

327475

ISSN 0453-8048

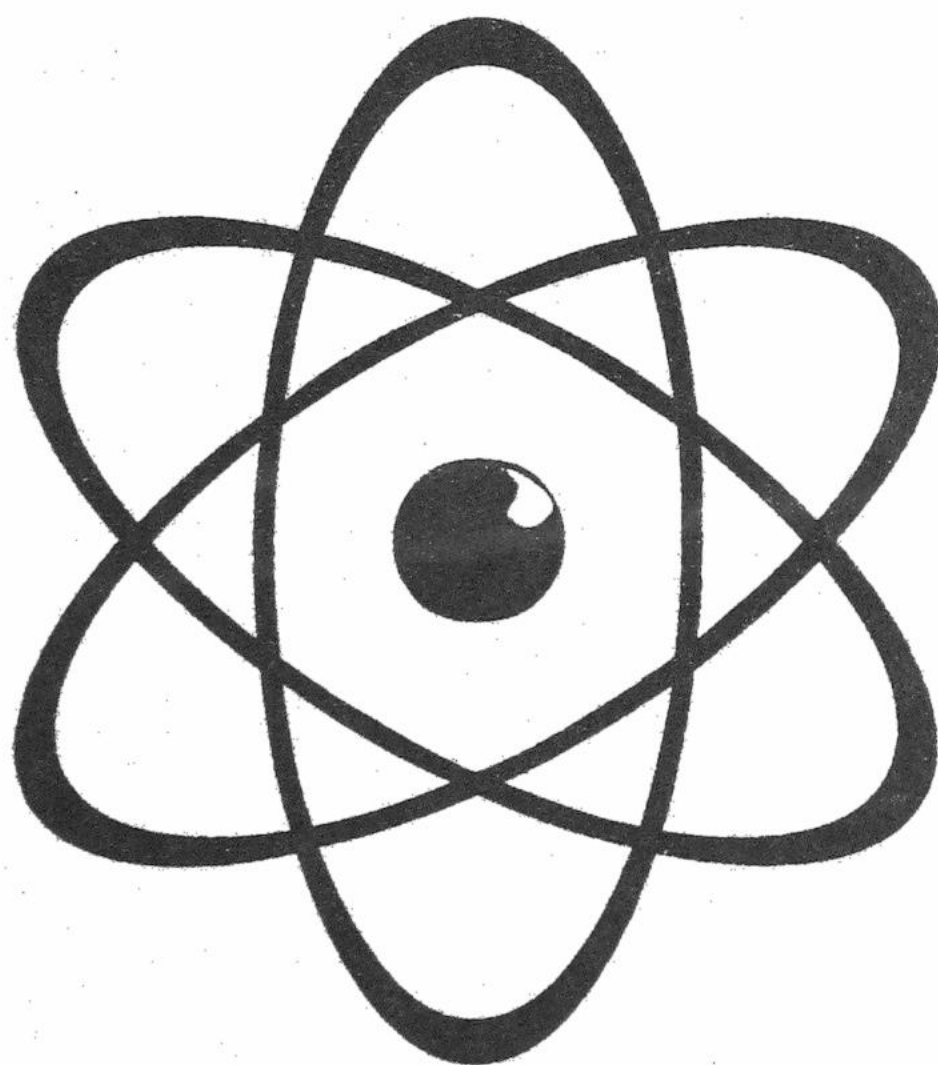
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

ім. В. Н. Каразіна

№ 481



2000

“Вісник Харківського національного університету” (серія фізична «Ядра, частинки, поля») є збірником наукових робіт, який містить результати досліджень з фізики елементарних частинок, ядерної фізики, фізики плазми та плазмових технологій, фізики твердого тіла та радіаційної фізики. Збірник призначений для викладачів, наукових співробітників, аспірантів та студентів, що спеціалізуються у відповідних або суміжних галузях науки. Його включено до Переліку наукових видань ВАК, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. До публікації приймаються статті, написані українською, російською або англійською мовами згідно з правилами для авторів і мають позитивні рекомендації двох рецензентів, призначених редакцією. Запланована періодичність випуску збірника — 4 рази на рік.

Редакційна колегія

Головний редактор — **Залюбовський І.І.** — чл.-кор. НАН України, д-р ф.-м. наук, професор
Заст. головного редактора — **Азаренков М.О.** — д-р ф.-м. наук, професор

Члени редакційної колегії:

Адаменко І. М. — д-р ф.-м. наук, професор
Бережній Ю. А. — д-р ф. -м. наук, професор
Дуплій С. А. — д-р ф.-м. наук
Коваль А. Г. — д-р ф.-м. наук, професор
Кондратенко А. М. — д-р ф.-м. наук, професор
Лазурик В. Т. — д-р ф. -м. наук
Лапшин В. І. — д-р ф. -м. наук, професор
Нечипоренко Є. П. — д-р ф.-м. наук, професор
Пелетмінський С.В. — акад. НАН України, д-р ф.-м. наук, професор
Сорокін Д.П. — д-р ф. -м. наук
Степанов К.М. — чл.-кор. НАН України, д-р ф.-м. наук, професор
Товстяк В. В. — д-р ф.-м. наук
Толок В. Т. — чл.-кор. НАН України, д-р ф.-м. наук, професор
Шульга М. Ф. — д-р ф.-м. наук, професор

Відповідальний секретар — **Кірдін А.І.** — к. ф.-м. наук

Адреса редакційної колегії: 61108, Харків, пр. Курчатова, 31.

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна. Фізико-технічний факультет, к. 402.
Тел. 35-25-66. E-mail: kirdin@rem.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.
Протокол № 5 від 26 травня 2000 р.

Свідectво про державну реєстрацію KB №4063 від 2.03.2000

ISSN 0453-8048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ім. В. Н. Каразіна

№ 481

серія фізична

«Ядра, частинки, поля»

Заснований у 1998 р.

Випуск 2 /10/

Харків

2000

Зміст

И.К. Кириченко	Метод ковариантной факторизации в неупругих процессах электрорасщепления дейтрона	3
А.С. Молев	Рефракционные эффекты в квазиупругих ядерных реакциях под действием легких ионов	13
V.Yu. Korda, N.A. Shlyakhov	Determination of parameters of scattering matrix by a refined genetic algorithm	19
С.А. Дуплий, М.В. Чурсин	О строении гладких полусупермногообразий	22
S.A. Duplij, W. Marcinek	On higher regularity and monoidal categories	27
А.Я. Омельченко, Е.В. Ромащенко	Устойчивость идеальных мелкомасштабных мгд-мод в токамаке с гофрированным магнитным полем и немонотонным распределением q	31
Д.В. Попович, В.М. Рашкован	Устойчивость свободного движения заряда в электромагнитном поле идеально проводящего контура	36
В.М. Рашкован, А.В. Марчук, А.В. Синченко	Фокусировка пучка заряженных частиц сверхпроводящими магнитными контурами	41
И.С. Петренко-Старков	Прецессия одномерной орбиты в центральном поле	45 ✓
С.С. Зуб	Об одном классе статически равновесных магнитных систем	50
Е.А. Баранник	Акустическая томография нелинейного параметра и нелинейное взаимодействие волн	53
V. P. Demutskii, R. V. Polovin, V. M. Rashkovan	Analytical treatment of the chaotic behaviour of the deterministic pseudolinear map	59
А.В. Лисицкий, С.А. Письменецкий, В.Г. Рудычев	Методика имитации аварийных радиационных полей на АЭС. 2. Возможности формирования спектров тормозного излучения	66
С.С. Алимов, В.В. Бобков, Ю.В. Слюсаренко, Р.И. Старовойтов	Эволюция конических новообразований на поверхности катода в тлеющем газовом разряде	71
Н.И. Базалеев, И.Г. Евсеев, В.Ф. Клепиков, В.В. Литвиненко	Разработка эталона универсальной дозиметрической величины, инвариантной к энергетической плотности потока излучения	79
<i>Константин Николаевич Степанов (к семидесятилетию со дня рождения)</i>		82
<i>Памяти Виталия Федоровича Алексина</i>		84

УДК 539.172.3

МЕТОД КОВАРИАНТНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ В НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССАХ ЭЛЕКТРОРАСЩЕПЛЕНИЯ ДЕЙТРОНА

И.К. Кириченко

Украинская инженерно-педагогическая академия,
61003, Украина, г. Харьков, ул. Университетская 16,
Поступило в редакцию 17 января 2000г.

Рассмотрен метод ковариантной факторизации сечений неупругих процессов на релятивистских связанных системах. Показана точная факторизация сечений при полном учете релятивистских эффектов. Определено эффективное импульсное распределение составляющих связанную систему в релятивистской области с учетом off-shell-эффектов и вклада античастиц. Выполнен обзор работ по эксклюзивным и инклюзивным реакциям электрорасщепления дейтрона, выполненных на основе метода ковариантной факторизации

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: импульсное распределение, факторизация сечений, электрорасщепление дейтрона

В физике высоких энергий при исследовании процессов на структурных, составных системах широко используется понятие импульсного распределения составляющих (ИРС) сложную систему. В ядерной физике это импульсное распределение нуклонов в ядрах. В физике элементарных частиц - распределение кварков, партонів в адронах по доле продольного импульса. Введение понятия ИРС и корректность его определения непосредственно связаны с вопросом о факторизации сечений релятивистских процессов на структурных частицах, с возможностью выделения «элементарного акта» взаимодействия с их подструктурами, составляющими. В квантовой механике факторизация сечений процессов развала связанных систем является следствием нерелятивистского импульсного приближения и широко используется в ядерной физике при анализе экспериментальных данных. Вопросы же релятивистской факторизации сечений процессов развала релятивистских связанных систем с последовательным учетом схода промежуточных частиц с массовой оболочки, наличием вклада античастиц и корректность при этом определения ИРС до настоящего времени полностью не исследованы.

Авторами работ [1,2], на основе метода ковариантной факторизации (МКФ) показано, что сечения процессов, определяемые полюсными ковариантными диаграммами, с последовательным учетом релятивистских эффектов факторизуются точно. При этом, естественным образом выделяется «элементарный акт» рассеяния налетающей частицы на эффективной виртуальной составляющей и некоторая универсальная функция $G_0(x)$, зависящая лишь от виртуальности и содержащая практически всю информацию о релятивистской связанной системе. Это позволяет рассматривать $G_0(x)$ как хорошую динамическую характеристику релятивистской связанной системы, которую удобно исследовать не только теоретически, но и экспериментально в совершенно различных процессах.

Рассмотрим МКФ на дейтроне, не конкретизируя «элементарный акт» взаимодействия и тем самым подтвердив универсальность функции $G(x)$ для данной составной системы. Обобщение на другие связанные системы проводится аналогично, путем построения соответствующей вершинной функции с учетом спинов образовавшихся составляющих и привлечением общих требований релятивистской ковариантности.

Рассмотрим процесс

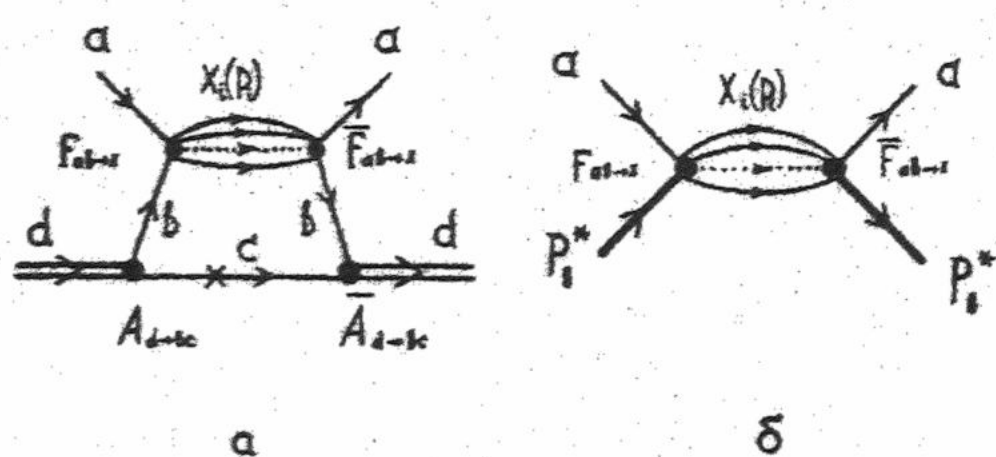


Рис.1.

$$a + d \rightarrow c + x_1 + \dots + x_n \quad (1)$$

в кинематических областях, где сечение определяется некогерентной суммой полюсных фейнмановских диаграмм. Это могут быть, например, квазиупругие или глубоко-неупругие процессы, фото- и электроразложение мезонов в резонансной области и т. д. На рис. 1а изображен квадрат амплитуды соответствующей $t - (u -)$ канальным диаграммам таких процессов; d, b, c - дейтрон, нуклоны, a и x_1 - адроны, лептоны. Квадрату амплитуды (рис. 1а), просуммированному по спинам всех частиц в конечном состоянии, соответствует выражение:

$$\sum |T(ad \rightarrow cx_1)|^2 \sim (m^2 - t)^2 \rho_{\alpha\alpha}(d) \text{Sp} \{ (\hat{p}_b + m) A_{\alpha}(d \rightarrow bc) (\hat{p}_c - m) \bar{A}_{\alpha}(d \rightarrow bc) (\hat{p}_b + m) \bar{F}(ab \rightarrow x_1) L_{\alpha}(\hat{p}_c) F(ab \rightarrow x_1) \} \quad (2)$$

где $A(d \rightarrow bc)$ и $F(ab \rightarrow x_1)$ - соответствующие операторы вершин; $\rho_{\alpha\alpha}(d) = (-g_{\alpha\alpha} + d_{\alpha}d_{\alpha}/M_d^2)$ - матрица

плотности дейтрона, а $L_n(\hat{p}_i)$ определяется составом, сортом и количеством частиц (n) в состоянии X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В данный момент явный вид оператора $L_n(\hat{p}_i)$ и вершины $F(ab \rightarrow X_i)$ неважен.

Вершину $A_\lambda(d \rightarrow bc)$ с одним нуклоном на массовой оболочке определим релятивистски-инвариантным образом [3]:

$$A_\lambda(d \rightarrow bc) = \tilde{\Gamma}_1 \gamma_\lambda + \frac{(p_b - p_c)_\lambda}{2m} \tilde{\Gamma}_2 + \frac{(p_b - m)}{2m} \left[\tilde{\Gamma}_3 \gamma_\lambda + \frac{(p_b - p_c)_\lambda}{2m} \tilde{\Gamma}_4 \right] \quad (3)$$

Для неполяризованного дейтрона, замечая что $A_\lambda(d \rightarrow bc)$ с одним нуклоном вне массовой оболочки зависит лишь от одного инварианта p_b^2 ($p_b^2 \neq m^2$), а также учитывая свойства проекторов находим

$$(m^2 - t)^{-2} (\hat{p}_b + m) A_\lambda(d \rightarrow bc) (p_c - m) \bar{A}_\sigma(d \rightarrow bc) (\hat{p}_b + m) p_{\lambda\sigma}(d) = M_d^2 G_0(x) (\hat{p}^* + m^*) \quad (4)$$

где

$$p^* = p_b + \beta(x) p_c, \quad m^* = \alpha(x) m, \quad x = (m^2 - t)/M_d^2,$$

$$G_0(x) = (3 + 2x)(\Gamma_1^2 - x\Gamma_2\Gamma_3) + x(2 + x)(x\Gamma_2 - \Gamma_4)\Gamma_2 + (1 + x)(\Gamma_3 + \Gamma_4)\Gamma_3 - x(3 + x)\Gamma_1\Gamma_2 + [(4 + x)\Gamma_3 + \Gamma_4]\Gamma_1$$

$$\alpha(x)G_0(x) = (3 - 2x - x^2)\Gamma_1^2 - 2x(2 - x - x^2)\Gamma_1\Gamma_2 + 2(3 + x - x^2)\Gamma_1\Gamma_3 + 3\Gamma_3^2 +$$

$$+ x(2 + x)[2\Gamma_2(x\Gamma_2 + x\Gamma_4 - \Gamma_3) - \Gamma_4(\Gamma_4 + 2\Gamma_3 + 2\Gamma_1)]$$

$$\beta(x)G_0(x) = x(2 + x)(\Gamma_1^2 + \Gamma_4^2 + \Gamma_2\Gamma_4 + x\Gamma_2^2) + (2 + x)(\Gamma_1 + \Gamma_3)\Gamma_3 - x(1 + 2x)\Gamma_2\Gamma_3 - (1 - x)(\Gamma_3\Gamma_4 + x\Gamma_1\Gamma_2)$$

$$M_d^2 \cdot \Gamma_{1,2} = x^{-1} \tilde{\Gamma}_{1,2}, \quad M_d^2 \cdot \Gamma_{3,4} = -\tilde{\Gamma}_{3,4},$$

а $m_b = m_c = m$, $M_d = 2m$, $x = (m^2 - t)/M_d^2$.

С помощью (4) квадрат амплитуды (1) можно представить в факторизованном виде

$$\sum |T(ad \rightarrow cX_i)|^2 = M_d^2 G_0(x) \sum |T(ap^* \rightarrow X_i)|^2, \quad \sum |T(ap^* \rightarrow X_i)|^2 = \text{Sp} \{ (\hat{p}^* + m^*) \bar{F}(ab \rightarrow X_i) L_n(\hat{p}_i) F(ab \rightarrow X_i) \}. \quad (6)$$

Выражение (6) представляет собой произведение двух множителей, которые по своей природе лоренц-скаляры, $G_0(x)$ при этом зависит только от переменных, которые

связаны с вершиной развала дейтрона и является характеристикой связанной системы. Эффективный импульс и масса (5) возникли одновременно и однозначно связаны со структурой связанной системы.

На рис. 1б в качестве иллюстрации изображен «элементарный акт» - процесс $a + p^* \rightarrow X_i$ на эффективном нуклоне с импульсом p^* и массой m^* , которым эффективно можно заменить сложный процесс (рис. 1а). Таким образом, вычисление сечений неупругих процессов на релятивистских связанных системах со спином (дейтрон) в том случае, когда есть основания ограничиться лишь одночастичными механизмами, точно сводится к вычислению лишь верхних блоков диаграмм рис. 1а. При этом отпадает необходимость в громоздких вычислениях (2), возникающих вследствие сложной спиновой структуры нижнего блока $d \rightarrow bc$. Эффекты, связанные со структурой составной частицы, выделены в универсальной функции $G_0(x)$, не зависящей от конкретной реакции. Конечно, «элементарный акт» (6) рис. 1б зависит от виртуальности посредством m^* и p^* , однако расчеты (рис. 2) показали, что в широком интервале переменной x , вплоть до $|\vec{p}_c| \sim 0,55$ ГэВ/с, ни

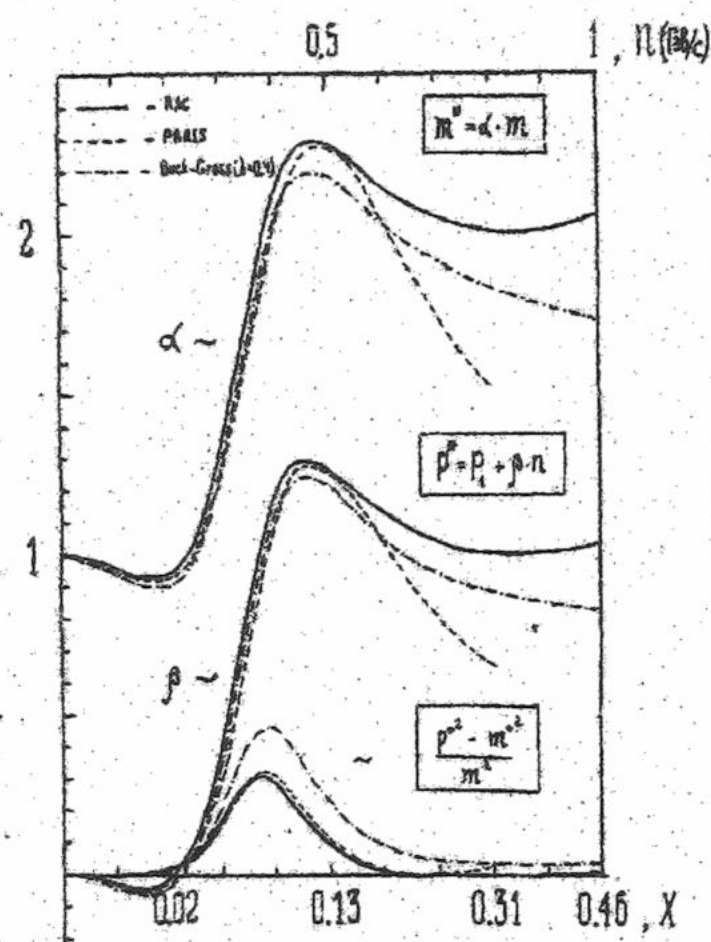


Рис. 2. Параметры α , β эффективной массы $m^* = \alpha(x)m$ и импульса $p^* = p_i + \beta(x)p$ в зависимости от виртуальности, рассчитанные для потенциалов RSC (сплошная кривая), парижского (штриховая) и результат с функциями Бука - Гросса ($\lambda = 0,4$) (штрихпунктирная). Внизу представлена разность $(p^{*2} - m^{*2})/m^2$.

m^* , ни p^* , а следовательно, и $\sum |T(ap^* \rightarrow X_i)|^2$ практически не зависят от структуры дейтрона. Вычисления с различными потенциалами, например, парижским [4] (пунктирная кривая) и рейдовским [5] (сплошная) (функции $\Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$), дают близкую зависимость функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ (5) от x . Такая же зависимость этих функций наблюдается и в модели Бака - Гросса [6] с учетом всех четырех вершинных функций (3) при выборе параметров смешивания псевдоскалярной и псевдовекторной πNN -связи $\lambda = 0,4$. Это позволяет извлекать функцию $G_0(x)$ в различных экспериментах практически модельно-

независимым образом в широком диапазоне $x \leq 0,16$, что соответствует $|\vec{p}_c| \leq 0,55$ ГэВ/с. Этот интервал совпадает с областью импульсов, исследуемой экспериментально в процессах квазиупругого электрорасщепления дейтрона с регистрацией ер – совпадений [7].

Представляет интерес формальная интерпретация эффективного импульса p^* и массы m^* . Из рис. 2 видим, что в области слабой виртуальности эффективный нуклон ведет себя практически так же, как реальный: $p^* \cong p_b$, $m^* \cong m$, а $p^{*2} \approx m^{*2}$. С ростом виртуальности происходит некоторая перестройка системы, которая завершается при $|\vec{p}_c| \sim 0,55$ ГэВ/с, а эффективный «нуклон» уносит импульс, близкий импульсу дейтрона: $p^* \cong p_b + c$, при этом его масса близка к массе дейтрона: $m^* \cong 2m$, а p^{*2} опять $\sim m^{*2}$.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И СВЯЗЬ ВЕРШИННЫХ ФОРМФАКТОРОВ С S-, P-, D-СОСТОЯНИЯМИ ДЕЙТРОНА

Остановимся на релятивистской четырехкомпонентной модели Гросса [6]. В этом подходе удалось связать четыре инвариантных формфактора Γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в dNN – вершине (3) с одним нуклоном вне массовой поверхности с S-, P-, D-состояниями дейтрона. В рамках релятивистской модели однобозонного обмена в работе [8] построена такая динамическая модель, которая учитывает взаимодействие между нуклонами как на больших, так и на малых расстояниях. Потенциал нуклонных сил строится с учетом ближайших особенностей в t – канале, которые учитывают обмены π -, ρ -, ω – мезонами, а также гипотетическим σ – мезоном, который эффективно учитывает двухпионные обмены в NN – системе. Даная модель позволяет не только описывать статические характеристики – квадрупольный электрический момент Q_d , магнитный момент дейтрона μ_d , которые определяются в основном «мягкой» частью волновой функции (ВФ), а также проводить расчеты различных процессов, в областях, где уже определяющим вкладом является высокоимпульсная часть ВФ. Единственным свободным параметром в подходе [6] является параметр смешивания λ , возникновение которого обусловлено неизвестным типом связи реальных пионов и нуклонов. Значение $\lambda = 1$ соответствует «чистой» псевдоскалярной связи, противоположное значение $\lambda = 0$ соответствует псевдовекторной, а промежуточное значение $0 \leq \lambda \leq 1$ отвечает смеси вкладов с весом λ и $1 - \lambda$, соответственно.

Выражения (5) в терминах ВФ (u, w, v_t, v_s) S-, D-, P-состояний [6] имеют весьма простую, компактную форму, удобную для численных расчетов и интерпретации:

$$\begin{aligned} \sqrt{M_d} \Gamma_1 &= u - w/\sqrt{2} + zv_t, \quad \sqrt{M_d} \Gamma_2 = -(2+x)^{-1} [u + w(3+2x)/\sqrt{2x}] - zv_t, \\ \sqrt{M_d} \Gamma_3 &= -(1+x)zv_t, \quad \sqrt{M_d} \Gamma_4 = -(x/(2+x)) [u - w(3+2x)/\sqrt{2x}] - \sqrt{2}zv_s, \quad z = [3/(2x(2+x))]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (7) и выражения (5), получаем

$$\begin{aligned} M_d G_0(x) &= 3(1+x)(u^2 + w^2) + (3/2)^{1/2} (\epsilon_n / \tilde{n}) \delta_{int}, \\ \alpha(x) M_d G_0(x) &= 3(u^2 + w^2 - v_t^2 - v_s^2) - \sqrt{6}(\tilde{n}/m) \delta_{int}, \\ \beta(x) M_d G_0(x) &= 3x(u^2 + w^2) + 3(v_t^2 + v_s^2) - (3/2)^{1/2} ((2m - \epsilon_n) / \tilde{n}) \delta_{int}, \\ \delta_{int} &= 2(uv_t - wv_s) - \sqrt{2}(uv_s + wv_t), \quad \tilde{n} = |\vec{n}|, \quad \epsilon_n = m^2 + \tilde{n}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Из выражений (8) видим, что в $G_0(x)$ – эффективном импульсном распределении нуклонов (ЭИРН), функциях $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ интерферируют только S – P- и D – P-волны (но не S – D). Отметим, что, хотя роль P – волн (функции v_t и v_s) мала и составляет $\sim 15\%$ при $x \leq 0,16$, пренебрежение ими в формулах (8), строго говоря, некорректно. В этом приближении ($v_t = v_s = 0$, но $\Gamma_4 \neq 0$), которое условно можно назвать «частичным учетом виртуальности», качественно меняется характер функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ (рис. 2), а $G_0(x)$ меняется лишь количественно:

$$\alpha(x)_{v_t=v_s=0} = (1+x)^{-1} = m/\epsilon_n, \quad \beta(x)_{v_t=v_s=0} = x m/\epsilon_n = 1 - m/\epsilon_n, \quad M_d G_0(x)_{v_t=v_s=0} = 3(1+x)(u^2 + w^2) = 3\epsilon_n/m(u^2 + w^2) \quad (9)$$

Естественно, в этом случае «эффективный нуклон» с импульсом p^* и массой m^* находится на массовой поверхности:

$$(p^{*2} - m^{*2})/m^2 \equiv (1+\beta)^2 - 4x(1-\beta) - \alpha^2 = 0, \quad \text{т.е. } p^{*2} = m^{*2},$$

а эффективный «элементарный акт» (6) в рассматриваемом приближении, также как и функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, вообще не зависит от конкретной модели при любых x . Результаты численных расчетов показывают, что в области слабой виртуальности отличие наблюдаемых (сечений) от точного расчета невелико (но лишь при малых $x \sim 0,02$). Последовательное пренебрежение виртуальностью и античастичными компонентами при установлении связи dNN – формфакторов с нуклонными ВФ известных потенциалов (Рейда, Парижского) потенциалов [4,5] приводит к качественно, а в области $x \leq 0,14$ ($|\vec{p}| \leq 0,5$ ГэВ/с) и количественно, одинаковым результатам для функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $G(x)$ (см. рис.2). Разница лишь в том, что теперь возникает интерференция S – D – волн, которая в широком интервале $x(\vec{p})$ близка к δ_{int} в (8). В результате функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $G_0(x)$ в приближении $v_t = v_s = 0$, $\Gamma_4 = 0$ качественно, а в области $x \leq 0,14$, что соответствует $\vec{p} \leq 0,5$ ГэВ/с, и количественно, весьма близки к результатам, полученным по точным формулам (8).

Чтобы избежать недоразумений, отметим, что, фейнмановские вершины не связаны непосредственно с нуклонными ВФ. Связь вершин с ВФ возможна лишь в результате некоторых приближений – после редукции уравнения Бете – Солпитера к уравнениям квазипотенциального типа, одним из которых является, например, уравнение Гросса [6] и перехода к определенной системе отсчета, например, л.с. составного объекта. Непосредственная связь вершин с корректно определенными релятивистскими ВФ связанной системы возможна лишь в такой системе отсчета, где частицы, составляющие связанную систему, лежат на массовой оболочке, например, в системе бесконечного импульса (СБИ).

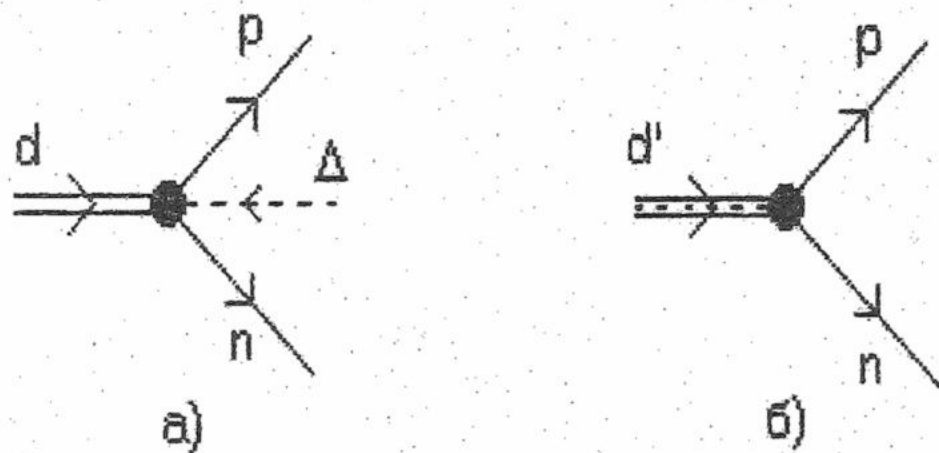


Рис.3.

