ISSN 0453-8048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ім. В. Н. Каразіна

№ 510

2001

УДК 539.12/.17+533.9+621.039

"Вісник Харківського національного університету" (серія фізична «Ядра, частинки, поля») є збірником наукових робіт, який містить результати досліджень з фізики елементарних частинок, ядерної фізики, фізики плазми та плазмових технологій, фізики твердого тіла та радіаційної фізики. Збірник призначений для викладачів, наукових співробітників, аспірантів та студентів, що спеціалізуються у відповідних або суміжних галузях науки. Його включено до Переліку наукових видань ВАК, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. До публікації приймаються статті, написані українською, російською або англійською мовами згідно з правилами для авторів і мають позитивні рекомендації двох рецензентів, призначених редакцією. Запланована періодичність випуску збірника — 4 рази на рік.

Адреса редакційної колегії: 61108, Харків, пр. Курчатова, 31.
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна. Фізико-технічний факультет, к. 402.
Тел. 35-25-66. E-mail: kirdin@pht.univer.kharkov.ua, kirdin@pem.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.
Протокол № 5 від 30 березня 2001 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ №4063 від 2.03.2000

ISSN 0453-8048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ім. В. Н. Каразіна

№ 510

серія фізична

«Ядра, частинки, поля»

Заснований у 1998 р.

Випуск **1** /13/

присвячується академіку С.В. Пелетмінському

The Journal of Kharkiv National University
No. 510

physical series

«Nuclei, Particles, Fields»

Issue **1** /13/

Харків

2001

Зміст

УДК 539.172:3

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ ФОТОРАСЩЕПЛЕНИЯ МАЛОНУКЛОННЫХ СИСТЕМ

А.Ю. Касаткин, И.К. Кириченко*, А.П.Корж**
Национальный научный центр Харьковский Физико-Технический Институт,
Институт теоретической физики,
61108, Украина, г. Харьков, пер. Академический 1,
** Украинская инженерно-педагогическая академия,*
61003, Украина, г. Харьков, ул. Университетская 16,
*** Харьковская государственная академия технологии и организации питания,*
61127, Украина, г. Харьков, ул. Клочковская 333,
Поступила в редакцию 14 февраля 2001г.

Развит подход для фоторасщепления легчайших атомных ядер в амплитуде которого, удовлетворены требования ковариантности и градиентной инвариантности с учетом внутренней структуры составной системы. Проведены исследования относительных вкладов полюсной и регулярной частей полной амплитуды сечения процесса.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: фоторасщепление, функция Грина, вершинная функция, сечение процесса

Основной задачей квантовой теории поля является вычисление функции Грина (ФГ), т.е. вакуумных средних хронологических произведений взаимодействующих полей. Использование функциональных методов, позволяет объединить все ФГ в производящий функционал, а применение редукционной техники дает возможность установить связь между ФГ и ее вкладом в соответствующий элемент S-матрицы. Эта современная схема получения матричных элементов различных процессов основана на использовании лагранжиана.

В отличие от квантовой электродинамики, при описании процессов взаимодействия фотонов с атомными ядрами (составными сильносвязанными системами), выше описанная схема становится неприменимой по причине невозможности написания лагранжиана, описывающего "развал" составной системы на составляющие, а значит и "включить" в него электромагнитное (ЭМ) поле путем удлинения производных его кинетической части.

В настоящей работе предложена теоретическая модель, в которой обозначенная проблема решается минуя стадию написания лагранжиана составной системы, предполагая, что изначально уже известны двух- и трехчастичные ФГ взаимодействующих полей. Этого становится достаточно для написания полной амплитуды фотопроцесса, в которой удовлетворяются требования ковариантности и калибровочной инвариантности при последовательном учете внутренней структуры составной системы.

КОВАРИАНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФОТОННЫХ ВСТАВОК

Рассмотрим релятивистское обобщение метода фотонных вставок [1,2] на примере фоторасщепления скалярной связанной системы с образованием в конечном состоянии также двух скалярных составляющих.

Рассмотрение выполним в импульсном представлении. Для иллюстрации развитого подхода продемонстрируем его на функции распространения скалярного поля. "Включим" ЭМ поле ε_μ с 4 – импульсом q_μ в ФГ $D(p)$ скалярной частицы с импульсом p и массой m посредством оператора:

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \{D(p \pm \lambda q)\},$$

где ze - заряд взаимодействующей с полем частицы. Знак плюс перед λ в подинтегральной функции выражения соответствует поглощению поля, а минус его испусканию. В дальнейшем для простоты изложения под взаимодействием частицы с полем будем предполагать его поглощение.

Используя свойство прямого и обратного пропагаторов: $DD^{-1} = D^{-1}D = I$, и дифференцируя его по q_μ, получим $\partial D/\partial q_\mu = -D \times \partial D^{-1}/\partial q_\mu \times D$. Тогда включение ЭМ поля в двухчастичную ФГ имеет вид

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \{D(p+\lambda q)\} = -ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} D(p+\lambda q) \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{D^{-1}(p+\lambda q)\right\} D(p+\lambda q).$$

Явный вид пропагатора $D(p) = 1/\left(p^2 - m^2 + i0\right)$ позволяет выполнить дифференцирование $\partial D^{-1}\left(p+\lambda q\right)/\partial q_\mu = 2\lambda p_\mu$ в результате чего

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \{D(p+\lambda q)\} = -ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{2\lambda p_\mu}{\left[(p+\lambda q)^2 - m^2 + i0\right]^2}.$$

Представляя знаменатель правой части в виде: $(p+\lambda q)^2 - m^2 + i0 = \lambda a + (1-\lambda)b$, где $a = (p+q)^2 - m^2 + i0$, $b = p^2 - m^2 + i0$ и вычисляя фейнмановский интеграл, приходим к выражению

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{2\lambda p_\mu}{\left[(p+\lambda q)^2 - m^2 + i0\right]^2} = D(p+q)\{(2p+q)_\mu\}D(p). \tag{1}$$

Таким образом, включение ЭМ поля в двухчастичную функцию распространения воспроизводит известную в квантовой электродинамике вершину взаимодействия ЭМ и заряженного скалярного полей

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \{D(p+\lambda q)\} = -zeD(p+q)\{\varepsilon_\mu(2p+q)_\mu\}D(p). \tag{2}$$

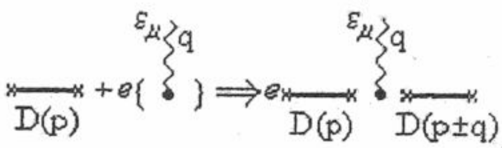

Рис. 1. Включение ЭМ поля в двухчастичную ФГ $D(p)$.

Процесс включения ЭМ поля в двухчастичную ФГ можно изобразить графически (рис.1). Следовательно, включение ЭМ поля в двухчастичную ФГ порождает трехчастичную ФГ, содержащую одну внешнюю линию, связанную с реальным фотоном, и две другие, соответствующие двухчастичными ФГ. Данная процедура является аналогом образования в квантовой теории поля трехточечной ФГ, где фотонная функция распространения редуцирована к волновой функции реального фотона. Сделав в (2) замену $\varepsilon_\mu \to q_\mu$, приходим к известному тождеству Уорда-Такахаши:

$$q_\mu(2p+q)_\mu = D^{-1}(p+q) - D^{-1}(p). \tag{3}$$

В случае частицы со спином $1/2$ однофотонная вставка в двухчастичную ФГ $S(p)$ осуществляется аналогично

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\mu} \{S(p+\lambda q)\} = -ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} S(p+\lambda q) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{S^{-1}(p+\lambda q)\right\} S(p+\lambda q). \tag{4}$$

Воспользовавшись явным видом пропагатора $S(p+\lambda q) = 1/(\hat{p} + \lambda\hat{q} - m + i0)$ и выполнив дифференцирование под интегралом в правой части (4) получим

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \{S(p+\lambda q)\} = -ze\varepsilon_\mu \int_0^1 d\lambda \frac{(\hat{p} + \lambda q + m)\gamma_\mu(\hat{p} + \lambda q + m)}{\left[(p+\lambda q)^2 - m^2 + i0\right]^2}. \tag{5}$$

Проведя тождественные преобразования в числителе подинтегральной функции правой части

$$(\hat{p} + \lambda q + m)\gamma_\mu(\hat{p} + \lambda q + m) = 2p_\mu(\hat{p} + m) - (p^2 - m^2)\gamma_\mu + 2\lambda(p_\mu \hat{q} - qp\gamma_\mu)$$

и вводя в знаменателе a и b аналогично (1), в правую часть выражения (5) приводится к виду

$$\int_0^1 d\lambda \frac{(\hat{p} + \lambda q + m)\gamma_\mu(\hat{p} + \lambda q + m)}{\left[(\hat{p} + \lambda q)^2 - m^2 + i0\right]^2} = \left\{ \begin{aligned} &\left[2p_\mu(\hat{p} + m) - b\gamma_\mu\right] \int_0^1 d\lambda \frac{1}{[\lambda a + (1-\lambda)b]^2} + \\ &+ 2\left(p_\mu \hat{k} - (qp)\gamma_\mu\right) \int_0^1 d\lambda \frac{\lambda}{[\lambda a + (1-\lambda)b]^2} \end{aligned} \right\}. \tag{6}$$

Вычисляя интегралы Фейнмана, правая часть выражение (6) примет вид

$$\frac{\left[2p_\mu(\hat{p} + m) - b\gamma_\mu\right]}{ab} + 2\left(p_\mu \hat{q} - (qp)\gamma_\mu\right)\left[\frac{1}{a(b-a)} + \frac{\ln|a/b|}{(b-a)^2}\right].$$

Учитывая, что $|a/b| \sim 1$, и $\ln\left|\frac{a}{b}\right| = \ln\left|1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)\right| \approx \frac{a-b}{b} + o\left(\frac{a-b}{b}\right)$, приходим к результату

$$\varepsilon_\mu \left\{\frac{\left[2p_\mu(\hat{p} + \hat{q} + m) - a\gamma_\mu\right]}{ab}\right\} = \frac{1}{(\hat{p} + \hat{q} - m + i0)}\left(\hat{\varepsilon} - \frac{\sigma_{\mu\nu}\varepsilon_\mu q_\nu}{2m}\right)\frac{1}{(\hat{p} - m + i0)} + \frac{1}{m}\frac{(\hat{p} + m)\left((\varepsilon p)\hat{q} - (pq)\hat{\varepsilon}\right)}{\left[(p+q)^2 - m^2 + i0\right]\left[p^2 - m^2 + i0\right]} =$$

$$= S(p+q)\left(\hat{\varepsilon} - \frac{\sigma_{\mu\nu}\varepsilon_\mu q_\nu}{2m}\right)S(p) + o(q).$$

Таким образом, включение ЭМ поля в двухчастичную функцию распространения частицы со спином $1/2$ приводит аналогично (2) к известной в квантовой электродинамике вершине взаимодействия ЭМ и заряженного спинорного полей:

$$ze\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu}\{S(p+\lambda q)\} \cong -zeS(p+q)\left(\hat{\varepsilon} - \frac{\sigma_{\mu\nu}\varepsilon_\mu q_\nu}{2m}\right)S(p).$$

Замена $\varepsilon_\mu \to q_\mu$, как и в случае (3) приводит к известному тождеству Уорда-Тахакаши $\hat{q} = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)$.

Рассмотренные выше случаи метода включения ЭМ поля в двухчастичные ФГ можно распространить на сильносвязную трехточечную вершинную ФГ $G(p, p_1, p_2)$ (рис. 2). Предполагая, что внешние концы двухчастичных ФГ усеченные, взаимодействие оставшейся вершины с ЭМ полем запишется в виде

$$e\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q_\mu}\{z_1 G(p+\lambda q, p_1 + \lambda q, p_2) + z_2 G(p+\lambda q, p_1, p_2 + \lambda q)\}, \tag{7}$$

где z_1 и z_2 величины зарядов частиц 1 и 2 соответственно ($z = z_1 + z_2$).

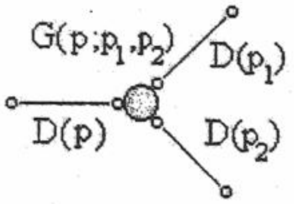

Рис. 2. Трехточечная вершинная функция $G(p; p_1, p_2)$.

Рассмотрим теперь включение ЭМ поля в полную сильносвязную трехточечную функкцию распространения (рис. 3).

