиям (18), является оператор

$$Z(f) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} + p\frac{df}{\partial z}\right). \tag{22}$$

Построим, на основании теоремы 1, с помощью этого оператора по интегральному инварианту 5-го порядка (16) интегральный инвариант 4-го порядка; тогда имеет место

Теорема 4. Единственным, с точностью до постоянного множителя, интегральным инвариантом 4-го порядка группы (15) является интеграл

$$\int \frac{dy\,dz + q dz\,dx + p dx\,dy}{(1 + p^2 + q^2)^2}\, dp\,dq \tag{23}$$

или, что то же, интеграл

$$\int (\cos\alpha\, dy\,dz + \cos\beta\, dz\,dx + \cos\gamma\, dx\,dy)\, \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}\, d\beta\, d\gamma, \tag{24}$$

наглядногеометрическое истолкование которого не представляет затруднений.

§ 5. Применив условия инвариантности (4) к интегралу

$$\int a_1\, dx_2 + a_2\, dy + a_3\, dz + a_4\, dp + a_5\, dq,$$

мы получим для определения коэфициентов a_i систему диференциальных уравнений, состоящую из уравнений (19), (21) и уравнений

$$\begin{aligned} &U(a_4) - a_5 = 0, \quad V(a_4) + 2p\, a_4 + q a_5 = 0, \quad W(a_4) + q a_4 = 0, \\ &U(a_5) + a_4 = 0, \quad V(a_5) + p a_5 = 0, \quad W(a_5) + p a_4 + 2q\, a_5 = 0, \end{aligned}$$

имеющих, как легко убедиться, единственное решение

$$a_4 = a_5 = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Единственным, с точностью до постоянного множителя, интегральным инвариантом первого порядка является интеграл

$$\int \frac{dx + q\,dy + p\,dz}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \int \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = \int \delta l. \tag{25}$$

§ 6. Обратимся к рассмотрению интегральных инвариантов третьего порядка. Таковыми прежде всего являются интегралы

$$\int dx\,dy\,dz, \tag{26}$$

$$\int (\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz)\, \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}\, d\beta\, d\gamma. \tag{27}$$

Однако интегралы (26), (27) не единственные интегральные инварианты 3-го порядка рассматриваемой группы.

Применим условия инвариантности (4) к интегралу

$$\int \Omega_3, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha} \Big\{ &A_1\, dx\,dy\,dz + (A_2\, dx + A_3\, dy + A_4\, dz)\, d\beta\, d\gamma + \\ &+ (A_5\, dx\,dy + A_6\, dy\,dz + A_7\, dz\,dx)\, d\beta + \\ &+ (A_8\, dx\,dy + A_9\, dy\,dz + A_{10}\, dz\,dx)\, d\gamma; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\Omega_3 = A_{123}\, dx\,dy\,dz + A_{124}\, dx\,dy\,dp + A_{125}\, dx\,dy\,dq +$$

$$+A_{134}\,dx\,dz\,dp + A_{135}\,dx\,dz\,dq + A_{145}\,dx\,dp\,dq + \tag{30}$$

$$A_{234}\,dy\,dz\,dp + A_{235}\,dy\,dz\,dq + A_{245}\,dy\,dp\,dq + A_{345}\,dz\,dp\,dq.$$

Не трудно перейти от одной записи формы Ω_3 к другой.

Рассмотрим два возможных случая:

I. Пусть форма (29) — (30) не содержит форму

$$\cos\alpha\,dx + \cos\beta\,dy + \cos\gamma\,dz \tag{31}$$

в качестве линейного делителя. Тогда произведение форм (31) и (29)—(30) отлично от нуля и, на основании теоремы 2 и 4, должно с точностью до постоянного множителя совпадать с формой, стоящей под знаком интеграла (24). Отсюда следуют зависимости

$$\begin{aligned} &A_4\cos\beta - A_3\cos\gamma = \lambda\cos\alpha, \\ &A_2\cos\gamma - A_4\cos\alpha = \lambda\cos\beta, \qquad \lambda \neq 0, \\ &A_3\cos\alpha - A_2\cos\beta = \lambda\cos\gamma, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &A_5\cos\gamma + A_6\cos\alpha + A_7\cos\beta = 0, \\ &A_8\cos\gamma + A_9\cos\alpha + A_{10}\cos\beta = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Из соотношений (32) следует

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0,$$

что невозможно.