рассмотрим dNN – вершину. После перехода в систему, где составная частица движется с импульсом $P \rightarrow \infty$, из двух упорядоченных во времени диаграмм вершины dNN остается лишь диаграмма а) (рис.3) где $p^2 = n^2 = m^2$, а нефизическое состояние – «шпурион» – Δ [9] отражает «несохранение» энергии при переходе от реального состояния к виртуальному (причем $\Delta^2 = 0$). Легко понять, что с.ц.и. пр – пары (рис.3а), не совпадает с системой покоя дейтрона. В этом случае [10-12] вместо дейтрона d рассматривают «дейтронное состояние» [13] $d' = d + \Delta$ (рис.3б), построенное из двух реальных нуклонов, система

покоя которого совпадает с с.ц.и. пр – пары, а его масса $d'^2 = M_N^2 = (2\varepsilon_k)^2$ отлична от массы дейтрона $d^2 = M_d^2$ и определяет сход с массовой оболочки по полной массе NN – системы: $\vec{k}^2 = (M_N^2 - M_d^2)/4$. Продольный вектор поляризации дейтронного состояния $U_\mu^{(L)} = (P/M_N, 0, 0, (P + M_N^2/2P)/M_N)$ отличается от соответствующего вектора истинного дейтрона ($P \rightarrow \infty, \vec{P} \parallel OZ$). Тогда ВФ дейтрона определяют следующим образом:

$$\Psi_d^{(z)} = -1/\sqrt{2M_N} \Gamma_\mu^{(dnp)} U_\mu^{(z)}, \quad \Gamma_\mu^{(dnp)} = \bar{u}(p) A_\mu C \bar{u}^T(n)$$

После чего в с.ц.и. пр – пары (или л.с. d') легко установить связь dNN – формфакторов с light cone ВФ нуклонов [10,13]

$$\Gamma_1(\vec{k}^2) = 1/\sqrt{2\varepsilon_k} [u_k - w_k/\sqrt{2}], \quad \Gamma_2(\vec{k}^2) = -(1/\sqrt{2\varepsilon_k}) (m/\vec{k}^2) ((\varepsilon_k - m)u_k + (2\varepsilon_k + m)w_k/\sqrt{2})$$

ВФ дейтрона, определенная таким образом, удовлетворяет всем необходимым требованиям релятивистской инвариантности.

ПРИМЕНЕНИЕ МКФ ДЛЯ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССА $d(e, e'p)n$

Обсудим применимость МКФ к вычислению сечений процессов электрорасщепления дейтрона в квазиупругой области с регистрацией ер – совпадений. Кинематическая ситуация экспериментов с регистрацией ер – совпадений такова, что измерения выполняются в таких областях, где доминирует конкретный полюсной член в полной амплитуде. Так в условиях экспериментов [7] и [14] доминирует t – полюс в амплитуде, которому соответствует рассеяние на протоне. Это позволяет с помощью МКФ легко определить универсальную функцию ЭИРН – $G(x)$, которая является корректным релятивистским обобщением нерелятивистских функций ИРН. Функция ЭИРН в области квазиупругого пика на дейтроне рассматривалась в работах [7,14,15]. Прежде, чем приступить к обсуждению возможности извлечения ЭИРН из экспериментальных данных, рассмотрим ряд отличных моментов, которые возникают при последовательно

релятивистском рассмотрении. Численные расчеты показали [2], что роль интерференции t -, u -каналов в области максимума квазиупругого пика не существенна - ее вклад не более 1% (при $Q^2 \cong 0,2$ (ГэВ/с)²) и уменьшается с ростом Q^2 , а в области порога электрорасщепление составляет менее 30% [2,16]. Экспериментальные исследования эксклюзивных процессов $d(e, e'p)n$ проводятся вблизи максимума квазиупругого пика (Q^2 и ν фиксированы), а извлечение импульсных распределений происходит в тех областях, где относительный импульс конечной pn -пары в с.ц.и. обычно превосходит 0,2 ГэВ/с [15], что дает основания для пренебрежения эффектами взаимодействия в конечном состоянии (ВКС). Более того, в кинематике Сакле [7] вклад t -канала также незначителен - расчеты показали, что при $\tilde{n} = 0,335$ ГэВ/с он составляет менее 4% от вклада t -канала.

Восстановление калибровочной инвариантности полной амплитуды процесса $d(e, e'p)n$ в кинематических условиях [7], где определяющим является t -полюсной вклад, можно обеспечить стандартным приемом - выполнив калибровочный сдвиг [17], т.к. s -, u -полюсные особенности полной амплитуды находятся далеко от физической области: $s - M_d^2 = 2M_d \nu(1 - x_F) \gg m^2 - t \approx 2m\varepsilon_d$, а $m^2 - u = 2M_d \nu - 2m\varepsilon_d \approx 2m(2\nu - \varepsilon_d)$, учитывая [7], что $\nu \geq 0,1$ ГэВ для обеих кинематик приходим к заключению $s - M_d^2 \gg m^2 - t$, $m^2 - u \gg m^2 - t$ и, следовательно, этими полюсами можно пренебречь так же, как и регулярной частью амплитуды, заменив их вклады слагаемым $q_\mu (T_\alpha^\dagger q_\alpha) / q^2$.

Используем следующее выражение для матричного элемента процесса $d(e, e'p)n$

$$M = \frac{4\pi\alpha}{q^2} l_\mu T_{\mu\nu} U_\nu^{(d)} = \frac{4\pi\alpha}{q^2} l_\mu \tilde{T}_\mu, \quad \tilde{T}_\mu = T_{\mu\nu} U_\nu^{(d)}, \quad \text{где } T_{\mu\nu}^{(t)} = \bar{u}(p) F_\mu^{(t)} \frac{\hat{p}_1 + m}{t - m^2} A_\nu^{(t)} C \bar{u}^\dagger(n).$$

Вершину γNN выберем в форме

$$F_\mu^{(t)} = G_M(q^2) \gamma_\mu - \frac{(p_1 + p)_\mu}{2m} F_{2p}(q^2), \quad G_M = F_{1p}(q^2) + F_{2p}(q^2).$$

Тогда сечения процесса электрорасщепления дейтрона в однофотонном приближении будет иметь вид:

$$\frac{d^2\sigma}{de'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{e'}{e} \frac{l_{\alpha\beta} \tilde{w}_{\alpha\beta}}{2M_d},$$

$$l_{\alpha\beta} = l_\alpha l_\beta = \frac{1}{2} \bar{u}(k') \gamma_\alpha u(k) \cdot \bar{u}(k') \gamma_\beta u(k) = 2(k_\alpha k'_\beta + k'_\alpha k_\beta) + q^2 g_{\alpha\beta}, \quad (m_e^2 = 0), \quad (10)$$

где e, e' - энергии начального и конечного электронов. Структурный тензор $\tilde{w}_{\alpha\beta}$, характеризующий адронную часть амплитуды, определим стандартным образом [18]:

$$\tilde{w}_{\alpha\beta} = (2\pi)^3 \sum_F \langle d | J_\beta^\dagger | pn \rangle \langle pn | J_\alpha | d \rangle \delta(d + q - p - n). \quad (11)$$

Выполняя "суммирование", усредняя по спиновым состояниям конечной pn -пары и интегрируя в л.с. дейтрона, получаем выражение для сечения реакции $d(e, e'p)n$ с регистрацией ep -совпадений:

$$\frac{d^3\sigma}{de'd\Omega_e d\Omega_p} = K \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{e'}{e} l_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta},$$

$$w_{\alpha\beta} = \frac{G(x)}{8} \text{Sp}(\hat{p} + m) F_\alpha^{(p)} (\hat{p}^* + m^*) \bar{F}_\beta^{(p)}, \quad G(x) = \frac{M_d}{3(2\pi)^3} G_0(x), \quad K = \frac{|\vec{p}|}{M_d + \nu} \left(1 - \frac{\vec{p}\vec{q}}{\vec{p}^2} \frac{E_p}{M_d + \nu} \right)^{-1} \quad (12)$$

Некогерентный вклад нейтронной диаграммы факторизуется аналогично.

Структура тензора $w_{\alpha\beta}$ в (12) устанавливается из общих требований градиентной и T -, P -инвариантности, согласно [11,18]:

$$w_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \quad S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha},$$

$$S_{\alpha\beta} = (-g_{\alpha\beta} + q_\alpha q_\beta / q^2) W_1 + a_\alpha a_\beta W_2 / M_d^2 + b_\alpha b_\beta W_3 / M_d^2 + (a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha) W_4 / M_d^2 \quad (13)$$

$$A_{\alpha\beta} = (a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha) W_5 / M_d^2, \quad W_i = W_i(q^2, \nu, x) \quad (i = 1, \dots, 5), \quad a_\alpha = q_\alpha - \frac{q^2}{dq}, \quad b_\alpha = p_\alpha - \frac{pq}{dq} d_\alpha.$$

Структурные функции W_i ($i = 1, \dots, 5$) являются функциями инвариантных переменных q^2 , v , x ($v = dq/M_d$). В случае неполяризованных электронов и дейтронов $A_{\alpha\beta}$ вклада не дает [19-23]. Воспользовавшись (13) получим выражения для структурных функций $W_i(q^2, v, x)$, ($i = 1, \dots, 4$) [1]:

$$W_1 = \frac{G(x)}{2} G_M^{(p)^2} \left[s_3 - \frac{q^2}{2} (1 - \beta) \right], \quad W_2/M_d^2 = \frac{pq}{q^2} \left[W_3/M_d^2 \frac{pq}{q^2} + \beta G(x) \frac{dq}{q^2} F_1^{(p)} G_M^{(p)} \right], \quad (14)$$

$$W_3/M_d^2 = \frac{G(x)}{2} \left[2(1 - \beta) \left(F_1^{(p)^2} - \frac{q^2}{4m^2} F_2^{(p)^2} \right) + 2F_1^{(p)} F_2^{(p)} (1 - \alpha - \beta) + \frac{F_2^{(p)}}{m^2} s_3 \right],$$

$$W_4/M_d^2 = -\frac{pq}{q^2} W_3/M_d^2 - \beta G(x) \frac{dq}{q^2} F_1^{(p)} G_M^{(p)} / 2$$

$$s_3 = m^2 [(1 - 2x)(1 - 2\beta) - \alpha] + \beta dp,$$

где $F_1^{(p)}(q^2)$ - дираковский и $F_2^{(p)}(q^2)$ - паулевский формфакторы протона, а $G_M^{(p)} = F_1^{(p)} + F_2^{(p)}$, $G_E^{(p)} = F_1^{(p)^2} + \frac{q^2}{4m^2} F_2^{(p)^2}$ - формфакторы Сакса. Экспериментальные данные показывают справедливость соотношений

$$G_E^{(p)} = G_M^{(p)} / \mu_p = G_M^{(n)} / \mu_n = (1 - q^2 / 0,71)^2, \quad q^2 \text{ в } (\text{ГэВ}/c)^2; \quad G_E^{(n)} \cong 0, \quad \mu_p = 2,79, \quad \mu_n = -1,91 \text{ в ед. } e/(2m).$$

Линейная связь формфакторов $G_E^{(p)}$, $G_M^{(p)} / \mu_p$ и $G_M^{(n)} / \mu_n$ называется скейлинговым законом, а их зависимость от q^2 - дипольной параметризацией, и обеспечивают согласие с экспериментом с 25%-ной точностью до импульсов $-q^2 \sim 25 (\text{ГэВ}/c)^2$. Зная явный вид $w_{\alpha\beta}$ (13-14) не составляет труда найти свертку из $l_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}$ в (12):

$$l_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} = 2Q^2 W_1 + S_1 W_3 / M_d^2 - 4S_2 (W_3 pq/dq - W_4 Q^2 / dq) / M_d^2, \\ Q^2 = -q^2 > 0, \quad S_1 = 4(pk)(pk') - Q^2 m^2, \quad S_2 = (dk)(pk') + (dk')(pk) - dp Q^2 / 2. \quad (15)$$

В пределе слабой виртуальности ($x_F \approx 1/2$), $x \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 0$ (см. рис.2) из (15) получаем известное выражение амплитуды Розенблюта [24], описывающей упругое рассеяние электрона на протоне

$$R = l_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} / G(x) \Big|_{x \rightarrow 0} \cong G_M^{(p)^2} Q^2 / 2 + (F_{1p}^2 + Q^2 / (4m^2) F_{2p}^2) S_1. \quad (16)$$

На основе (12) получаем факторизованное выражение для процесса $d(e, e'p)n$ в области максимума квазиупругого пика с учетом релятивистских эффектов:

$$\frac{d^3\sigma}{de'd\Omega_e d\Omega_p} = K \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_e} \right)_R^* G(x) = K \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_e} \right)_R [1 + \varepsilon(Q^2, v, x)] G(x) \quad (17)$$

Элементарный акт $(d\sigma/d\Omega_e)_R$ - сечение Розенблюта на движущемся протоне - связан с эффективным элементарным актом рассеяния $(d\sigma/d\Omega_e)_R^*$ после отделения электрона на виртуальной составляющей следующим образом:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_e} \right)_R^* = [1 + \varepsilon(Q^2, v, x)] \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_e} \right)_R \quad (18)$$

где явный вид $\varepsilon(Q^2, v, x) = [(d\sigma/d\Omega_e)_R^* - (d\sigma/d\Omega_e)_R] / (d\sigma/d\Omega_e)_R$ и легко может быть определен из (12), (14) и (16). Возникновение функции $\varepsilon(Q^2, v, x)$ является следствием проявления релятивистских эффектов. Учет последней при обработке эксклюзивных процессов, т.е. их спектров необходим с целью извлечения ЭИРН. В противном случае (нерелятивистское определение функции ИРН и автоматическое распространение ее в релятивистскую область импульсов) извлекаемая из эксперимента функция импульсного распределения будет зависеть от кинематических условий и, таким образом, при больших значениях аргумента не будет являться характеристикой лишь связанной системы.

ОПИСАНИЕ OFF-SHELL ЭФФЕКТОВ В γNN ВЕРШИНЕ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА СЕЧЕНИЕ РЕАКЦИИ И ФУНКЦИЮ ЭИРН

ЭМ вершина γNN с двумя нуклонами на массовой поверхности, в предположении сохранения Р-четности, описывается двумя вещественными ЭМ формфакторами $F_1^N(q^2)$ и $F_2^N(q^2)$ - дираковский и паулевский соответственно. Вершинный оператор, отвечающий ЭМ взаимодействиям свободных нуклонов, имеет несколько эквивалентных форм записи [25], связанных тождеством Гордона

$$F_\mu^N = F_1^N(q^2)\gamma_\mu - \frac{\sigma_{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2^N(q^2), \quad F_\mu^N = [F_1^N(q^2) + F_2^N(q^2)]\gamma_\mu - \frac{(p_1 + p)_\mu}{2m}F_2^N(q^2) \quad (19)$$

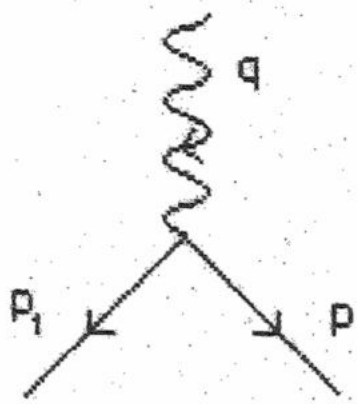


Рис. 4.

Рассмотрим диаграмму взаимодействия виртуального фотона с нуклонами (рис.4), когда один из них, например, с 4-импульсом p_1 , лежит не на массовой поверхности. В этом случае треххвостовая вершина может зависеть от двух виртуальностей - фотона (q^2) и нуклона (p_1^2), что приведет к изменению как числа формфакторов (>2), так и возникновению дополнительной неизвестной зависимости формфакторов от p_1^2 , т.е. $F_i^N(q^2, p_1^2)$, $i > 3$.

Таким образом, возникает вопрос о погрешности при извлечении функции ЭИРН за счет неоднозначности немассового продолжения ЭМ формфакторов (19) в область значительных виртуальностей. Расчет эффективного

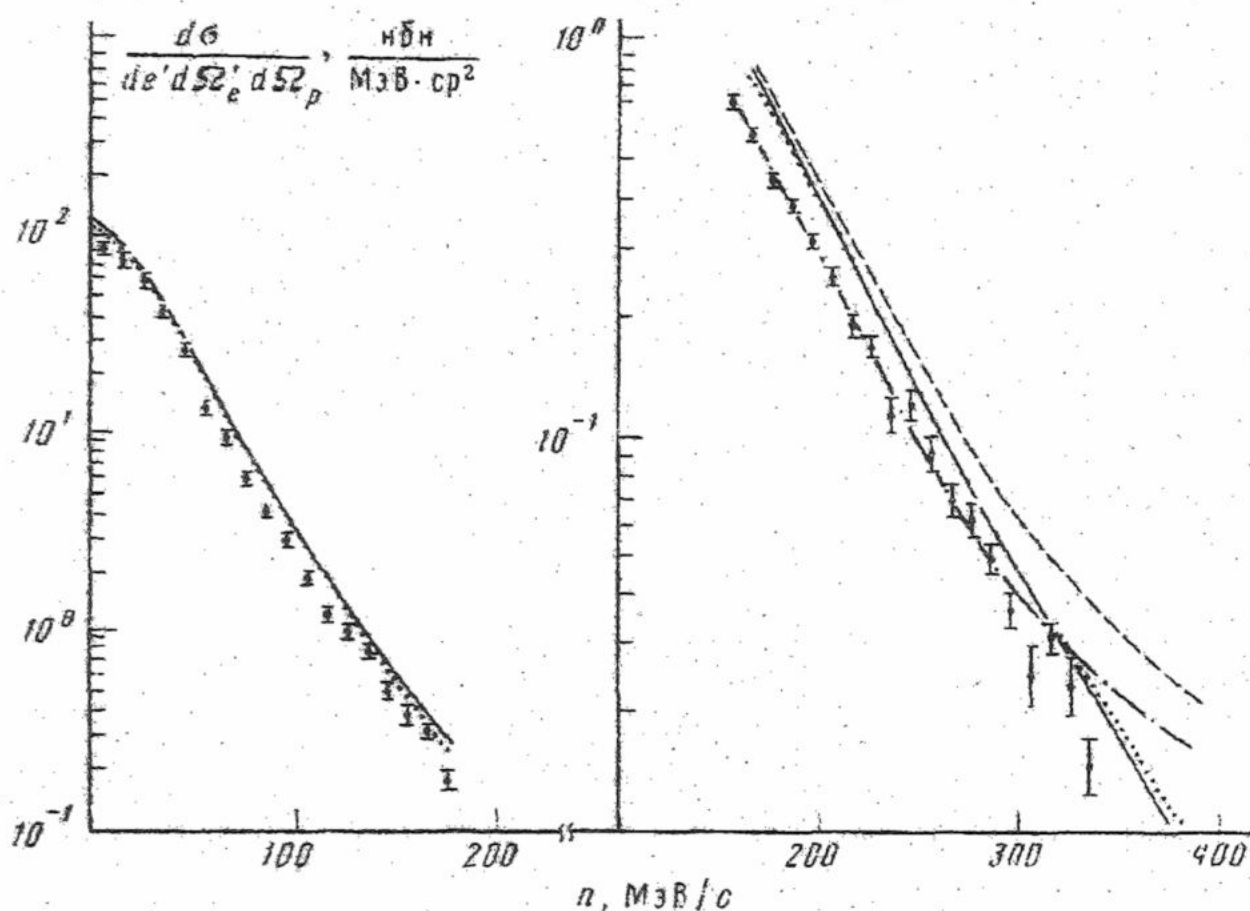


Рис.5. Эксклюзивные сечения процесса $ed \rightarrow e'pn$. Сплошная кривая (2 формфактора RSC) и точечная (4 формфактора Buck - Gross: $\lambda = 0,4$) - результаты настоящей работы. Штриховая и штрихпунктирная - нерелятивистские расчеты [6,5]. Экспериментальные данные из работы [7]

Бака-Гросса [7] с параметром смешивания псевдоскалярной и псевдовекторной связи в πNN -вершине $\lambda = 0,4$

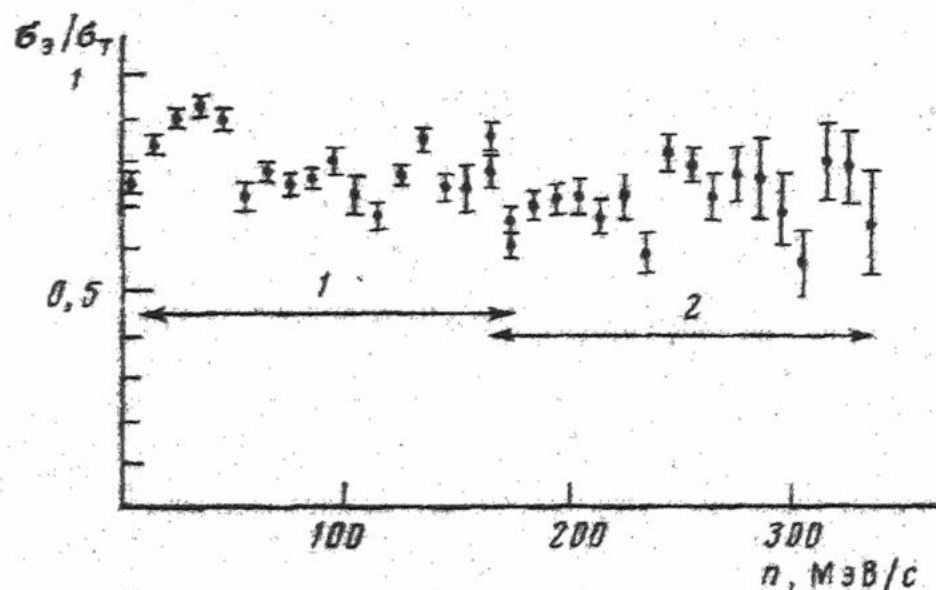


Рис.6. Отношение экспериментальных σ_3 и расчетных σ_7 сечений.

«элементарного акта» взаимодействия в γNN -вершине (19) с потенциалами [4-5] для процесса $d(e, e')n$, для двух определений ЭМ тока, свидетельствуют об увеличении роли виртуальных эффектов при удалении от максимума квазиупругого пика.. Численно отличие двух форм ЭМ вершинных функций для свободных нуклонов, при их немассовом продолжении в условиях третьей кинематики Сакле достигает 30% при $\tilde{n} \approx 0,5$ ГэВ/с, тогда как во второй кинематике Сакле, составляет порядка (15-18)% ($\tilde{n} \approx 0,3$ ГэВ/с) и менее 6% в первой кинематике [7]. Совместно с оценкой вкладов в сечение других полюсов эти цифры определяют точность извлечения функции ЭИРН.

На рис.5 представлены результаты релятивистских расчетов сечения процесса $d(e, e')n$ по формулам (12)-(17) с учетом четырех формфакторов (вклад S-, P- и D-волн) в вершине dNN , в качестве которых использовались параметризации (точечная кривая) и с учетом двух формфакторов (функции $\Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$), рассчитанных на основе потенциала [5] (сплошная кривая). Экспериментальные данные группы Сакле взяты из работы [7]. Для сравнения приведены также результаты нерелятивистских расчетов: штриховая - расчет [7] в борновском приближении с ВФ [5] дейтрона; штрихпунктир - расчет с учетом обменных мезонных токов (МОТ), изобар-конфигураций (ИК) и ВКС. В первой кинематике ((K1) - $q = 0,45$ ГэВ/с, $v = 0,105$ ГэВ) наблюдается полное соответствие релятивистского и нерелятивистского расчетов. Во второй кинематике ((K2) - $q = 0,35$ ГэВ/с, $v = 0,147$ ГэВ) при $\tilde{n} \approx 0,4$ ГэВ/с нерелятивистские расчеты дают более чем в два раза завышенные результаты и совершенно не отражают

экспериментальную тенденцию с ростом $\tilde{n}$. Релятивистские расчеты сечений по формуле (12) с учетом виртуальности частиц в промежуточном состоянии и вклада антинуклонов на основе лишь полюсных диаграмм описывают экспериментальные данные лучше, чем соответствующие нерелятивистские во всем измеренном диапазоне импульсов без привлечения вклада МОТ и ИК. Эту ситуацию наглядно иллюстрирует рис. 6, где представлено отношение экспериментальных значений сечений к расчетным. Во всем измеренном диапазоне импульсов - в кинематиках K1 и K2 - отношение $\sigma_0/\sigma_T = k$ практически постоянно и составляет. Природа фактора $k = \text{const}$ может быть связана не только с наличием ВКС [26], но так же и с off-shell эффектами в вершине γNN с одним виртуальным нуклоном. В связи с этим был проведен анализ роли треугольных диаграмм и ЭМ формфакторов виртуального нуклона (в расчетах было положено $F_{1,2}(q^2, t) = F_{1,2}(q^2)$). Сравнение результатов теоретических расчетов сечений (рис. 6) с учетом Р-волн в дейтроне [6] и без них [5] показало, что в экспериментально исследованной области импульсов $\tilde{n} \leq 0,335$ ГэВ/с (кинematики K1 и K2) роль антинуклонных компонент (Р-волн) в основном состоянии дейтрона незначительна.

КОВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ ЭИРН

Из уравнений (12) и (8) следует, что определенная таким образом функция ЭИРН $G(x)$ не зависит ни от сорта налетающих частиц, ни от кинематических условий эксклюзивных процессов и, следовательно, является хорошей динамической характеристикой релятивистской связанной системы. Наряду с этим то обстоятельство, что в максимуме квазиупругого пика сечения эксклюзивных процессов определяются практически лишь одним

полюсом, позволяет с помощью выражения (17) извлекать $G(x)$ и сравнивать результаты измерений разных экспериментальных групп, выполненные в различных кинематических условиях именно на уровне G -функции.

На рис. 7 представлены результаты релятивистских расчетов функции $G(x)$ с формфакторами [6] БГ 0,4 с учетом Р-волн, и [5] без учета Р-волн: функции $G_3 = G_4 = 0$. Экспериментальные значения извлечены по формулам (11) с использованием таблиц абсолютных сечений из работы [7]. Наблюдается хорошее согласие с экспериментом. В измеренной области импульсов вклад Р-волн, как следует из рис. 7, незначителен.

В качестве иллюстрации приведены результаты нерелятивистских расчетов $G \rightarrow \rho(n) = u^2(n) + w^2(n)$ где в качестве S и D волновых функций дейтрона использовались u и w функции потенциалов RSC и PARIS, соответственно. Заметное отличие функций $G(x)$ и $\rho(n)$ наблюдается лишь в области $|\tilde{n}| > 0,2$ ГэВ/с, где $\rho(n)$

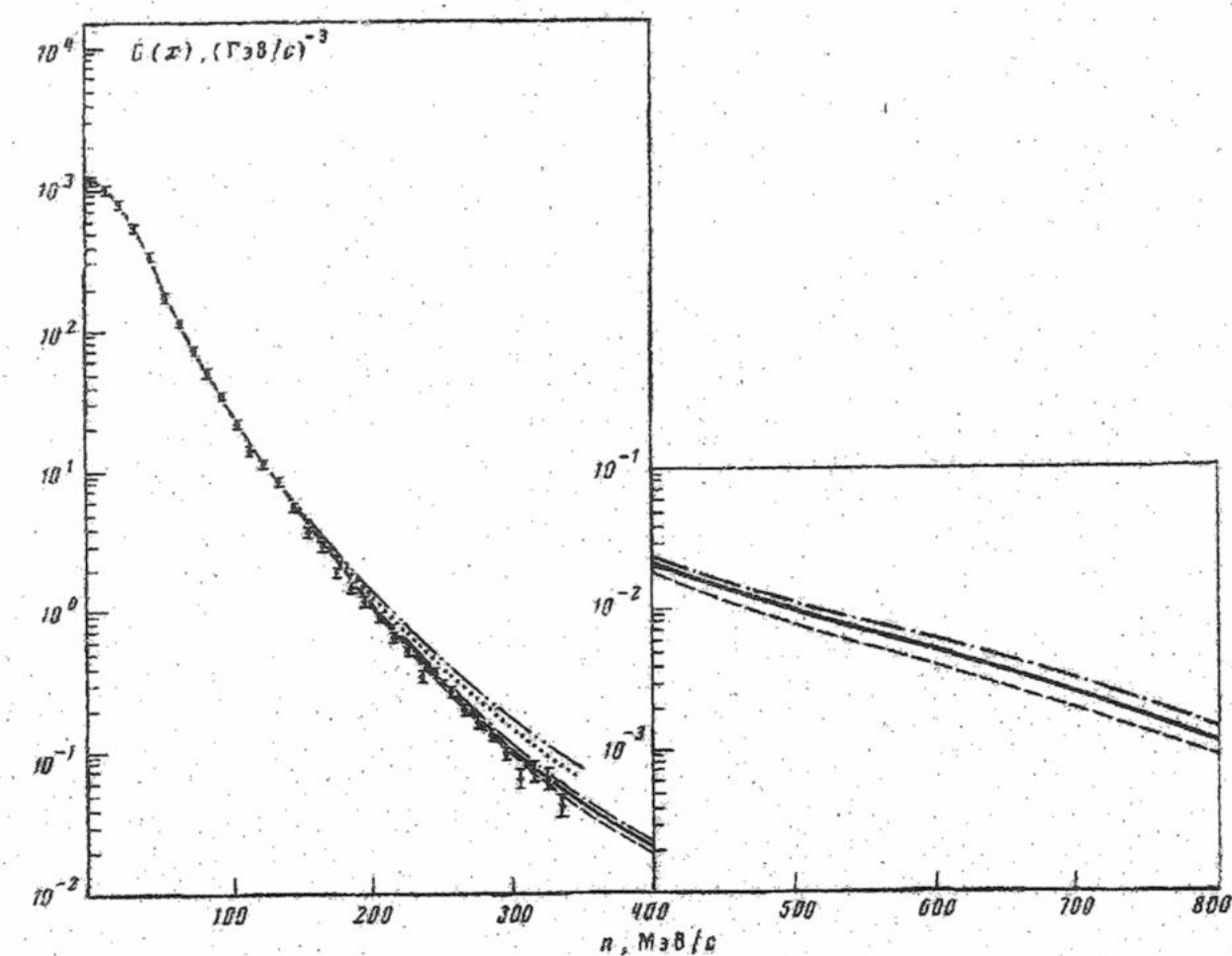


Рис. 7. Эффективные импульсные распределения нуклонов в дейтроне. Экспериментальные данные [7] обработаны по формулам (17-18). Сплошная кривая (2 формфактора RSC - Rel.), штриховая (2 формфактора Paris - Rel.) и штрихпунктирная (4 формфактора Buck - Gross: $\lambda = 0,4$) кривые - результат настоящей работы. Точечная (Paris - NRel.) и дважды штрихпунктирная (RSC - NRel.) - нерелятивистские расчеты [5].

систематически завышены (при $|\tilde{n}| \sim 0,34$ ГэВ/с почти в два раза). Все теоретические кривые на рис. 7 нормированы, согласно рис. 6, фактором $k = 0,82$. Переменные x и $|\tilde{n}|$ связаны следующим образом: $x = (1 + n^2/m^2)^{1/2} - 1$.