Включение ЭМ поля в полную трехточечную ФГ в соответствии с квантовой теорией поля порождает четырехточечную ФГ, содержащую три одночастично приводимые части, связанные друг с другом "кроссингом" и одночастично-неприводимую часть, внешними линиями который являются точные пропагаторы взаимодействующих частиц. Математическая запись процесса включения ЭМ поля в сильносвязную трехточечную вершинную функцию в соответствии с вышеизложенной теорией релятивистского обощения метода фотонных вставок имеет вид

$$\begin{aligned}
&\{D(p)G(p, p_1, p_2)D(p_1)D(p_2)\} + \{e\varepsilon_\mu\} \Rightarrow \left\{-e\varepsilon_\mu z\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu} D(p+\lambda q)\right\} G(p+q, p_1, p_2)D(p_1)D(p_2) + \\
&\quad + D(p)G(p, p_1 - q, p_2)\left\{-e\varepsilon_\mu z_1 \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu} D(p_1 + (\lambda - 1)q)\right\} D(p_2) + \\
&\quad + D(p)G(p, p_1, p_2 - q)D(p_1)\left\{-e\varepsilon_\mu z_2 \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu} D(p_2 + (\lambda - 1)q)\right\} + \\
&\quad + D(p)\left\{-e\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\begin{bmatrix} z_1 G(p+\lambda q, p_1 + (\lambda-1)q, p_2) + \\ + z_2 G(p+\lambda q, p_1, p_2 + (\lambda - 1)q)\end{bmatrix}\right\} D(p_1)D(p_2).
\end{aligned} \tag{8}$$

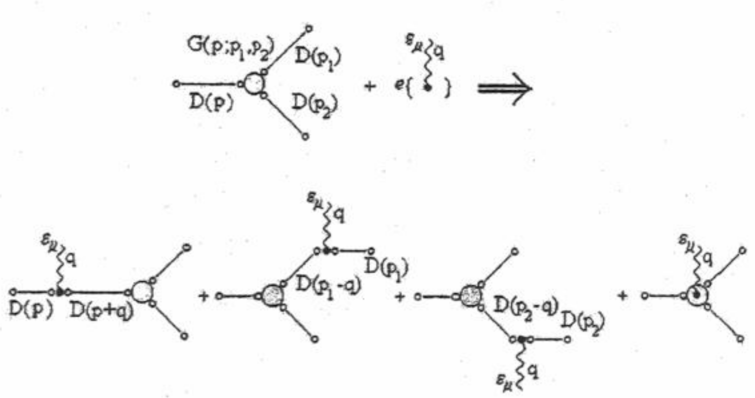

Рис. 3. Включение ЭМ поля в полную сильносвязную трехточечную вершинную функцию $G(p; p_1, p_2)$.

Убедимся в калибровочной инвариантности данного выражения. Производя в (8) замену $\varepsilon_\mu \to q_\mu$ и, вычисляя при этом интегралы, получим:

$$\begin{aligned}
&-ze[D(p+q) - D(p)]G(p+q, p_1, p_2)D(p_1)D(p_2) + \\
&D(p)G(p, p_1 - q, p_2)[-ez_1(D(p_1) - D(p_1 - q))]D(p_2) + \\
&D(p)G(p, p_1, p_2 - q)D(p_1)[-ez_2(D(p_2) - D(p_2 - q))] - \\
&ez_1 D(p)[G(p+q, p_1, p_2) - G(p, p_1 - q, p_2)]D(p_1)D(p_2) - \\
&ez_2 D(p)[G(p+q, p_1, p_2) - G(p, p_1, p_2 - q)]D(p_1)D(p_2).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись тождеством Уорда-Такахаши, полученным из (2) при замене $\varepsilon_\mu \to q_\mu$

$$eq_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\{D(p+\lambda q)\} = e[D(p+q) - D(p)] =$$
$$= -eD(p+q)\{2(pq)\}D(p),$$

и редуцируя внешние двухчастичные функции распространения соответствующими волновыми функциям свободных частиц, находящихся на массовой оболочке ($p_i^2 = m_i^2$), которые для скалярных полей равны единице в принятой нами нормировке, и с учетом $D(p \pm q) = 1/[(p \pm q)^2 - m^2] = \pm 1/2pq$, получаем вклад данного ряда фейнмановских диаграмм в матричный элемент $S-$ матрицы:

$$\begin{aligned}
&ezG(p+q, p_1, p_2) - ez_1 G(p, p_1 - q, p_2) - ez_2 G(p, p_1, p_2 - q) - \\
&- e(z_1 + z_2)G(p+q, p_1, p_2) + ez_1 G(p, p_1 - q, p_2) + ez_2 G(p, p_1, p_2 - q) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, выражение (8) градиентно инвариантно. Таким образом, не используя явный вид вершинной функции $G(p, p_1, p_2)$, описывающей развал составной сильносвязанной системы на составляющие, а зная лишь её зависимость от динамических переменных в силу общих требований ковариантности и законов сохранения, представляется возможным удовлетворить требованию сохранения полного ЭМ ядерного тока.

Используя развитый метод при исследовании ядерных реакций процессов фоторасщепления атомных ядер, возникает проблема записи явного вида вершинной функции $G(p, p_1, p_2)$, описывающей релятивистское связанное состояние с последующим ее развалом на составляющие. Полное описание данной проблемы связано с решением релятивистского уравнения Бете-Солпитера. Даже для такой слабосвязанной ядерной системы как дейтрон, описание релятивистского связанного состояния посредством уравнения Бете-Солпитера сопряжено со значительными трудностями. Поэтому в настоящее время используются подходы, основанные на приближенных методах, являющихся решениями приближенных уравнений Бете-Солпитера, таких как уравнения Логунова-Тавхелидзе, Кадышевского-Вайнберга, Гросса и др. Решения этих уравнений, в каждом конкретном приближении позволяют записать вершинную функцию $G(p, p_1, p_2)$, не нарушая при этом ковариантности и градиентной инвариантности полной амплитуды (8). Остановимся на этом подробнее. Как известно, решения перечисленных приближенных уравнений, сводится к проектированию ковариантного уравнения Бете-Солпитера на пространственно-подобную гиперповерхность, с целью придания полученным решениям вероятностной интерпретации, что означает зависимость вершинной функции $G(p, p_1, p_2)$ от квадрата трехмерного относительного импульса $G(\vec{p}^{\,2})$. Таким образом, используя выражение (8) и конкретное выражение вершинной функции, полученное из приближенных решений уравнений Бете-Солпитера, сохранить ковариантность и градиентно-инвариантную запись матричного элемента процессов фоторасщепления ядер, можно лишь в том случае, если будет установлена связь трехмерного относительного импульса с 4 – векторами, входящими в общую запись зависимости вершинной функции, т.е. $G(p, p_1, p_2) \to G(\vec{p}^{\,2})$. В связи с этим, возникает необходимость установления связи между формальной зависимостью вершинной функции от ковариантных аргументов и трехмерным относительным импульсом образовавшихся в результате составляющих.

Для этого рассмотрим одну из возможностей реализации этой схемы на процессе развала покоящегося связанного состояния с полной энергией W (рис. 4).

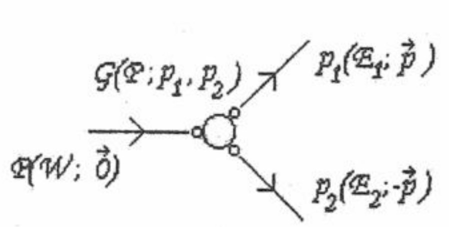

Рис. 4. Вершина "развала" возбужденного связанного состояния.

Введем пространственно подобный 4 – вектор K с пространственной частью равной трехмерному относительному вектору $\vec{p} : K = (0; \vec{p})$ или $\vec{p}^{\,2} = -K^2$. Связь 4 – вектора K с векторами $\mathcal{P}$, p_1, и p_2 вершины связанного состояния запишем следующим образом:

$$K = \frac{(Pp_2)}{P^2} p_1 - \frac{(Pp_1)}{P^2} p_2 .$$

Очевидно, что при таком выборе 4 – вектора $\mathcal{K}$ выполняется условие $(\mathcal{KP}) = 0$. Тогда $G(P; p_1, p_2) = G(-K^2) = G(\vec{p}^{\,2})$.

Следовательно, записывая матричный элемент на основе выражения (8) для каждой конкретной реакции фоторасщепления атомных ядер и используя выражения для сильносвязанной вершины из приближенных решений уравнения Бете-Солпитера удовлетворяются фундаментальные требования теоретической физики сохранения ковариантности и калибровочной инвариантности участвующих сильновзаимодействующих заряженных частиц.

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ФОТОРАСЩЕПЛЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

Проиллюстрируем предложенный подход построения калибровочно-инвариантной амплитуды, отвечающей развалу составной ядерной системы в реакциях фоторасщепеления, с целью изучения роли в экспериментально наблюдаемых характеристиках изучаемых процессов, эффектов точного сохранения полного ЭМ ядерного тока. Не ограничивая общности выводов предложенного подхода, рассмотрим процесс фоторасщепления скалярной составной частицы, с образованием в конечном состоянии двух скалярных состояний. Если начальное связанное состояние и образовавшиеся адроны конечного состояния будут иметь спин отличный от нуля, вся принципиальная сторона вычислений останется прежней. Меняется лишь конкретный вид вершин и пропагаторов. При этом окажется, что после усреднения по поляризациям адронов и фотона все выводы полученные ниже останутся справедливы и будут иметь общий характер для реальных процессов фоторасщеплений на легких атомных ядрах. Фейнмановские диаграммы, отвечающие данному процессу

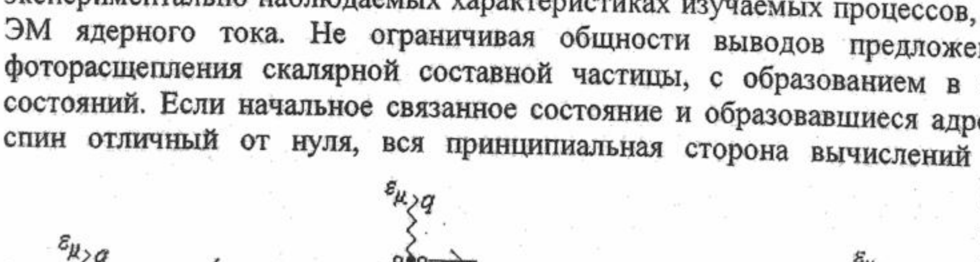

Рис. 5. Фейнмановские диаграммы обобщенного градиентно-инвариантного полюсного ряда фоторасщепления скалярной составной системы.

представим на рис. 5.

Матричный элемент данного процесса в соответствии с (14) запишется в виде $\mathcal{M} = \sum_{i=s,t,u,c} M_i$. Амплитуды, соответствующие $s-$, $t-$, $u-$ канальным и контактной диаграммам имеют вид:

$$M_s = ez\varepsilon_\mu \frac{(2p+q)_\mu}{s-M^2} G_s(p+q;p_1,p_2),\ M_t = ez_1\varepsilon_\mu G_t(p;p_1-q,p_2)\frac{(2p_1-q)_\mu}{t-m^2},\ M_u = ez_2\varepsilon_\mu G_u(p;p_1,p_2-q)\frac{(2p_2-q)_\mu}{u-m^2}.$$

$$M_c = e\varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\left\{z_1 G\left(p'-\lambda q;p_1-\lambda q,p_2\right)+z_2 G\left(p'-\lambda q;p_1,p_2-\lambda q\right)\right\}. \quad (9)$$

Здесь z, z_1, z_2 - заряды в единицах e, а p, p_1, p_2 - импульсы составной и образовавшихся частиц, соответственно; $p'=p+q$; M - масса составной частицы, m - массы образовавшихся частиц, которые для упрощения выкладок будем считать одинаковыми; $s=(p+q)^2$, $t=(p_1-q)^2$, $u=(p_2-q)^2$.