II. Пусть форма (29) — (30) содержит форму (31) в качестве линейного делителя. Произведение этих форм должно тогда тождественно равняться нулю, откуда следуют зависимости

$$\frac{A_2}{\cos\alpha} = \frac{A_3}{\cos\beta} = \frac{A_4}{\cos\gamma} \tag{34}$$

и те же зависимости (33). Эти последние эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} &pA_{124} - qA_{134} + A_{234} = 0, \\ &pA_{125} - qA_{135} + A_{235} = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Применение условий инвариантности (4) к форме (30) дает для определения коэфициентов A_{ijk} систему диференциальных уравнений, распадающуюся на две системы: одна из них содержит только величины

$$A_{123},\ A_{145},\ A_{245},\ A_{345} \tag{36}$$

и их производные — её мы не приводим, а вторая система такова:

$$\begin{aligned} &U(A_{124}) + A_{134} - A_{125} = 0, \\ &V(A_{124}) + 2p\,A_{124} - A_{234} + q\,A_{125} = 0, \\ &W(A_{124}) + q\,A_{124} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &U(A_{125}) + A_{135} + A_{124} = 0, \\ &V(A_{125}) - A_{235} + p\,A_{125} = 0, \\ &W(A_{125}) + p\,A_{124} + 2q\,A_{125} = 0; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&U(A_{134}) - A_{124} - A_{135} = 0\,,\\
&V(A_{134}) + 2p\,A_{134} + q\,A_{135} = 0\,,\\
&W(A_{134}) + A_{234} + q\,A_{134} = 0\,;\\
&\qquad U(A_{135}) - A_{125} + A_{134} = 0\,,\\
&\qquad V(A_{135}) + p\,A_{135} = 0\,,\\
&\qquad W(A_{135}) + A_{235} + p\,A_{134} + 2q\,A_{135} = 0\,;\\
&U(A_{234}) - A_{235} = 0\,,\\
&V(A_{234}) + A_{124} + 2p\,A_{234} + q\,A_{235} = 0\,,\\
&W(A_{234}) - A_{134} + q\,A_{234} = 0\,;\\
&\qquad U(A_{235}) + A_{234} = 0\,,\\
&\qquad V(A_{235}) + A_{125} + p\,A_{235} = 0\,,\\
&\qquad W(A_{235}) - A_{135} + p\,A_{234} + 2q\,A_{235} = 0\,;
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Исключение производных величин A_{ijk} из равенств (37) приводит к конечным зависимостям

$$
\begin{aligned}
pq\,A_{124} + (1+q^2)\,A_{124} - A_{134} - q\,A_{234} &= 0\,,\\
(1+p^2)\,A_{124} + pq\,A_{125} + A_{135} + q\,A_{235} &= 0\,,\\
A_{124} + (1+q^2)\,A_{135} + pq\,A_{134} - p\,A_{234} &= 0\,,\\
A_{125} - (1+p^2)\,A_{134} + pq\,A_{135} - p\,A_{235} &= 0\,,\\
q\,A_{124} + p\,A_{134} + pq\,A_{234} + (1+q^2)\,A_{235} &= 0\,,\\
q\,A_{125} + p\,A_{135} - (1+p^2)\,A_{234} - pq\,A_{235} &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

которые вместе с зависимостями (35) позволяют проинтегрировать систему уравнений (37). Она имеет решение

$$
\begin{aligned}
&A_{124} = c_1\,\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\,,\quad A_{135} = -c_1\,\frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\,,\\
&A_{125} = -c_1\,\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} + c_2\,\frac{1}{1+p^2+q^2}\,,\\
&A_{134} = c_1\,\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} + c_2\,\frac{1}{1+p^2+q^2}\,,\\
&A_{234} = -c_1\,\frac{p}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} + c_2\,\frac{q}{1+p^2+q^2}\,,\\
&A_{235} = -c_1\,\frac{q}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} - c_2\,\frac{p}{1+p^2+q^2}\,,
\end{aligned}
\tag{39}
$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, и никаких других решений не имеет. Полагая, в частности, $c_1 = c_2 = 0$, имеем, на основании (34),

$$
\Omega_3 = A\,dx\,dy\,dz + B\omega_3\,,
\tag{40}
$$

где ω — форма, стоящая под знаком интеграла (27).