Обсудим вопрос об извлечении ЭИРН из экспериментальных данных. Из выражения (17) видно, что для получения кинематически независимой функции $G(x)$ экспериментальные значения сечений необходимо делить на фактор $K(d\sigma/d\Omega_p)^*$ - эффективный «элементарный акт», учитывающий виртуальность эффективного нуклона. Лишь только в этом случае факторизация (17) является точным соотношением при произвольных импульсах (в том числе и в релятивистской области $|\tilde{n}| \geq m$). Если самосогласованность функций $(d\sigma/d\Omega_p)^*$ и $G(x)$ в (17) нарушена в результате каких-либо приближений, то тем самым сразу же нарушается независимость

G – функции от кинематики. Конечно, в области $|\vec{n}| \leq 0,2$ ГэВ/с этот эффект несуществен. При больших же импульсах, в зависимости от q^2 и ν ошибка при замене в (17) сечение «элементарного акта» сечением Розенблюта на движущемся протоне может быть значительна.

На рис.8 представлены результаты расчета сечений (в относительных единицах) эффективного «элементарного акта» (сплошные кривые) и сечения Розенблюта на движущемся протоне (штриховая) при различных значениях q^2 в зависимости от виртуальности x . Кривые 1 и 2 – кинематические условия Сакле; 3 – условия Харькова ($E_1 = 1,45$ ГэВ; $E_2 = 0,72$ ГэВ; $\theta_e = 70^\circ$); 4 – условия SLAC ($E_1 = 15,74$ ГэВ; $E_2 = 12,503$ ГэВ; $\theta_e = 10^\circ$); ν – фиксировано положением максимума квазиупругого пика.

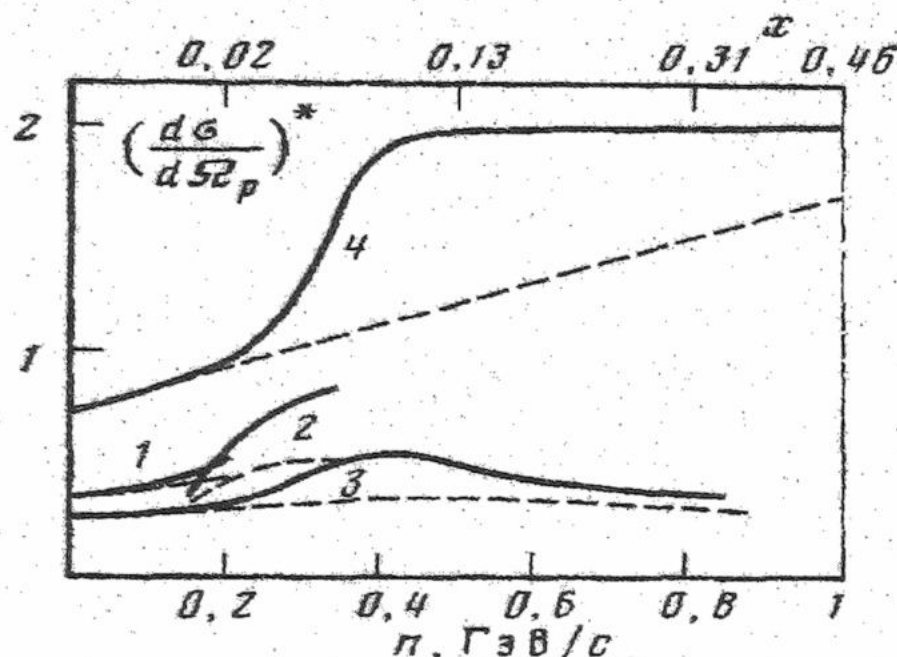


Рис. 8. Сечения (в отн.ед.) эффективного «элементарного акта» (сплошные кривые) и сечения Розенблюта на движущемся протоне (штриховая) при различных значениях q^2 в зависимости от виртуальности x .

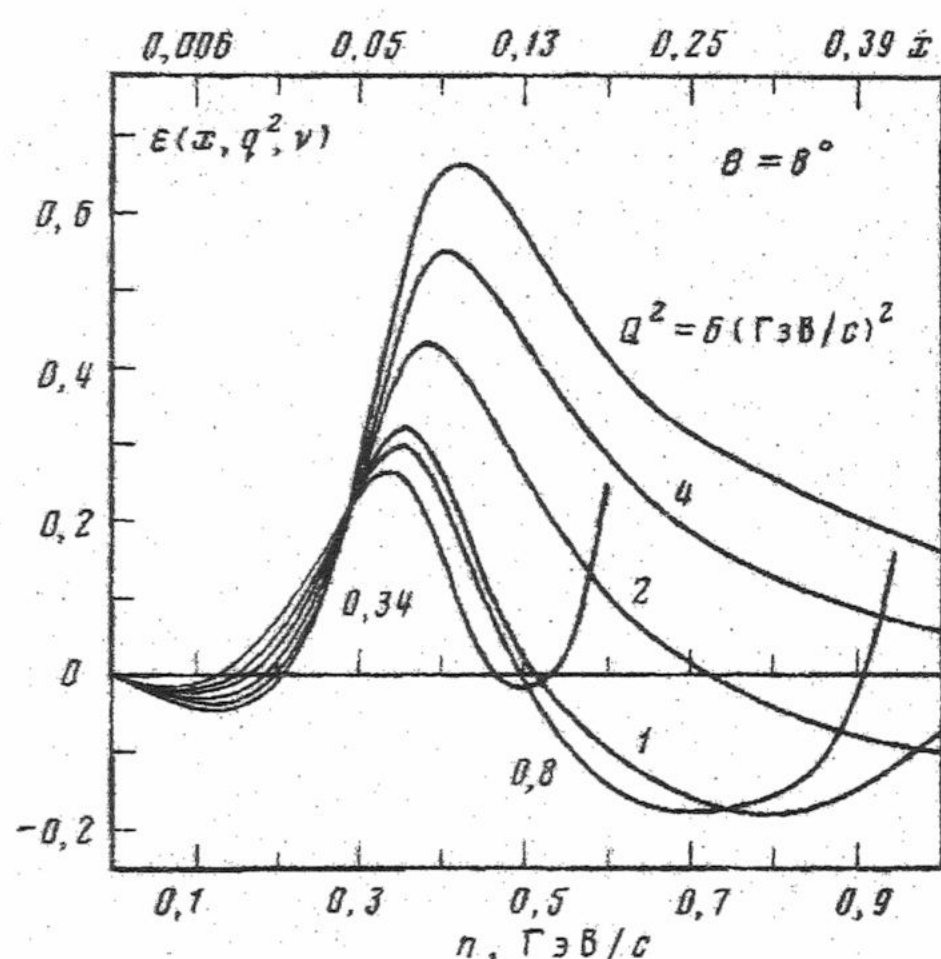


Рис. 9. Функция $\epsilon(q^2, \nu, x)$ при различных значениях q^2 и ν в максимуме квазиупругого пика, в зависимости от виртуальности x .

значениях q^2 , а ν фиксированы условием положения максимума квазиупругого пика. Видно, что в области малых виртуальностей $\epsilon \leq 0,1$ и факторизация (17) переходит в нерелятивистскую (21). При $|\vec{n}| > 0,2$ ГэВ/с корректно определить ЭИРН в дейтроне можно лишь по формуле (17). В области $0,3 \text{ ГэВ/с} \leq |\vec{n}| \leq 0,67 \text{ ГэВ/с}$ использование (21) приводит к максимальным ошибкам при извлечении ИРН, а функция $\epsilon(q^2, \nu, x)$ в некоторых кинематических условиях достигает порядка единицы. В связи с этим следует заметить, что в работе [15] группой SLAC при извлечении ИРН в дейтроне использовалась нерелятивистская факторизация, аналогичная (21), для сечения инклюзивного процесса с учетом вкладов t – и u – каналов, а в качестве «элементарного акта» $e p$ – рассеяния было выбрано сечение Розенблюта на покоящемся протоне. Все это привело, по-видимому, к существенному искажению ИРН в области

Из соотношения (18) видно, что если при извлечении ЭИРН пользоваться нерелятивистской факторизацией, где лишь частично учтена виртуальность промежуточного протона путем замены $m \rightarrow m^* = \sqrt{t}$, что нарушает самосогласованность (17)

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon' d\Omega_e d\Omega_p} = K \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_p} \right)_R \rho(n), \quad (20)$$

то полученное ИРН будет кинематически зависимо:

$$\rho = \rho(q^2, \nu, |\vec{n}|) \quad (21)$$

ибо функция $\epsilon(q^2, \nu, x)$ при использовании нерелятивистской факторизации (20) автоматически включается в определение ИРН. Обработка же сечений по формуле (17) позволяет выделить полностью не зависящую от q^2 и ν величину ЭИРН. На рис. 9 представлена функция $\epsilon(q^2, \nu, x)$ в зависимости от виртуальности при различных

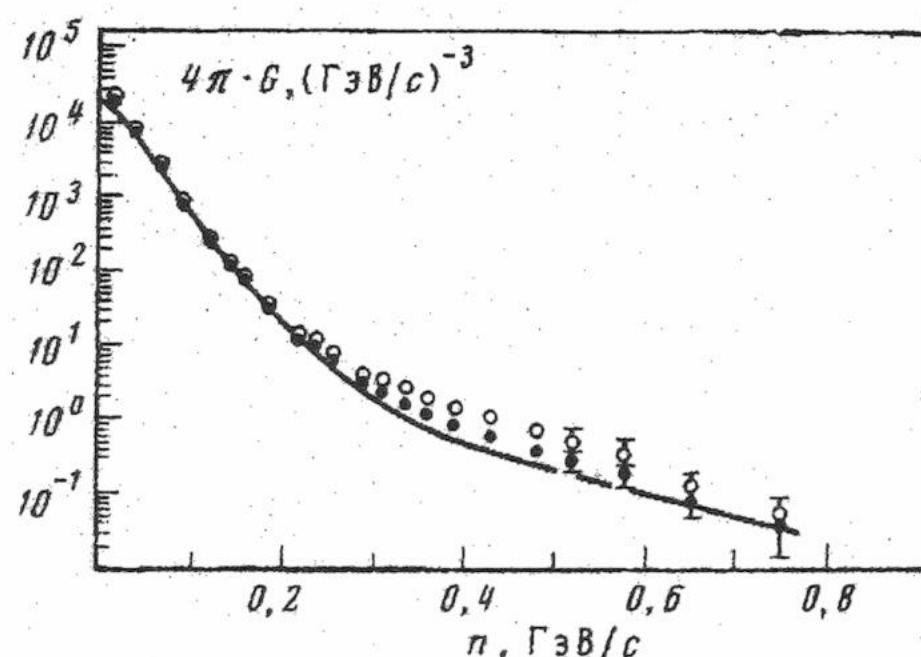


Рис. 10. Эффективное импульсное распределение нуклонов в дейтроне. Точки: ● – результат корректировки экспериментальных данных SLAC [5], ○ – данные [51]. Сплошная кривая – теоретический расчет с 4 формфакторами БГ 0,4.

$0,3 \text{ ГэВ/с} \leq |\vec{p}| \leq 0,67 \text{ ГэВ/с}$. Качественная корректировка данных группы SLAG на основе формул (17) с последовательным учетом релятивистских эффектов и формфакторами в параметризации [6], представлены на рис. 10. Следует подчеркнуть, что использованная в [15] процедуры извлечения ИРН, основанной на усреднении различных спектров и дифференцировании скейлинговой функция $F(y)$, не позволяет провести точную корректировку ИРН. Поэтому рис. 10 носит лишь иллюстративный характер и служит указанием на необходимость более тщательного учета релятивистских эффектов при исследовании ИРН в области импульсов $|\vec{p}| > 0,2 \text{ ГэВ/с}$. Так, из рис. 10 видно, что «наплыв» в средней части спектра ИРН из [5] при учете релятивистских эффектов практически исчезает, а откорректированные экспериментальные точки ложатся значительно ближе к теоретической кривой (расчет с формфакторами БГ 0,4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагорный С.И. и др.// ЯФ. 1984. Т. 40. Вып. 4(10). С.907-914.
2. Нагорный С.И. и др.// ЯФ. 1984. Т. 40. Вып. 5(11). С.1184-1193.
3. Blankenbecler R., Cook L.// Phys. Rev. 1960. V.119. № 5. P.1745-1752.
4. Lacombe M. et al.// Phys. Lett. 1981. V.101B. № 3. P.139-140.
5. Reid R. V.// Ann.Phys. 1968. V.50. P.411-448.
6. Buck W. W., Gross F.// Phys. Rev. 1979. V.D20. № 9. P.2361-2379.
7. Bernheim M. et al.// Nucl. Phys. 1981. V.A365. № 3 P.349-370.
8. Renard F. M. et al.// Nuovo Cim. 1965. V.38. № 4. P.1688-1719.
9. Кадышевский В.Г.// ФЭЧАЯ. 1980. V.11. С.5-43.
10. Нагорный С.И. и др.// Релят. эф-ты в неупр. эл.магн. процессах на дейтроне. Обзор. М.: ЦНИИатоминформ. 1986 70с.
11. Инопин Е. В. и др. Неупр. эл.магн. процессы в теории на гип.пов-ти.// Препринт ДонФТИ-8(103)-85. 1985. Донецк. 58с.
12. Нагорный С.И. и др.// ЯФ. 1986. Т. 43. Вып. 2. С.319-332.
13. Frankfurt L.L., Strikman M.I.// Phys. Rep. 1981. V.74. № 6. P.217-347.
14. Антуфьев П.Ю. и др.// ЯФ. 1977 Т. 25. Вып. 6. С.1123-1124.
15. Arnold R. G. et al.// Phys. Rev. Lett. 1982. V.49. № 9. P.1380-1383.
16. Нагорный С.И. и др.// ЯФ. 1985. Т. 42. Вып. 4(10). С.870-884.
17. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами.// М.: Мир. 1975. 302с.
18. Ахиезер А.И., Рекало М.П. Электродинамика адронов.// Киев. Наукова думка. 1977. 505с.
19. Рекало М.П.// УФЖ. 1986. Т. 31. С.491-504.
20. Рекало М.П. и др.// УФЖ. 1985. Т. 30. № 8. С.1125-1134.
21. Рекало М.П. и др.// УФЖ. 1985. Т. 30. № 5. С.662-669.
22. Fabian W., Arenhovel H.// Nucl. Phys. 1979. V.A314. № 2/3 P.253-286.
23. Atwood W.B., West G.B.// Phys. Rev. 1973. V.7D. P.773-783.
24. Rosenbluth M.H.// Phys. Rev. 1950. V.79. № 5. P.615-619.
25. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика.// М.: Наука. 1980. 704с.
26. Кондратюк Л.А.// ЯФ. 1980. Т. 31. С.1087-1106.

COVARIANT FACTORIZATION METHOD IN INELASTIC PROCESSES ELECTRODISINTEGRATION OF A DEUTERON

L.K. Kirichenko

Ukraine Engineer-Pedagogical Academy,
61003, Ukraine, Kharkov, street. University 16,

A method of cross section covariant factorization for inelastic processes on relativistic bound systems is suggested. It is shown that the cross sections are totally factorized, all relativistic effects being included. The effective momentum distribution of particles forming the bound system is calculated correctly taking into account off-shell effects and antiparticle contribution. The advantage of the method is exemplified by deuteron exclusive disintegration in the quasielastic region.

KEY WORDS: momentum distribution, factorization cross-sections, electrodisintegration, deuteron.

УДК 539.172

РЕФРАКЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В КВАЗИУПРУГИХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛЕГКИХ ИОНОВ

А. С. Молев

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразіна, 61077, Украина, г. Харьков, пл. Свободы, 4
Поступила в редакцию 7 апреля 2000 г.

Проанализированы рефракционные эффекты в различных квазиупругих ядерных реакциях под действием легких ионов с энергией $E \geq 20$ МэВ/нуклон на основе подхода с использованием модельного представления матрицы рассеяния. Показано, что рефракционные компоненты дифференциальных сечений реакции однонуклонной передачи с переходом в основное состояние конечных ядер и реакции перезарядки с возбуждением изобар-аналога основного состояния ядра мишени полностью воспроизводят экспериментальные данные в области углов, где наблюдаются радужноподобные “горбы”, сменяющиеся характерным экспоненциальным спадом.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: реакция однонуклонной передачи, реакция перезарядки, матрица рассеяния, дифференциальное сечение, рефракционный вклад, деформированное ядро

Рефракционные эффекты, в том числе ядерная радуга, являются достаточно общим явлением в столкновениях легких и тяжелых ионов с атомными ядрами при энергии налетающих частиц $E \geq 20 - 25$ МэВ/нуклон (см., например, [1–3]). Эти эффекты наблюдаются не только в упругом и неупругом рассеянии, но и проявляются в различных квазиупругих реакциях, таких как реакции передачи нуклонов и перезарядки [4–6]. Перечисленные реакции характеризуются возбуждением небольшого числа степеней свободы и происходят при сближении сталкивающихся ядер на расстояния, существенно меньшие радиуса сильного поглощения, в отличие от обычных квазиупругих процессов, протекающих на поверхности ядра. Анализ дифференциальных сечений квазиупругих реакций однонуклонной передачи и перезарядки в рассматриваемой области энергии проводился, в частности, в работах [1, 6 – 8] с помощью методов искаженных волн и связанных каналов с использованием потенциалов, найденных при описании данных по упругому рассеянию.

Особый интерес к “глубоким” квазиупругим реакциям обусловлен тем, что совместный анализ данных по упругому рассеянию и указанным прямым реакциям позволяет в ряде случаев получить надежную информацию о ядро-ядерных потенциалах на малых расстояниях [3, 6 – 8].

В данной работе изучение рефракционных эффектов, наблюдаемых в дифференциальных сечениях реакций однонуклонной передачи и перезарядки под действием легких ионов ^3He и ^4He с энергией $E = 20 - 27$ МэВ/нуклон, проводится с помощью метода искаженных волн с использованием модельного представления матрицы рассеяния.

МОДЕЛЬ РЕАКЦИИ ПЕРЕДАЧИ НУКЛОНОВ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Дифференциальное сечение реакции передачи в рамках метода искаженных волн для передаваемого углового момента J имеет вид (например, [9])

$$\sigma_J^T(\theta) = \frac{m_i m_f}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_f}{k_i} \sum_{M=-J}^J |T_{JM}(\theta)|^2, \quad (1)$$

$$T_{JM}(\theta) = \tau_J \frac{4\pi}{k_i k_f} \sum_{l, l'} i^{l-l'} \sqrt{2l'+1} \exp[i(\sigma_l^i + \sigma_{l'}^f)] \beta_{ll'} \langle l'J - MM | 10 \rangle \langle l'J 00 | 10 \rangle Y_{l',-M}(\theta, 0), \quad (2)$$

где θ – угол рассеяния, индексы i и f относятся к входному и выходному каналам реакции соответственно, m – приведенная масса сталкивающихся ядер, k – волновое число их относительного движения, τ – параметр “передачи”, l и l' – орбитальные моменты во входном и выходном каналах, σ_l – кулоновская фаза рассеяния, $\beta_{ll'}$ – матричные элементы перехода, которые выражаются через элементы ядерной части матрицы рассеяния S_l^i и $S_{l'}^f$ в состояниях с орбитальным моментом l и l' , $\langle l'J 00 | 10 \rangle$ – коэффициенты Клебша–Гордана, $Y_{l',-M}(\theta, 0)$ – сферическая функция.

Учитывая, что изучаемые реакции передачи являются квазиупругими, и пренебрегая эффектом отдачи ядра, получим величины $\beta_{ll'}$, как результат обобщения подхода [10] для неупругого рассеяния, в виде (см. [9])

$$\beta_{ll'} = \frac{1}{2i} \left[\frac{E_{cm}^i}{k_i} \frac{E_{cm}^f}{k_f} \frac{\partial S_l^i}{\partial l} \frac{\partial S_{l'}^f}{\partial l'} \right]^{1/2}, \quad (3)$$

где E_{cm} — энергия в системе центра масс.

Отметим, что выражения (1) – (3) не содержат зависимости взаимодействия от спина рассеиваемых частиц, поскольку в рассматриваемой области энергии сечение квазиупругой реакции передачи, как и сечение упругого рассеяния, при углах $\theta \leq 100^\circ$ мало чувствительно к учету такой зависимости (см. [11, 12]).

При наличии сильного поглощения модуль матрицы рассеяния $\eta(\bar{l}) = |S(\bar{l})|$, где $\bar{l} = l, l'$, плавно увеличивается с ростом $\bar{l}$ от малых величин до единицы в переходной области вблизи граничного момента $\bar{l}_0 = l_0, l'_0$ [13]. Далее, следуя [10], предполагаем, что $\bar{l}_0 \gg J$, где передаваемый момент J является не слишком большим, и, учитывая близость входного и выходного каналов, заменим $\beta_{ll'}$ на $\beta_{l'l'}$, а σ_l^i — на $\sigma_{l'}^i$. Эти предположения позволяют выделить в (2) зависимость от l в виде [10]

$$\sum_l i^{l-l'} \langle l'J-MM | l0 \rangle \langle l'J00 | l0 \rangle \approx \left(\frac{4\pi}{2J+1} \right)^{1/2} i^{-M} Y_{JM} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right). \quad (4)$$

Выражение (4) справедливо, если пренебречь членами порядка J/l' .

С учетом (4) амплитуда (2) приобретает вид

$$T_{JM}(\theta) = \tau_J \frac{(4\pi)^{3/2}}{\sqrt{2J+1}} \frac{i^{-M}}{k_i k_f} Y_{JM} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} \exp[i(\sigma_l^i + \sigma_{l'}^f)] \beta_{ll'} Y_{l,-M}(\theta, 0). \quad (5)$$

При расчетах дифференциальных сечений реакции передачи (1), (5) будем использовать шестипараметрическое модельное представление ядерной части матрицы рассеяния [14]:

$$S(L) = \exp[-2\delta_0(L) + 2i\delta_1(L)], \quad L = l + 1/2, \quad (6)$$

$$2\delta_j(L) = \mu_j [2L\Delta_j \psi(L, L_j, \Delta_j) + \Delta_j^2 \psi^2(L, L_j, \Delta_j)]^{1/2} f^{j+1}(L, L_j, \Delta_j), \quad (7)$$

$$\psi(L, L_j, \Delta_j) = -f^{-1}(L, L_j, \Delta_j) \ln(1 - f(L, L_j, \Delta_j)), \quad (8)$$

$$f(L, L_j, \Delta_j) = \left[1 + \exp\left(\frac{L - L_j}{\Delta_j} \right) \right]^{-1}, \quad j = 0, 1, \quad (9)$$

где параметр μ_j и два параметра L_j, Δ_j характеризуют соответственно интенсивность и область локализации поглощения ($j = 0$) или преломления ($j = 1$).

Амплитуда реакции передачи нуклонов на ядрах 2s-1d-оболочки, рассматриваемых как жесткие неаксиальные ротаторы (модель Давыдова и Филиппова [15]), также может быть найдена с помощью формулы (5), в которой матричные элементы $\beta_{ll'}$ следует заменить выражением, полученным в [16].

Выделим рефракционный и дифракционный вклады в дифференциальное сечение (1), (5), позволяющие понять формирование в нем различных сложных интерференционных структур и, исходя из этого, выяснить их физический смысл. Для этого амплитуду (5) запишем следующим образом:

$$T_{JM}(\theta) = T_{JM}^D(\theta) + T_{JM}'(\theta), \quad (10)$$

$$T_{JM}^{D,r}(\theta) = \tau_J \frac{(4\pi)^{3/2}}{\sqrt{2J+1}} \frac{i^{-M}}{k_i k_f} Y_{JM} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} \exp[i(\sigma_l^i + \sigma_{l'}^f)] \beta^{D,r}(L) Y_{l,-M}(\theta, 0), \quad (11)$$

где $\beta^D(L) = [E_{cm}^i E_{cm}^f (\partial \eta_i(L)/\partial L) (\partial \eta_f(L)/\partial L) / (k_i k_f)]^{1/2}$, $\beta^r(L) = \beta(L) - \beta^D(L)$, где $\beta(L)$ – выражение (3), содержащее ядерную часть матрицы рассеяния $S^{i,f}(L)$ в виде (6) – (9).

Амплитуда $T_{JM}^D(\theta)$ определяется поглощением во входном и выходном каналах, модифицированным кулоновским взаимодействием. Расчеты показывают (например, [9]), что поведение дифференциального сечения (1) реакции нуклонной передачи под действием легких ядер, найденного с использованием $T_{JM}^D(\theta)$, является дифракционным. Поэтому амплитуда $T_{JM}^D(\theta)$ представляет собой дифракционный вклад в (10). Амплитуда $T_{JM}^r(\theta)$ из-за наличия разности $\beta(L) - \beta^D(L)$ определяется в основном сильным ядерным преломлением (рефракционный вклад в (10)). В качестве $\sigma_i^{i,f}$ в (5) и (11) будем использовать квазиклассическую фазу рассеяния точечного заряда на однородно заряженной сфере радиуса R_c [17].

На рис. 1 приведены рассчитанные с помощью формул (1), (3), (5), (6) – (9) дифференциальные сечения реакции подхвата (^3He , ^4He) на ядрах ^{12}C , ^{28}Si , ^{30}Si и реакций срыва (^4He , ^3He), (^4He , ^3H) на ядрах ^{40}Ca с переходом в основное состояние конечных ядер вместе с имеющимися экспериментальными данными. Здесь же показаны рефракционные и дифракционные составляющие сечений реакций, найденные согласно (1), (11). Передаваемый момент для изучаемых квазиупругих реакций однонуклонной передачи при рассматриваемой энергии имеет следующие значения [19]: $J = 1$ для ядра мишени ^{12}C , $J = 2$ для ^{28}Si , ^{30}Si и $J = 3$ для ^{40}Ca . Отметим, что в работе [16] рассматривалась реакция передачи, отвечающая переходу с $J = 0$ (формула (5) для $J = M = 0$). Дифференциальные сечения такой реакции под действием ионов ^3He на изотопах кремния при $E(^3\text{He}) = 20$ МэВ/нуклон ведут себя подобно соответствующим сечениям для $J = 2$, но по абсолютной величине заметно меньше $\sigma_2^T(\theta)$ (см. также [19]).

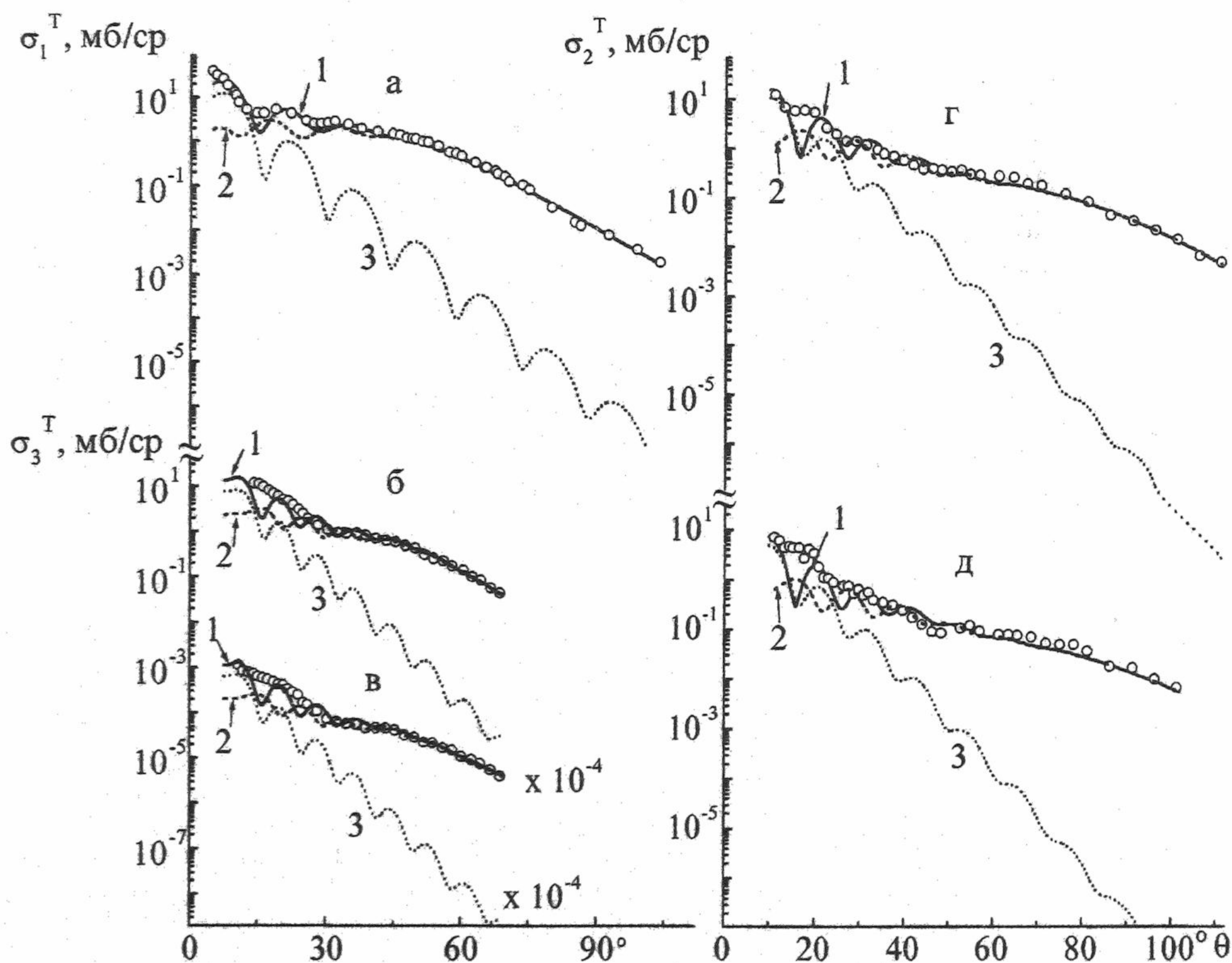


Рис. 1 Дифференциальные сечения реакций $^{12}\text{C}(^3\text{He}, ^4\text{He})^{11}\text{C}$ (а), $^{40}\text{Ca}(^4\text{He}, ^3\text{He})^{41}\text{Ca}$ (б), $^{40}\text{Ca}(^4\text{He}, ^3\text{H})^{41}\text{Sc}$ (в), $^{28}\text{Si}(^3\text{He}, ^4\text{He})^{27}\text{Si}$ (г), $^{30}\text{Si}(^3\text{He}, ^4\text{He})^{29}\text{Si}$ (д) с переходом в основное состояние конечных ядер при энергии $E(^3\text{He}) = 82,1$ МэВ (а) и 60 МэВ (г, д) и $E(^4\text{He}) = 104$ МэВ (б, в). 1 – полное сечение, 2 – рефракционный вклад, 3 – дифракционный вклад. Точки – экспериментальные данные [18 – 20].