Для случая, когда вершинная функция, отвечающая развалу составной системы зависит лишь от квадрата относительного трехмерного импульса соответствующие им 4 – импульсы будут иметь вид

$$P_{(st)\alpha}(\lambda) = \frac{(p'-\lambda q)p_2}{(p'-\lambda q)^2}(p_1-\lambda q)_\alpha - \frac{(p'-\lambda q)(p_1-\lambda q)p_2}{(p'-\lambda q)^2}p_{2\alpha} = \frac{(p'-\lambda q)p_2}{(p'-\lambda q)^2}(p'-\lambda q)_\alpha - p_{2\alpha}, \quad (10)$$

$$P_{(su)\alpha}(\lambda) = \frac{(p'-\lambda q)(p_2-\lambda q)_2}{(p'-\lambda q)^2}p_{1\alpha} - \frac{(p'-\lambda q)p_1}{(p'-\lambda q)^2}(p_2-\lambda q)_\alpha = p_{1\alpha} - \frac{(p'-\lambda q)p_1}{(p'-\lambda q)^2}(p'-\lambda q)_\alpha.$$

После введения относительных 4 – импульсов, матричные элементы (9) перепишутся

$$M_s = e\frac{(\varepsilon p)}{(qp)}G(-P_{st}^2(\lambda=0)),\ M_t = -e_1\frac{(\varepsilon p_1)}{(qp_1)}G(-P_{st}^2(\lambda=1)),\ M_u = -e_2\frac{(\varepsilon p_2)}{(qp_2)}G(-P_{su}^2(\lambda=1)) \quad (11)$$

$$M_c = \varepsilon_\mu \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\left\{e_1 G\left\{-P_{(st)}^2(\lambda)\right\}+e_2 G\left\{-P_{(su)}^2(\lambda)\right\}\right\}.$$

Для выполнения дальнейших расчетов, учитывая их чисто иллюстративный характер, рассмотрим два варианта функциональной зависимости вершинной функции $G(\vec{p}^{\,2})$, являющихся решениями двух различных гипотетических квазипотенциальных уравнений, описывающих развал составной системы на составляющие:

$$G(\vec{p}^{\,2}) = \begin{cases} N_1 e^{-\delta p^2} & (I) \\ N_2 \dfrac{1}{\alpha_0^2+\vec{p}^{\,2}} & (II) \end{cases}, \quad (12)$$

где $\vec{p}$ - трехмерный относительный импульс конечной системы образовавшихся состояний, N_1 (N_2) - нормировочные множители, обеспечивающие вероятностную интерпретацию вершинной функции, а δ и α_0^2 - фиксированные параметры, обеспечивающие сходство $G(\vec{p}^{\,2})$ с реальным импульсным распределением вершинной функции в зависимости от кинематических условий изучаемого процесса.

Обратим внимани на то, что отличие функциональной зависимости (I) и (II) в (12) принципиально и вызвано следствием различной степени учета мезонного сектора, участвующего в формировании квазипотенциала гипотетического уравнения сильновзаимодействующей вершины. Полная амплитуда процесса содержит полюсную и регулярную части. Полюсные части определяются только абсолютным значением вершинной функции в каждой точке ее аргумента. А регулярная часть амплитуды определяется не только абсолютным значением вершинной функции, как это происходит в полюсных диаграммах, но и углом наклона касательной к кривой в каждой точке функции распределения, поскольку подинтегральное выражение содержит производную. С этой целью проведем дальнейшие исследования для двух выбранных нами функций распределения (12) с целью выявления роли распределения вклада полюсной и регулярной частей в полную амплитуду в каждой из введенных выше функций распределения в отдельности и перераспределения этих вкладов в полной амплитуде за счет их различия.

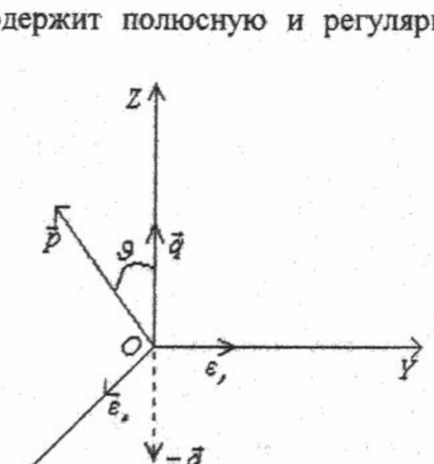

Рис.6. Положение импульсов в системе центра масс начальных частиц.

Для дальнейших фактических расчетов выберем систему центра масс начальных частиц, в которой импульс фотона $\vec{q}$ направлен вдоль оси OZ (рис 6). В данной системе отсчета лоренцевское условие $(\varepsilon q)=0$ эквивалентно выбору трехмерно-поперечной калибровки. Совместим координатную плоскость XOZ с плоскостью реакции. Тогда компоненты 4 – векторов, участвующих в реакции частиц будут имеют вид:

$q=(q_0;0,0,|\vec{q}|)$, $\varepsilon_x=(0;1,0,0)$, $\varepsilon_y=(0;0,1,0)$, $p=(E;0,0,-|\vec{q}|)$, $p_1=(\omega;|\vec{p}|\sin\vartheta,0,|\vec{p}|\cos\vartheta)$, $p_2=(\omega;-|\vec{p}|\sin\vartheta,0,-|\vec{p}|\cos\vartheta)$. Выполняя дифференцирование по q_μ в подинтегральном выражении (11) и учитывая, что в выбранной системе учета $(\varepsilon p)=0$, полный матричный элемент рассматриваемого процесса для функции распределения (12-I) будет иметь вид:

$$\mathcal{M}=\sqrt{4\pi\alpha}N_1\left\{z_1\left[(\varepsilon p_2)J_1-\frac{(\varepsilon p_1)}{(qp_1)}\Phi_t\right]+z_2\left[(\varepsilon p_2)J_2-\frac{(\varepsilon p_2)}{(qp_2)}\Phi_u\right]\right\}, \tag{13}$$

где $\alpha=e^2/4\pi$, $\Phi_t=\exp\{\delta P^2_{(st)}(\lambda=1)\}$, $\Phi_u=\exp\{\delta P^2_{(su)}(\lambda=1)\}$, а

$$J_1=2\delta\int_0^1 d\lambda\frac{(p'-\lambda q)p_2}{(p'-\lambda q)^2}\exp\{\delta P^2_{st}(\lambda)\},\ J_2=2\delta\int_0^1 d\lambda\frac{(p'-\lambda q)p_1}{(p'-\lambda q)^2}\exp\{\delta P^2_{su}(\lambda)\},$$

а для функции распределения (12-II)

$$\mathcal{M}=\sqrt{4\pi\alpha}N_2\left\{z_1\left[(\varepsilon p_2)J_1-\frac{(\varepsilon p_1)}{(qp_1)}\Phi_t\right]+z_2\left[(\varepsilon p_2)J_2-\frac{(\varepsilon p_2)}{(qp_2)}\Phi_u\right]\right\}, \tag{14}$$

где $\Phi_t=\dfrac{1}{\alpha_0^2-P^2_{(st)}(\lambda=1)}$, $\Phi_u=\dfrac{1}{\alpha_0^2-P^2_{(su)}(\lambda=1)}$, а

$$J_1=2\int_0^1 d\lambda\frac{(p'-\lambda q)p_2}{(p'-\lambda q)^2}\frac{1}{\left[\alpha_0^2-P^2_{st}(\lambda)\right]^2},\ J_2=2\int_0^1 d\lambda\frac{(p'-\lambda q)p_1}{(p'-\lambda q)^2}\frac{1}{\left[\alpha_0^2-P^2_{su}(\lambda)\right]^2}.$$

Дифференциальное и полное сечения фоторасщепления связанного состояния в системе центра масс начальных частиц определяется как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{ц.м.}}(E_\gamma^{л.c.},\vartheta)=\frac{1}{2}\frac{\overline{|\mathcal{M}|}^2}{(8\pi W)^2}\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|},\quad \sigma(E_\gamma^{л.c.})=2\pi\int_{-1}^{1}dx\frac{d\sigma}{d\Omega_{ц.м.}}(E_\gamma^{л.c.},\vartheta),$$

где множитель $1/2$ отражает наличие в конечном состоянии двух тождественных адронов; $\overline{|\mathcal{M}|}^2=\frac{1}{2}|\mathcal{M}|^2$ - квадрат матричного элемента (13) или (14) просуммированный по спинам конечных частиц и усредненный по спинам начальных частиц; $W=\sqrt{s}$; $x=\cos\vartheta$.

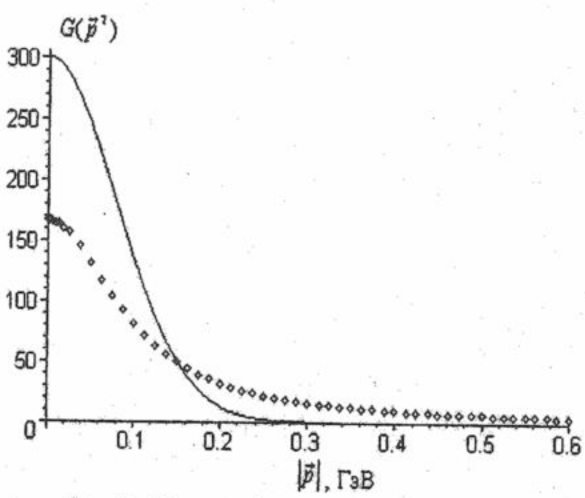

Рис.7. Модели функций импульсного распределения (12).

Возьмем значения параметров функции распределения (12) $\delta=80$ ГэВ$^{-2}$, $\alpha_0^2=0{,}0094$ ГэВ^2, исходя из соображений соответствия их реальным импульсным распределениям малонуклонных связанных состояний, а нормировочные коэффициенты положим $N_1=300$ и $N_2=1{,}56$ исходя из условия нормировки функции распределения $\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}G\ (\vec{p}^2)=1$.

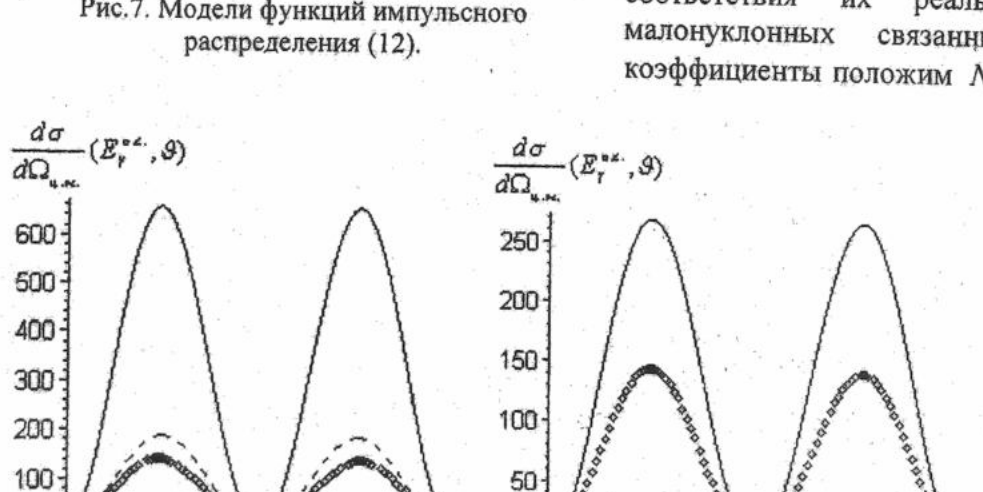

Рис.8. Угловые зависимости дифференциальных сечений при фотона 42 МэВ в условных единицах измерения. Левый рисунок соответствует вершинной функции (12-I), правый - (12-II). Сплошные кривые - расчет сечения с полным матричным элементом (13) и (14), соответственно. Точечные кривые - расчет с учетом лишь t и u полюсов. Пунктирные кривые - расчет сечения только с контактной диаграммой.

На рис. 7 показана зависимость функций распределений в интервале импульсов от 0 до 0,6 ГэВ, где сплошная линия соответствует функции (12-I), а точечная - (12-II). Величина $G(\vec{p}^2)$ изображена в условных единицах, не имеющих принципиального значения для последующих расчетов. Эти распределения отличаются "жесткостью" как при малых импульсах, так и поведением в высокоимпульсной области.

Обратим внимание, что при

импульсе порядка 0,15 ГэВ функции равны, но имеют разный угол наклона касательной к кривым. Это значение относи-тельного импульса образовавшейся системы соответствует энергии налетающего фотона в лабора-торной системе мишени $E_\gamma^{л.с.} = 42$ МэВ. Для выявления роли контактной диаграммы в амплитуде процесса выполним расчет при этой энергии фотона угловых дифференциальных сечений $d\sigma(E_\gamma^{л.с.}, \vartheta)/d\Omega_{ц.м.}$ функций распределения. Из рис. 8 видно, что значения точечных кривых при $E_\gamma^{л.с.} = 42$ МэВ в условных единицах измерения (в последующем рисунке так же как и на рис.8 сечения приведены в условных единицах), как и следовало ожидать, одинаковы. Абсолютная величина вклада контактной диаграммы (пунктирная кривая) в полное сечение для первой функции распределения (12) составлят 28% от величины полного сечения, а абсолютная величина вклада полюсной части (точечная кривая) - составлят 23% от величины полного сечения. А для второй функции распределения (12) соответствующие вклады составляют 7% и 52%. Величина вклада регулярной части (пунктирные кривые), несмотря на равенство в этой точке абсолютных значений вершинных функций (рис. 7) различна. Этот факт является следствием различия значений производных от вершинных функций в точке $E_\gamma^{л.с.} = 42$ МэВ, которое объясняет и различное значение дифференциальных сечений, рассчитанных на основе полной амплитуды (сплошные кривые).