Ввиду инвариантности интегралов (26) и (27) и предполагаемой инвариантности интеграла формы (40), имеем:

$$
\overline{X}_k(A)\,dx\,dy\,dz + \overline{X}_k(B)\,\omega_3 = 0, \quad k = 1, 2, \dots 6.
$$

Отсюда

$$\overline{X}_k(A) = 0, \qquad \overline{X}_k(B) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots 6$$

и, следовательно,

$$A = \text{const}, \qquad B = \text{const}.$$

Таким образом, мы приходим к теореме:

Теорема 6. Наиболее общим интегральным инвариантом 3-го порядка группы (15) является выражение

$$c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 + c_4 I_4, \tag{41}$$

где

$$I_1 = \int dx\, dy\, dz, \tag{42}$$

$$I_2 = \int (\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz) \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\cos\alpha} d\beta\, d\gamma, \tag{43}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{1 + p^2 + q^2} \left\{ dx\, dy\, dq + dx\, dz\, dp + q\, dy\, dz\, dp - p\, dy\, dz\, dq \right\}, \tag{44}$$

$$I_4 = \int \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \Big\{ (1 + q^2) dx\, dy\, dp - pq\, dx\, dy\, dq + pq\, dx\, dz\, dp - \\ - (1 + p^2)\, dx\, dz\, dq - p\, dy\, dz\, dp - q\, dy\, dz\, dq \Big\}, \tag{45}$$

а величины c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные.

Так как

$$\delta v = dx\, dy\, dz, \qquad \delta l = \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz,$$

$$\delta\psi = \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\cos\alpha} \delta\beta\, d\gamma$$

являются — соответственно — элементами объема, дуги и телесного угла, то интегралы (42) и (43) имеют простое наглядногеометрическое истолкование.

Что касается интегралов (44), (45), то легко проверить, что

$$I_3 = \int \delta l D(\delta l), \qquad I_4 = \int D(\delta S), \tag{46}$$

где операция D означает внешнее диференцирование и

$$\delta S = \cos\gamma\, dx\, dy + \cos\alpha\, dy\, dz + \cos\beta\, dz\, dx.$$

Если область интегрирования такова, что тождественно

$$dy = q\, dx, \qquad dz = p\, dx,$$

то

$$I_4 = 0.$$

§ 7. Нам остается разыскать инварианты второго порядка. Применив условия инвариантности (4) к форме

$$A_{12}\,dx\,dy + A_{31}\,dz\,dx + A_{23}\,dy\,dz + A_{45}\,dp\,dq + A_{14}\,dx\,dp + \\ + A_{15}\,dx\,dq + A_{24}\,dy\,dp + A_{25}\,dy\,dq + A_{34}\,dz\,dp + A_{35}\,dz\,dq,$$

мы получим систему диференциальных уравнений, распадающуюся на четыре системы: одна из них содержит только A_{45}, и из нее следует:

$$A_{45} = \frac{c_1}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}; \tag{47}$$

вторая система совпадает с системой (19), и из нее следует:

$$A_{12} = \frac{c_2\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad A_{31} = \frac{c_2\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad A_{23} = \frac{c_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \tag{48}$$

третья система имеет вид:

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial y} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial z} = 0;$$

наконец, четвертая система уравнений совпадает с системой (37).

Однако коэфициенты $A_{14}, A_{24}, \ldots A_{35}$ нельзя отождествлять с величинами (39), так как эти величины получены с помощью соотношений (35), не являющихся следствиями уравнений (37). Но зависимостями (38) мы можем воспользоваться: они являются следствиями только уравнений (37). Таким образом,

$$\begin{aligned} pq\,A_{34} + (1+q^2)\,A_{35} + A_{24} - q\,A_{14} &= 0,\\ (1+p^2)\,A_{34} + pq\,A_{35} - A_{25} + q\,A_{15} &= 0,\\ A_{34} + (1+p^2)\,A_{24} - pq\,A_{24} - p\,A_{14} &= 0,\\ A_{35} + (1+p^2)\,A_{24} + pq\,A_{25} - p\,A_{15} &= 0,\\ q\,A_{34} - p\,A_{24} + pq\,A_{14} + (1+q^2)\,A_{15} &= 0,\\ q\,A_{35} - p\,A_{25} - (1+p^2)\,A_{14} - pq\,A_{15} &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Мы можем, очевидно, ограничиться рассмотрением условий, при которых инвариантен интеграл

$$\int \Omega_2 = \int \{ A_{14}\,dx\,dp + A_{24}\,dy\,dp + A_{15}\,dx\,dq + \\ + A_{25}\,dy\,dq + A_{34}\,dz\,dp + A_{35}\,dz\,dq \}. \tag{50}$$

Рассмотрим два случая.