Используемые при расчетах параметры матрицы рассеяния во входном и выходном каналах представлены в таблице наряду с величинами χ^2 . Параметры S-матрицы во входном канале найдены из наилучшего согласия рассчитанных и измеренных дифференциальных сечений упругого рассеяния теми же ядрами и при той же энергии. Параметры для выходного канала получены из сравнения рассчитанных и измеренных сечений реакции с учетом результатов анализа данных по упругому рассеянию при близких значениях энергии и массовых чисел ядер. Следует отметить, что параметры расчетов, соответствующие упругому ${}^4\text{He}-{}^{40}\text{Ca}$ - и ${}^3\text{He}-{}^{28,30}\text{Si}$ -рассеянию, взяты из [14, 21]. Кулоновский радиус $r_c^{i,f} = R_c^{i,f} A_{i,f}^{-1/3}$, где $A_{i,f}$ – массовое число ядра во входном и выходном каналах, выбирался равным $r_c^{i,f} = 1,4$ Фм [7, 21] для ядер углерода и кремния и $r_c^{i,f} = 1,3$ Фм [14] для ядер кальция и скандия. Параметры квадрупольной деформации ядер ${}^{28}\text{Si}$ и ${}^{30}\text{Si}$ ($|\beta_2^i| = 0,240$ и $0,217$, $|\beta_2^f| = 0,200$ и $0,190$) те же, что и в [16, 21]. Параметры передачи имеют следующие значения: $\tau_1 = 1,771$ для реакции на ядрах ${}^{12}\text{C}$, $\tau_2 = 1,605$ и $1,116$ для реакции на ядрах ${}^{28}\text{Si}$ и ${}^{30}\text{Si}$ соответственно, $\tau_3 = 2,281$ и $2,106$ для реакций $({}^4\text{He}, {}^3\text{He})$ и $({}^4\text{He}, {}^3\text{H})$ на ядрах ${}^{40}\text{Ca}$.

Таблица. Параметры расчетов сечений реакции однонуклонной передачи под действием ионов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ на различных ядрах

Параметр	Реакции				
	$({}^3\text{He}, {}^4\text{He})$			$({}^4\text{He}, {}^3\text{He})$	$({}^4\text{He}, {}^3\text{H})$
	${}^{12}\text{C}$	${}^{28}\text{Si}$	${}^{30}\text{Si}$	${}^{40}\text{Ca}$	${}^{40}\text{Ca}$
$E, \text{МэВ}$	82,1	60,0	60,0	104,0	104,0
L_0^i	11,003	12,830	12,970	22,573	22,573
L_1^i	8,740	11,130	11,379	18,843	18,843
Δ_0^i	1,941	2,145	2,252	2,580	2,580
Δ_1^i	3,079	2,730	2,740	4,306	4,306
μ_0^i	0,2270	0,3555	0,3627	0,1929	0,1929
μ_1^i	1,197	1,498	1,493	1,085	1,085
L_0^f	11,846	14,562	14,809	19,877	19,870
L_1^f	9,439	13,318	13,461	15,612	15,356
Δ_0^f	2,216	2,455	2,530	2,017	2,000
Δ_1^f	3,639	3,521	3,675	3,678	3,220
μ_0^f	0,2509	0,3981	0,4747	0,1838	0,1841
μ_1^f	1,377	1,772	2,015	0,918	0,916
χ^2	6,0	8,9	15,7	10,6	9,3

Из таблицы следует, что преломление в выходном канале реакции $({}^3\text{He}, {}^4\text{He})$ оказывается сильнее, чем во входном канале. Однако это не приводит к заметному различию углов ядерной радуги, характеризующих рассеяние ядер во входном и выходном каналах, в отличие от результатов работы [8], которые показали наличие ядерной радуги только во входном канале реакции $({}^3\text{He}, {}^4\text{He})$. Так, используя параметры из таблицы, для входного и выходного каналов реакции ${}^{12}\text{C}({}^3\text{He}, {}^4\text{He}){}^{11}\text{C}$ находим $\theta_R^i = 59,7^\circ$ и $\theta_R^f = 64,4^\circ$. Отличие углов θ_R^i и θ_R^f для каждой из анализируемых реакций с участием ядер ${}^{40}\text{Ca}$ составляет приблизительно 10° . Значит, картина радужного рассеяния характерна для взаимодействия частиц как во входном, так и в выходном канале.

Из рис. 1 видно, что в каждом из рассмотренных случаев рассчитанное сечение реакции передачи является чисто рефракционным в области углов, где имеется слабо проявляющийся «горб» – аналог радужного максимума в упругом рассеянии и последующий экспоненциальный спад. Дифракционные вклады в изучаемые сечения доминируют при малых углах, а с ростом θ наблюдается экспоненциальное убывание огибающей диф-

рационных осцилляций. Отметим, что в рассчитанных сечениях реакции однонуклонной передачи сохраняется выраженная дифракционная структура при небольших углах, тогда как в экспериментальных данных такое поведение менее заметно. При этом вслед за последним пересечением рефракционного и дифракционного вкладов, осциллирующих в основном в противофазе друг с другом, наступает быстрое затухание осцилляций рефракционного вклада, который становится доминирующим.

АНАЛИЗ ЗАРЯДОВООБМЕННОЙ РЕАКЦИИ (^3He , ^3H)

Изложенный выше подход можно использовать для описания квазиупругой зарядовообменной реакции (^3He , ^3H) с образованием изобар-аналога основного состояния ядра мишени. Амплитуда этой реакции определяется выражением (5) при $J = M = 0$. При этом параметр τ_0 в (5) является константой, характеризующей величину изоспиновой части взаимодействия. Амплитуда (5) при $J = M = 0$ совпадает с найденной с помощью процедуры [2], согласно которой в граничные моменты $L_j^{(p)}$ фаз $2\delta_j(L)$, отвечающие их точкам перегиба [14], вводится изоспиновая добавка, содержащая $\tau_0 \vec{i} \vec{T}$, где $\vec{i}$ и $\vec{T}$ – изоспины налетающей частицы и ядра мишени соответственно, и амплитуда рассеяния, учитывающая различие между матрицами рассеяния во входном и выходном каналах (см. [10]), разлагается в ряд с точностью до членов, линейных по указанной добавке.

Дифференциальное сечение реакции (^3He , ^3H), сопровождающейся образованием изобар-аналога основного состояния ядра мишени, связано с амплитудой $T_{00}(\theta)$ выражением

$$\sigma_t(\theta) = \frac{1}{4} (T + M_T)(T - M_T + 1) |f_t(\theta)|^2, \quad f_t(\theta) = -\frac{\sqrt{m_i m_f}}{2\pi\hbar^2} \sqrt{\frac{k_f}{k_i}} T_{00}(\theta), \quad (12)$$

где T и M_T – изоспин и проекция изоспина ядра мишени.

Рефракционный и дифракционный вклады в сечение $\sigma_t(\theta)$ определяются с помощью выражения (12), в котором используются соответственно рефракционная и дифракционная составляющие амплитуды $f_t(\theta)$, найденные на основе выражений (11) в случае $J = M = 0$.

На рис. 2 приведены рассчитанное по формулам (3), (5), (12) и измеренное дифференциальное сечение реакции $^{48}\text{Ca}(^3\text{He}, ^3\text{H})^{48}\text{Sc}$ с переходом в состояние 0^+ ядра ^{48}Sc ($E_0 = 6,68$ МэВ), являющееся изобар-аналогом основного состояния ядра ^{48}Ca , при энергии $E(^3\text{He}) = 82$ МэВ и результаты расчетов дифференциального сечения упругого рассеяния ионов ^3He при той же энергии и на тех же ядрах. Также показаны рефракционные и дифракционные вклады в сечения реакции (^3He , ^3H) и упругого рассеяния, полученные с помощью указанных выше выражений и формул из [14]. Параметры матрицы рассеяния во входном канале те же, что и для упругого рассеяния: $L_0^i = 19,904$, $L_1^i = 14,839$, $\Delta_0^i = 2,111$, $\Delta_1^i = 3,723$, $\mu_0^i = 0,2063$, $\mu_1^i = 1,231$. Параметры расчетов для выходного канала имели значения: $L_0^f = 17,340$, $L_1^f = 14,498$, $\Delta_0^f = 1,861$, $\Delta_1^f = 3,950$, $\mu_0^f = 0,1390$, $\mu_1^f = 1,203$, $\tau_0 = 0,212$ и $r_c^f = r_c^i = 1,25$ Фм. Использование приведенного набора параметров позволило корректно описать измеренные сечения ($\chi_{el}^2 = 6,9$ для упругого рассеяния и $\chi^2 = 9,7$ для реакции (^3He , ^3H)). Отметим, что эффект ядерной радуги присутствует как во входном, так и в выходном канале реакции, причем рассчитанные углы радуги $\theta_R^i = 72,3^\circ$ и $\theta_R^f = 66,1^\circ$ лежат именно в той области, где рассматриваемое дифференциальное сечение начинает быстро убывать. Из рис. 2 видно, что сечение анализируемой реакции полностью воспроизводится одним рефракционным вкладом в области углов, где сечение $\sigma_t(\theta)$ ведет себя подобно сечению радуж-

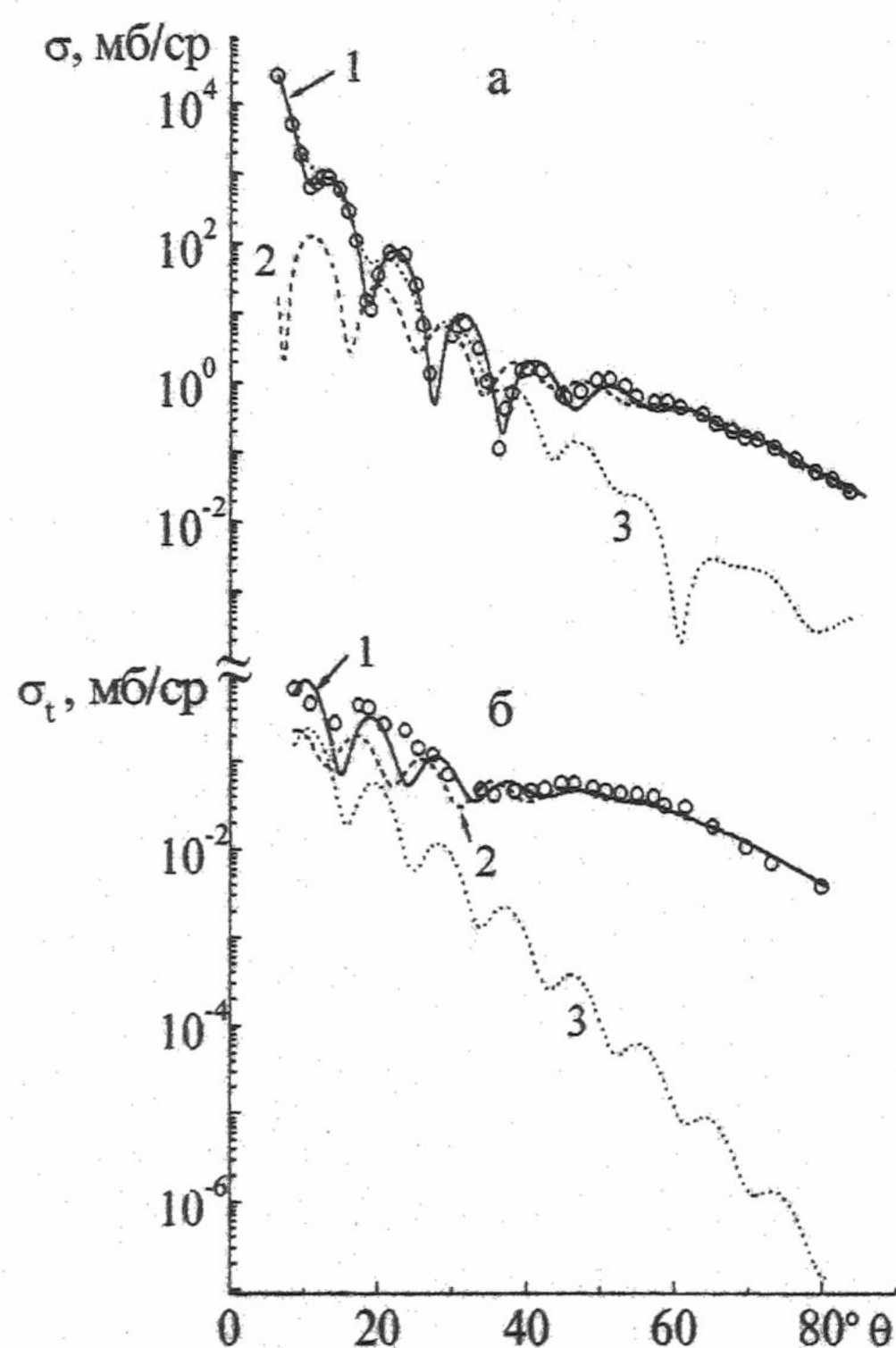


Рис. 2. Дифференциальные сечения рассеяния $^{48}\text{Ca}(^3\text{He}, ^3\text{He})^{48}\text{Ca}$ (а) и реакции $^{48}\text{Ca}(^3\text{He}, ^3\text{H})^{48}\text{Sc}$ с образованием изобар-аналога основного состояния ядра мишени (б) при энергии $E(^3\text{He}) = 82$ МэВ. 1 – полное сечение, 2 – рефракционный вклад, 3 – дифракционный вклад. Точки – экспериментальные данные [22].

ного рассеяния. Как отмечалось выше, поведение дифракционного вклада имеет фраунгоферовский характер. Рис. 2 свидетельствует о том, что осцилляции рассчитанных рефракционных компонент сечений упругого рассеяния и реакции (^3He , ^3H) в ограниченном угловом диапазоне, где они существуют, удовлетворяют следующему правилу фаз, аналогичному правилу фаз Блэра [23] для сечений упругого рассеяния и квазиупругой зарядовообменной реакции: рефракционный компонент сечения зарядовообменной реакции осциллирует в противофазе с рефракционным компонентом сечения упругого рассеяния.

ВЫВОДЫ

Проведенные исследования квазиупругих ядерных реакций под действием легких ионов с энергией $E \geq 20 - 25$ МэВ/нуклон позволяют сделать следующие выводы:

1. С помощью предложенного подхода, использующего модельное представление матрицы рассеяния, можно изучать единым образом рефракционные эффекты в различных квазиупругих реакциях, определяемые преломляющим действием притягивающего ядерного поля.

2. Рефракционные компоненты дифференциальных сечений реакции однонуклонной передачи с переходом в основное состояние конечных ядер и реакции перезарядки с возбуждением изобар-аналога основного состояния ядра мишени являются доминирующими в широкой области углов и полностью воспроизводят характерные радужноподобные «горбы» и экспоненциальные «хвосты» рассматриваемых сечений.

3. Эффект радужного рассеяния характерен как для входного, так для выходного канала реакции однонуклонной передачи с переходом в основное состояние конечных ядер и реакции перезарядки с образованием изобар-аналога основного состояния ядра мишени.

4. Рефракционный компонент сечения реакции (^3He , ^3H) с возбуждением изобар-аналога основного состояния ядра мишени в области небольших углов осциллирует в противофазе с рефракционным компонентом сечения упругого рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandan M.E., McVoy K.W. // Phys. Rev. C. 1991. V.43. P.1140-1154.
2. Бережной Ю.А. и др. // ЭЧАЯ. 1987. Т.18. С.289-322.
3. Демьянова А.С., Оглоблин А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 1996. Т.60. N1. С.6-27.
4. Бережной Ю.А., Пилипенко В.В. // ДАН УССР. Сер. А. 1984. N5. С.52-54.
5. Bohlen H.G. et al. // Z. Phys. A. 1985. V.322. P.241-252.
6. Demyanova A.S. et al. // Phys. Scr. T. 1990. V.32. P.89-106.
7. Ershov S.N. et al. // Phys. Lett. B. 1989. V.227. P.315-320.
8. Адодин В.В., Буртебаев Н.Т., Дуйсебаев А.Д. // ЯФ. 1992. Т.55. С.577-589.
9. Mermaz M.C. // Nuov. Cim. A. 1984. V.81. P.291-317.
10. Austern N., Blair J.S. // Ann. Phys. 1965. V.33. P.15-64.
11. Hyakutake M. et al. // Nucl. Phys. A. 1980. V.333. P.1-12.
12. Khallaf S.A.E., Amry A.M.A., Mokhtar S.R. // Phys. Rev. C. 1997. V.56. P.2093-2103.
13. Frahn W.E. Diffraction processes in nuclear physics. Oxford. Clarendon Press, 1985.
14. Молев А.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 1995. Т.61. N1. С.162-165.
15. Давыдов А.С. // Возбужденные состояния атомных ядер. М. Атомиздат, 1967.
16. Молев А.С. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 1994. Т.58. N11. С.74-79.
17. Пилипенко В.В. // ДАН УССР. Сер. А. 1989. N1. С.65-68.
18. Tanabe T. et al. // J. Phys. Soc. Jap. 1986. V.41. P.361-367.
19. Hauser G. et al. // Nucl. Phys. A. 1972. V.182. P.1-19.
20. Адодин В.В. и др. // Тез. докл. XLI Совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л. Наука, 1990. С.321.
21. Кузниченко А.В., Молев А.С., Онищенко Г.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 1993. Т.57. N10. С.152-160.
22. Tanabe T. et al. // Nucl. Phys. A. 1978. V.311. P.38-50.
23. Блэр Дж. // Прямые процессы в ядерных реакциях. М. Мир, 1965. С.208-223.

REFRACTIVE EFFECTS IN QUASIELASTIC NUCLEAR REACTIONS INDUCED BY LIGHT IONS

A. S. Molev

Kharkov National University, 61077, Ukraine, Kharkov, Svoboda sq., 4

Refractive effects in various quasielastic nuclear reactions induced by light ions with energy $E \geq 20$ MeV/nucleon are analyzed on the basis of approach, which utilizes model representation of the scattering matrix. It is shown that refractive components of differential cross sections for one-nucleon transfer reaction with transition to the ground state of final nuclei and charge-exchange reaction with excitation of isobaric analog state of the ground state of the target nucleus reproduce entirely experimental data in angular range, where rainbow-like humps followed by characteristic exponential decrease are observed.

KEY WORDS: one-nucleon transfer reaction, charge-exchange reaction, scattering matrix, differential cross section, refractive contribution, deformed nucleus

УДК 539.17

DETERMINATION OF PARAMETERS OF SCATTERING MATRIX BY A REFINED GENETIC ALGORITHM

V. Yu. Korda* and N. A. Shlyakhov**

*Scientific and Technological Center of Electrophysics, National Academy of Sciences of Ukraine
(61002 Kharkov, 28 Chernyshevsky St., P.O. BOX 8812, Ukraine)**National Scientific Center, Kharkov Institute of Physics and Technology
(61108 Kharkov, 1 Akademicheskaya St., Ukraine)

Received 20 April 2000

The scattering matrix based analysis of the intermediate-energy elastic-scattering of light nuclei by nuclei is automated with the help of a refined genetic algorithm proposed. The developed technique has demonstrated excellent performance in exploration of the highly dimensional, highly non-linear and strongly rugged parameter space of the problem.

KEY WORDS: scattering matrix, intermediate energy, elastic scattering, genetic algorithm.

The original complexity of nuclear forces and the many-body nature of nuclear processes brightly manifest themselves in the existence of absorptive and refractive properties of colliding nuclei at intermediate energies. Having the analogy in optics these properties are responsible for the well-known features of the differential cross-sections of elastic-scattering of light nuclei by nuclei: Fresnel and Fraunhofer diffraction patterns, Fraunhofer crossover and rainbow phenomena. Hence, phenomenological analysis of such features is a very complicated task because a great number of fitting parameters should be involved. For instance, the analysis of elastic scattering of ^4He -nuclei by ^{44}Ca -nuclei at 104 MeV [1] has been performed in [2] with the help of the scattering matrix having the form:

$$S(L) = \eta(L) \exp\{2i[\delta(L) + \sigma_C(L)]\}, \quad \eta(L) = \exp[\ln \varepsilon \cdot g(L, L_0, \Delta_0)], \quad 2\delta(L) = \delta_0 \cdot g^2(L, L_1, \Delta_1),$$

$$g(x, x_0, \Delta) = \left\{1 + \exp[(x - x_0)/\Delta]\right\}^{-1}, \quad L = l + 1/2,$$

where $\sigma_C(L)$ is the phase of the point-charge scattering by the uniformly charged sphere having the radius $R_C = 13 \cdot 44^{1/3}$; $\varepsilon \ll 1$ determines the nucleus transparency in the small moment region; δ_0 characterizes the nucleus refraction. It is noted that the parameter space of the problem is highly dimensional (six parameters should be varied), highly nonlinear (parameters are strongly coupled) and has an unknown and unpredictable topography (χ^2 surface is very complicated). Hence, to find S-matrix parameters we need the appropriate search method.

The grid methods can explore an arbitrary search space with evidently arbitrary precision but take for that eventually infinite time. The gradient methods are much quicker than the grid ones but often become stuck in a local minimum. Besides, such methods can accumulate the errors of function evaluations because each the new test point in the parameter space depends on the previous one. The random search methods are stable against the mentioned disadvantage and can "hop" from one minimum to another but are very time intensive.

The approach which is proven to perform efficiently on such complicated problem spaces is a genetic algorithm (GA) [3-5]. GA treats an optimization problem as a selection of the fittest set of parameters under optimization. But GA does not simply use the Darwinian idea of biological evolution by the selection of the fittest, it even mimics the details of mechanisms via which that evolution occurs: mutation and heredity. From the evolutionary point of view, the gradient methods of optimization are totally hereditary because each the new function evaluation is wholly determined by the previous one. At the same time the random search approaches are absolutely mutative because any consequent function evaluations are totally independent. Following the biological example, GA encapsulates mutation and heredity the way which can be easily tuned to fit almost any optimization problem [6-8]. Dealing with real problems GAs usually face two general problems:

- (i) a perfect solution cannot be obtained while a "good" one can be found quite quickly (the inherent non-determinism of GA itself);
- (ii) GAs are also time-consuming when performed on a single sequential processor.

The situation can be partially improved by performing a set of optimization runs with different initial populations and different population sizes, but it is difficult to predict how many runs, generations and individuals would be needed. Besides, one can combine GAs with gradient and other deterministic methods, but these hybrids are still more of an art than a science. Therefore, we need to refine GA with respect to the mentioned problems.

TRADITIONAL GENETIC ALGORITHM

The essentials of traditional GA are as follows. Every parameter under optimization is represented by 16-bit string called a gene, so that the parameter range is divided on 2^{16} parts, which is usually sufficiently precise. A set of genes representing optimization parameters is called a genome (an individual). Selective quality of an individual is called a fitness. Population consists of a fixed number of individuals. Evolution begins from the initial population filled with randomly chosen genomes. For each individual the function under optimization is evaluated and the fitness is attached. Two individuals (parents) are chosen randomly according to their fitnesses to produce offsprings. Mating of parents uses two key GA operators: mutation and crossover. Mutation means the inversion of gene's bits while crossover is the exchange of portions of bits between offsprings. After replication offsprings are tested to acquire fitness. If the given offspring has a better fitness than the worst individual in the population then the latter is substituted by the former to keep the population size. Next pair of parents is chosen and so forth. Algorithm terminates when the best fitness of the population is found equal to the worst one so that no further improvement should be expected.

REFINED GENETIC ALGORITHM

To handle the problem (i) we tested the traditional GA on minimizing the simplest one-dimensional functions having the only one minimum and allowing the algorithm to reach it exactly. We discovered that GA often stopped in the several points of the space of optimization parameters, pointing out the existence of a number of local minima. But neither the functions were so complicated to have local minima in these points nor the population size was too small to take into consideration the random deviations from the true minimum due to the inherent nondeterminism of GA. Our efforts to change the situation by varying the population size, the mutation probability and the crossover rate failed. So we were forced to treat the genes corresponding to these unexisting minima as "magic".

Having analyzed the binary configurations of "magic" genes we found that a binary representation of genes itself caused the anomaly. For instance, the binary representation of the integer number 0 has all 16 bits zeros while its nearest neighbor -1 has all 16 bits units (for 16-bit strings). So, if we want to transform the gene $g=-1$ into the gene $g=0$ via the traditional mutation operation (gene's bit inversion) we must invert all 16 bits. As far as the probability of such a mutation event is vanishingly small GA can stop at these "magic" genes without any motivation from the function under optimization or the details of GA implementation. Note that the neighbor gene pairs (-2, -1) and (0, 1) are separated by the only one bit inversion each.

To fix the problem, before the conventional inversion of bits it is worthwhile randomly shifting the value of gene by -1, 0, +1. Repeating the simple function minimization experiments with application of the corrected mutation procedure, we found it demonstrating excellent performance in dramatic increase of the successive runs percentage.

To deal with the problem (ii) we should optimize basic GA parameters and operators in respect to the number of function evaluations, keeping the quality of optimization along with that. Mutation is a major GA operator making the evolution possible. Frequency of mutation determines the degree of inheritance: if it is too high the heredity is almost absent and GA becomes one of the stochastic methods; if it is too low the heredity is almost total and GA appears one of the deterministic approaches. Maximum speed of evolution occurs when the frequency of mutation acquires some optimum value at the middle. This value cannot be estimated in general for any problem.

In our approach the frequency of mutation is implemented as a number of replicated bits one of which, on average, is flipped. That number has the initial value of 1 (every bit in a gene will be inverted). During replication, the mutation genes of the parent and its offspring are randomly changed by -1, 0, +1. This mechanism was found accelerating the evolution at the initial stage and keeping the optimum genetic diversity rate in the population.

To minimize harmful consequences of highly inexact replication we have modified the bit inversion procedure itself. Traditional mutation operation assumes that the probability of inversion of a bit in a gene is distributed uniformly, so that the probability of a drastic change is equal to the probability of a slight one. Altering the shape of that distribution we can, in principle, decrease the probability of lethal changes even if the mutation rate in genome is very high. In biological genetics the similar alteration is called the degeneracy of genetic code and leads to the similar result [9]. It is impossible to calculate or predict the distribution in closed form. So, we introduce 16 bit-inversion-weight-genes (one gene for every bit in a 16-bit string). The initial values of the weight-genes provide uniform distribution of mutation probability in a gene. Our experiments show that under the high frequency of mutation the weight-genes rapidly adopt and the final number of function evaluations substantially reduces.

APPLICATION EXAMPLE

Figure shows the results of optimization of S-matrix parameters obtained with the help of our GA software package created for the single sequential processor. The values of parameters found and the quality of the fit are in good agreement with the results of [2]. We emphasize that the only input data required for GA is the range of parameters while the optimization itself is performed automatically.

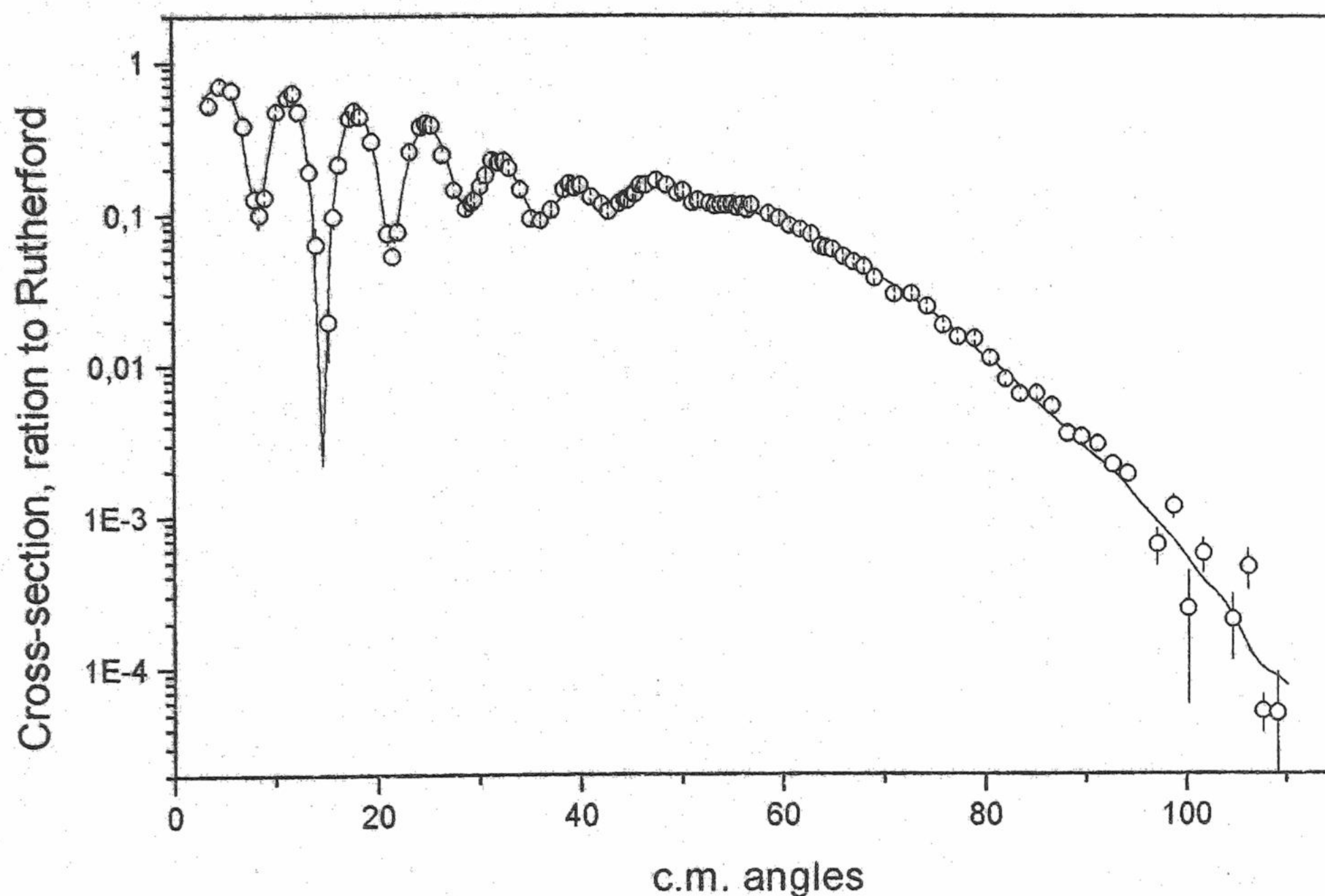


Figure. The cross-section of the 104 MeV α -particle elastic scattering by ^{44}Ca -nuclei. $L_0 = 21.87$, $L_1 = 18.42$, $\Delta_0 = 2.85$, $\Delta_1 = 4.97$, $\varepsilon = 0.0212$, $\delta_0 = 22.46$, $\chi^2 = 3.7$. Experimental data are from [1].

Authors are deeply indebted to Berezhnoy Yu. A. and Pilipenko V. V. for valuable discussion.