Следует отметить, что значения сечений от калибровочно-неинвариантных частей полной амплитуды (точечные и пунктирные кривые) не имеют абсолютного смысла, т.к. их величина зависит от выбора калибровки, в то время как величина полного сечения являет,ся инвариантом по отношению к калибровочным преобразованиям.

Проведем расчет энергетической зависимости при угле вылета конечной частицы равном 45°. Как видно из рис. 9, вклад контактной диаграммы для вершинной функции (12-I) начиная с энергии 40 МэВ в энергетический спектр является определяющим. Для вершинной же функции (12-II) определяющим вкладом в сечение является полюсная часть амплитуды. Эта тенденция постоянства соотношения вкладов контактной и полюсной частей полной амплитуды второй функции импульсного распределения остается неизменной на всем рассмотренном интервале энергий.

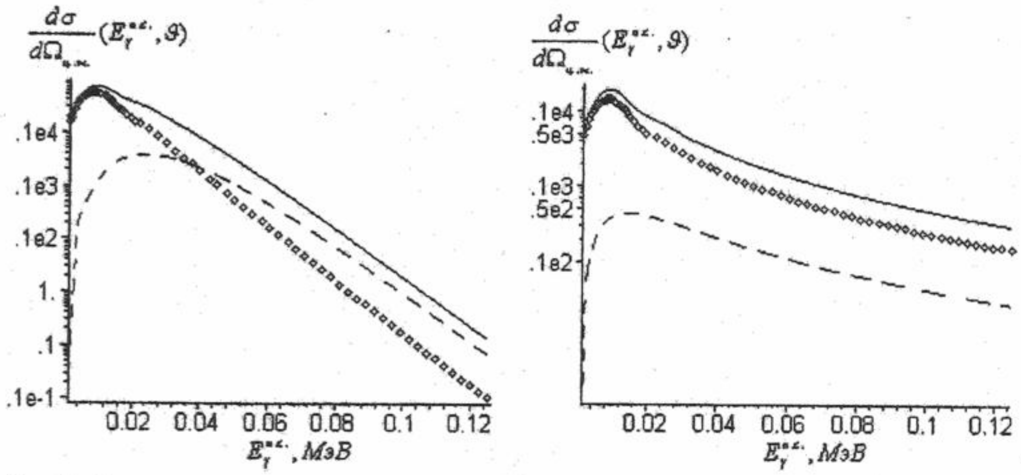

Рис.9. Энергетические зависимости дифференциальных сечений при угле вылета образовавшейся частицы $\vartheta = 45°$. Тип кривых как и на рис. 8.

Из проведенного анализа двух различных решений квазипотенциального уравнения Бете-Солпитера, наблюдается сильная чувствительность к выбору вершинной функции как в полной амплитуде, так и в соотношении отдельных вкладов полюсной и регулярной частей, увязанных между собой фундаментальным требованием калибровочной инвариантности.

Вполне естественно возникает вопрос, а будет ли наблюдаться такая же чувствительность сечения к выбору другого, но уже не пространственно-подобного, относительного 4 – импульса, являющегося решением какого-либо иного гипотетического приближенного уравнения Бете-Солпитера, при условии сохранения той же функциональной зависимости вершинных функций. С этой целью определим относительные 4 – импульсы таким образом:

$$P_{(st)\alpha}(\lambda) = P_{(s)\alpha} - \lambda \frac{(p'p_2)}{p'^2} q_\alpha , \quad P_{(su)\alpha}(\lambda) = P_{(s)\alpha} + \lambda \frac{(p'p_1)}{p'^2} q_\alpha \quad . \tag{15}$$

При таком их выборе, независимо от явного вида вершинной функции $G(-P^2)$, подинтегральное выражение (11) образует полный дифференциал, что дает возможность вычислить интеграл контактной части амплитуды аналитически. Матричный элемент в этом случае будет иметь вид

$$\mathcal{M} = e\left\{ z\frac{(\varepsilon p)}{(qp)} G(-P_s^2) - z_1\frac{(\varepsilon p_1)}{(qp_1)} G(-P_t^2) - z_2\frac{(\varepsilon p_2)}{(qp_2)} G(-P_u^2) + \frac{(\varepsilon P_s)}{(qP_s)}\left[z_1 G(-P_t^2) + z_2 G(-P_u^2) - z G(-P_s^2) \right] \right\} . \tag{16}$$

В данной фороумле для матричного элемента, преднамеренно оставлена лоренцовская калибровка записи, с целью наглядности проверки его калибровочной инвариантности. Наличие в знаменателе контактной части множителя (qP_s), на первый взгляд приводит к сингулярности данного выражения, поскольку скалярное произведение $(qP_s) = -|\vec{q}||\vec{P}|\cos\vartheta$ при $\vartheta = 90°$ обращается в нуль. Но записав числитель в виде

$z_1G\left(-P_s^2+2\frac{(p'p_2)}{p'^2}(qP_s)\right)+z_2G\left(-P_s^2-2\frac{(p'p_1)}{p'^2}(qP_s)\right)-zG(-P_s^2)$, и разложив вершинные функции в ряд Тейлора $2\left[z_1(p'p_2)-z_2(p'p_1)\right]\frac{(qP_s)}{p'^2}\frac{\partial G}{\partial(-P_s^2)}$, сингулярность (qP_s) устраняется, что свидетельствует о регулярном характере контактного вклада амплитуды.

Следует отметить, что матричный элемент (16) можно переписать в терминах тензора ЭМ поля $F_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu q_\nu-\varepsilon_\nu q_\mu$:

$$\mathcal{M}=e\frac{F_{\mu\nu}P_{(s)\nu}}{(qP_s)}\left\{z\frac{p_\mu}{(qp)}G(-P_s^2)-z_1\frac{p_{1\mu}}{(qp_1)}G(-P_t^2)-z_2\frac{p_{2\mu}}{(qp_2)}G(-P_u^2)\right\}. \quad (17)$$

Маричный элемент (16) можно представить в виде $\mathcal{M}=e\varepsilon_\mu\left\{M_\mu^{(Pol)}+M_\mu^{(\mathrm{Reg})}\right\}$, а (17) - в виде $\mathcal{M}=e\widetilde{\varepsilon}_\mu\left\{M_\mu^{(Pol)}\right\}$, где $\widetilde{\varepsilon}_\mu=\frac{F_{\mu\nu}P_{s(\nu)}}{(qP_s)}=\varepsilon_\mu-\frac{(\varepsilon P_s)}{(qP_s)}q_\mu$. Из последнего выражения видно, что калибровочное преобразование $\varepsilon_\mu\to\varepsilon_\mu+\eta q_\mu$ оставляет неизменным $\widetilde{\varepsilon}_\mu$. Отличие двух форм записи матричного элемента связано некоторым фиксированным динамическим калибровочным преобразованием, где параметр преобразования η является функцией от динамической переменной $P_s:\eta=\eta(P_s)=-(\varepsilon P_s)/(qP_s)$. Расчеты сечений на основе матричного элемента (16) с относительными $4-$импульсами (15) приводят к практически одинаковым результатам в сравнении с соответствующими расчетами с $4-$импульсами (10). Различие и в угловых, и в энергетических спектрах не превышает 4% на всем диапазоне рассматриваемых энергий.

ВЫВОДЫ

Развит подход для описания процессов фоторасщепления легчайших атомных ядер, в котором в полной амплитуде процесса совмещены фундаментальные требования ковариантности и градиентной инвариантности с одной стороны, и учет внутренней структуры составной системы с другой.

Одним из достоинств развитого подхода является точное сохранение ЭМ ядерного тока независимо от явного вида вершинной функции составной системы. Это позволяет в качестве вершины использовать как точное решение уравнения Бете-Солпитера, так и варианты решений квазипотенциальных уравнений. Конкретными вычислениями установлено, что наблюдается сильная чувствительность к использованию в качестве вершинной функции разных ее вариантов, с разной степенью учета мезонного сектора, влияющего на вид решений квазипотенциальных уравнений.

Показано, что выбор относительного импульса, от которого зависит вершинная функция слабо влияет на вычисляемые характеристики изучаемого процесса, что позволяет при определенном выборе его вида, получить аналитическое выражение для регулярной части полной амплитуды. Регулярная часть амплитуды может быть получена из полюсной ее части путем фиксированного динамического калибровочного преобразования, зависящего от относительного импульса образовавшейся конечной адронной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Львов А.И.// ВАНТ. Сер.: Общая и ядерная физика. 1986. Вып. 2(35). С.53
2. Касаткин Ю.А., Кириченко И.К., Солдатов С.А. // Вісник Харківського університету, серія фізична "Ядра, частинки, поля". - 2000. - 469, вып.1(9). - С.7-11.

THE FIELD-THEORY DESCRIPTION PHOTODISINTEGRATION OF FWE-BODY SYSTEMS

Yu.A. Kasatkin, I.K. Kirichenko*, A.P. Korzh**
National Science Center, Kharkov Institute of Physics & Technology,
Institute for Theoretical Physics,
61108, Ukraine, Kharkov, Academic 1,
**Ukraine Engineer-Pedagogical Academy,*
61003, Ukraine, Kharkov, street. University 16,
***Kharkov State Academy of Technology and Food Management,*
61127, Ukraine, Kharkov, street. Klochkovskaya 133

The approach for photodisintegration lightest atomic nuclei is advanced. In amplitude the requirements covariance and gauge of invariance are combined in view of internal structure of compound system. The researches of the relative contributions pole and regular parts of amplitude of cross-section of process are spent.

KEY WORDS: gauge invariance, coupled systems, amplitude, covariance.

УДК 539.12

SEMIGROUPS OF SUPERMATRICES AND ONE-PARAMETER IDEMPOTENT SUPEROPERATORS

Steven Duplij

Department of Physics and Technology, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. *Internet:* http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij

Received January 10, 2001

Supermatrix semigroups and their different reductions are introduced and investigated. One-parameter semigroups of antitriangle idempotent supermatrices and corresponding superoperator semigroups are defined and their features are studied. It is shown that t-linear idempotent superoperators and the usual exponential superoperators are mutually dual in some sense. The first one gives an additional (odd) solution (to the standard exponential operator) of the initial Cauchy problem. The corresponding functional equation and an analog of resolvent are found. Differential and functional equations for idempotent (super)operators are derived for their general t power-type dependence.

KEYWORDS : supermatrix, reduction, one-parameter semigroup, idempotent, Cauchy problem, resolvent

Supermatrix groups [1, 2, 3] play indispensable role in modern supersymmetric models construction [4, 5, 6]. Further mathematical development [7] needs thorough consideration of their inner properties and include noninvertibility in a strong way [8, 9], i.e. by exploiting of the semigroup theory methods [10, 11, 12]. Usually matrix semigroups are defined over the field $\mathbb{K}$ [13] (on some nonsupersymmetric generalizations of $\mathbb{K}$-representations see [14, 15]). But modern realistic supersymmetric unified particle theories [16] are considered in superspace [17, 18]. So all variables and functions are defined not over the field $\mathbb{K}$, but over Grassmann-Banach superalgebras over $\mathbb{K}$ [19, 20, 21], they become in general noninvertible and therefore they should be considered by the semigroup theory, which was claimed in [22, 23]. Some new semigroups having nontrivial abstract properties were found in [24]. Also, it was shown that supermatrices of the special (antitriangle) shape can form various strange and sandwich semigroups not known before [25, 8].

From another side operator semigroups [26] are very much important in mathematical physics [27, 28, 29] viewed as a general theory of evolution systems [30, 31, 32]. Its development covers many new fields [33, 34, 35, 36], but one of vital for modern theoretical physics directions — supersymmetry and related mathematical structures [37, 38]— was not considered before in application to the general operator semigroup theory. The main difference between previous considerations is the fact that among building blocks (e.g. elements of corresponding matrices) there exist noninvertible objects (divisors of zero and nilpotents) which by themselves can form another semigroup. Therefore, we have to take into account this fact and investigate properly such a possibility as well, which can be called a $semigroup \times semigroup$ method.

Here we study continuous supermatrix representations of idempotent operator semigroups previously introduced for bands in [25, 39], then consider one-parametric semigroups (for general theory see [27, 30, 40]) of antitriangle supermatrices and corresponding superoperator semigroups [41]. The first ones continuously represent idempotent semigroups and second ones lead to new superoperator semigroups with nontrivial properties.