I. Пусть форма Ω_2 содержит в качестве линейного делителя форму

$$\omega = dx + q\,dy + p\,dz. \tag{51}$$

Тогда

$$\Omega_2\,\omega = 0$$

и мы имели бы зависимости

$$A_{14}q - A_{24} = 0, \quad A_{14}p - A_{34} = 0, \quad A_{24}p - A_{34}q = 0,$$
$$A_{15}q - A_{25} = 0, \quad A_{15}p - A_{35} = 0, \quad A_{25}p - A_{35}q = 0,$$

которые, как легко проверить, совместимы с (49) только при условии

$$A_{14} = A_{24} = A_{15} = A_{25} = A_{34} = A_{35} = 0.$$

II. Пусть форма Ω_2 не содержит в качестве линейного делителя форму (51). Тогда произведение $\Omega_2\omega$ отлично от нуля, и интеграл

$$\int \Omega_2 \frac{\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{52}$$

будучи интегральным инвариантом третьего порядка, должен линейно выражаться через интегралы (44) и (45). Отсюда получаются зависимости

$$A_{14}q - A_{24} = \lambda A_{124}, \quad A_{14}p - A_{34} = \lambda A_{134},$$
$$A_{24}p - A_{34}q = \lambda A_{234}, \quad A_{15}q - A_{35} = \lambda A_{125},$$
$$A_{15}p - A_{35} = \lambda A_{135}, \quad A_{25}p - A_{35}q = \lambda A_{235}, \tag{53}$$

где величины $A_{124}, \ldots A_{135}$ определяются формулами (39), в которых вместо c_1 и c_2, во избежание путаницы с (47) и (48), надо поставить c_3 и c_4.

Из (49) и (53) находим величины

$$A_{14},\ A_{15}, \ldots A_{35}, \tag{54}$$

и нет надобности проверять, что найденные значения величин $A_{14}, \ldots A_{35}$ удовлетворяют уравнения (37), так как полученная таким образом диференциальная форма совпадает с формой, получающейся из линейной комбинации форм, стоящих под знаком интегралов (44) и (45) свертыванием с помощью оператора (22).

Наши рассуждения, таким образом, имели целью не вычисление значений коэфициентов A_{lk}, а доказательство единственности этих значений.

Резюмируя результаты этого параграфа, получаем теорему:

Теорема 7. Наиболее общим интегральным инвариантом второго порядка группы (15) является выражение

$$c_1\int\delta\psi + c_2\int\delta S + c_3\int D(\delta l) + c_4\int\frac{D(\delta S)}{\delta l} \tag{55}$$

(здесь деление имеет смысл).

§ 8. Продолжив операторы (14) евклидовой группы движений при условии

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{56}$$

что означает рассмотрение поверхностных элементов, мы получим операторы, сравнение которых с выражениями (15) показывает, что нет никакой необходимости повторять рассуждения предыдущих параграфов применительно к новым операторам. Мы можем ограничиться перечислением результатов.

Теорема 8. Группа евклидовых движений, продолженная при условии (56), имеет только следующие интегральные инварианты:

$$\int \frac{dx\,dy\,dz\,dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} = \int \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}\,d\beta\,d\gamma\,dx\,dy\,dz = \int \delta\psi\cdot\delta v,$$

$$\int \delta S\cdot\delta\psi,$$

$$c_1\int\delta v + c^2\int(\delta l)_N\,\delta\psi + c_3\int(\delta l)_N\,D\,(\delta l)_N + c_4\int D\,(\delta S),$$

$$c_1\int\delta S + c_2\int\delta\psi + c_3\int D\,(\delta l)_N + c_4\int\frac{D\,(\delta S)}{(\delta l)_N},$$

$$\int\frac{p\,dx + q\,dy - dz}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \int(\delta l)_N.$$

Очевидно, что последний интеграл и, соответственно, другие становятся равными нулю, если условие (56) обращается в тождество.

Углы α, β, γ суть углы нормали к поверхности с осями Z, Y, X.

Таким образом, интегральный инвариант 5-го порядка евклидовой группы движений имеет двоякий геометрический смысл. Это естественно, так как можно рассматривать меру множества положений подвижного триэдра, считая, что его начало движется по произвольной **кривой**, касательная к которой является одной из осей триэдра, но можно также считать начало триэдра движущимся по произвольной **поверхности**, касательная плоскость к которой является одной из плоскостей триэдра.

ЛИТЕРАТУРА

1 В. Бляшке. Лекции по интегральной геометрии. УМИ. 1938.

2 De Donder Th., Théorie des invariants intégraux. 1927.

3 Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли. 1940.