REFERENCES

1. Gils H.J., Friedman E., Rebel H. et al. // Phys.Rev. 1980. v.C21. p. 1239.
2. Pilipenko V. V. // D. Sci. Thesis, Kharkov State University, 1999.
3. Holland J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
4. Goldberg D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.
5. Michalewicz Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
6. Morris J. R., Deaven D. M. and Ho K. M. // Phys. Rev. 1996. v.B53. p.R1740.
7. Michaelian K. // Revista Mexicana de Fisica. 1996. v.42(suppl.1). p.203.
8. Winkler C. and Hofmann H. M. // Phys. Rev. 1997. v.C55. p.684.
9. M.Yčas, *The Biological Code*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, London, 1969.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОГО ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

В.Ю. Корда* и Н.А. Шляхов**

*Научно-технический центр электрофизической обработки НАН Украины
(61002 Харьков, ул. Чернышевского 28, а/с 8812, Украина)

**Национальный Научный Центр, Харьковский физико-технический институт
(61108 Харьков, ул. Академическая 1, Украина)

Процесс обработки экспериментальных данных по упругому рассеянию легких ядер ядрами в области промежуточных энергий на основе параметризованной матрицы рассеяния автоматизирован с применением усовершенствованного генетического алгоритма. Разработанная техника позволила успешно исследовать высоко размерное, сильно нелинейное и сильно пересеченное пространство параметров задачи.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: матрица рассеяния, упругое рассеяние, генетический алгоритм.

УДК 539.12

О СТРОЕНИИ ГЛАДКИХ ПОЛУСУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

С. А. Дуплій¹⁾, М. В. Чурсин²⁾¹⁾ Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, УкраинаE-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: <http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij>²⁾ Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

Поступила в редакцию 28 апреля 2000 г.

Рассматриваются возможности обобщения модельных супермногообразия Роджерс на необратимый случай. Показано, что определенным образом редуцированная модель на $B_2^{1,2}$ не сводится к супермногообразию Роджерс на $B_1^{1,2}$, которая однако после некоторого отображения является обратимым супермногообразием. Исследовано необратимое обобщение модели Роджерс, на $B_1^{1,2}$ вводится полугрупповая структура, идеальные свойства которой изучены. Это приводит к полусупермногообразию, в котором необратимость является результатом многозначности функций перехода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: супермногообразие, карта, функция перехода, необратимость, полугруппа, многозначность.

Теория супермногообразий [1–4] с одной стороны является математической основой современных объединенных теорий элементарных частиц (см. напр. [5]), а с другой стороны представляет самостоятельный интерес как одно из важнейших направлений суперматематики [1, 6, 7]. Необратимые аналоги супермногообразий были введены в [8] и частично исследованы в [9–11]. В данной работе изучаются свойства и возможные необратимые обобщения модельных супермногообразий Роджерс [12], которые являются важным ингредиентом всего функционального подхода [13–15].

МОДЕЛЬНОЕ РЕДУЦИРОВАННОЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ

Пусть $B_2^{1,2}$ — алгебра Грассмана-Банаха вида $B_2^{1,2} = \{\langle x, \xi, \eta \rangle\}$, где

$$x = a_1 \mathbf{1} + a_2 \beta_1 \beta_2, \quad (1)$$

$$\xi = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2, \quad (2)$$

$$\eta = c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2. \quad (3)$$

и $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1}$ — единица алгебры и β_i — антикоммутирующие нечетные нильпотентные образующие $\beta_1 \beta_2 = -\beta_2 \beta_1$. Для того, чтобы ввести операцию, сопоставим алгебре $B_2^{1,2}$ (по аналогии с [13]) множество верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \xi \\ 0 & 1 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Легко видеть, что произведение матриц сохраняет грассманову структуру (то есть оставляет на четном месте четный элемент x , а на нечетных местах — нечетные ξ, η). Это позволяет ввести на множестве $B_2^{1,2}$ корректную операцию умножения (*) вида

$$\langle x, \xi, \eta \rangle * \langle y, \rho, \sigma \rangle = \langle x + y, \xi + \rho + x\sigma, \eta + \sigma \rangle, \quad (5)$$

порожденную произведением матриц (4). Эта операция ассоциативна в силу ассоциативности произведения матриц. Поскольку для каждого элемента $\langle x, \xi, \eta \rangle$ существует единственный обратный $\langle -x, -\xi + x\eta, -\eta \rangle$, то множество $B_2^{1,2}$ с операцией (*) является группой, которую мы обозначим G . Для группы G выполняются следующие глобальные свойства:

$$x^2 \neq 0, x\xi \neq 0, x\eta \neq 0, \xi\eta \neq 0, \quad (6)$$

если все вещественные коэффициенты отличны от 0 и $\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Другое представление T_G группы G может быть введено с помощью прямоугольных матриц из вещественных коэффициентов. Элемент $\langle x, \xi, \eta \rangle$ с коэффициентами (1)–(3) представляется матрицей

$$t_{x,\xi,\eta} = T_G(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

а произведение порождается произведением элементов (5)

$$t_{x,\xi,\eta} * t_{y,\rho,\sigma} = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 & d_2 \\ e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + d_1 & a_2 + d_2 \\ b_1 + e_1 + a_1 f_1 & b_2 + e_2 + a_1 f_2 \\ c_1 + f_1 & c_2 + f_2 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Данное представление рассматриваемое как обычное 6-мерное многообразие является частным примером "скелета" супермногообразия [16]. В общем случае размерность "скелета" $(m|n)$ -мерного супермногообразия на грассмановой алгебре B_L равна $2^{L-1}(m+n)$.

Выделим в группе $\mathbf{G}$ дискретную подгруппу $\mathbf{D} = \{ \langle p, \mu, \nu \rangle \}$ с целыми коэффициентами, определяющуюся следующими условиями

$$p = m_1 \mathbf{1} + m_2 \beta_1 \beta_2, \quad (9)$$

$$\mu = n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2, \quad (10)$$

$$\nu = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2. \quad (11)$$

где $m_i, n_i, k_i \in \mathbb{Z}$. Построим фактор-группу $\mathbf{G} / \mathbf{D}$. Классы элементов $\langle x, \xi, \eta \rangle$ и $\langle x', \xi', \eta' \rangle$ совпадают $[\langle x, \xi, \eta \rangle] = [\langle x', \xi', \eta' \rangle]$, если существует такой элемент $\langle p, \mu, \nu \rangle \in \mathbf{D}$, что

$$x = x' + p, \quad (12)$$

$$\xi = \xi' + \mu + x' \nu, \quad (13)$$

$$\eta = \eta' + \nu. \quad (14)$$

Таким образом множество $B_2^{1,2}$ приобретает дополнительную (порожденную факторизацией) нетривиальную топологию. Можно показать, что полученное топологическое пространство является G^∞ -супермногообразием размерности $(1|2)$ над грассмановой алгеброй B_2 с соответствующими картами, как было упомянуто в работе [17], где также было рассмотрено редуцированное (по отношению к (7)) следующее представление

$$T_G^{Rogers}(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \begin{Bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

соответствующее алгебре $B_1^{1,2}$. Выясним, приводит ли другие редуцирования (пророждающиеся уравнениями на коэффициенты, а не на переменные супермногообразия) к супермногообразиям. Рассмотрим подмножество $\mathbf{G}'$ группы $\mathbf{G}$, полученное из $\mathbf{G}$ при помощи следующего редуцирования

$$T_{G'}(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \begin{Bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \\ 0 & c \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

В таком представлении координаты равны

$$x = a \beta_1 \beta_2, \quad (17)$$

$$\xi = b \beta_1, \quad (18)$$

$$\eta = c \beta_2, \quad (19)$$

а произведение в $\mathbf{G}'$ определяется формулой

$$\begin{Bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \\ 0 & c \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0 & d \\ e & 0 \\ 0 & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & a+d \\ b+e & 0 \\ 0 & c+f \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

В терминах "скелета" операция редуцирования является пересечением трех гиперплоскостей. Полученное подпространство инвариантно относительно действия $\otimes$.

Понятно, что множество $\mathbf{G}'$ является подгруппой группы $\mathbf{G}$, так как операция $(*)$ и взятие обратного не выводят за пределы $\mathbf{G}'$, а единица $\mathbf{G}$ принадлежит $\mathbf{G}'$ и, очевидно, равна $\langle 0, 0, 0 \rangle$, которая представляется нулевой матрицей (16). Из (20) следует, что $\mathbf{G}'$ изоморфна $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но не изоморфна группе над $B_1^{1,2}$, представление которой задано в (15), а действие (в наших обозначениях) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} d & 0 \\ e & 0 \\ f & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a+d & 0 \\ b+e+af & 0 \\ c+f & 0 \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Для $\mathbf{G}'$, в отличие от группы $\mathbf{G}$, глобальные свойства таковы:

$$x^2 = 0, \quad x\xi = 0, \quad x\eta = 0, \quad \xi\eta \neq 0. \quad (22)$$

Первые три соотношения можно считать уравнениями редуцированной группы $\mathbf{G}'$, а последнее свойство выполняется только при условии $bc \neq 0$.

Аналогичным образом редуцируем дискретную группу $\mathbf{D}$, что можно представить матрицей с целыми элементами

$$T_{D'}(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \begin{Bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \\ 0 & k \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

Видно, что $\mathbf{D}'$ является дискретной подгруппой группы $\mathbf{D}$ и представляется прямым произведением $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. По аналогии с (12)–(14) профакторизуем группу $\mathbf{G}'$ по $\mathbf{D}'$: элементы $\langle x, \xi, \eta \rangle$ и $\langle x', \xi', \eta' \rangle$ совпадают $[\langle x, \xi, \eta \rangle] = [\langle x', \xi', \eta' \rangle]$, если существует такой элемент $\langle p, \mu, \nu \rangle \in \mathbf{D}'$, что

$$x = x' + p, \quad (24)$$

$$\xi = \xi' + \mu, \quad (25)$$

$$\eta = \eta' + \nu. \quad (26)$$

Покажем, что $\mathbf{G}' / \mathbf{D}'$ — G^∞ -супермногообразие размерности $(1|2)$ над грассмановой алгеброй B_1 с обратимыми картами. Рассмотрим следующие множества в $\mathbf{G}'$

$$S_1 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid \frac{1}{5} < a < \frac{4}{5} \right\}, \quad (27)$$

$$S_2 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid \frac{1}{5} < b < \frac{4}{5} \right\}, \quad (28)$$

$$S_3 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid \frac{1}{5} < c < \frac{4}{5} \right\}, \quad (29)$$

$$T_1 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid -\frac{2}{5} < a < \frac{2}{5} \right\}, \quad (30)$$

$$T_2 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid -\frac{2}{5} < b < \frac{2}{5} \right\}, \quad (31)$$

$$T_3 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid -\frac{2}{5} < c < \frac{2}{5} \right\} \quad (32)$$

и восемь их пересечений

$$\begin{aligned} V_1 &= S_1 \cap S_2 \cap S_3, & V_5 &= S_1 \cap T_2 \cap T_3, \\ V_2 &= T_1 \cap S_2 \cap S_3, & V_6 &= T_1 \cap S_2 \cap T_3, \\ V_3 &= S_1 \cap T_2 \cap S_3, & V_7 &= T_1 \cap T_2 \cap S_3, \\ V_4 &= S_1 \cap S_2 \cap T_3, & V_8 &= T_1 \cap T_2 \cap T_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим восемь координатных окрестностей $U_i = [V_i]$ на $\mathbf{G}' / \mathbf{D}'$, состоящих из классов эквивалентности всех элементов, принадлежащих V_i , где $i = 1, 2, \dots, 8$. Так как размерность редуцированной группы равна трем, что совпадает с размерностью "скелета" супермногообразия $B_1^{1,2}$, то естественно рассматривать карты на соответствующей алгебре $B_1^{1,2}$. Введем на U_i локальные карты $\Psi_i : U_i \rightarrow \hat{V}_i$, где $\hat{V}_i$ — область в алгебре Грассмана-Банаха $B_1^{1,2}$. Сопоставим каждому множеству S_i в $B_2^{1,2}$ множество $\hat{S}_i$ в $B_1^{1,2}$ следующим образом: если элемент $\langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \in S_i$, $\beta_i \in B_2$, то элемент $\langle a1, b\beta, c\beta \rangle \in \hat{S}_i$, $\beta \in B_1$. Точно также сопоставим каждому множеству $T_i \subset B_2^{1,2}$ множество $\hat{T}_i \subset B_1^{1,2}$. Обозначим это сопоставление f . Тогда области $\hat{V}_i \subset B_1^{1,2}$ являются образами отображения f , и определяются такими же формулами, что и (27)–(33). Этим преобразованием мы сохраняем линейную структуру "скелета", но не сохраняем операцию $\otimes$. Зададим Ψ_i явным образом в терминах классов эквивалентности. Пусть класс элемента $p \in V_i$ принадлежит координатной окрестности U_i , тогда $\Psi_i([p]) = f(p)$. Определение корректно, так как для каждого класса $[p]$ существует его единственный представитель в V_i . Функции Ψ_i являются гомеоморфизмами. Функций перехода $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ между картами на $\mathbf{G}' / \mathbf{D}'$ всего $8^2 - 8 = 56$. Приведем явный вид одной из них $\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1} : \Psi_1(U_1 \cap U_4) \rightarrow \Psi_4(U_1 \cap U_4)$. Класс элемент $\langle x, \xi, \eta \rangle = \langle (a+m)1, (b+n)\beta, (c+k)\beta \rangle$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$, принадлежит пересечению $U_1 \cap U_4$ в двух вариантах, для которых функция перехода $\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1}$ выглядит следующим образом

$$\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1}(\langle a1, b\beta, c\beta \rangle) = \langle a1, b\beta, c\beta \rangle, \quad \frac{1}{5} < a < \frac{4}{5}, \frac{1}{5} < b < \frac{4}{5}, \frac{1}{5} < c < \frac{2}{5}, \quad (34)$$

$$\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1}(\langle a1, b\beta, c\beta \rangle) = \langle a1, b\beta, (c-1)\beta \rangle, \quad \frac{1}{5} < a < \frac{4}{5}, \frac{1}{5} < b < \frac{4}{5}, \frac{3}{5} < c < \frac{4}{5}. \quad (35)$$

Функции перехода $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ являются G^∞ -гладкими, таким образом $\mathbf{G}' / \mathbf{D}'$ с соответствующими картами является супермногообразием, хотя введенная функция f не сохраняет операцию $\otimes$ на "скелете" и не является гомоморфизмом.

МНОГОЗНАЧНОСТЬ И ПОЛУСУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим теперь алгебру Грассмана-Банаха $B_1^{1,2}$ вида $B_1^{1,2} = \{ \langle a1, b\beta, c\beta \rangle, a, b, c \in \mathbb{R} \}$, где 1 — единица алгебры и β — нечетная образующая. Для того, чтобы ввести полугрупповую структуру на множестве $B_1^{1,2}$, сопоставим каждому элементу $\langle a1, b\beta, c\beta \rangle$ необратимую матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a1 & b\beta \\ 0 & 1 & c\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Введем на $B_1^{1,2}$ операцию $(*)$, порожденную стандартным произведением матриц (36) следующим образом:

$$\langle a_11, b_1\beta, c_1\beta \rangle * \langle a_21, b_2\beta, c_2\beta \rangle = \langle (a_1 + a_2)1, (b_2 + a_1c_2)\beta, c_2\beta \rangle. \quad (37)$$

Операция $(*)$ введена корректно, поскольку, как и прежде, на нечетных местах остаются нечетные элементы, а на четном месте — четный элемент, то есть матрицы сохраняют свою грассманову структуру. В дальнейшем будем представлять элемент $s = \langle a1, b\beta, c\beta \rangle$ как $[a, b, c] = T_s(\langle a1, b\beta, c\beta \rangle)$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, имея в

виду одностолбцовый аналог (7) (то есть, для краткости в обозначениях будем отождествлять представление с элементом).

Множество $B_1^{1,2}$ с введенной на ней операцией $(*)$ образует полугруппу $S = \bigcup s$ (см. напр. [18, 19]), поскольку ассоциативность следует из ассоциативности умножения матриц.

Опишем основные свойства построенной полугруппы S :

1. Левая разрешимость $\forall [s_1, s_2, s_3], [t_1, t_2, t_3] \in S, \exists! [u_1, u_2, u_3] \in S$ такое, что $[s_1, s_2, s_3] * [u_1, u_2, u_3] = [t_1, t_2, t_3]$, поскольку соответствующие компонентные уравнения $t_1 = s_1 + u_1, t_2 = u_2 + s_1 u_3, t_3 = u_3$ имеют решение $[t_1 - s_1, t_2 - s_1 t_3, t_3]$, и оно единственно. В частности, $\forall s \in S, \exists! t \in S$ такое, что $s * t = s$, т. е. каждый элемент является левым нулем для единственного элемента.
2. Элемент $[0, 0, 0]$ является правым нулем полугруппы S .
3. Левых нулей в полугруппе S не существует.
4. Для любого элемента полугруппы S имеем $[s_1, s_2, s_3]^{*n} = [ns_1, s_2 + (n-1)s_1, s_3]$.
5. Левыми единицами полугруппы S являются элементы вида $[0, s_2, s_3]$ и только они, следовательно $[0, s_2, s_3]^{*n} = [0, s_2, s_3]$, и такими элементами исчерпываются все идемпотенты полугруппы S .
6. Правых единиц в полугруппе S не существует.
7. Полугруппа S — полугруппа с левым сокращением.
8. Центр полугруппы $\text{Cent}(S) = \emptyset$.
9. Каждый элемент $[s_1, s_2, s_3]$ обладает семейством $\{t = [-s_1, t_2, t_3] \mid t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$ элементов, регулярных к нему ($s * t * s = s$), которые также являются инверсными ($t * s * t = t$), а идемпотенты строятся с помощью их произведений [18, 19].

Рассмотрим идеальную структуру полугруппы S . Множества $I_a = \{[s_1, s_2, a] \in S \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$, где $a \in \mathbb{R}$, являются левыми идеалами $S * I_a = I_a$. Идеалы I_a не пересекаются $I_a \cap I_b = \emptyset$ при $a \neq b$ и покрывают всю полугруппу $\bigcup I_a = S$. Правых идеалов нет.

Множество $D = \{[m_1, m_2, m_3] \in S \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$ является подполугруппой полугруппы S , но не идеалом.

Выделим в полугруппе S подмножество T , заданное уравнением сферы в трехмерном пространстве вещественных коэффициентов

$$T = \{[x, y, z] \in S \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}. \quad (38)$$

Поскольку T — подмножество топологического пространства $B_1^{1,2}$, то T — топологическое пространство с индуцированной топологией [20]. Выберем в T координатные окрестности $U_a = \{[x, y, z] \in T \mid z > a\}$, $|a| < 1$. Введем карты $\Psi_a : U_a \rightarrow \Psi_a(U_a) \subset I_a$. Функция Ψ_a задана следующим условием: Ψ_a от аргумента $[x, y, z] \in U_a$ равна произведению элемента $[x, y, z]$ и его проекции на плоскость $z = a$, являющуюся образом I_a в трехмерном пространстве вещественных коэффициентов

$$\Psi_a([x, y, z]) = [x, y, z] * [x, y, a] = [2x, y + xa, a]. \quad (39)$$

Ясно, что $\Psi_a(U_a)$ — область в I_a . Функции Ψ_a взаимно-однозначны при $a \geq 0$. Поскольку функции, порождающие Ψ_a непрерывны, то и сама Ψ_a непрерывна. Рассмотрим обратную функцию Ψ_a^{-1} при $a \geq 0$. Из определения (39) следует явный вид этой функции

$$\Psi_a^{-1}([x, y, a]) = \left[\frac{x}{2}, y - xa, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - (y - xa)^2} \right]. \quad (40)$$

При $a \geq 0$ функция Ψ_a^{-1} непрерывна, поэтому Ψ_a — гомеоморфизм. Эти карты являются стандартными обратимыми картами на топологическом пространстве T . Необратимые карты возникают при $a < 0$. Рассмотрим этот случай.

Функции Ψ_a склеивают точки $[x, y, z]$ и $[x, y, -z]$ при $|z| < -a$. Выбрав одну из ветвей однозначности, можно говорить об обратных функциях $\Psi_{a(\pm)}^{-1}$, где $\Psi_{a(+)}^{-1}$ означает верхнюю «верхнюю» ветвь, а $\Psi_{a(-)}^{-1}$ — «нижнюю». Области значения этих функций равны

$$\Psi_{a(+)}^{-1}(\Psi_a(U_a)) = \{[x, y, z] \in T \mid z > 0\}, \quad (41)$$

$$\Psi_{a(-)}^{-1}(\Psi_a(U_a)) = \{[x, y, z] \in T \mid z \in (a, 0) \cup (-a, 1)\}. \quad (42)$$

«Верхняя» ветвь $\Psi_{a(+)}^{-1}$ является непрерывной функцией, а «нижняя» ветвь $\Psi_{a(-)}^{-1}$ является непрерывной функцией на множестве $\Psi_a(U_a) \setminus Z$, где Z — множество меры 0, задаваемое объединением корней уравнений

$$1 - \frac{x^2}{4} - (y - xa)^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - (y - xa)^2} = -a. \quad (43)$$

Выбрав одну из ветвей однозначности для необратимых карт, можно говорить о функциях перехода между картами I_a и I_b , которые имеют вид

$$[2x, y + xa, a] \xrightarrow{\Psi_{a(\pm)}^{-1}} [x, y, \pm z] \xrightarrow{\Psi_b} [2x, y + xb, b]. \quad (44)$$

Таким образом, явный вид функций перехода $\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}$ задается формулой

$$[x, y, a] \xrightarrow{\Psi_{a(\pm)}^{-1}} \left[\frac{x}{2}, y - \frac{xa}{2}, \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \left(y - \frac{xa}{2}\right)^2} \right] \xrightarrow{\Psi_b} \left[x, y - \frac{xa}{2} + \frac{xb}{2}, b \right]. \quad (45)$$

Если рассматривать $\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}$ как функцию на $B_1^{1,1}$, то мы получим

$$\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}([x1, y\beta]) = \left[x1, \left(y - \frac{xa}{2} + \frac{xb}{2}\right)\beta \right], \quad (46)$$

то есть $\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}$ является G^∞ -функцией. Поэтому топологическое пространство S с данным набором карт является гладким полусупермногообразием [8, 9], в котором необратимость возникает вследствие неоднозначности.

ВЫВОДЫ

Таким образом, дальнейшее изучение внутреннего строения необратимых аналогов супермногообразий представляется важным с точки зрения математически последовательной теории и является необходимым инструментом для построения новых суперсимметричных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.
2. Bernstein J., Leites D. // *The supermanifolds. Seminar on Supermanifolds*. № 14. Stockholm. Univ. Stockholm, 1987. P. 1-44.
3. Лейтес Д. А. Теория супермногообразий. Петрозаводск. Карельский филиал АН СССР, 1983. 199 с.
4. Bartocci C., Bruzzo U., Hernandez-Ruiperez D. *The Geometry of Supermanifolds*. Dordrecht. Kluwer, 1991. 242 p.
5. Kaku M. *Introduction to Superstrings and M-Theory*. Berlin. Springer-Verlag, 1998. 587 p.
6. Воронов А. А., Манин Ю. И., Пенков И. Б. // *Элементы супергеометрии*. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3-25.
7. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984. 335 с.
8. Duplij S. // *Noninvertibility and "semi-" analogs of (super) manifolds, fiber bundles and homotopies*. Kaiserslautern, 1996. 30 p. (Preprint / Univ. Kaiserslautern; KL-TH-96/10, q-alg/9609022).
9. Duplij S. // *On semi-supermanifolds*. Pure Math. Appl. 1998. V. 9. № 3-4. P. 283-310.
10. Дуплій С. А. Полугрупповые методы в суперсимметричных теориях элементарных частиц. Харьков. Докторская диссертация, Харьковский госуниверситет, math-ph/9910045, 1999. 483 с.
11. Duplij S., Marcinek W. // *Higher regularity properties of mappings and morphisms*. Wrocław, 2000. 12 p. (Preprint / Univ. Wrocław).
12. Rogers A. // *Some examples of compact supermanifolds with non-Abelian fundamental group*. J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 3. P. 443-444.
13. Rogers A. // *A global theory of supermanifolds*. J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 5. P. 1352-1365.
14. Владимиров В. С., Волович И. В. // *Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление*. Теор. мат. физ. 1984. Т. 59. № 1. С. 3-27.
15. Хренников А. Ю. Суперанализ. М.: Наука, 1997. 304 с.
16. De Witt B. S. *Supermanifolds*. Cambridge. Cambridge Univ. Press, 2nd edition. 1992. 407 p.
17. Rogers A. // *Graded manifolds, supermanifolds and infinite-dimensional Grassmann algebras*. Comm. Math. Phys. 1986. V. 105. P. 374-384.
18. Clifford A. H., Preston G. B. *The Algebraic Theory of Semigroups*. V. 1 Providence. Amer. Math. Soc., 1961.
19. Howie J. M. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford. Clarendon Press, 1995. 362 p.
20. Постников М. М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987. 478 с.

ON STRUCTURE OF SMOOTH SEMISUPERMANIFOLDS

S. A. Duplij¹⁾, M. V. Chursin²⁾

¹⁾ Department of Physics and Technology, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine

²⁾ Department of Mathematics and Mechanics, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine

Possibilities of noninvertible generalization of the Rogers modelled supermanifold are considered. It is shown, that a special reduction of the $B_2^{1,2}$ model does not lead to the Rogers $B_1^{1,2}$ supermanifold, nevertheless after some mapping it comes to the invertible supermanifold. Noninvertible generalization of the Rogers model is investigated, on $B_1^{1,2}$ a semigroup structure is introduced and its ideal properties are studied. That leads to the semisupermanifold in which noninvertibility is a result of many-valued transition functions.

KEY WORDS: supermanifold, mapping, transition function, noninvertibility, semigroup, many-valuedness

VAK 539.12

ON HIGHER REGULARITY AND MONOIDAL CATEGORIES

S. A. Duplij¹⁾, W. Marcinek²⁾¹⁾ Department of Physics and Technology, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: <http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij>²⁾ Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, Pl. Maxa Born 9, 50-204 Wrocław, Poland

Received May 11, 2000

In general abstract algebraic language we extend “invertibility” to “regularity” for categories. Higher regularity conditions and “semicommutative” diagrams are introduced. Distinction between commutative and “semicommutative” cases is measured by non-zero obstruction proportional to the difference of some self-mappings (obstructors) $e^{(n)}$ from the identity, which allows us to generalize the notion of functor and to “regularize” braidings and related structures in monoidal categories. Also we propose a “noninvertible” analog of the Yang-Baxter equation.

KEYWORDS : morphism, regularity, obstruction, monoidal category, functor, Yang-Baxter equation

The concept of regularity was introduced by von Neumann [1] and applied by Penrose to matrices [2]. After that study of regularity was developed in many different fields, e.g. generalized inverses theory [3] and semigroup theory [4]. We consider here this concept in categorical language [5] and introduce the most abstract form of higher regularity conditions (firstly introduced in [6]).

Let X and Y be two arbitrary sets. A mapping f from X to Y is defined by a prescription which assigns an element of Y to each element of X , i.e. $f : X \rightarrow Y$. Injective mapping (injection) assigns different images to different elements, and in surjective mapping (surjection) every image has at least one pre-image. Bijection has both properties. Usually inverse mapping f^{-1} is defined as a new mapping $g : Y \rightarrow X$ which assigns to each $y \in Y$ such $x \in X$ that $f(x) = y$ and so $f^{-1} = g$. For injective f and any $A \subset X$ it is imposed the following “invertibility” condition

$$f^{-1}(f(A)) = A. \quad (1)$$

For surjective f and $B \subset Y$ the standard “invertibility” condition is

$$f(f^{-1}(B)) = B. \quad (2)$$

These conditions are strong, because they imply possibility to solve the equation $f(x) = y$ for all elements. In many cases, especially while considering supersymmetric theories, there naturally appear noninvertible morphisms [6, 7] and semigroups [8, 9]. That obviously needs extending some general assumptions. We propose to extend the “invertibility” conditions (1)–(2) in the following way (which comes from analogy of regularity in semigroup theory [4]). We introduce less restricted “regular” f^* mapping by extending “invertibility” to “regularity” in following way

$$f(f^*(f(A))) = f(A). \quad (3)$$

For the second equation (2) we have the “reflexive regularity” condition

$$f^*(f(f^*(B))) = f^*(B). \quad (4)$$

REGULAR MORPHISMS

We distinguish among all mappings $X \rightarrow Y$ the morphisms satisfying closure and associativity. That defines a category $\mathcal{C}$ with objects $\text{Ob } \mathcal{C}$ as sets X, Y, Z and morphisms $\text{Mor } \mathcal{C}$ as mappings $f : X \rightarrow Y$ between them (or $f = \text{Mor}(X, Y)$) [5]. For composition $h : X \rightarrow Z$ of morphisms $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ instead of $h(x) = g(f(x))$ for mappings we use the notation $h = g \circ f$. Associativity implies that $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$. Let us consider “invertibility” properties of morphisms in general. If f satisfies the “right invertibility” condition $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$ for some $f^{-1} : Y \rightarrow X$ then f is called a *retraction*, and if f satisfies the “left invertibility” condition $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$, then it is called a *coretraction*, where Id_X and Id_Y are identity mappings $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ and $\text{Id}_Y : Y \rightarrow Y$ for which $\forall x \in X, \text{Id}_X(x) = x$ and $\forall y \in Y, \text{Id}_Y(y) = y$. These requirements sometimes are very strong to be fulfilled (see e.g. [10]). To obtain more weak conditions one has to introduced the following “regularity” conditions

$$f \circ f_{in}^* \circ f = f, \quad (5)$$

where f_{in}^* is called an *inner inverse* [3], and such f is called *regular*. Similar “reflexive regularity” conditions

$$f_{out}^* \circ f \circ f_{out}^* = f_{out}^* \quad (6)$$

defines an *outer inverse* f_{out}^* . Notice that in general $f_{in}^* \neq f_{out}^* \neq f^{-1}$ or it can be that f^{-1} does not exist at all. If f_{in}^* is an inner inverse, then

$$f^* = f_{in}^* \circ f \circ f_{in}^* \quad (7)$$

is always both inner and outer inverse or *generalized inverse* (quasi-inverse) [3], and so for any regular f there exists (need not be unique) f^* from (7) for which both regularity conditions (5) and (6) hold. Let us consider a composition of two morphisms and its “invertibility” properties. It can be shown, that a retraction is an epimorphism, and a regular monomorphism is a coretraction [3]. If the composition $h = g \circ f$ belongs to the same class of functions (closure), then all such morphisms form a semigroup of such functions [4]. If for any $f : X \rightarrow Y$ there will be a unique $f^* : Y \rightarrow X$ satisfying (5)–(6), this semigroup is called an inverse semigroup [4] which we denote $\mathcal{F}$.

Let us define two idempotent “projection operators” $\mathcal{P}_f = f \circ f^*$, $\mathcal{P}_f : Y \rightarrow Y$ and $\mathcal{P}_{f^*} = f^* \circ f$, $\mathcal{P}_{f^*} : X \rightarrow X$ satisfying $\mathcal{P}_f \circ \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_f$, $\mathcal{P}_f \circ f = f \circ \mathcal{P}_{f^*} = f$ and $\mathcal{P}_{f^*} \circ \mathcal{P}_{f^*} = \mathcal{P}_{f^*}$, $\mathcal{P}_{f^*} \circ f^* = f^* \circ \mathcal{P}_f = f^*$. If we introduce the $*$ -operation $(f)^* = f^*$ by formulas (5)–(6) and assume that this operation acts on the product of morphisms $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ in the following way $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, then commutativity of projectors $\mathcal{P}_f \circ \mathcal{P}_{g^*} = \mathcal{P}_{g^*} \circ \mathcal{P}_f$ leads to closure of the semigroup, i.e. the product $g \circ f$ also satisfies both regularity conditions (5)–(6).