Let Λ be a commutative $\mathbb{Z}_2$-graded superalgebra [1] over a field $\mathbb{K}$ (where $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}_p$) with a decomposition into the direct sum: $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$. The elements a from Λ_0 and Λ_1 are homogeneous and have the fixed even and odd parity defined as $|a| \stackrel{def}{=} \{i \in \{0,1\} = \mathbb{Z}_2 | \, a \in \Lambda_i\}$. The even homomorphism $\mathfrak{m}_b : \Lambda \to \mathbb{B}$ is called a *body map* and the odd homomorphism $\mathfrak{m}_s : \Lambda \to \mathbb{S}$ is called a *soul map* [42], where $\mathbb{B}$ and $\mathbb{S}$ are purely even and odd algebras over $\mathbb{K}$ and $\Lambda = \mathbb{B} \oplus \mathbb{S}$. It can be thought that, if we have the Grassmann algebra Λ with generators $\xi_i, \ldots, \xi_n$ $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$, $1 \le i, j \le n$, in particular $\xi_i^2 = 0$ (n can be infinite, and only this case is nontrivial [43, 44] and interesting [45]), then any even x and odd $\varkappa$ elements have the expansions (which can be infinite)

$$x = x_{body} + x_{soul} = x_{body} + y_{12}\xi_1\xi_2 + y_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots = x_{body} + \sum_{1\le r\le n} \sum_{1<i_1<\ldots<i_{2r}\le n} y_{i_1\ldots i_{2r}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2r}} \quad (1)$$

$$\varkappa = \varkappa_{soul} = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \ldots + y_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + \ldots = \sum_{1\le r\le n} \sum_{1<i_1<\ldots<i_r\le n} y_{i_1\ldots i_{2r-1}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2r-1}} \quad (2)$$

where $y_{i_1\ldots i_r} \in \mathbb{K}$. So we obviously have $\mathfrak{m}_b(x) = x_{body}$, $\mathfrak{m}_b(\varkappa) = 0$ and $\mathfrak{m}_s(x) = x_{soul}$, $\mathfrak{m}_s(\varkappa) = \varkappa_{soul}$.

From (1)-(2) it follows

Corollary 1. The equations $x^2 = 0$ and $x\varkappa = 0$ have nonzero nontrivial solutions (zero divisors and even nilpotents, while odd objects are always nilpotent).

Conjecture 2. *If zero divisors and nilpotents will be included in the following analysis as elements of matrices, then one can find new and unusual properties of corresponding matrix semigroups.*

From this viewpoint we consider general properties of supermatrices [1] and introduce their additional reduction [25].

IDEAL STRUCTURE OF $(1+1)\times(1+1)$-SUPERMATRICES

Let us consider $(p|q)$-dimensional linear model superspace $\Lambda^{p|q}$ over Λ (in the sense of [1, 2]) as the even sector of the direct product $\Lambda^{p|q} = \Lambda_0^p \times \Lambda_1^q$ [42, 21]. The even morphisms $\mathrm{Hom}_0\left(\Lambda^{p|q}, \Lambda^{m|n}\right)$ between superlinear spaces $\Lambda^{p|q} \to \Lambda^{m|n}$ are described by means of $(m+n)\times(p+q)$-supermatrices [1, 2] (for some nontrivial properties see [46, 47]). In what follows we will treat noninvertible morphisms [48, 49] on a par with invertible ones [25].

We consider $(1+1)\times(1+1)$-supermatrices[1] describing the elements from $\mathrm{Hom}_0\left(\Lambda^{1|1}, \Lambda^{1|1}\right)$ in the standard $\Lambda^{1|1}$ basis [1]

$$M \equiv \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_\Lambda(1|1), \tag{3}$$

where $a, b \in \Lambda_0$, $\alpha, \beta \in \Lambda_1$, $\alpha^2 = \beta^2 = 0$ (in the following we use Latin letters for elements from Λ_0 and Greek letters for ones from Λ_1, and all odd elements are nilpotent of index 2).

The supertrace and Berezinian (superdeterminant) are defined by [1]

$$\mathrm{str} M = a - b, \tag{4}$$

$$\mathrm{Ber} M = \frac{a}{b} + \frac{\beta\alpha}{b^2}. \tag{5}$$

Observe that first term corresponds to triangle supermatrices, second term - to antitriangle ones (which we use below).

For sets of matrices we use corresponding bold symbols, e.g. $\mathbf{M} \stackrel{def}{=} \{M \in \mathrm{Mat}_\Lambda(1|1)\}$, and the set product is standard $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N} \stackrel{def}{=} \{\cup MN \,|\, M, N \in \mathrm{Mat}_\Lambda(1|1)\}$. Denote a set of invertible elements of $\mathbf{M}$ by $\mathbf{M}^*$, and $\mathbf{I} = \mathbf{M}\setminus\mathbf{M}^*$. In [1] it was proved that $\mathbf{M}^* = \{M \in \mathbf{M} |\, \mathfrak{m}_b(a) \neq 0 \wedge \mathfrak{m}_b(b) \neq 0\}$. Consider the invertibility structure of $\mathrm{Mat}_\Lambda(1|1)$ in more detail. Let us denote

$$\begin{array}{ll} \mathbf{M}' = \{M \in \mathbf{M} |\, \mathfrak{m}_b(a) \neq 0\}, & \mathbf{I}' = \{M \in \mathbf{M} |\, \mathfrak{m}_b(a) = 0\}, \\ \mathbf{M}'' = \{M \in \mathbf{M} |\, \mathfrak{m}_b(b) \neq 0\}, & \mathbf{I}'' = \{M \in \mathbf{M} |\, \mathfrak{m}_b(b) = 0\}. \end{array} \tag{6}$$

Then $\mathbf{M} = \mathbf{M}' \cup \mathbf{I}' = \mathbf{M}'' \cup \mathbf{I}''$ and $\mathbf{M}' \cap \mathbf{I}' = \varnothing$, $\mathbf{M}'' \cap \mathbf{I}'' = \varnothing$, therefore $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}' \cap \mathbf{M}''$. The Berezinian $\mathrm{Ber}\, M$ is well-defined for the supermatrices from $\mathbf{M}''$ only and is invertible when $M \in \mathbf{M}^*$, but for the supermatrices from $\mathbf{M}'$ the inverse $(\mathrm{Ber}\, M)^{-1}$ is well-defined and is invertible when $M \in \mathbf{M}^*$ too [1].

Under the ordinary supermatrix multiplication the set $\mathbf{M}$ is a semigroup of all $(1|1)$ supermatrices [50], and the set $\mathbf{M}^*$ is a subgroup of $\mathbf{M}$. In the standard basis $\mathbf{M}^*$ represents the general linear group $GL_\Lambda(1|1)$ [1]. A subset $\mathbf{I} \subset \mathbf{M}$ is an ideal of the semigroup $\mathbf{M}$ [51].

Proposition 3. *1) The sets* $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}'$ *and* $\mathbf{I}'$ *are isolated ideals of* $\mathbf{M}$.

2) The sets $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}'$ *and* $\mathbf{M}''$ *are filters of the semigroup* $\mathbf{M}$.

3) The sets $\mathbf{M}'$ *and* $\mathbf{M}''$ *are subsemigroups*[2] *of* $\mathbf{M}$, *which are* $\mathbf{M}' = \mathbf{M}^* \cup \mathbf{J}'$ *and* $\mathbf{M}'' = \mathbf{M}^* \cup \mathbf{J}''$ *with the isolated ideals* $\mathbf{J}' = \mathbf{M}'\setminus\mathbf{M}^* = \mathbf{M}' \cap \mathbf{I}''$ *and* $\mathbf{J}'' = \mathbf{M}''\setminus\mathbf{M}^* = \mathbf{M}'' \cap \mathbf{I}'$ *respectively.*

4) The ideal of the semigroup $\mathbf{M}$ *is* $\mathbf{I} = \mathbf{I}' \cup \mathbf{J}' = \mathbf{I}'' \cup \mathbf{J}''$.

Proof. Let $M_3 = M_1 M_2$, then $a_3 = a_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2$ and $b_3 = b_1 b_2 + \beta_1 \alpha_2$. Taking the body part we derive $\mathfrak{m}_b(a_3) = \mathfrak{m}_b(a_1)\,\mathfrak{m}_b(a_2)$, and $\mathfrak{m}_b(b_3) = \mathfrak{m}_b(b_1)\,\mathfrak{m}_b(b_2)$. Then use the definitions. □

TWO TYPES OF SUPERMATRIX REDUCTION

From (5) we obviously have different **two dual types** of supermatrices [25].

Definition 4. *Even-reduced supermatrices* are elements from $\mathrm{Mat}_\Lambda(1|1)$ of the form

$$M_{even} \equiv \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{RMat}_\Lambda^{even}(1|1) \subset \mathrm{Mat}_\Lambda(1|1). \tag{7}$$

Odd-reduced supermatrices are elements from $\mathrm{Mat}_\Lambda(1|1)$ of the form

$$M_{odd} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \in \mathrm{RMat}_\Lambda^{odd}(1|1) \subset \mathrm{Mat}_\Lambda(1|1). \tag{8}$$

---

[1] Sometimes we restrict ourselves to this simple case for clearness taking into account that the most of properties and conclusions hold valid for general block $(p+q)\times(p+q)$-supermatrices as well.

[2] But not subgroups as it was incorrectly translated in the English edition [1], see pp. 95, 103, which correspond to the original Russian edition, Moscow, MGU, 1983, pp. 89, 93, where the sets $\mathbf{M}'$ and $\mathbf{M}''$ denoted as $G'Mat(1,1|\Lambda)$ and $G''Mat(1,1|\Lambda)$ are correctly called semigroups. This can partially explain the fact, why semigroups were not intensively developed in supermathematics before, while in ordinary mathematics this question was answered positively [52] (see also for numerous applications the references in [26, 51, 53, 11, 27, 13, 30] and even in [54]).

Conjecture 5. *The odd-reduced supermatrices have a nilpotent (but nonvanishing in general case) Berezinian*

$$\mathrm{Ber} M_{odd} = \frac{\beta\alpha}{b^2} \neq 0, \quad (\mathrm{Ber} M_{odd})^2 = 0. \tag{9}$$

REMARK. Indeed this property (9) prevented one in the past from the use of this type (odd-reduced) of supermatrices in physics. All previous applications (excluding [25, 39, 55, 9]) were connected with triangle (even-reduced, similar to Borel [56]) ones and first term in Berezinian $\mathrm{Ber} M_{even} = \frac{a}{b}$ (5).

The even- and odd-reduced supermatrices are *mutually dual* in the sense of the Berezinian addition formula [25]

$$\mathrm{Ber} M = \mathrm{Ber} M_{even} + \mathrm{Ber} M_{odd}. \tag{10}$$

Obviously, the even-reduced matrices M_{even} form a semigroup $\mathfrak{M}_{even}(1|1)$ which is a subsemigroup of $\mathfrak{M}(1|1)$, because of $\mathrm{M}_{even} \cdot \mathrm{M}_{even} \subseteq \mathrm{M}_{even}$ and the unity is in $\mathfrak{M}_{even}(1|1)$. This trivial observation leads to general structure (Borel) theory of ordinary matrices [56]: triangle matrices form corresponding substructures, subgroups and subsemigroups (see for general theory e.g. [57]). It was believed before that in case of supermatrices this situation should not be changed, because supermatrix multiplication is the same [1]. But they did not take into account *zero divisors and nilpotents* appearing naturally and inevitably in supercase [9].

Conjecture 6. *Standard (lower or upper) triangle supermatrices are not the only substructures due to unusual properties of zero divisors and nilpotents appearing among elements (see (1)-(2) and* **Corollary 1***).*

It means that in such consideration we have additional (to triangle) class of subsemigroups. Then we can formulate the following general

Problem 1. For a given n, m, p, q to describe and classify **all** possible substructures (subgroups and **subsemigroups**) of $(m+n) \times (p+q)$-supermatrices.

An example of such new substructures are Γ-matrices considered below.

Conjecture 7. *These new substructures lead to corresponding* **new superoperators** *which are represented by one-parameter substructures of supermatrices.*

We first consider possible (not triangle) subsemigroups of supermatrices.

ODD-REDUCED SUPERMATRIX SEMIGROUPS

In general, the odd-reduced matrices M_{odd} do not form a semigroup, since their multiplication is not closed in general $\mathrm{M}_{odd} \cdot \mathrm{M}_{odd} \subset \mathrm{M}$. Nevertheless, some subset of M_{odd} *can form* a semigroup [25]. That can happen due to the existence of zero divisors in Λ, and so we have $\mathrm{M}_{odd} \cdot \mathrm{M}_{odd} \cap \mathrm{M}_{odd} = \mathrm{M}_{odd}^{smg} \neq \varnothing$.

To find M_{odd}^{smg} we consider a $(1+1) \times (1+1)$ example. Let $\alpha, \beta \in \Gamma_{set}$, where $\Gamma_{set} \subset \Lambda_1$. We denote $\mathrm{Ann}\,\alpha \stackrel{def}{=} \{\gamma \in \Lambda_1 \mid \gamma \cdot \alpha = 0\}$ and $\mathrm{Ann}\,\Gamma_{set} = \bigcap_{\alpha} \in \Gamma \ \ \mathrm{Ann}\,\alpha$ (here the intersection is crucial). Then we define *left* and *right* Γ-*matrices*

$$\mathrm{M}_{odd(L)}^{\Gamma} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{set} \\ \mathrm{Ann}\,\Gamma_{set} & b \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{odd(R)}^{\Gamma} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Ann}\,\Gamma_{set} \\ \Gamma_{set} & b \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Proposition 8. *The Γ-matrices $\mathrm{M}_{odd(L,R)}^{\Gamma} \subset \mathrm{M}_{odd}$ form subsemigroups of $\mathfrak{M}(1|1)$ under the standard supermatrix multiplication, if $b\Gamma \subseteq \Gamma$.*

Definition 9. Γ-*semigroups* $\mathfrak{M}_{odd(L,R)}^{\Gamma}(1|1)$ are subsemigroups of $\mathfrak{M}(1|1)$ formed by the Γ-matrices $\mathrm{M}_{odd(L,R)}^{\Gamma}$ under supermatrix multiplication.

Corollary 10. The Γ-matrices are additional to triangle substructures of supermatrices which form semigroups.

Let us consider general square antitriangle $(p+q) \times (p+q)$-supermatrices (having even parity in notations of [1]) of the form

$$M_{odd}^{p|q} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0_{p\times p} & \Gamma_{p\times q} \\ \Delta_{q\times p} & B_{q\times q} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

where ordinary matrix $B_{q\times q}$ consists of even elements and matrices $\Gamma_{p\times q}$ and $\Delta_{q\times p}$ consist of odd elements [1, 2] (we drop their indices below). The Berezinian of $M_{odd}^{p|q}$ can be obtained from the general formula by reduction and in case of invertible B (which is implied here) is (cf. (9))

$$\mathrm{Ber}\, M_{odd}^{p|q} = -\frac{\det\left(\Gamma B^{-1} \Delta\right)}{\det B}. \tag{13}$$

Assertion 11. *A set of supermatrices $\mathrm{M}_{odd}^{p|q}$ form a semigroup $\mathfrak{M}_{odd}^{\Gamma}(p|q)$ of $\Gamma^{p|q}$-matrices, if $\Gamma_{set}\Delta_{set} = 0$, i.e. antidiagonal matrices are orthogonal, and $\Gamma_{set}\mathrm{B} \subset \Gamma_{set}$, $\mathrm{B}\Delta_{set} \subset \Delta_{set}$.*

Proof. Consider the product

$$M_{odd_1}^{p|q} M_{odd_2}^{p|q} = \begin{pmatrix} \Gamma_1\Delta_2 & \Gamma_1 B_2 \\ B_1\Delta_2 & B_1B_2 + \Delta_1\Gamma_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

and observe the condition of vanishing even-even block, which gives $\Gamma_1\Delta_2 = 0$, and others are obvious. □

From (14) it follows

Corollary 12. Two $\Gamma^{p|q}$-matrices satisfy the band relation $M_1M_2 = M_1$, iff

$$\Gamma_1 B_2 = \Gamma_1, \quad B_1\Delta_2 = \Delta_2, \quad B_1B_2 + \Delta_1\Gamma_2 = B_1. \tag{15}$$

Definition 13. We call a set of $\Gamma^{p|q}$-matrices satisfying additional condition $\Delta_{set}\Gamma_{set} = 0$, a set of *strong* $\Gamma^{p|q}$-matrices.

Strong $\Gamma^{p|q}$-matrices have some extra nice features and all supermatrices considered below are of this class.

Corollary 14. Idempotent strong $\Gamma^{p|q}$-matrices are defined by relations

$$\Gamma B = \Gamma, \quad B\Delta = \Delta, \quad B^2 = B. \tag{16}$$

The product of n strong $\Gamma^{p|q}$-matrices M_i has the following form

$$M_1M_2\dots M_n = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 A_{n-1} B_n \\ B_1 A_{n-1}\Delta_n & B_1 A_{n-1} B_n \end{pmatrix}, \tag{17}$$

where $A_{n-1} = B_2B_3\dots B_{n-1}$, and its Berezinian is

$$\mathrm{Ber}\,(M_1M_2\dots M_n) = -\frac{\det(\Gamma_1 A_{n-1}\Delta_n)}{\det(B_1 A_{n-1} B_n)}. \tag{18}$$

ONE-(EVEN)-PARAMETER SUPERMATRIX IDEMPOTENT SEMIGROUPS

Here we investigate one-(even)-parameter subsemigroups of Γ-semigroups and as a particular example for clearness of statements consider $\mathfrak{M}_{odd}(1|1)$, where all characteristic features taking place in general $(p+q)\times(p+q)$ as well can be seen. These formulas will be applied for establishing the corresponding superoperator semigroup properties.

A simplest semigroup can be constructed from antidiagonal nilpotent supermatrices of the shape

$$Y_\alpha(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

where $t \in \Lambda^{1|0}$ is an even parameter of the Grassmann algebra Λ which continuously "numbers" elements $Y_\alpha(t)$ and $\alpha \in \Lambda^{0|1}$ is a fixed odd element of Λ which "numbers" the sets $\mathbf{Y}_\alpha = \bigcup_t Y_\alpha(t)$.

Definition 15. The supermatrices $Y_\alpha(t)$ together with a null supermatrix $Z \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ form a *continuous null semigroup* $\mathfrak{Z}_\alpha(1|1) = \{\mathbf{Y}_\alpha \cup Z; \cdot\}$ having the null multiplication

$$Y_\alpha(t)\, Y_\alpha(u) = Z. \tag{20}$$

Assertion 16. *For any fixed $t \in \Lambda^{1|0}$ the set $\{Y_\alpha(t), Z\}$ is a 0-minimal ideal in $\mathfrak{Z}_\alpha(1|1)$.*

REMARK. If we consider, for instance, a one-(even)-parameter odd-reduced supermatrix of another shape $R_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & t \end{pmatrix}$, then multiplication of $R_\alpha(t)$ is not closed since $R_\alpha(t)\, R_\alpha(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha u \\ \alpha t & tu \end{pmatrix} \notin \mathbf{R}_\alpha = \bigcup_t R_\alpha(t)$. Note that any other possibility except ones considered below also do not give closure of multiplication.

Thus the only nontrivial closed systems of one-(even)-parameter odd-reduced (antitriangle) $(1+1)\times(1+1)$ supermatrices are $\mathbf{P}_\alpha = \bigcup_t P_\alpha(t)$ where

$$P_\alpha(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\alpha^2(t) = P_\alpha(t), \quad \mathrm{Ber}\, P_\alpha(t) = 0 \tag{21}$$

and $\mathbf{Q}_\alpha = \bigcup_t Q_\alpha(u)$ where

$$Q_\alpha(u) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha u & 1 \end{pmatrix} \quad Q_\alpha^2(u) = Q_\alpha(u) \quad \mathrm{Ber}\, Q_\alpha(u) = 0. \tag{22}$$

We establish multiplication properties of the idempotent noninvertible supermatrices $P_\alpha(t)$ and $Q_\alpha(u)$.

Assertion 17. *Sets of idempotent supermatrices* $\mathbf{P}_\alpha$ *and* $\mathbf{Q}_\alpha$ *form left zero and right zero semigroups respectively with multiplication*

$$P_\alpha(t)\,P_\alpha(u)=P_\alpha(t)\,, \tag{23}$$
$$Q_\alpha(t)\,Q_\alpha(u)=Q_\alpha(u)\,. \tag{24}$$

if and only if $\alpha^2=0$.

Proof. It simply follows from supermatrix multiplication law and general previous considerations. □

Corollary 18. The sets $\mathbf{P}_\alpha$ and $\mathbf{Q}_\alpha$ are rectangular bands since

$$P_\alpha(t)\,P_\alpha(u)\,P_\alpha(t)=P_\alpha(t)\,, \tag{25}$$
$$P_\alpha(u)\,P_\alpha(t)\,P_\alpha(u)=P_\alpha(u) \tag{26}$$

and

$$Q_\alpha(u)\,Q_\alpha(t)\,Q_\alpha(u)=Q_\alpha(u)\,, \tag{27}$$
$$Q_\alpha(t)\,Q_\alpha(u)\,Q_\alpha(t)=Q_\alpha(t) \tag{28}$$

with components $t=t_0+\operatorname{Ann}\alpha$ and $u=u_0+\operatorname{Ann}\alpha$ correspondingly.

They are orthogonal in sense of

$$Q_\alpha(t)\,P_\alpha(u)=E_\alpha, \tag{29}$$

where

$$E_\alpha\overset{def}{=}\begin{pmatrix}0&\alpha\\ \alpha&1\end{pmatrix},\qquad E_\alpha^2=E_\alpha,\qquad \operatorname{Ber}E_\alpha=0 \tag{30}$$

is a right "unity" and left "zero" in the semigroup $\mathbf{P}_\alpha$, because

$$P_\alpha(t)\,E_\alpha=P_\alpha(t)\,,\qquad E_\alpha P_\alpha(t)=E_\alpha \tag{31}$$

and a left "unity" and right "zero" in the semigroup $\mathbf{Q}_\alpha$, because

$$Q_\alpha(t)\,E_\alpha=E_\alpha,\qquad E_\alpha Q_\alpha(t)=Q_\alpha(t)\,. \tag{32}$$

It is important to note that $P_\alpha(1)=Q_\alpha(1)=E_\alpha$, and so $\mathbf{P}_\alpha\cap\mathbf{Q}_\alpha=E_\alpha$. Therefore, almost all properties of $\mathbf{P}_\alpha$ and $\mathbf{Q}_\alpha$ are similar, and we will consider only one of them in what follows. For generalized Green's relations and more detail properties of odd-reduced supermatrices of higher dimension see [39, 8, 9].

ODD-REDUCED SUPERMATRIX OPERATOR SEMIGROUPS

Let us consider a semigroup $\mathcal{P}$ of superoperators $\mathsf{P}(t)$ (see for general theory [27, 28, 30]) represented by the one-even-parameter semigroup $\mathbf{P}_\alpha$ of odd-reduced supermatrices $P_\alpha(t)$ (21) which act on $(1|1)$-dimensional superspace $\mathbb{R}^{1|1}$ as follows $P_\alpha(t)\,\mathtt{X}$, where $\mathtt{X}=\begin{pmatrix}x\\ \varkappa\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1|1}$, where x is even coordinate, $\varkappa$ is odd coordinate $(\varkappa^2=0)$ having expansions (1) and (2) respectively (see **Corollary** 1). We have a representation $\rho:\mathcal{P}\to\mathbf{P}_\alpha$ with correspondence $\mathsf{P}(t)\to P_\alpha(t)$ or $\mathsf{P}(t)\approx P_\alpha(t)$, but (as is usually made, e.g. [30]) we identify space of superoperators with the space of corresponding matrices[3].

Definition 19. An odd-reduced "dynamical" system on $\mathbb{R}^{1|1}$ is defined by an odd-reduced supermatrix-valued function $\mathsf{P}(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathfrak{M}_{odd}(1|1)$ and "time evolution" of the state $\mathtt{X}(0)\in\mathbb{R}^{1|1}$given by the function $\mathtt{X}(t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{1|1}$, where

$$\mathtt{X}(t)=\mathsf{P}(t)\,\mathtt{X}(0) \tag{33}$$

and can be called as orbit of $\mathtt{X}(0)$ under $\mathsf{P}(\cdot)$.

REMARK. In general the definition, the continuity, the functional equation and most of conclusions below hold valid also for $t\in\mathbb{R}^{1|0}$ (as e.g. in [30, p. 9]) including "nilpotent time" directions (see **Corollary 1**).