HIGHER REGULARITY

Let us introduce higher analogs of regularity conditions (5)–(6) (they were proposed for some particular case (noninvertible analogs of supermanifolds) in [6, 7]). Let we have two elements f and its regular f^* (in sense of (5)) of the semigroup $\mathcal{F}$. Consider a third morphism $f^{**} : X \rightarrow Y$ and analyze the action $f \circ f^* \circ f^{**} : X \rightarrow Y$. This means the composition $f \circ f^* \circ f^{**}$ cannot be equal to identity Id_X . Therefore it is possible to “regularize” $f \circ f^* \circ f^{**}$ in the following way

$$f \circ f^* \circ f^{**} \circ f^* = f^*. \quad (8)$$

This formula can be called as 2-regularity condition and be considered as a definition of $**$ -operation. For 3-regularity and $f^{***} : Y \rightarrow X$ we can obtain an analog of (5) in the form

$$f \circ f^* \circ f^{**} \circ f^{***} \circ f = f. \quad (9)$$

By recursive considerations we can propose the following formula of n -regularity

$$f \circ f^* \circ f^{**} \dots \circ \overbrace{f^* \circ f^{**} \circ \dots \circ f^*}^{2k} = f^*, \quad f \circ f^* \circ f^{**} \dots \circ \overbrace{f^* \circ f^{**} \circ \dots \circ f^*}^{2k+1} \circ f = f. \quad (10)$$

Note that for even number of stars $\overbrace{f^* \circ f^{**} \circ \dots \circ f^*}^{2k} : X \rightarrow Y$ and for odd number of stars $\overbrace{f^* \circ f^{**} \circ \dots \circ f^*}^{2k+1} : Y \rightarrow X$. We introduce “higher projector” by the formula

$$\mathcal{P}_f^{(n)} = f \circ f^* \circ f^{**} \dots \circ \overbrace{f^* \circ f^{**} \circ \dots \circ f^*}^n. \quad (11)$$

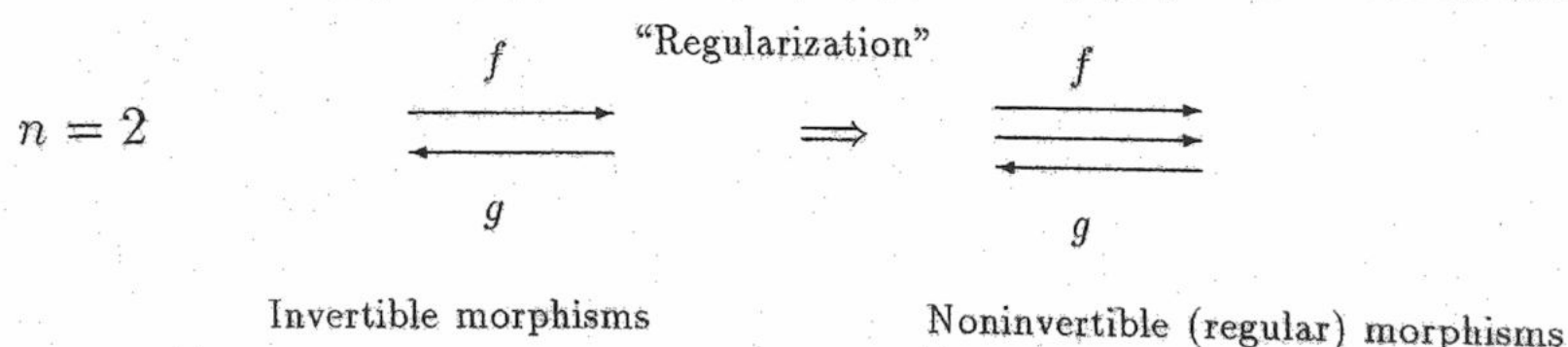
It is easy to check the following properties

$$\mathcal{P}_f^{(2k)} \circ f^* = f^*, \quad \mathcal{P}_f^{(2k+1)} \circ f = f. \quad (12)$$

and idempotence $\mathcal{P}_f^{(n)} \circ \mathcal{P}_f^{(n)} = \mathcal{P}_f^{(n)}$.

SEMICOMMUTATIVE DIAGRAMS AND OBSTRUCTORS

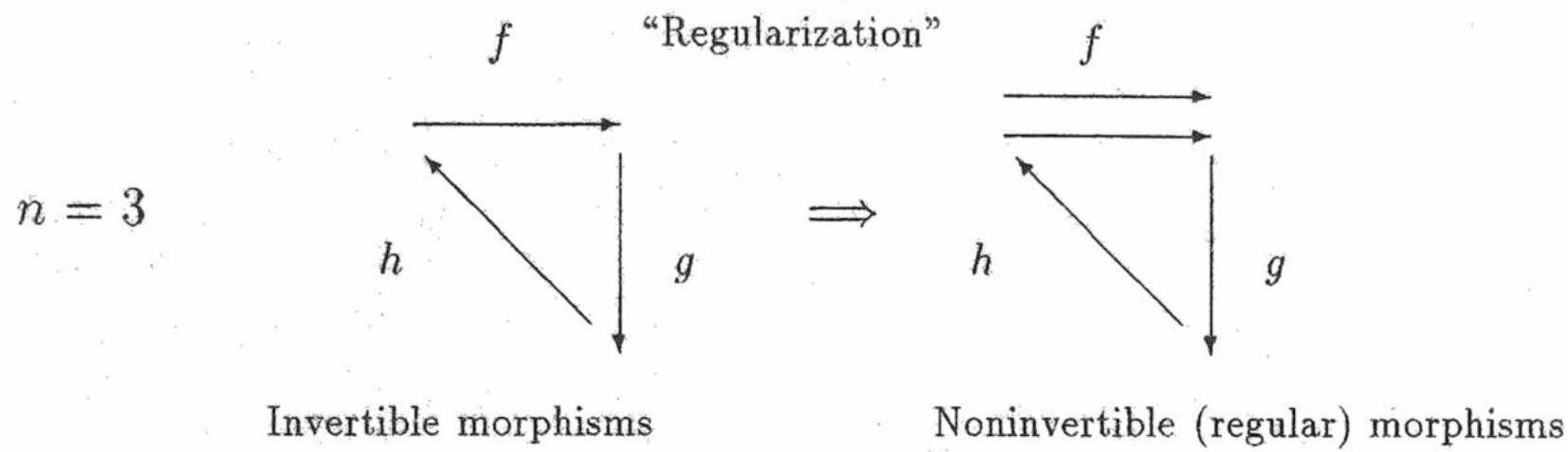
Obviously, that for two morphisms $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow X$ instead of “invertibility” $g \circ f = Id_X$ we have the same generalization as regularity (5), i.e. $f \circ g \circ f = f$, where g plays the role of an inner inverse [3].



Usually, for 3 objects X, Y, Z and 3 morphisms $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ and $h : Z \rightarrow X$ one can have the “invertible” triangle commutative diagram $h \circ g \circ f = Id_X$. Its regular extension has the form

$$f \circ h \circ g \circ f = f. \quad (13)$$

Such a diagram (from the right)



can be called a *semicommutative diagram*. This triangle case can be expanded on any number of objects and morphisms. To measure difference between semicommutative and commutative cases let us introduce self-mappings $e_X^{(n)} : X \rightarrow X$ which are defined by

$$e_X^{(1)} = Id_X, e_X^{(2)} = g \circ f, e_X^{(3)} = h \circ g \circ f, \dots \quad (14)$$

It is obvious that for commutative diagrams all $e_X^{(n)}$ are equal to identity $e_X^{(n)} = Id_X$. The deviation of $e_X^{(n)}$ from identity will give us measure of obstruction of commutativity, and therefore we call $e_X^{(n)}$ *obstructors*. The minimum number $n = n_{obstr}$ for which $e_X^{(n)} \neq Id_X$ occurs will define a quantitative measure of obstruction n_{obstr} . In terms of obstructors $e_X^{(n)}$ the n -regularity condition can be written in the short form $f \circ e_X^{(n)} = f$. From this equation and definitions (14) it simply follows that obstructors $e_X^{(n)}$ are idempotents.

REGULARIZATION OF MONOIDAL CATEGORIES

Let $\mathcal{C}$ be a monoidal category equipped with a monoidal operation $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. A triple of objects X, Y, Z is said to be a regular 3-cycle if and only if every sequence of morphisms $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$ define uniquely the morphism $e_X^{(3)} : X \rightarrow X$ by the following relation $e_X^{(3)} := h \circ g \circ f$ and subjects to the relation $f \circ h \circ g \circ f = f$. The object Y is said to be a *(first) regular dual* of X , and the object Z is called the *second regular dual* of X . We denote by $C_3(\mathcal{C})$ the collection of all regular 3-cycles on $\mathcal{C}$. This collection is said to be *regularity* in $\mathcal{C}$. The generalization to arbitrary $n \geq 4$ is obvious. Let X, Y, Z and X', Y', Z' be two regular 3-cycles in $\mathcal{C}$. Then the morphism $f : X \rightarrow X'$ such that $f \circ e_X^{(3)} = e_{X'}^{(3)} \circ f$ is said to be a *3-cycle morphism*. If $f : X \rightarrow X'$ and $g : X' \rightarrow X''$ are two 3-cycle morphisms, then the composition $g \circ f : X \rightarrow X''$ is also a 3-cycle morphism. Moreover the regularity $C_3(\mathcal{C})$ forms a monoidal category with 3-cycles as objects and 3-cycle morphisms. The monoidal product of two regular 3-triples X, Y, Z and X', Y', Z' is the triple $X \otimes X', Y \otimes Y', Z \otimes Z'$ which is also a regular 3-cycle. The category $C_3(\mathcal{C})$ is said to be a *regularization* of $\mathcal{C}$.

The morphisms $e_X^{(n)}$ can be used to extend the notion of a functor $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$. All the standard definitions of a functor (as a mapping of one category to another with preserving composition of morphisms [5]) do not changed, but preservation of identity $F(Id_{X_1}) = Id_{X_2}$, where $X_2 = FX_1$, $X_1 \in \text{Ob}\mathcal{C}_1$, $X_2 \in \text{Ob}\mathcal{C}_2$, can be replaced by requirement of preservation of morphisms $e_X^{(n)}$ as

$$F^{(n)}(e_{X_1}^{(n)}) = e_{X_2}^{(n)}, \quad (15)$$

where $e_{X_1}^{(n)} \in \text{Mor}\mathcal{C}_1$, $e_{X_2}^{(n)} \in \text{Mor}\mathcal{C}_2$ defined in (14) for two categories. Then the generalized functor $F^{(n)}$ becomes n -dependent. From (14) it follows that $n = 1$ corresponds to the standard functor, i.e. $F^{(1)} = F$.

HIGHER REGULAR YANG-BAXTER EQUATION

Let us consider a symmetric monoidal category $\mathcal{C}$ [5] playing an important role in quantum groups [11] and quantum statistics [12]. In $\mathcal{C}$ for any two objects X and Y and the operation $X \otimes Y$ one usually defines a natural isomorphism (“braiding” [13]) by $B_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ satisfying the symmetry condition (“invertibility”)

$$B_{Y,X} \circ B_{X,Y} = Id_{X \otimes Y} \quad (16)$$

which formally defines $B_{Y,X} = B_{X,Y}^{-1} : Y \otimes X \rightarrow X \otimes Y$. Note that possible nonsymmetric braiding in context of the noncommutative geometry was considered in [14]. Here we introduce a “regular” extension of the symmetry condition (16) in the form

$$B_{X,Y} \circ B_{X,Y}^* \circ B_{X,Y} = B_{X,Y}, \quad (17)$$

where in general $B_{X,Y}^* \neq B_{X,Y}^{-1}$. Such a category can be called a “regular” category to distinct from symmetric and “braided” categories [13].

In categorical sense the prebraiding relations usually are defined as [13, 14]

$$B_{X \otimes Y, Z} = B_{X, Z, Y}^R \circ B_{X, Y, Z}^L, \quad B_{Z, X \otimes Y} = B_{X, Z, Y}^L \circ B_{X, Y, Z}^R, \quad (18)$$

$$B_{X, Y, Z}^L = Id_X \otimes B_{Y, Z}, \quad B_{X, Y, Z}^R = B_{X, Y} \otimes Id_Z, \quad (19)$$

and prebraidings $B_{X \otimes Y, Z}$ and $B_{Z, X \otimes Y}$ satisfy (for symmetric case) the “invertibility” property $B_{X \otimes Y, Z}^{-1} \circ B_{X \otimes Y, Z} = Id_{X \otimes Y \otimes Z}$, where $B_{X \otimes Y, Z}^{-1} = B_{Z, X \otimes Y}$. In this notations the standard “invertible” Yang-Baxter equation is [11]

$$B_{Y, Z, X}^R \circ B_{Y, X, Z}^L \circ B_{X, Y, Z}^R = B_{Z, X, Y}^L \circ B_{X, Z, Y}^R \circ B_{X, Y, Z}^L. \quad (20)$$

Possible “noninvertible” (endomorphism semigroup) solutions of this equation without introduction of $e_X^{(n)}$ were studied in [15]. For “noninvertible” braidings satisfying regularity (17) it is naturally to exploit the obstructors $e_X^{(n)}$ instead of identity Id_X as

$$B_{X, Y, Z}^{L(n)} = e_X^{(n)} \otimes B_{Y, Z}, \quad B_{X, Y, Z}^{R(n)} = B_{X, Y} \otimes e_Z^{(n)}, \quad (21)$$

to weaken prebraiding construction in the following way

$$B_{X \otimes Y, Z}^{(n)} = B_{X, Z, Y}^{R(n)} \circ B_{X, Y, Z}^{L(n)}, \quad B_{Z, X \otimes Y}^{(n)} = B_{X, Z, Y}^{L(n)} \circ B_{X, Y, Z}^{R(n)}, \quad (22)$$

Then their “invertibility” can be also “regularized” as follows

$$B_{X \otimes Y, Z}^{(n)} \circ B_{X \otimes Y, Z}^{(n)*} \circ B_{X \otimes Y, Z}^{(n)} = B_{X \otimes Y, Z}^{(n)}, \quad (23)$$

where in general case $B_{X \otimes Y, Z}^{(n)*} \neq B_{X \otimes Y, Z}^{-1}$. Thus the corresponding n -“noninvertible” analog of the Yang-Baxter equation (20) is

$$B_{Y, Z, X}^{R(n)} \circ B_{Y, X, Z}^{L(n)} \circ B_{X, Y, Z}^{R(n)} = B_{Z, X, Y}^{L(n)} \circ B_{X, Z, Y}^{R(n)} \circ B_{X, Y, Z}^{L(n)}. \quad (24)$$

Its solutions can be found by application of the semigroup methods (see e.g. [15]). The introduced formalism can be used in analysis of categories with some weaken invertibility conditions, which can appear in nontrivial supersymmetric or noncommutative geometry constructions beyond the group theory.

Acknowledgments. One of the authors (S.D.) would like to thank Jerzy Lukierski for kind hospitality at the University of Wrocław, where this work was done, and to Andrzej Borowiec, Andrzej Frydryszak and Cezary Juszczak for valuable discussions and help during his stay in Wrocław.

REFERENCES

1. von Neumann J. // *On regular rings*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1936. V. 22. P. 707-713.
2. Penrose R. // *A generalized inverse for matrices*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1955. V. 51. P. 406-413.
3. Nashed M. Z. *Generalized Inverses and Applications*. New York. Academic Press, 1976. 321 p.
4. Howie J. M. *An Introduction to Semigroup Theory*. London. Academic Press, 1976. 270 p.
5. MacLane S. *Categories for the Working Mathematician*. Berlin. Springer-Verlag, 1971. 189 p.
6. Duplij S. // *Noninvertibility and "semi-" analogs of (super) manifolds, fiber bundles and homotopies*. Kaiserslautern, 1996. 30 p. (Preprint / Univ. Kaiserslautern; KL-TH-96/10, q-alg/9609022).
7. Duplij S. // *On semi-supermanifolds*. Pure Math. Appl. 1998. V. 9. № 3-4. P. 283-310.
8. Duplij S. // *On semigroup nature of superconformal symmetry*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 11. P. 2959-2965.
9. Duplij S. *Semigroup methods in supersymmetric theories of elementary particles*. Kharkov. Habilitation Thesis, Kharkov State University, math-ph/9910045, 1999. 483 p.
10. Davis D. L., Robinson D. W. // *Generalized inverses of morphisms*. Linear Algebra Appl. 1972. V. 5. P. 329-338.
11. Majid S. // *Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations*. Int. J. Mod. Phys. 1990. V. A5. № 1. P. 1-91.
12. Marcinek W. // *Categories and quantum statistics*. Rep. Math. Phys. 1996. V. 38. № 2. P. 149-174.
13. Joyal A., Street R. // *Braided monoidal categories*. North Ryde, New South Wales, 1986. 45 p. (Preprint / Macquarie University; Mathematics Reports 86008).
14. Marcinek W. // *Noncommutative geometry for arbitrary braidings*. J. Math. Phys. 1996. V. 35. P. 2633-2641.
15. Li F. // *Weak Hopf algebras and new solutions of Yang-Baxter equation*. J. Algebra. 1998. V. 208. № 1. P. 72-100.

О ВЫСШЕЙ РЕГУЛЯРНОСТИ И МОНОИДАЛЬНЫХ КАТЕГОРИЯХ

С. А. Дуплий¹⁾, В. Марчинек²⁾

¹⁾ Харьковський національний університет ім. В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, г. Харків, 61077, Україна

²⁾ Інститут теоретическої фізики, університет Вроцлава, пл. Макса Борна 9, 50-204 Вроцлав, Польща

Мы расширяем “обратимость” на “регулярность” для категорий в абстрактном алгебраическом подходе. Введены условия высшей регулярности и “полукоммутативные” диаграммы. Различие между коммутативным и “полукоммутативным” случаями измеряется отличием некоторых отображений $e^{(n)}$ от единичного, что позволяет обобщить понятие функтора и “регуляризовать” подобные структуры в моноидальных категориях. Предложен также “необратимый” аналог уравнения Янга-Бакстера.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: морфизм, регулярность, препятствие, моноидальная категория, функтор, уравнение Янга-Бакстера

УДК 533.901.

УСТОЙЧИВОСТЬ ИДЕАЛЬНЫХ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ МГД-МОД В ТОКАМАКЕ С ГОФРИРОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ И НЕМОНОТОННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ q

А.Я. Омельченко, Е.В. Ромащенко

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина.**Физико-технический факультет. 61108, Харьков, пр. Курчатова, 31.*

Поступила в редакцию 15 мая 2000г.

Проведено исследование устойчивости идеальных баллонных мод (ИБМ) и мод Мерсье (ММ) в гофрированном токамаке с немонотонным профилем коэффициента запаса устойчивости q . Показано, что сложные профили q с минимальным широм в каждой области неустойчивости вызывают одновременную стабилизацию мод в различных областях плазменного шнура. Определена локализация зон неустойчивости по радиусу плазменного шнура и найдены интервалы давлений плазмы, при которых возбуждаются эти моды.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гофрированное магнитное поле, моды Мерсье (ММ), идеальные баллонные моды (ИБМ), коэффициент запаса устойчивости q , шир.

Возбуждение идеальных МГД-мод в тороидальных плазменных конфигурациях является одной из причин, препятствующих достижению режимов удержания плазмы с большим β (β – отношение газокINETического давления плазмы к давлению магнитного поля). Известно [1], что возбуждение ИБМ обусловлено эффектом конечного давления плазмы и пропорционально величине шира S в зоне неустойчивости. Очевидно, что дестабилизирующее воздействие баллонных эффектов может быть уменьшено или полностью подавлено, если в области возбуждения в результате перераспределения равновесных токов сформируется локально спадающий, немонотонный по радиусу плазменного шнура профиль коэффициента запаса устойчивости $q(a)$. Вследствие перестройки профиля $q(a)$ зона возбуждения будет находиться в области минимума шира S , что окажет стабилизирующее воздействие на устойчивость плазмы. Такие профили $q(a)$ формируются в современных токамаках в условиях инжекции в плазму пучков нейтральных частиц [2-4]. Результаты аналитических и численных исследований устойчивости ИБМ в режимах удержания плазмы с отрицательным широм и их сопоставление с экспериментальными данными представлены в [5-9]. В то же время в режимах удержания с малым положительным или отрицательным широм увеличивается вероятность возбуждения ММ, если в результате перестройки профиля $q(a)$ в плазме появятся области с $q(a) < 1$, или произойдет заметное уменьшение глубины магнитной ямы как под воздействием перераспределения равновесных токов [9], так и под влиянием внешних факторов. Одним из таких факторов может быть продольная модуляция (гофрировка) тороидального магнитного поля токамака, обусловленная конечным числом токовых катушек, создающих это поле. В [10-11] показано, что гофрировка приводит к уменьшению глубины магнитной ямы токамака и тем самым оказывает дополнительное дестабилизирующее влияние на устойчивость идеальных МГД-мод.

Целью настоящей работы является исследование влияния гофрировки магнитного поля токамака на устойчивость ИБМ и ММ при немонотонном профиле $q(a)$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим равновесную тороидальную плазму с аспектовым отношением $R/a = 3 \div 4$, которая удерживается гофрированным магнитным полем. Глубина модуляции магнитного поля определяется относительной амплитудой δ_N , величина которой порядка нескольких процентов, период модуляции определяется числом токовых катушек N . Магнитное поле на оси токамака B_0 представим в виде

$$B_0(\varphi) = \frac{\bar{B}}{\left(1 + \sum_n^N \delta_n e^{in\varphi}\right)^2} \quad (1)$$

где B – основное тороидальное магнитное поле.

Распределение равновесного давления плазмы по малому радиусу плазмы представим в виде

$$p(a) = p_0 \left(1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^k \right)^l, \quad (2)$$

где p_0 – давление на оси плазменного шнура.

Распределение параметра $q(a)$ по радиусу плазмы определим следующим соотношением

$$q(a) = A \left[1 - B \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2n} \right]^m + C \exp \left[-D \left(\frac{a}{a_0} - F \right)^2 \right]. \quad (3)$$

При $C = 0$ соотношение (3) определяет монотонный профиль $q(a)$. Величины A и B определяются по заданным значениям q_0 в центре плазмы и $q_{\text{зр}}$ на границе плазмы. В дальнейших численных расчетах будем полагать $q_0 = 1.1$ и $q_{\text{зр}} = 1.5$. Постоянные C, D, F определяют координаты точек a_{min} , в которых $q(a/a_0 = a_{\text{min}}/a_0) = 1.05$. Во всех расчетах, если специально не оговорено $C = 9$, $n = 1.5$, $m = 2$.

Будем полагать, что в равновесном состоянии сечения магнитных поверхностей являются круговыми. С ростом давления плазмы центры этих поверхностей сдвигаются относительно магнитной оси на величину ξ , а ростом давления плазмы центры этих поверхностей деформируются (их эллиптичность характеризуется параметром α). Равновесную плазменную конфигурацию можно считать определенной, если известны ее метрические коэффициенты g_{ik} . В свою очередь коэффициенты g_{ik} определяются формой магнитных поверхностей и тем самым зависимостью от указанных выше величин ξ и α при заданных распределениях равновесных токов, запаса устойчивости $q(a)$ (3) и давления плазмы (2). Система уравнений, определяющих смещение ξ и эллиптичность α , может быть записана в виде [12]

$$\hat{L} \left[\frac{\rho}{\rho'} \left(\frac{\xi'}{\rho'} \right)' - K\rho + 3 \frac{\xi'}{\rho'} \right] = 4i \frac{\partial}{\partial \Phi} (K\rho) - 2 iK \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} - 2 \mu_J \frac{\rho}{\rho'} \frac{\xi'}{\rho'} - \frac{2iRv^{(1)}}{\Phi'} + \bar{S}(\xi', \alpha) \quad (4)$$

$$(\mu + \hat{L}) \left[\frac{\rho}{\rho'} \left(\frac{\alpha'}{\rho'} \right)' + 3 \frac{\alpha'}{\rho'} - 3 \frac{\alpha}{\rho} + 3 \left(\frac{\xi'}{\rho'} \right)^2 \right] = -\frac{8iRv^{(2)}}{\Phi'} + 2(\mu + \hat{L}) \frac{\xi'}{\rho'} \Psi - \Psi \hat{L} \frac{\xi'}{\rho'} + \frac{\xi'}{\rho'} \hat{L} \Psi \quad (5)$$

$$\hat{L}v^{(1)} = -i \frac{4\pi^2 p' R \rho^2 \rho'}{\Phi'} \left[K \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\xi' \xi'^*}{\rho' \rho'} \right) + K^* \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{4} \frac{\alpha'}{\rho'} - \frac{1}{8} \frac{\xi'^2}{\rho'^2} \right) \right] \quad (6)$$

$$(\mu + \hat{L}) v^{(2)} = \frac{i 2 \pi^2 p' \rho^2 \rho'}{\Phi'} K \rho \frac{\xi'}{\rho'}. \quad (7)$$

В соотношениях (4)-(7) $\rho(\Phi)$ – радиус гофрированной магнитной поверхности, $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ – первая и вторая

полоидальные гармоники равновесных токов, K – кривизна магнитной оси, $\mu_J = \frac{RJ}{\Phi'} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^{(0)}$, $\hat{L} = \mu - i \frac{\partial}{\partial \Phi}$,

$\Psi = \frac{\rho}{\rho'} \left(\frac{\xi'}{\rho'} \right)' + 3 \frac{\xi'}{\rho'}$, явный вид нелинейного по давлению плазмы слагаемого $\bar{S}(\xi', \alpha)$ в (4) представлен в [12], $(\dots)'$ – производная по координате a , R – большой радиус тора.

Неусредненное уравнение малых колебаний в представлении Коннора-Хасты-Тейлора [13] для гофрированного токамака имеет вид

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{Q_{\perp M}} \frac{dF}{dy} - q^2 \left[W_0 + q \frac{d}{dy} A_M + \frac{4\pi^2 m \gamma^2 g}{\Phi'^2 Q_{\perp M}} (1 + 2q^2) \right] F = 0, \quad (8)$$

где $F(a, y)$ – медленно изменяющаяся функция переменной y , связанная с возмущенным смещением элемента плазмы X соотношением $X = F(a, y) \exp(inqy)$;

$$W_0^{(0)} = - \left(\frac{2\pi p'}{\Phi'^2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{g}}{\bar{B}_0^2} \right)^{(0)} + \frac{\Omega}{\Phi'^2} - \mu' \alpha_0^{(0)}; \quad (9)$$

$$\frac{1}{Q_{\perp M}} = L_{\perp M} = \frac{\Phi'^2}{4\pi^2 \sqrt{g} \bar{B}_0^2} \left[\left(\frac{yq'}{q} \right)^2 g^{11} - 2 \frac{yq'}{q} g^{1b} + g^{bb} \right]; \quad (10)$$

$$A_M = - \left(\frac{2\pi p'}{\Phi'} \right)^2 L_{\parallel}^{-1} \left(\frac{\sqrt{g}}{\bar{B}_0^2} \right)^{(1)} + \frac{q'y}{q} \alpha_0^{(1)} - \frac{p'}{\Phi'} \left[\left(\frac{v'}{p'} \right)' + \frac{2\pi B_{01}}{\bar{B}_0^2} \right]. \quad (11)$$

В соотношениях (8-11) $\Omega = p'V'' + J'\chi' - I'\Phi'$, χ и Φ – полоидальный и тороидальный магнитные потоки, $g = \det g_{ik}$, где g_{ik} – компоненты метрического тензора системы координат с выпрямленными силовыми линиями; n – плотность плазмы; γ – инкремент МГД-мод, p – давление плазмы, $q = \frac{1}{\mu} = \frac{\Phi'}{\chi'}$,

$\alpha_0 = \bar{j}_0 \bar{B}_0 / \bar{B}_0^2$, $\bar{j}_0$ – плотность равновесного тока. Обозначения $(\dots)^{(0)}$ и $(\dots)^{(1)}$ определяют усредненную по угловым переменным и осциллирующую по этим переменным части соответствующих величин. Система уравнений (4)-(11) определяет устойчивость идеальных МГД-мод в гофрированном токамаке.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ УСТОЙЧИВОСТИ ИДЕАЛЬНЫХ МОД

Порядок расчетов следующий. Для заданных в соответствии с формулами (1)-(3) распределений давления плазмы $p(a)$, коэффициента запаса устойчивости $q(a)$ и магнитного поля $B_0(\varphi)$ из уравнений (4)-(7) определяем в явном виде смещение ξ , эллиптичность магнитных поверхностей α и равновесный осциллирующий ток V . Это позволяет с учетом соотношений (9)-(11) определить коэффициенты уравнения (8) в каждой точке радиуса плазменного шнура. Свободным параметром в уравнении (8) остается инкремент возбуждаемых мод γ .

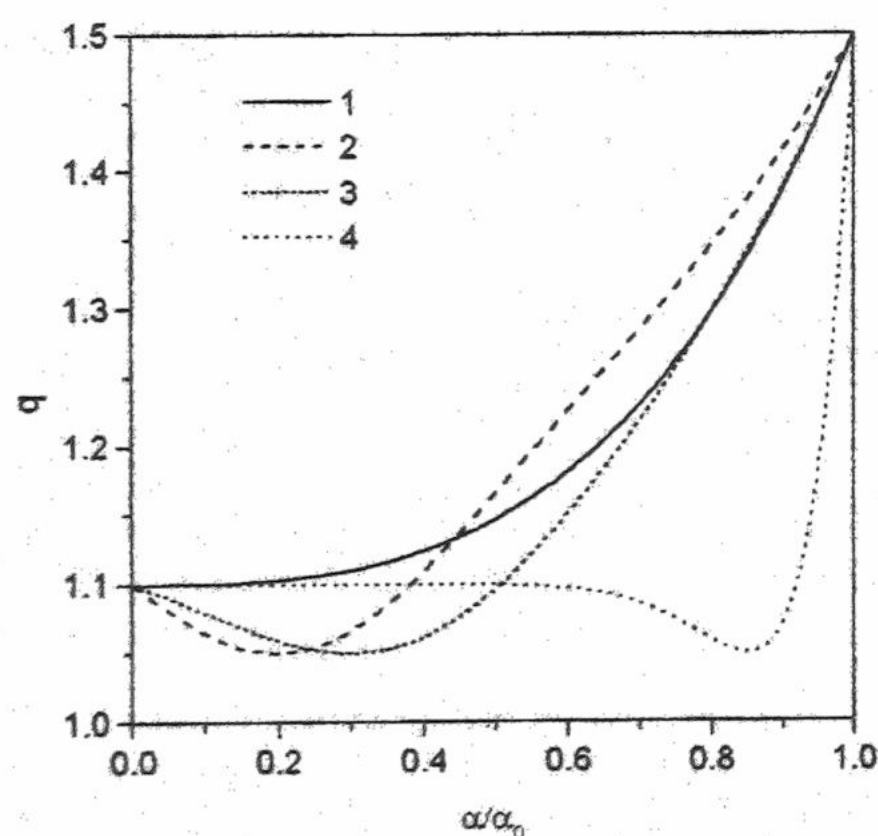


Рис.1. Профили $q(a/a_0)$: 1 – монотонный профиль q_1 ; 2 – немонотонный профиль q_2 , $a_{\min}/a_0 = 0.2$; 3 – немонотонный профиль q_3 , $a_{\min}/a_0 = 0.3$; 4 – немонотонный профиль q_4 , $a_{\min}/a_0 = 0.85$, $n = 4$.

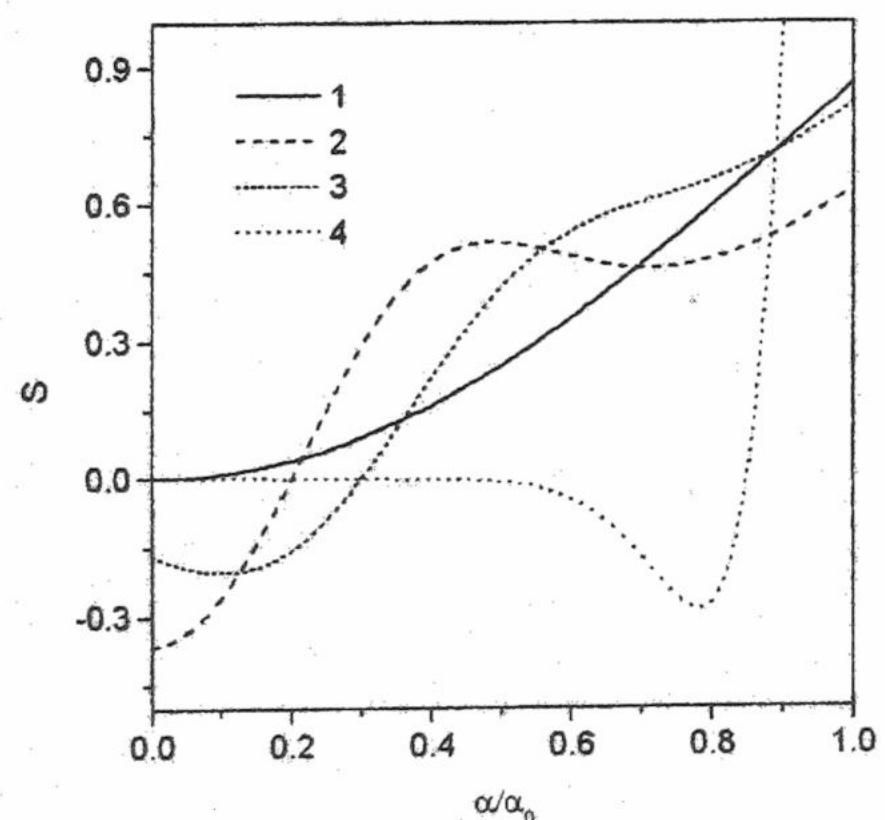


Рис.2. Профили шира $S(a/a_0)$: 1 – шир S_1 соответствует монотонному профилю q_1 ; 2–4 – шири $S_2 - S_4$ соответствуют немонотонным профилям $q_2 - q_4$.

Задача на устойчивость плазмы в исследуемом случае адекватна задаче о существовании при заданных значениях инкремента γ локализованных в y -пространстве решений уравнения (8), так как только локализованные решения при переходе в реальное пространство угловой переменной θ определяют физически допустимое распределение амплитуды смещения элемента плазмы по малому азимуту тора. Численно исследуем условия существования локализованных решений уравнения (8). Положим, что магнитное поле токамака создается набором $N = 20$ токовых катушек, амплитуда гофрировки изменяется в пределах нескольких процентов $\delta_N = (0.2 \div 6)\%$. Распределение давления плазмы задано в соответствии с (2) для $k = 2, l = 2$.

Профиль коэффициента запаса устойчивости $q(a)$ в монотонном и немонотонном режимах представлен на рис.1. Соответствующие этим коэффициентам $q(a)$ радиальные распределения шири $S(a)$ представлены на рис.2. В случае монотонного профиля $q_1(a)$ в отсутствие гофрировки ($\delta_N = 0$) в периферийной части плазмы возбуждается ИБМ (рис.3). В дальнейшем будем рассматривать основные гармоники возбуждаемых мод, т.к. их инкременты максимальны. ММ в этом случае не возбуждаются. Воздействие гофрировки магнитного поля ($\delta_N = 5\%$) приводит к дополнительной дестабилизации ИБМ и возбуждению в центральной части плазменного шнура ММ вследствие уменьшения глубины магнитной ямы и образования магнитного горба. Отметим, что в данном случае максимально достижимое значение β_{cr} определяет ММ

$$(\beta_{cr} = (8\pi/B_0^2) \sqrt{p^2}, \text{ где } p^2 = p_0^2 \int_0^1 (1 - (a/a_0)^k) d(a/a_0)).$$

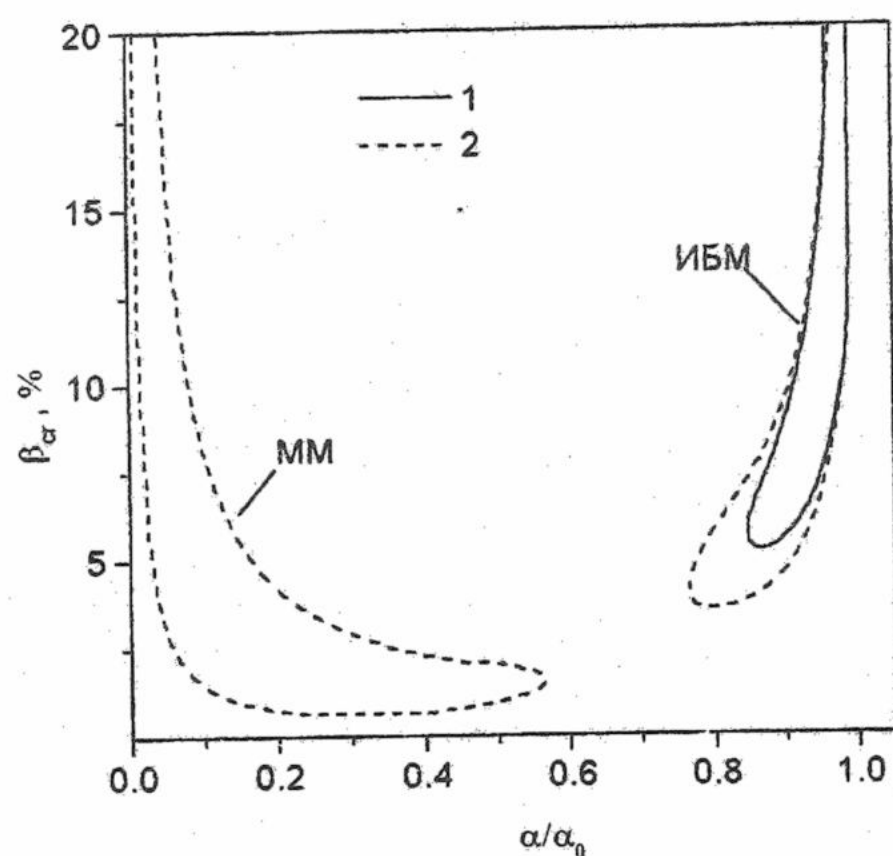


Рис.3. Зависимость β_{cr} от относительного радиуса a/a_0 для монотонного q_1 и шири S_1 : 1 – без гофрировки; 2 – с гофрировкой $\delta_N = 5\%$.

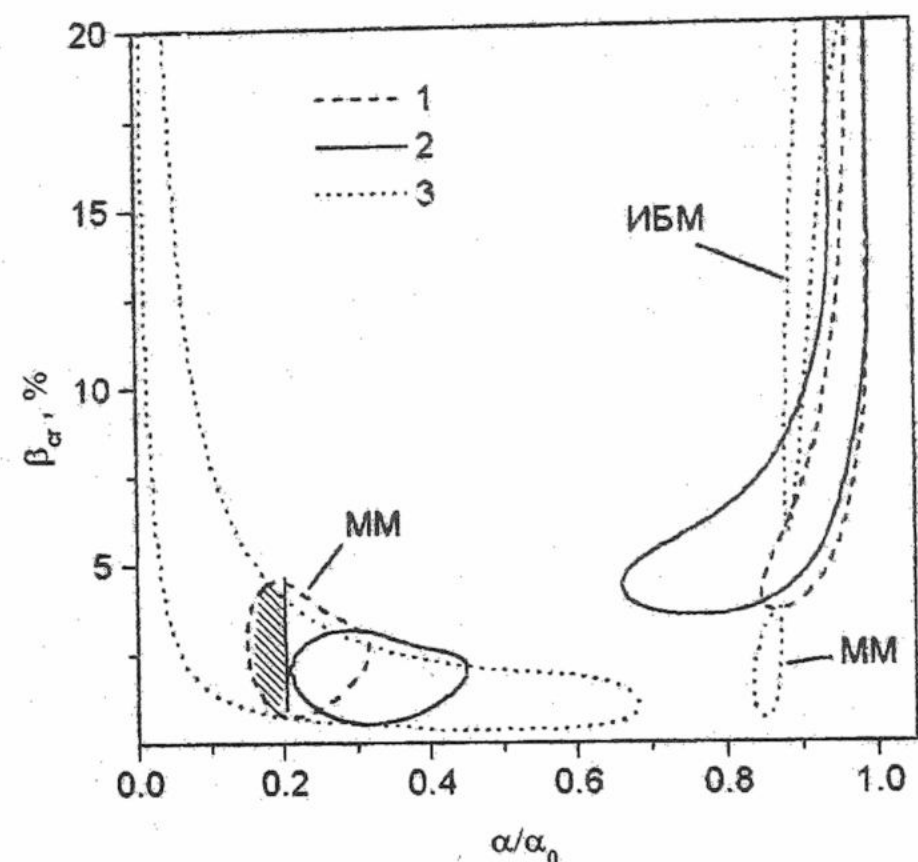
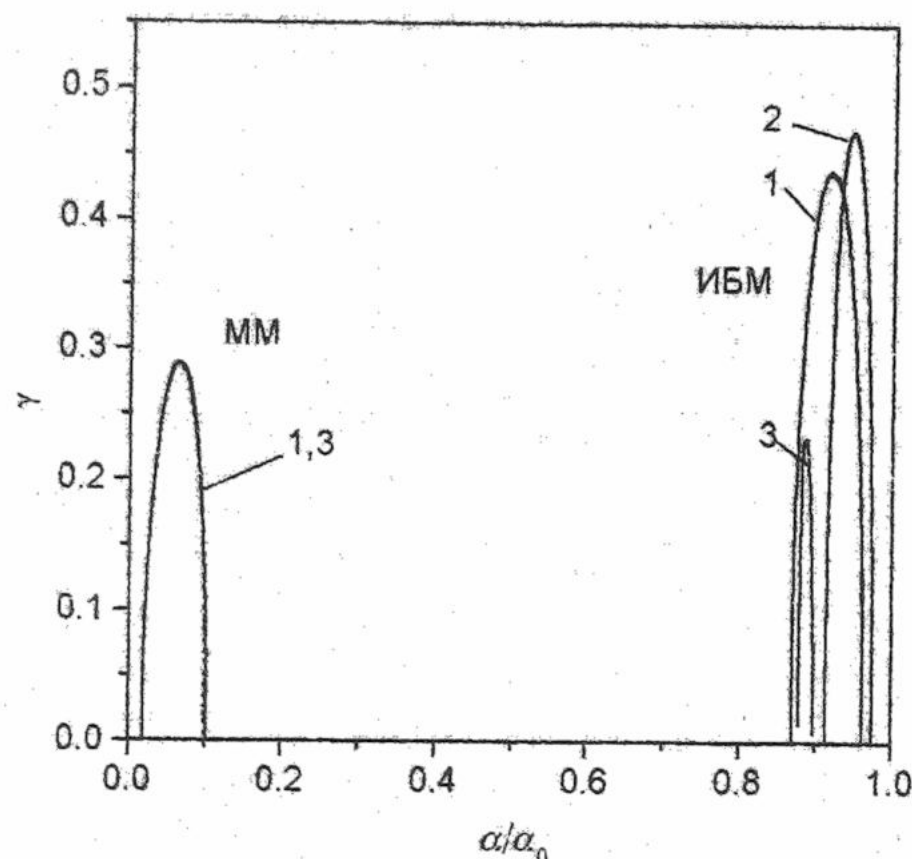


Рис.4. Зависимость β_{cr} от относительного радиуса a/a_0 для немонотонных q и соответствующих им шир S при гофрировке $\delta_N = 5\%$: 1 – для q_2 и S_2 ; 2 – для q_3 и S_3 ; 3 – для q_4 и S_4 .

Использование немонотонного профиля $q(a)$ для стабилизации ИБМ и ММ приводит к следующим результатам. В режиме работы токамака с профилем $q_2(a)$ минимумы шири $S_2(a)$ попадают на области неустойчивости ИБМ и ММ (на центральную и периферийную части плазменного шнура), вследствие этого ИБМ и ММ подавляются (рис.4, кривая 1). В режиме работы токамака с профилем $q_3(a)$ минимум шири $S_3(a)$ попадает на область неустойчивости ММ, вследствие этого ММ подавлены в центральной части шнура за исключением области $0.2 \leq a_{min}/a_0 \leq 0.45$ (рис.4, кривая 2), а ИБМ не подавляются. Для профиля $q_4(a)$ минимум шири $S_4(a)$ попадает на область неустойчивости ИБМ, при этом наблюдается стабилизация ИБМ и образование двух несвязных областей неустойчивости ММ (рис.4, кривая 3). Аналогичные результаты для ИБМ получены в работе [5]. Отметим, что зона неустойчивости ММ не является симметричной относительно оси β_{cr} (например, рис.4, кривая 1, заштрихованная область при $S < 0$): в области $S > 0$ находится большая часть зоны неустойчивости. Это означает, с одной стороны, что изменение шири $S \Rightarrow S$ может оказать стабилизирующее воздействие (ММ: кривая 1 на рис.4). С другой стороны, немонотонный характер



$q(a)$ приводит к дестабилизации тех областей плазмы (ММ: кривая 3 на рис.4), которые были устойчивы при монотонном профиле $q_1(a)$ и шире $S_1(a)$. В тех областях, где немонотонный профиль $q(a)$ стабилизирует указанные моды, наблюдается уменьшение инкремента (рис.5, кривая 3 для ИБМ); в областях, где $q(a)$ дестабилизирует указанные моды – увеличение инкремента (рис.5, кривая 2 для ИБМ).

Рис.5. Зависимость инкремента γ от относительного радиуса a/a_0 при фиксированном $\beta_{cr} = 8\%$ и гофрировке $\delta_N = 5\%$: 1 – для монотонного q_1 и шира S_1 ; 2 – для немонотонного q_3 и шира S_3 ; 3 – для немонотонного q_4 и шира S_4 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано влияние немонотонности профиля коэффициента запаса устойчивости q на устойчивость мод Мерсье и идеальных баллонных мод в токамаке с гофрированным продольным магнитным полем. Показано, что дестабилизирующее воздействие гофрировки поля на устойчивость плазмы может быть уменьшена, если в плазме сформировать немонотонный профиль q с минимальным значением шира в зоне возбуждения соответствующей моды. Таким образом, если в различных областях плазменного шнура одновременно возбуждаются моды Мерсье и ИБМ, то для подавления неустойчивости в токамаке представляется необходимым сформировать немонотонный профиль q , чтобы соответствующий ему шир имел два минимума: один в зоне возбуждения мод Мерсье, другой – в зоне возбуждения ИБМ.

Определены зоны возбуждения идеальных МГД-мод по радиусу плазменного шнура и интервалы давлений плазмы, при которых эти моды неустойчивы. Найдены инкременты возбуждаемых мод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погуде О.П., Юрченко Э.И.// Физика плазмы.-1979.-Т.5.-с.786.
2. Levinton F.M. et al.// Phys. Rev. Lett.-1995.-Vol 75.-p.4417.
3. Strait E.J. et al.// Phys. Rev. Lett.-1995.-Vol 75.-p.4421.
4. Fujita T. et al.// Phys. Rev. Lett.-1997.-Vol 78.-p.2377.
5. Медведев М.В., Юрченко Э.И.// Физика плазмы.-1994.- Т.20, N12.- с.1043-1050.
6. Rice B.W. et al.//Nucl. Fusion.-1996.-V.36-p.1271.
7. Lazarus E.A. et al.// Phys. Rev. Lett.-1996.-V. 77.-p.2714.
8. Strait E.J. et al.// Phys. Plasmas.-1997.-Vol.4.-p.2783.
9. Ozeki T. et al.// Plasma Phys. Control. Fus.-1998.- V.40.- p.871.
10. Михайловский А.Б.// Физика плазмы.-1982.-Т.8.-с.841.
11. Демченко В.В., Макурин С.В., Омельченко А.Я.// УФЖ.-1987.-Т.32, N6.-с.861-868.
12. Демченко В.В. и др.// Препринт ХФТИ 86-6. 1986.
13. Connor I.W., Hastie R.J., Taylor I.B.// Pr. Royl. Soc. -1979.-vol.A 365.-N1.-p.1-17.

STABILITY OF THE IDEAL SMALL-SCALE MHD MODES IN TOKAMAK WITH RIPPLE MAGNETIC FIELD AND UNMONOTONOUS DISTRIBUTION q

A.Ya. Omel'chenko, E.V. Romashchenko

Kharkov National University, Physycal-Technical Department, 31 Kurchatov ave., Kharkov, 61108, Ukraine

The stability of ideal ballooning modes and Mercier modes in ripple tokamak with unmonotonous profile of the safety factor q have been investigated. It is shown that complicated profiles q with minimum shear in the each region of the instability leads to the simultaneous stabilization of these modes in the different regions of the plasma column. The localization of the zones of instability on radius of the plasma column, the ranges of plasma pressure under which the mentioned modes excite have been obtained.

KEY WORDS: ripple magnetic field, Mercier modes, ideal ballooning modes, safety factor q , shear.

УДК 537.81:51.001.57

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО КОНТУРА

Д.В.Попович, В.М.Рашкован

Харьковский государственный аэрокосмический университет "ХАИ"

Поступила в редакцию 15 февраля 2000 г.

Рассмотрено стационарное движение заряженной частицы в электромагнитном поле идеально проводящего контура. С использованием метода функций Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости данного типа движения по двум координатам. Проведены численные расчеты устойчивости при различных параметрах системы "заряженная частица - идеально проводящий контур". По результатам расчетов определены области устойчивого движения частицы для рассматриваемых координат.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость, заряженная частица, стационарное движение, идеально проводящий контур.

Известно, что заряд, находящийся в электромагнитном поле, не только подвергается воздействию поля, но и в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Особенностью влияния движения заряда на электромагнитное поле идеально проводящего контура является то, что силовые линии собственного магнитного поля движущегося заряда, пронизывая поверхность, ограниченную идеально проводящим контуром, индуцируют в нем незатухающие токи, изменяющиеся так, что полный магнитный поток через поверхность, ограниченную идеально проводящим контуром, остается постоянным [1]. Возникновение незатухающих токов приводит к изменению картины электромагнитного поля системы, что может позволить обеспечить устойчивость невозмущенного движения частицы не за счет особой формы магнитного поля, а за счет взаимодействия поля идеально проводящего контура с полем заряженной частицы. В работе исследуются вопросы устойчивости круговой стационарной орбиты заряда в плоскости идеально проводящего контура.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное нерелятивистское движение заряженной частицы по круговой траектории радиуса ρ в плоскости бесконечно тонкого кольцеобразного идеально проводящего контура, как показано на рис.1.

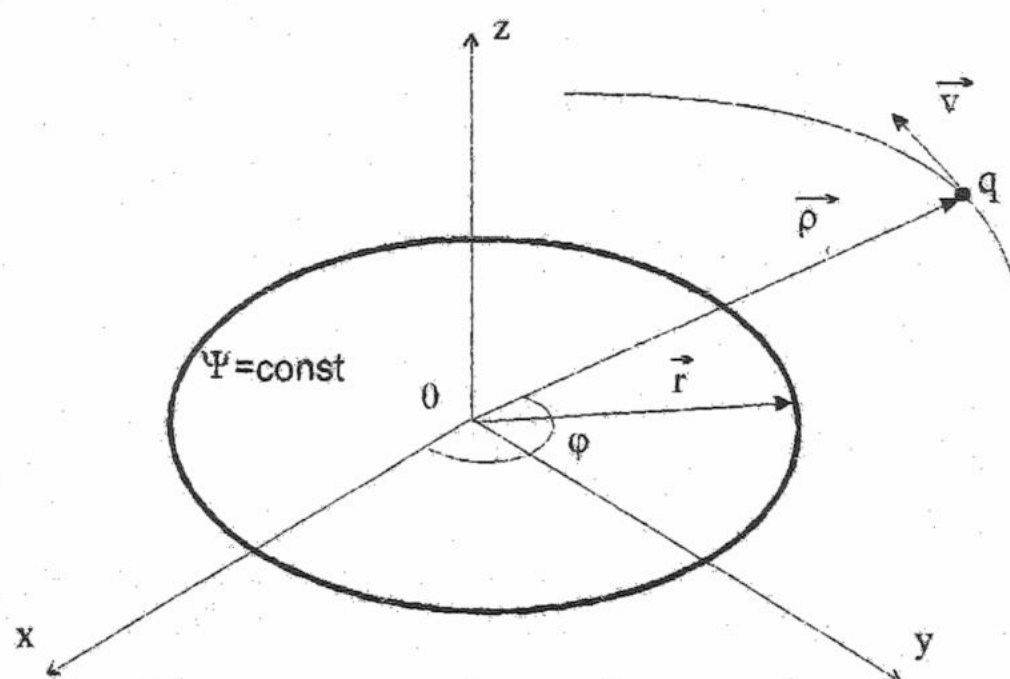


Рис.1. Схема движения заряженной частицы в плоскости идеально проводящего контура.

Используя лагранжев формализм и метод функций Ляпунова, исследуем устойчивость данного типа движения.

ПОЛУЧЕНИЕ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для системы "заряд - идеально проводящий контур" с учетом принятых допущений запишем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m \cdot v^2}{2} + q \cdot \rho \cdot \Phi \cdot A_\phi + \frac{L \cdot I^2}{2}, \quad (1)$$

и два первых интеграла движения

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = a_{11} \cdot \dot{\phi} + a_{12} \cdot I = \beta; & a_{11} = m \cdot \rho^2; & a_{22} = L; \\ \frac{\partial L}{\partial I} = a_{21} \cdot \dot{\phi} + a_{22} \cdot I = \Psi; & a_{12} = \frac{\partial \Psi_q}{\partial \dot{\phi}} = a_{21} = \frac{\Psi_q}{\dot{\phi}}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь L - индуктивность контура I - ток в идеально проводящем контуре, A_ϕ - векторный потенциал поля, содержащий только ϕ -ю компоненту, v - скорость заряженной частицы, q - заряд частицы, Ψ_q - магнитный поток, создаваемый зарядом через контур идеально проводящего витка.

Для стационарного движения заряженной частицы по круговой траектории радиуса ρ в плоскости идеально проводящего контура необходимо выполнение условий

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \rho} \right|_0 = 0; \quad \left. \frac{\partial R}{\partial z} \right|_0 = 0; \quad (3)$$

где R - функция Рауса системы "заряд - идеально проводящий контур". Данные условия назовем необходимыми условиями устойчивости. Знак $\left|_0\right.$ означает невозмущенное движение.

Исходя из определения функции Рауса, с учетом (1), представим условия (3) в виде:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial L}{\partial \rho} \right|_0 = \left[m \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \rho + q \cdot \dot{\phi} \cdot \frac{\partial (\rho \cdot A_\phi)}{\partial \rho} \right]_0 = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_0 = \left[q \cdot \dot{\phi} \cdot \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right]_0 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В плоскости линейного кругового тока составляющая магнитного поля $B_\rho \equiv 0$. Поэтому для стационарного движения в плоскости линейного кругового тока необходимо, чтобы центробежная сила уравнивалась магнитной. Случай $\dot{\phi} = 0$ интереса не представляет и необходимое условие устойчивости по радиусу примет вид:

$$\left[\dot{\phi} + \frac{1}{m \cdot \rho} \cdot I \cdot \frac{\partial a_{12}}{\partial \rho} \right]_0 = 0. \quad (5)$$

Учитывая (2), окончательно представим необходимые условия устойчивости стационарной циклической орбиты для системы "заряд-идеально проводящее кольцо":

$$\frac{\beta}{\Psi} = \left[\frac{a_{12} - \frac{1}{m \cdot \rho} \cdot a_{11} \cdot \frac{\partial a_{12}}{\partial \rho}}{a_{22} - \frac{1}{m \cdot \rho} \cdot a_{12} \cdot \frac{\partial a_{12}}{\partial \rho}} \right]_0; \quad z|_0 = 0. \quad (6)$$

Получим теперь достаточные условия устойчивости относительно отклонений в направлениях, перпендикулярных стационарной траектории орбиты. Исследуемая нами система является обобщенно консервативной [2], так как ее функция Рауса

$$R = \frac{[\beta \cdot a_{22} - \Psi \cdot a_{12}] \cdot \beta + [\Psi \cdot a_{11} - \beta \cdot a_{12}] \cdot \Psi}{2 \cdot [a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2]} - \frac{m \cdot \rho^2}{2} - \frac{m \cdot z^2}{2}; \quad (7)$$

а, следовательно, функция Гамильтона не зависят явно от времени: $\frac{\partial R}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Для получения достаточных условий устойчивости в случае обобщенно-консервативной системы при наличии циклических координат удобно воспользоваться теоремой Рауса [3].

Пусть необходимым условиям устойчивости системы "точечный заряд - идеально проводящее кольцо" удовлетворяют $\rho = \rho_0, z = z_0$. Это стационарное движение будет устойчивым согласно теореме Рауса, если измененная потенциальная энергия:

$$W = \frac{[\beta \cdot a_{22} - \Psi \cdot a_{12}] \cdot \beta + [\Psi \cdot a_{11} - \beta \cdot a_{12}] \cdot \Psi}{2 \cdot [a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2]}, \quad (8)$$

имеет для него минимум.

Пусть система испытывает возмущения $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, $z = z_0 + \Delta z$; тогда

$$W(\rho, z) - W(\rho_0, z_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \cdot (\Delta\rho)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \cdot \partial z} \cdot \Delta\rho \cdot \Delta z + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \cdot (\Delta z)^2 \right] + \dots \quad (9)$$

Линейные члены разложения уничтожаются в силу необходимых условий устойчивости (3).

Согласно критерию Сильвестра вещественная квадратичная форма (9) тогда и только тогда будет определено положительной, когда все главные миноры ее дискриминанта положительные. Это дает нам два неравенства:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \rho^2} \right|_0 > 0; \quad \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right]_0 > 0, \quad (10)$$

которые и будут являться достаточными условиями устойчивости.

Таким образом, для случая стационарного движения заряженной частицы по круговой траектории в плоскости идеально проводящего контура записаны необходимые (6) и достаточные (10) условия устойчивости. С их помощью можно оценивать устойчивость указанных траекторий движения при различных параметрах системы «заряженная частица - идеально проводящий контур».

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Результаты численного расчета критериев устойчивости движения заряженной частицы по стационарной орбите для общего случая ненулевого замороженного потока в идеально проводящем контуре представлены на рис.2,3. Расчеты велись с использованием условий (6) и (10), записанных в безразмерном виде:

$$\gamma_0 = \gamma_2 \cdot \frac{D - x_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial x_1}}{1 - \gamma_2^2 \cdot \frac{1}{x_1} \cdot D \cdot \frac{\partial D}{\partial x_1}} \bigg|_0 \quad \text{по } x_1; \quad x_3|_0 = 0 \quad \text{по } x_3. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\frac{\gamma_0^2 - 2 \cdot \gamma_0 \cdot \gamma_2 \cdot D + x_1^2}{x_1^2 - \gamma_2^2 \cdot D^2} \right] > 0 \quad \text{по } x_1; \quad x_1 > 1 \quad \text{по } x_3. \quad (12)$$

Здесь $x_1 = \frac{\rho}{r}$; $x_2 = \varphi$; $x_3 = \frac{z}{r}$; $\tau = \omega \cdot t$; $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{d\tau}$; $\dot{x}_2 = \frac{d\varphi}{d\tau}$; $\dot{x}_3 = \frac{dz}{d\tau}$;

ω - некая константа, имеющая размерность угловой скорости, определяемая соотношением:

$$\omega = \frac{\Psi}{r \cdot \sqrt{L \cdot m}}; \rightarrow \Psi \neq 0;$$

γ_0, γ_2 и D - безразмерные параметры и безразмерная функция соответственно:

$$\gamma_0 = \frac{\beta}{m \cdot \omega \cdot r^2} = \frac{\beta}{\Psi} \cdot \sqrt{\frac{L}{m}} \cdot \frac{1}{r}; \quad \gamma_2 = \frac{q \cdot \mu_0}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot m}}; \quad D = \frac{\sqrt{x_1}}{k} \cdot [(2 - k^2) \cdot K - 2 \cdot E].$$

С учетом введенных обозначений безразмерная измененная потенциальная энергия

$$V = \frac{\gamma_0^2 - 2 \cdot \gamma_0 \cdot \gamma_2 \cdot D + x_1^2}{x_1^2 - \gamma_2^2 \cdot D^2}.$$

Рис.2 (а,б) демонстрирует поведение необходимого условия устойчивости в виде функции $\gamma_0 = \gamma_0(x_1)$ и $\gamma_0 = \gamma_0(\gamma_2)$. Семейство кривых $\gamma_0 = \gamma_0(x_1)$ приведено при различных значениях γ_2 , что отражает поведение необходимого условия устойчивости в зависимости от радиуса стационарной орбиты при различных собственных свойств системы. Увеличения параметра γ_2 приводит к смещению экстремума функции $\gamma_0 = \gamma_0(x_1)$ вправо с одновременным увеличением его абсолютного значения. Кривые семейства имеют характерное поведение: до точки экстремума с ростом радиуса идет увеличение величины γ_0 , что отвечает при постоянном замороженном потоке $\Psi = \text{const}$ росту момента количества движения частицы. После перехода частицы точки экстремума $\gamma_0 = \gamma_{0\text{max}}$ переход на орбиты большего радиуса сопровождается уменьшением значения γ_0 , что соответствует при постоянном замороженном в контур потоке падению величины момента количества движения частицы.