[3] For convenience we preserve operator notations and use somewhere the representation sign $\approx$ for clearness

From (23) it follows that
$$\mathsf{P}(t)\,\mathsf{P}(s) = \mathsf{P}(t), \tag{34}$$
and so superoperators $\mathsf{P}(t)$ are idempotent. Also they form a rectangular band, because of
$$\mathsf{P}(t)\,\mathsf{P}(s)\,\mathsf{P}(t) = \mathsf{P}(t), \tag{35}$$
$$\mathsf{P}(s)\,\mathsf{P}(t)\,\mathsf{P}(s) = \mathsf{P}(s). \tag{36}$$

We observe that
$$\mathsf{P}(0) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \neq \mathsf{I} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$
as *opposite* to the standard case [27]. A "generator" $\mathsf{A} = \mathsf{P}'(t)$ is
$$\mathsf{A} \approx \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$
and so the standard definition of generator [27]
$$\mathsf{A} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathsf{P}(t) - \mathsf{P}(0)}{t}, \tag{39}$$
holds and for difference we have the standard relation
$$\mathsf{P}(t) - \mathsf{P}(s) = \mathsf{A}\cdot(t-s). \tag{40}$$
The following properties of the generator A take place
$$\mathsf{P}(t)\,\mathsf{A} = \mathsf{Z}, \tag{41}$$
$$\mathsf{A}\mathsf{P}(t) = \mathsf{A}, \tag{42}$$
where "zero operator" Z is represented by the null supermatrix, $\mathsf{A}^2 = \mathsf{Z}$, and therefore generator A is a nilpotent of second degree.

From (39) it follows that
$$\mathsf{P}(t) = \mathsf{P}(0) + \mathsf{A}\cdot t. \tag{43}$$

Definition 20. We call operators which can be presented as a linear supermatrix function of t a *t-linear superoperators.*

From (43) it follows that $\mathsf{P}(t)$ is a t-linear superoperator.

Proposition 21. *Superoperators* $\mathsf{P}(t)$ ***cannot be presented*** *as an exponent (as for the standard operator semigroups* $\mathsf{T}(t) = e^{\mathsf{A}\cdot t}$ *[27]).*

Proof. In our case
$$\mathsf{T}(t) = e^{\mathsf{A}\cdot t} = \mathsf{I} + \mathsf{A}\cdot t \approx \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{P}_\alpha. \tag{44}$$
□

REMARK. Exponential superoperator $\mathsf{T}(t) = e^{\mathsf{A}\cdot t}$ is represented by *even-reduced* supermatrices $\mathsf{T}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{M}_{even}(1|1)$ [30], but idempotent superoperator $\mathsf{P}(t)$ is represented by *odd-reduced* supermatrices $\mathsf{P}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{M}_{odd}(1|1)$ (see **Definition 4**).

Nevertheless, the superoperator $\mathsf{P}(t)$ satisfies *the same* linear differential equation
$$\mathsf{P}'(t) = \mathsf{A}\cdot\mathsf{P}(t) \tag{45}$$
as the standard exponential superoperator $\mathsf{T}(t)$ (the initial value problem [30])
$$\mathsf{T}'(t) = \mathsf{A}\cdot\mathsf{T}(t). \tag{46}$$

This leads to the following

Corollary 22. In case initial state does not equal unity $\mathsf{P}(0) \neq \mathsf{I}$, there exists an *additional class* of solutions of the initial value problem (45)-(46) among odd-reduced (antidiagonal) idempotent t-linear (*nonexponential*) superoperators.

Problem 2. To find among general $(p+q)\times(m+n)$-supermatrices **all possible nonexponential classes** which solve the initial value problem (46).

Let us compare behavior of superoperators $\mathsf{P}(t)$ and $\mathsf{T}(t)$. First of all, their generators coincide

$$\mathsf{P}'(0)=\mathsf{T}'(0)=\mathsf{A}. \tag{47}$$

But powers of $\mathsf{P}(t)$ and $\mathsf{T}(t)$ are different $\mathsf{P}^n(t)=\mathsf{P}(t)$ and $\mathsf{T}^n(t)=\mathsf{T}(nt)$. In their common actions the superoperator which is from the left transfers its properties to the right hand side as follows

$$\mathsf{T}^n(t)\,\mathsf{P}(t)=\mathsf{P}((n+1)\,t), \tag{48}$$
$$\mathsf{P}^n(t)\,\mathsf{T}(t)=\mathsf{P}(t). \tag{49}$$

Their commutator is nonvanishing

$$[\mathsf{T}(t)\,\mathsf{P}(s)]=\mathsf{P}'(0)\,t=\mathsf{T}'(0)\,t=\mathsf{A}t, \tag{50}$$

which can be compared with the pure exponential commutator (for our case) $[\mathsf{T}(t)\,\mathsf{T}(u)]=0$ and idempotent commutator

$$[\mathsf{P}(t)\,\mathsf{P}(s)]=\mathsf{P}'(0)\,(t-s)=\mathsf{A}\,(t-s). \tag{51}$$

Assertion 23. *All superoperators* $\mathsf{P}(t)$ *and* $\mathsf{T}(t)$ *commute in case of "nilpotent time" and*

$$t\in\operatorname{Ann}\alpha. \tag{52}$$

REMARK. The uniqueness theorem [30, p. 3] holds valid only for $\mathsf{T}(t)$, because of the nonvanishing commutator $[\mathsf{A},\mathsf{P}(t)]=\mathsf{A}\neq 0$.

Corollary 24. The superoperator $\mathsf{T}(t)$ is an inner inverse for $\mathsf{P}(t)$, because of

$$\mathsf{P}(t)\,\mathsf{T}(t)\,\mathsf{P}(t)=\mathsf{P}(t), \tag{53}$$

but it is not an outer inverse, because

$$\mathsf{T}(t)\,\mathsf{P}(t)\,\mathsf{T}(t)=\mathsf{P}(2t). \tag{54}$$

Let us try to find a (possibly noninvertible) operator U which connects exponential and idempotent superoperators $\mathsf{T}(t)$ and $\mathsf{P}(t)$.

Assertion 25. *The "semi-similarity" relation*

$$\mathsf{T}(t)\,\mathsf{U}=\mathsf{U}\mathsf{P}(t) \tag{55}$$

holds if

$$\mathsf{U}\approx\begin{pmatrix}\sigma\alpha & \sigma\\ 0 & \rho\alpha\end{pmatrix} \tag{56}$$

which is noninvertible triangle and depends from two odd constants, and the "adjoint" relation

$$\mathsf{U}^*\mathsf{T}(t)=\mathsf{P}(t)\,\mathsf{U}^* \tag{57}$$

holds if

$$\mathsf{U}^*\approx\begin{pmatrix}0 & \alpha vt\\ \alpha u & v\end{pmatrix} \tag{58}$$

which is also noninvertible antitriangle and depends from two even constants and "time".

REMARK. Note that U is nilpotent of third degree, since $\mathsf{U}^2=\sigma\rho\mathsf{A}$, but the "adjoint" superoperator is not nilpotent at all if v is not nilpotent.

Both A and Z behave as zeroes, but $\mathsf{Y}(t)$ (see (19)) is a two-sided zero for $\mathsf{T}(t)$ only, since

$$\mathsf{T}(t)\,\mathsf{Y}(t)=\mathsf{Y}(t)\,\mathsf{T}(t)=\mathsf{Y}(t), \tag{59}$$

while

$$\mathsf{P}(t)\,\mathsf{Y}(t)=\mathsf{Y}(0),\quad \mathsf{Y}(t)\,\mathsf{P}(t)=\mathsf{A}t. \tag{60}$$

If we add A and Z to superoperators $\mathsf{P}(t)$, then we obtain an extended odd-reduced noncommutative superoperator semigroup $\mathcal{P}_{odd} = \bigcup \mathsf{P}(t) \bigcup \mathsf{A} \bigcup \mathsf{Z}$ with the following Cayley table (for convenience we add $\mathsf{Y}(t)$ and $\mathsf{T}(t)$ as well)

The Cayley table of the superoperator semigroup $\mathcal{P}_{odd}$

$1 \setminus 2$	$\mathsf{P}(t)$	$\mathsf{P}(s)$	A	Z	$\mathsf{Y}(t)$	$\mathsf{T}(t)$	$\mathsf{T}(s)$
$\mathsf{P}(t)$	$\mathsf{P}(t)$	$\mathsf{P}(t)$	Z	Z	$\mathsf{P}(t)$	$\mathsf{P}(t)$	$\mathsf{P}(t)$
$\mathsf{P}(s)$	$\mathsf{P}(s)$	$\mathsf{P}(s)$	Z	Z	$\mathsf{P}(s)$	$\mathsf{P}(s)$	$\mathsf{P}(s)$
A	A	A	Z	Z	Z	A	A
Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z
$\mathsf{Y}(t)$	$\mathsf{A}t$	$\mathsf{A}s$	Z	Z	Z	$\mathsf{Y}(t)$	$\mathsf{Y}(t)$
$\mathsf{T}(t)$	$\mathsf{P}(2t)$	$\mathsf{P}(t+s)$	A	Z	$\mathsf{Y}(t)$	$\mathsf{T}(2t)$	$\mathsf{T}(t+s)$
$\mathsf{T}(s)$	$\mathsf{P}(t+s)$	$\mathsf{P}(2s)$	A	Z	$\mathsf{Y}(t)$	$\mathsf{T}(t+s)$	$\mathsf{T}(2s)$

(61)

It is easily seen that associativity in the left upper square holds, and so the table (61) is actually represents a semigroup of superoperators $\mathcal{P}_{odd}$ (under supermatrix multiplication).

The analogs of the "smoothing operator" $\mathsf{V}(t)$ [30] are

$$\mathsf{V}_P(t) = \int_0^t \mathsf{P}(s)\,ds = \frac{t}{2}\left(\mathsf{P}(t) + \mathsf{P}(0)\right) \approx \begin{pmatrix} 0 & \alpha\frac{t^2}{2} \\ \alpha t & t \end{pmatrix}, \tag{62}$$

$$\mathsf{V}_T(t) = \int_0^t \mathsf{T}(s)\,ds = \frac{t}{2}\left(\mathsf{T}(t) + \mathsf{T}(0)\right) \approx \begin{pmatrix} t & \alpha\frac{t^2}{2} \\ 0 & t \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Let us consider the differential sequence of sets of superoperators $\mathsf{P}(t)$

$$\mathsf{S}_n \xrightarrow{\partial} \mathsf{S}_{n-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \mathsf{S}_1 \xrightarrow{\partial} \mathsf{S}_0 \xrightarrow{\partial} \mathsf{A} \xrightarrow{\partial} \mathsf{Z}, \tag{64}$$

where $\partial = d/dt$ and

$$\mathsf{S}_n = \bigcup_t \frac{t^n}{n(n-1)\ldots 1}\mathsf{P}\left(\frac{t}{n+1}\right), \tag{65}$$

and by definition

$$\mathsf{S}_0 = \bigcup_t \mathsf{P}(t), \tag{66}$$

$$\mathsf{S}_1 = \bigcup_t \mathsf{V}_P(t). \tag{67}$$

GENERALIZED FUNCTIONAL EQUATION AND EVOLUTION

Now we construct an analog of the standard operator semigroup functional equation [27, 30]

$$\mathsf{T}(t+s) = \mathsf{T}(t)\,\mathsf{T}(s). \tag{68}$$

Using the multiplication law (34) and manifest representation (21) for the idempotent superoperators $\mathsf{P}(t)$ we can formulate

Definition 26. The *odd-reduced idempotent superoperators* $\mathsf{P}(t)$ satisfy the following generalized functional equation

$$\mathsf{P}(t+s) = \mathsf{P}(t)\,\mathsf{P}(s) + \mathsf{N}(t,s), \tag{69}$$

where

$$\mathsf{N}(t,s) = \mathsf{P}'(t)\,s.$$

The presence of second term $\mathsf{N}(t,s)$ in the right hand side of the generalized functional equation (69) can be connected with nonautonomous and deterministic properties of systems describing by it [30]. Indeed, from (33) it follows that

$$\begin{aligned} \mathtt{X}(t+s) &= \mathsf{P}(t+s)\,\mathtt{X}(0) = \mathsf{P}(t)\,\mathsf{P}(s)\,\mathtt{X}(0) + \mathsf{P}'(t)\,s\mathtt{X}(0) \\ &= \mathsf{P}(t)\,\mathtt{X}(s) + \mathsf{P}'(t)\,s\mathtt{X}(0) \neq \mathsf{P}(t)\,\mathtt{X}(s) \end{aligned} \tag{70}$$

as opposite to the always implied relation for exponential superoperators $\mathsf{T}(t)$ (translational property [27, 30])

$$\mathsf{T}(t)\,\mathtt{X}(s)=\mathtt{X}(t+s)\,, \tag{71}$$

which follows from (68). Instead of (71), using the band property (34) we obtain

$$\mathsf{P}(t)\,\mathtt{X}(s)=\mathtt{X}(t)\,, \tag{72}$$

which can be called the "moving time" property.