Поведение, аналогичное поведению семейства кривых $\gamma_0 = \gamma_0(x_1)$, имеет и семейство $\gamma_0 = \gamma_0(\gamma_2)$ для различных радиусов орбиты $x_1 = \text{const}$ (рис.2(б)). Наблюдается аналогичный экстремум $\gamma_0 = \gamma_{0\text{max}}$ для функции $\gamma_0 = \gamma_0(\gamma_2)$.

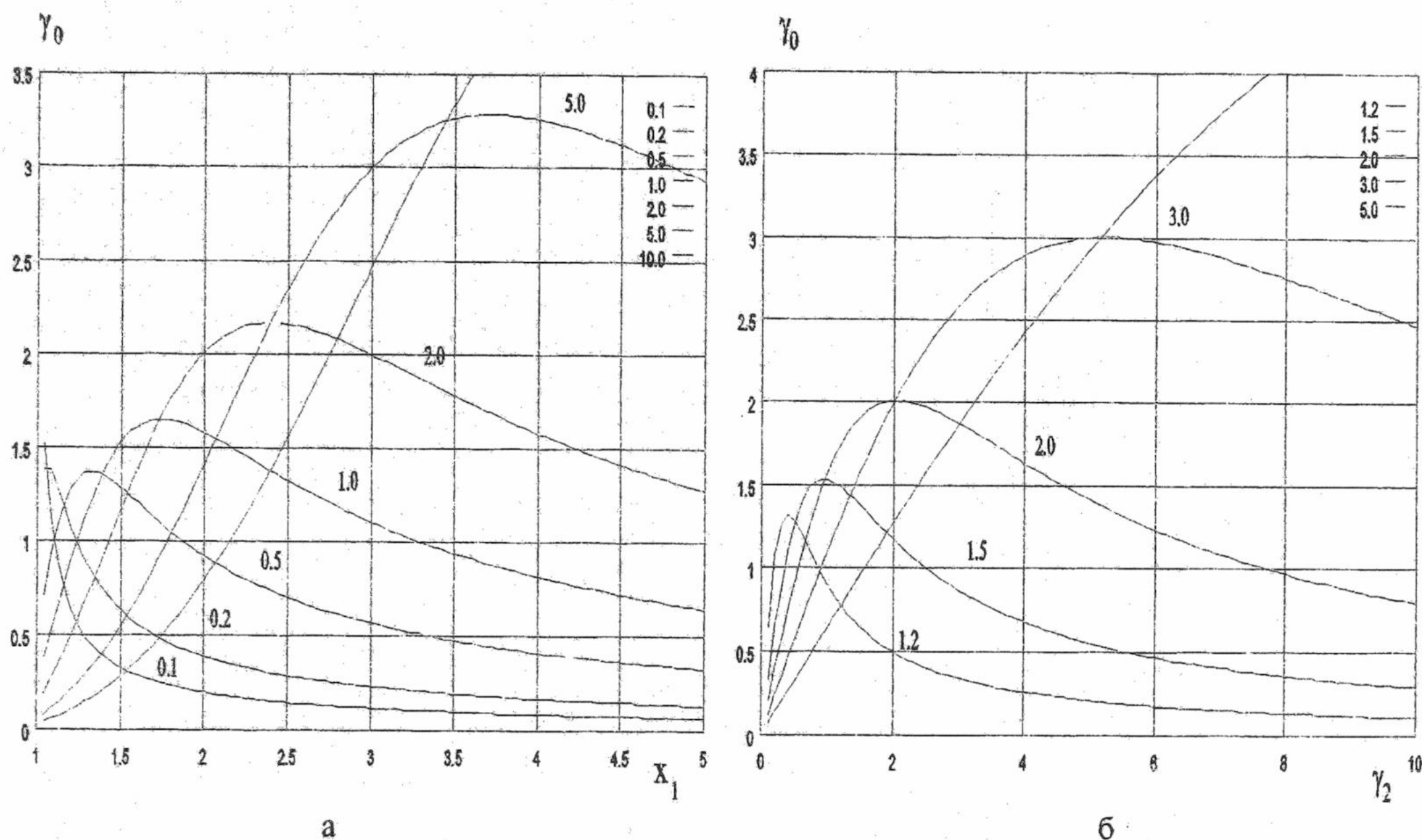


Рис.2 Необходимые условия устойчивости:

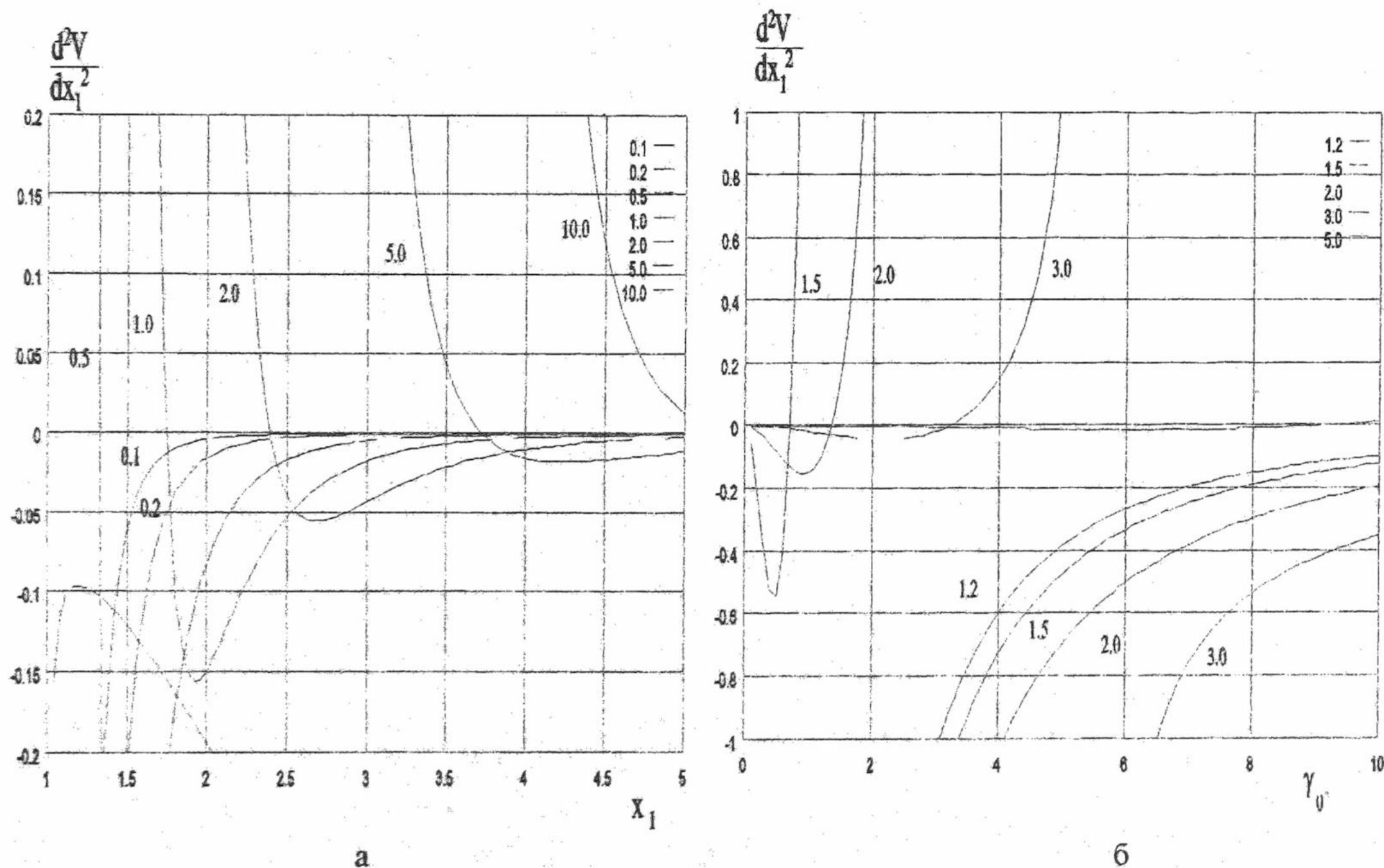
а) $\gamma_0 = \gamma_0(x_1)$ при $\gamma_2 = \text{const}$;б) $\gamma_0 = \gamma_0(\gamma_2)$ при $x_1 = \text{const}$.

Рис.3 Достаточные условия устойчивости:

а) $\gamma_0 = \gamma_0(x_1)$ при $\gamma_2 = \text{const}$;б) $\gamma_0 = \gamma_0(\gamma_2)$ при $x_1 = \text{const}$.

На рис.3(а,б) представлены достаточные условия устойчивости системы как функции $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x_1)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(\gamma_2)$ при постоянном γ_2 и x_1 , соответственно. Видно, что выполнение достаточных условий устойчивости возможно для средних орбит, правее точки разрыва $x_1^2 - \gamma_2^2 \cdot D^2 = 0$, которая сдвигается вправо при возрастании γ_2 . Следует заметить, что знак величины $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}$ характеризует устойчивость или неустойчивость системы, а ее абсолютное значение - жесткость системы.

При переходе на орбиты большего радиуса ($\gamma_2 = \text{const}$) жесткость системы сильно падает, позволяя осуществить переход из области устойчивого положения в область неустойчивого. Максимальная жесткость системы наблюдается в окрестности точки разрыва $x_1^2 - \gamma_2^2 \cdot D^2 = 0$, $x_1 \rightarrow \gamma_2 \cdot D$, и уменьшается при удалении от окрестности точки разрыва. Кроме того, для постоянных значений параметра γ_2 имеются критические значения радиуса орбит стационарного движения, определяемые уравнением $x_1^2 - \gamma_2^2 \cdot D^2 = 0$ (рис.3(а)). Система при движении по орбите постоянного радиуса $x_1 = \text{const}$ также имеет критические значения параметра γ_2 , определяемые этим же уравнением. На рис.3(б) показано, что увеличение γ_2 ведет к повышению жесткости системы до тех пор, пока не будет достигнуто критическое значение γ_2 , после чего система резко переходит в область неустойчивого равновесия, причем критическое значение тем больше, чем больше радиус стационарной орбиты.

Таким образом, численные расчеты полученных условий устойчивости показывают, что для системы "заряд-идеально проводящий контур" возможна устойчивость на внешних орбитах при средних значениях x_1 как для координаты x_1 , так и для координаты x_3 при отличном от нуля "замороженном в идеально проводящем контуре" магнитном потоке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Физматгиз, 1967.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1946.

STABILITY OF THE FREE MOTION CHARGE IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF SUPERCONDUCTIVE COIL

D.V.Popovich, V.M.Rashkovan

State Aerospace University named after N.Ye.Zhykovski - "KHAI"
61070, Ukraine, Kharkov, Thkalova St.-17

Consider the stationary motion of one charged particle in the electromagnetic field of superconductive coil. With use of Lyapunov's functions the necessary and the sufficient conditions of stability of this motion for two coordinates were got. On the results of numerical experiments the districts of stable motion in system "charged particle - superconductive coil" were determined for different parameters of system.

KEY WORDS: stability, charged particle, stationary motion, superconductive coil.

УДК 537.81:51.001.57

ФОКУСИРОВКА ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ СВЕРХПРОВОДЯЩИМИ МАГНИТНЫМИ КОНТУРАМИ

В.М. Рашкован, А.В. Марчук, А.В. Синченко

Государственный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского "ХАИ",
61070, Украина, г. Харьков, ул. Чкалова 17,
Поступила в редакцию 10 мая 2000г.

Рассмотрена задача фокусировки заряженных частиц сверхпроводящими контурами, а также подробно исследуется изменение векторного потенциала поля контуров в присутствии движущихся зарядов с учетом взаимодействия между ними. Подробно изучена картина изменения вектора магнитной индукции замкнутой системы при наличии движущихся зарядов. Получено приближенное выражение для фокусного расстояния магнитной линзы, учитывающее рекуперацию энергии в системе сверхпроводящих контуров и потока заряженных частиц.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сверхпроводящий контур, функция Лагранжа, векторный потенциал, магнитный поток.

Фокусировка потока заряженных частиц представляет одну из наиболее сложных и проблемных задач магнитной динамики. Использование магнитных линз является одним из методов решения поставленной задачи. Использование в таких системах сверхпроводящих контуров представляет собой более сложную задачу, однако позволяет исследовать принципиально новые эффекты, связанные в первую очередь с явлением сохранения полного магнитного потока пронизывающего контур сверхпроводящего контура.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу фокусировки заряженных частиц сверхпроводящими контурами, расположенными в плоскости траектории движения зарядов, представленную на рис. 1.

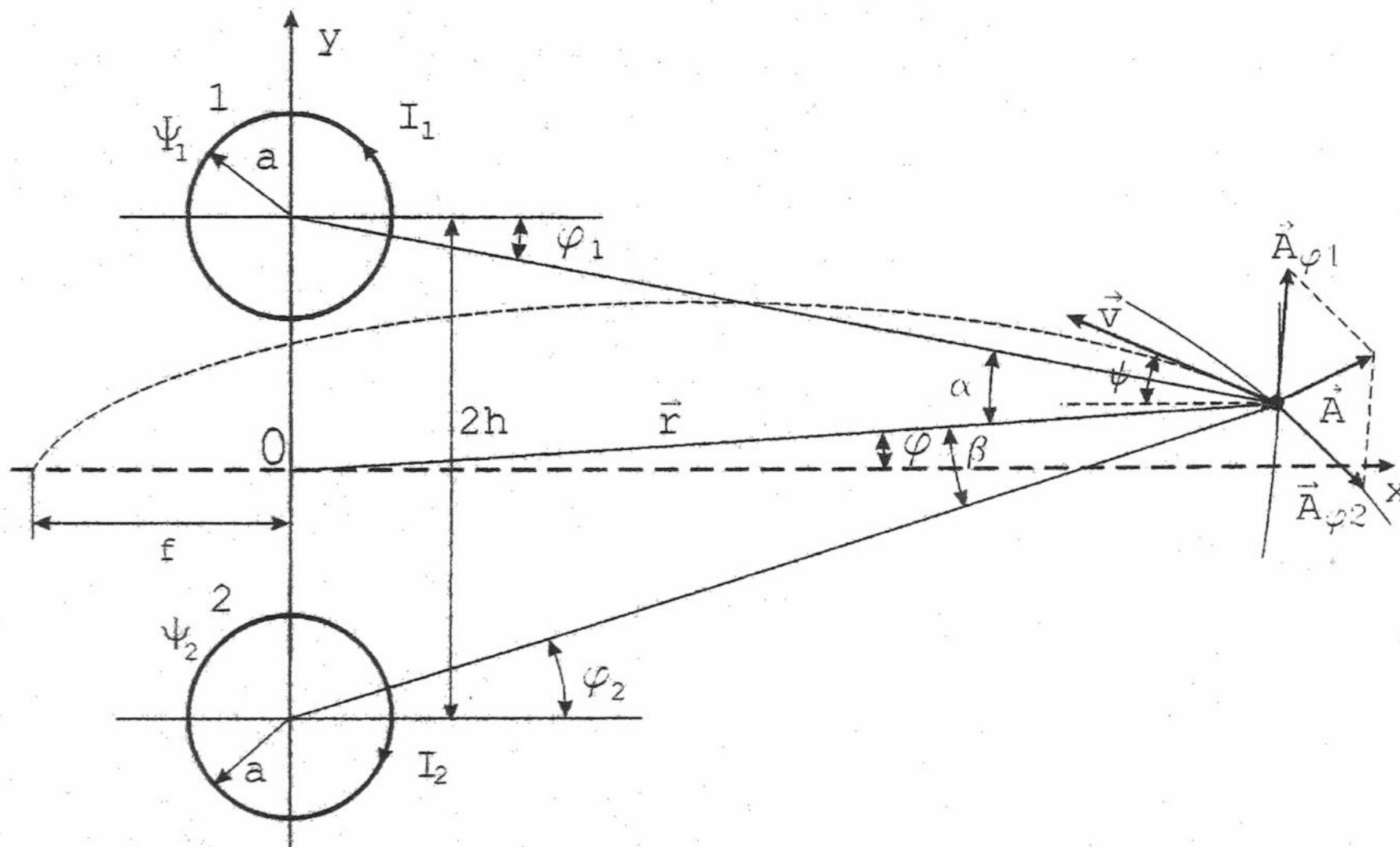


Рис.1 Схема движения потока заряженных частиц вблизи сверхпроводящих контуров

Рассмотрим два сверхпроводящих контура радиуса a , с осевым расстоянием $2h$ между ними и частицу массой m с зарядом q , летящим к оси OX под углом ϕ и расстоянием r до центра системы.

Сохранение полного магнитного потока пронизывающего контура 1 и 2 вызывает увеличение силы тока в них, что приводит к изменению силы взаимодействия между контурами и пробной частицы. При решении поставленной задачи удобно ввести функцию Лагранжа, для исключения циклических координат системы. Поставленная задача не является аксиально-симметричной в отличие от [2], поскольку угол ϕ не входит в циклические координаты, что усложняет рассмотренную модель. При решении используется как Лагранжевый, так и Ньютонов формализм.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для данной задачи необходимо введение, как функции Лагранжа, так и применение выражение для силы Лоренца, с учетом изменяющегося во времени магнитного поля. Выражение для функции Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} (m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 + q(\vec{v}\vec{A}_1) + q(\vec{v}\vec{A}_2), \quad (1)$$

где L_i – индуктивность i -го контура, L_{ij} – индуктивность взаимодействия i -го и j -го контуров, I_i – сила тока в i -ом контуре, $\vec{A}_i$ – векторный потенциал i -го контура, v – скорость движения заряженной частицы.

Выражение для векторного потенциала кольца имеет вид:

$$A_\varphi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - 2E(k) \right), \quad (2)$$

где $E(k)$ и $K(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, а безразмерный параметр k определяется как:

$$k = 2 \frac{\sqrt{a \cdot r}}{a + r}.$$

Поскольку результирующий векторный потенциал определяется как суперпозиция векторных потенциалов каждого из колец, то система не является аксиально-симметричной относительно O , имеется как угловая, так и радиальная компонента векторного потенциала:

$$\begin{cases} A_\varphi = A_{\varphi 1}(r_1) \cos(\alpha) - A_{\varphi 2}(r_2) \cos(\beta) \\ A_r = A_{\varphi 1}(r_1) \sin(\alpha) - A_{\varphi 2}(r_2) \sin(\beta), \end{cases} \quad (3)$$

где $r_1 = \sqrt{h^2 + r^2 - 2hr \sin(\varphi)}$, $r_2 = \sqrt{h^2 + r^2 + 2hr \sin(\varphi)}$, а выражение для углов α и β имеет вид:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{h \cos \varphi}{r_1}\right), \beta = \arcsin\left(\frac{h \cos \varphi}{r_2}\right). \quad (4)$$

Анализ выражений (3) позволяет судить о зависимости векторного потенциала от угла, под которым частица влетает в поле сверхпроводящих контуров.

Функция Лагранжа зависит от обобщенных координат: I_1, I_2, r, φ . Поскольку координаты I_1, I_2 – циклические, то выполняется закон сохранения полного магнитного потока, пронизывающего контура 1 и 2:

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2 + q \omega r f(r_1) = \text{const}, \quad (5)$$

$$\Psi_2 = L_2 I_2 + L_{12} I_1 + q \omega r f(r_2) = \text{const}. \quad (6)$$

Решая уравнения (4), (5) относительно I_1, I_2 получим следующие выражения для зависимости силы тока в контурах, в зависимости от положения частицы относительно центра O :

$$I_1(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{L_2 \Psi_1 - L_{12} \Psi_2 - q f(r_1) \omega_1 r_1 L_2 + L_{12} q f(r_2) \omega_2 r_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2}. \quad (7)$$

$$I_2(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{-L_{12} \Psi_1 + L_1 \Psi_2 - q f(r_2) \omega_2 r_2 L_1 + L_{12} q f(r_1) \omega_1 r_1}{L_1 L_2 - L_{12}^2}. \quad (8)$$

Функция $f(r)$ представляет собой векторный потенциал кольца с силой тока в 1А, на расстоянии r от его центра, а ω – угловая скорость движения заряда q относительно центра O .

Подстановка выражений (4), (7), (8) в (3) позволяет получить окончательное выражение для векторного потенциала системы, при этом учитывается взаимодействие между движением заряженной частицы и системой контуров, посредством силы Лоренца.

Дальнейшее исследование характера взаимодействия между системой колец и потоком заряженных частиц удобно выполнить, используя выражение индукции магнитного поля $\vec{B}$. Как и для векторного потенциала, индукция магнитного поля определяется исходя из принципа суперпозиции в каждой точке поля системы.

Выражение для индукции магнитного поля, бесконечно-тонкого контура с током I согласно [1] равно:

$$B_z(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a+r} \left[K(k) + \frac{a+r}{a-r} E(k) \right]. \quad (9)$$

Связь между углами φ_1, φ_2 и φ определяется следующими соотношениями:

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{r}{r_1} \cos(\varphi)\right), \varphi_2 = \arccos\left(\frac{r}{r_2} \cos(\varphi)\right). \quad (10)$$

Угловая скорость движения заряженной частицы относительно каждого контура определяется как:

$$\omega_1 = \frac{v \sin(\psi + \varphi_1)}{r_1}, \omega_2 = \frac{v \sin(\psi + \varphi_2)}{r_2}. \quad (11)$$

Подставим полученное выражение (11) в выражение для силы тока первого и второго контуров:

$$I_1(r, \varphi) = \frac{\Psi_1 L_2 - L_{12} \Psi_2 - L_2 q \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r_1}} \left(\left(\frac{2}{k_1} - k_1 \right) K(k_1) - 2E(k_1) \right) \sin(\psi + \varphi_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} +$$

$$+ \frac{L_{12} q \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r_2}} \left(\left(\frac{2}{k_2} - k_2 \right) K(k_2) - 2E(k_2) \right) \sin(\psi + \varphi_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2}, \quad (12)$$

$$I_2(r, \varphi) = \frac{\Psi_2 L_1 - L_{12} \Psi_1 + L_{12} q \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r_1}} \left(\left(\frac{2}{k_1} - k_1 \right) K(k_1) - 2E(k_1) \right) \sin(\psi + \varphi_1)}{L_1 L_2 - L_{12}^2} -$$

$$\frac{L_1 q \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r_2}} \left(\left(\frac{2}{k_2} - k_2 \right) K(k_2) - 2E(k_2) \right) \sin(\psi + \varphi_2)}{L_1 L_2 - L_{12}^2}. \quad (13)$$

Подстановка выражений (12), (13) в выражение (9) полностью определяет полную индукцию магнитного поля в системе.

Зависимость вектора магнитной индукции B от положения заряженной частицы вблизи сверхпроводящих контуров представлена на рис.2. Магнитное поле в системе зависит от положения заряженной частицы и сила взаимодействия между сверхпроводящими кольцами и зарядом зависит также от скорости, направления и положения заряда.

Как следует из (12)-(13), сила тока в контуре возрастает при приближении заряженной частицы к центру системы O . Полученный результат свидетельствует о переходе кинетической энергии частицы в электромагнитную энергию поля.

Рис.2 Зависимость индукции магнитного поля B при движении заряженной частицы $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$

1-уединенные контура с током;

2-положение частицы: $r = 4, \varphi = \frac{\pi}{6}, \phi = 0$;

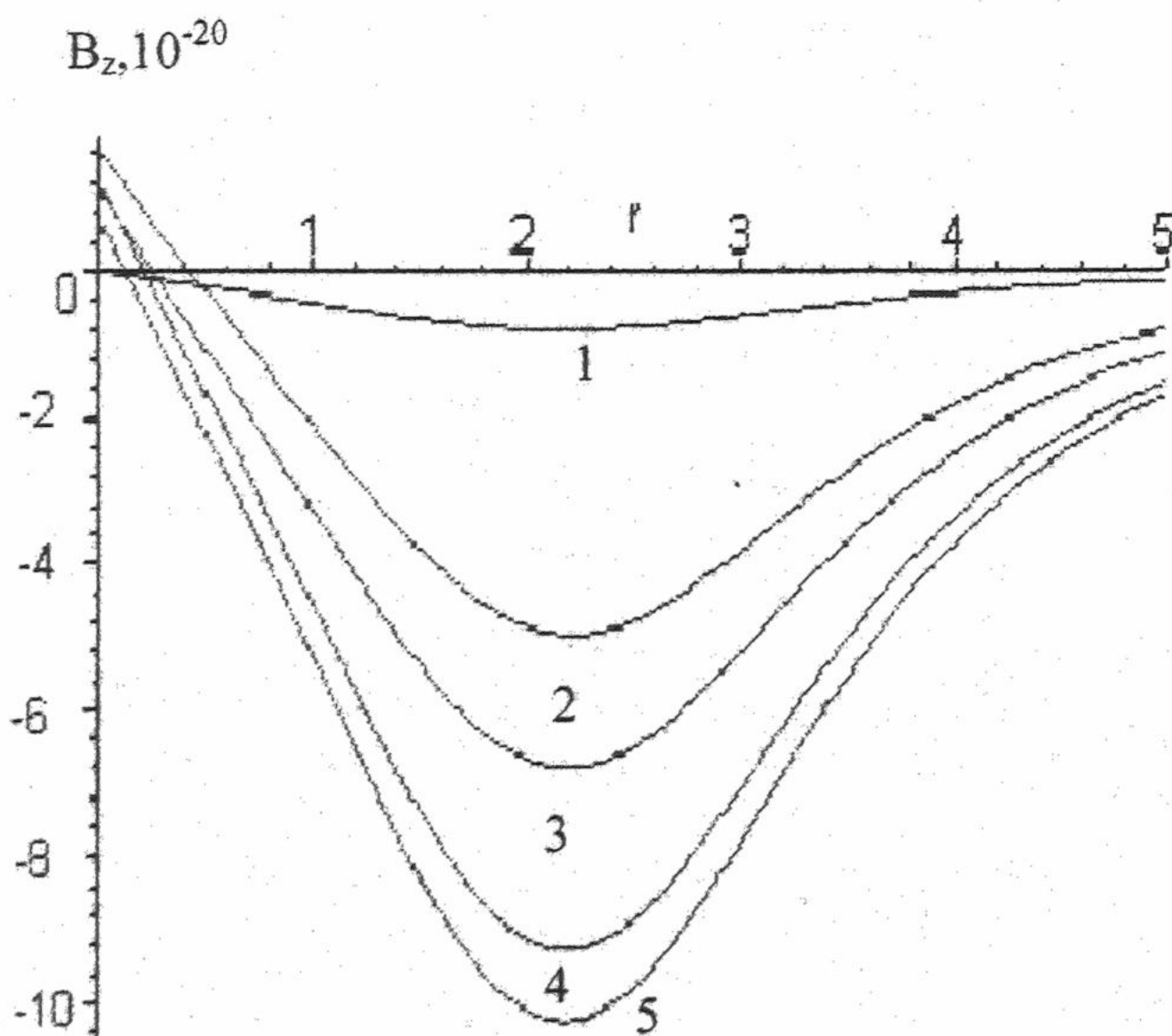
3- положение частицы: $r = 3, \varphi = \frac{\pi}{6}, \phi = 0$;

4- положение частицы: $r = 3, \varphi = \frac{\pi}{6}, \phi = -\frac{\pi}{6}$;

5- положение частицы: $r = 3, \varphi = \frac{\pi}{6}, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Поскольку функция Лагранжа (1) не зависит явно от времени, то данная система является консервативной, и следовательно полная энергия системы сохраняется.

Определим изменение кинетической энергии заряженной частицы за счет ее перехода в энергию магнитного поля. При этом учитываем изменение силы тока во времени:



$$\Delta E_k = \frac{L_1(I_{10}^2 - I_{11}^2)}{2} + \frac{L_2(I_{20}^2 - I_{22}^2)}{2} + L_{12}(I_{10}I_{20} - I_{11}I_{21}), \quad (14)$$

где I_{ij} - сила тока в i -ом контуре, в j момент времени. Так изменение энергии заряженной частицы за время ее фокусировки определится исходя из выражений (12)-(14).

Получим выражение для фокусного расстояния магнитной линзы приведенной на рис. 1. Формула для фокусного расстояния магнитной линзы определяется исходя из выражения для силы Лоренца [3], с учетом полученных выражений для силы тока в контурах (12), (13) и формулы для векторного потенциала (3):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{V} \times \text{rot} \vec{A}), \quad (15)$$

$$f = r \cos \phi - \rho \sin \phi - \sqrt{\rho^2 - (\rho \cos \phi - r \sin \phi)^2}, \quad (16)$$

где $\rho = \frac{mv_0}{qB_0}$ - ларморовский радиус движения заряженной частицы в начальный момент времени t_0 .

В зависимости от начальных параметров задачи, знак f может быть как положительным, так и отрицательным, следовательно, приведенная на рис. 1 магнитная линза может обладать как собирательным, так и рассеивающим свойством. Полученное выражение для фокусного расстояния позволяют судить о силе взаимодействия магнитной линзы с пучком заряженных частиц и изменении кинетической энергии (14).

ВЫВОДЫ

С физической точки зрения, полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Появление в сверхпроводящих контурах переменных по времени токов приводит к возникновению электромагнитного поля $A(t)$, которое в точке нахождения электрического заряда будет создавать результирующую электрическую силу $\vec{P}$, направленную против движения заряда, в результате действия которой заряд будет тормозиться.

При приближении заряженной частицы к одному из контуров, в этом контуре индуцируется электрический ток, приводящий к появлению магнитной индукции, оказывающей фокусирующее действие на электрический заряд. Вполне очевидно, что этот процесс будет проявляться как при расположении системы короткозамкнутых витков вдоль траектории движения, так и пространстве таким образом, чтобы обеспечить максимальную магнитную связь между движущимся зарядом и системой короткозамкнутых идеально электропроводящих витков. Необходимо подчеркнуть, что полученные результаты относятся к взаимодействию тел, находящихся в одной плоскости, а рассмотрение пространственной задачи требует более пристального подхода к определению в первую очередь фокусного расстояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел.-Киев: Наукова думка, 1981.
2. Рашкован В.М. Марчук А.В, Пономарева И.А.-"Учет релятивизма при движении заряда в поле...", "Вісник Харківського університету", №463, серія фізична "Ядра, частинки, поля", 1999, вип.4.
3. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Т.2.Теория поля.-М.: Наука, 1965.
4. Пашицкий Э. А. Основы теории сверхпроводимости.-Киев: Вища школа, 1985, 103 с.

BEAM FOCUSING OF CHARGED PARTICLES BY SUPERCONDUCTIVE MAGNETIC CIRCUITS

V.M. Rashkovan, A.V. Marchuk, A.V. Sinchenko

State Aerospace University
named after N. Ye. Zhukovskiy - "KhAI",
61070, Ukraine, Kharkov, Tchkalov St.-17,
department "Power units and electrorocket engines of space vehicles"

The problem of charged particles focusing by superconductive circuits is submitted and a detailed vector potential of circuit field investigates at moving charged particles presence taking into account their interaction. Studying magnetic induction vector field of closed system at moved particles is executed. The approximate expression for focusing distance of the magnetic lens is obtained considering energy recuperation at superconductive circuits-charged particles flow.

KEY WORDS: superconducting circuit, focus distance, vector potential, magnetic field.