Problem 3. To find a "dynamical system" with time evolution satisfying the **"moving time" property** (72) instead of the translational property (71).

Assertion 27. *For "nilpotent time" satisfying (52) the generalized functional equation (69) coincides with the standard functional equation (68), and therefore the idempotent operators* $\mathsf{P}(t)$ *describe autonomous and deterministic "dynamical" system and satisfy the translational property (71).*

Proof. Follows from (52) and (70). □

Problem 4. To find **all maps** $\mathsf{P}(\cdot):\mathbb{R}_{+}\to\mathfrak{M}(p|q)$ satisfying the generalized functional equation (69).

We turn to this problem later, and now consider some features of the Cauchy problem for idempotent superoperators.

ODD SOLUTION FOR THE CAUCHY PROBLEM

Let us consider an action (33) of superoperator $\mathsf{P}(t)$ in superspace $\mathbb{R}^{1|1}$ as $\mathtt{X}(t)=\mathsf{P}(t)\,\mathtt{X}(0)$, where the initial components are $\mathtt{X}(0)=\begin{pmatrix}x_0\\ \varkappa_0\end{pmatrix}$. From (33) the evolution of the components has the form

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ \varkappa(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\varkappa_0 t\\ \alpha x_0+\varkappa_0\end{pmatrix} \tag{73}$$

which shows that superoperator $\mathsf{P}(t)$ does not lead to time dependence of odd components. Then from (73) we see that

$$\mathtt{X}'(t)=\begin{pmatrix}\alpha\varkappa_0\\ 0\end{pmatrix}=const. \tag{74}$$

This is in full agreement with an analog of the Cauchy problem for our case

$$\mathtt{X}'(t)=\mathsf{A}\cdot\mathtt{X}(t)\,. \tag{75}$$

Assertion 28. *The solution of the Cauchy problem (75) is given by (33), but the idempotent superoperator* $\mathsf{P}(t)$ ***can not be presented*** *in exponential form as in the standard case [27], but only in the t-linear form* $\mathsf{P}(t)=\mathsf{P}(0)+\mathsf{A}\cdot t\neq e^{\mathsf{A}\cdot t}$, *as we have already shown in (43).*

This allows us to formulate

Theorem 29. *In superspace* $\mathbb{R}^{1|1}$ *the solution of the Cauchy initial problem with the same generator* A *is two-fold and is given by two different type of superoperators:*

1. *Exponential superoperator* $\mathsf{T}(t)$ *represented by the even-reduced supermatrices (**even solution**);*
2. *Idempotent t-linear superoperator* $\mathsf{P}(t)$ *represented by the odd-reduced supermatrices (**odd solution**).*

For comparison the standard solution of the Cauchy problem (75)

$$\mathtt{X}(t)=\mathsf{T}(t)\,\mathtt{X}(0)$$

in components is

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ \varkappa(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+\alpha\varkappa_0 t\\ \varkappa_0\end{pmatrix}, \tag{76}$$

which shows that the time evolution of even coordinate is also in nilpotent even direction $\alpha\varkappa_0$ as in (73), but with addition of initial (possibly nonilpotent) x_0, while odd coordinate is (another) constant as well. That leads to

Assertion 30. *"Even" and "odd" evolutions coincide, if even initial coordinate vanishes $x_0 = 0$ or common starting point is pure odd* $\mathsf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varkappa_0 \end{pmatrix}$.

A very much important formula is the condition of commutativity [27]

$$[\mathsf{A}, \mathsf{P}(t)]\,\mathsf{X}(t) = \mathsf{A}\mathsf{X}(t) = \begin{pmatrix} \alpha\varkappa(t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{77}$$

which satisfies, when $\alpha \cdot \varkappa(t) = 0$, while in the standard case the commutator $[\mathsf{A}, \mathsf{T}(t)]\,\mathsf{X}(t) = 0$, i.e. vanishes without any additional conditions [27].

SUPERANALOG OF RESOLVENT FOR EXPONENTIAL AND IDEMPOTENT SUPEROPERATORS

For resolvents $\mathsf{R}_P(z)$ and $\mathsf{R}_T(z)$ we use an analog of the standard formula from [27] in the form

$$\mathsf{R}_P(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\mathsf{P}(t)\,dt, \tag{78}$$

$$\mathsf{R}_T(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\mathsf{T}(t)\,dt. \tag{79}$$

Using the supermatrix representation (21) we obtain

$$\mathsf{R}_P(z) \approx \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha}{z^2} \\ \dfrac{\alpha}{z} & \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}, \tag{80}$$

$$\mathsf{R}_T(z) \approx \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z} & \dfrac{\alpha}{z^2} \\ 0 & \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}. \tag{81}$$

We observe, that $\mathsf{R}_T(z)$ satisfies the standard resolvent relation [30]

$$\mathsf{R}_T(z) - \mathsf{R}_T(w) = (w - z)\,\mathsf{R}_T(z)\,\mathsf{R}_T(w), \tag{82}$$

but its analog for $\mathsf{R}_P(z)$

$$\mathsf{R}_P(z) - \mathsf{R}_P(w) = (w - z)\,\mathsf{R}_P(z)\,\mathsf{R}_P(w) + \frac{w - z}{zw^2}\mathsf{A} \tag{83}$$

has additional term proportional to the generator A.

PROPERTIES OF t-LINEAR IDEMPOTENT (SUPER)OPERATORS

Here we consider properties of general t-linear (super)operators of the form

$$\mathsf{K}(t) = \mathsf{K}_0 + \mathsf{K}_1 t, \tag{84}$$

where $\mathsf{K}_0 = \mathsf{K}(0)$ and $\mathsf{K}_1 = \mathsf{K}'(0)$ are constant (super)operators represented by $(n \times n)$ matrices or $(p+q) \times .(p+q)$ supermatrices with t ("time") independent entries. Obviously, that the generator of a general t-linear (super)operator is

$$\mathsf{A}_K = \mathsf{K}'(0) = \mathsf{K}_1. \tag{85}$$

We will find system of equations for K_0 and K_1 for some special cases appeared in above consideration.

Assertion 31. *If a t-linear (super)operator $\mathsf{K}(t)$ satisfies the band equation (34)*

$$\mathsf{K}(t)\,\mathsf{K}(s) = \mathsf{K}(t), \tag{86}$$

then it is idempotent and the constant component (super)operators K_0 and K_1 satisfy the system of equations

$$\mathsf{K}_0^2 = \mathsf{K}_0, \qquad \mathsf{K}_1^2 = \mathsf{Z}, \tag{87}$$

$$\mathsf{K}_1\mathsf{K}_0 = \mathsf{K}_1, \qquad \mathsf{K}_0\mathsf{K}_1 = \mathsf{Z}, \tag{88}$$

from which it follows, that K_0 is idempotent, K_1 is nilpotent, and K_1 is right divisor of zero and left zero for K_0.

For non-supersymmetric operators we have

Corollary 32. The components of t-linear operator $\mathsf{K}(t)$ have the following properties: idempotent matrix K_0 is similar to an upper triangular matrix with 1 on the main diagonal and nilpotent matrix K_1 is similar to an upper triangular matrix with 0 on the main diagonal [13, 57].

Comparing with the previous particular super case (43) we have $\mathsf{K}_0 = \mathsf{P}(0)$ and $\mathsf{K}_1 = \mathsf{A} = \mathsf{P}'(0)$.

REMARK. In case of $(p+q) \times (p+q)$ supermatrices the triangularization properties of **Corollary 32** do not hold valid due to presence divisors of zero and nilpotents among entries (see **Corollary 1**), and so the inner structure of the component supermatrices satisfying (87)-(88) can be much different from the standard non-supersymmetric case [13, 57].

Let us consider the structure of t-linear operator $\mathsf{K}(t)$ satisfying the generalized functional equation (69).

Assertion 33. *If a t-linear (super)operator* $\mathsf{K}(t)$ *satisfies the generalized functional equation*

$$\mathsf{K}(t+s) = \mathsf{K}(t)\,\mathsf{K}(s) + \mathsf{K}'(t)\,s, \tag{89}$$

then its component (super)operators K_0 *and* K_1 *satisfy the system of equations*

$$\mathsf{K}_0^2 = \mathsf{K}_0, \qquad \mathsf{K}_1^2 = \mathsf{Z}, \tag{90}$$

$$\mathsf{K}_1\mathsf{K}_0 = \mathsf{K}_1, \qquad \mathsf{K}_0\mathsf{K}_1 = \mathsf{Z}. \tag{91}$$

We observe that the systems (87)-(88) and (90)-(91) are fully identical. It is important to observe the connection of the above properties with the differential equation for t-linear (super)operator $\mathsf{K}(t)$

$$\mathsf{K}'(t) = \mathsf{A}_K \cdot \mathsf{K}(t). \tag{92}$$

Using (85) we obtain the equation for components

$$\mathsf{K}_1^2 = \mathsf{Z}, \tag{93}$$

$$\mathsf{K}_1\mathsf{K}_0 = \mathsf{K}_1. \tag{94}$$

That leads to the following

Theorem 34. *For any t-linear (super)operator* $\mathsf{K}(t) = \mathsf{K}_0 + \mathsf{K}_1 t$ *the next statements are equivalent:*

1. $\mathsf{K}(t)$ *is idempotent and satisfies the band equation (86);*
2. $\mathsf{K}(t)$ *satisfies the generalized functional equation (89);*
3. $\mathsf{K}(t)$ *satisfies the differential equation (92) and has idempotent time independent part* $\mathsf{K}_0^2 = \mathsf{K}_0$ *which is orthogonal to its generator* $\mathsf{K}_0\mathsf{A} = \mathsf{Z}$.

GENERAL t-POWER-TYPE IDEMPOTENT (SUPER)OPERATORS

Let us consider idempotent (super)operators which depend from time by power-type function, and so they have the form

$$\mathsf{K}(t) = \sum_{m=0}^{n} \mathsf{K}_m t^m, \tag{95}$$

where K_m are t-independent (super)operators represented by $(n \times n)$ matrices or $(p+q) \times .(p+q)$ supermatrices. This power-type dependence of is very much important for super case, when supermatrix elements take value in Grassmann algebra, and therefore can be nilpotent (see (1)–(2) and **Corollary 1**).

We now start from the band property $\mathsf{K}(t)\,\mathsf{K}(s) = \mathsf{K}(t)$ and then find analogs of the functional equation and differential equation for them. Expanding the band property (86) in component we obtain n-dimensional analog of (87)-(88) as

$$\mathsf{K}_0^2 = \mathsf{K}_0, \quad \mathsf{K}_i^2 = \mathsf{Z}, \ 1 \le i \le n, \tag{96}$$

$$\mathsf{K}_i\mathsf{K}_0 = \mathsf{K}_i, \ 1 \le i \le n, \quad \mathsf{K}_0\mathsf{K}_i = \mathsf{Z}, \ 1 \le i \le n, \tag{97}$$

$$\mathsf{K}_i\mathsf{K}_j = \mathsf{Z}, \ 1 \le i,j \le n, i \ne j. \tag{98}$$

Proposition 35. *The n-generalized functional equation for any t-power-type idempotent (super)operators (95) has the form*

$$\mathsf{K}(t+s) = \mathsf{K}(t)\,\mathsf{K}(s) + \mathsf{N}_n(t,s), \text{ where } \mathsf{N}_n(t,s) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=m}^{n} \mathsf{K}_l \frac{l(l-1)\dots(l-m+1)}{m!} s^m t^{l-m}. \tag{99}$$

Proof. For the difference using the band property (86) we have $\mathsf{N}_n(t,s) = \mathsf{K}(t+s) - \mathsf{K}(t)\mathsf{K}(s) = \mathsf{K}(t+s) - \mathsf{K}(t)$. Then we expand in Taylor series around t and obtain $\mathsf{N}_n(t,s) = \sum\limits_{m=1}^{n} \mathsf{K}^{(m)}(t)\dfrac{s^m}{m!}$, where $\mathsf{K}^{(m)}(t)$ denotes n-th derivative which is a finite series for the power-type $\mathsf{K}(t)$ (95). □

The differential equation for idempotent (super)operators coincide with the standard initial value problem only for t-linear operators. In case of the power-type operators (95) we have

Proposition 36. *The n-generalized differential equation for any t-power-type idempotent (super)operators (95) has the form*

$$\mathsf{K}'(t) = \mathsf{A}_K \cdot \mathsf{K}(t) + \mathsf{U}_n(t), \tag{100}$$

where

$$\mathsf{U}_n(t) = \begin{cases} 0 & n=1 \\ \sum\limits_{m=2}^{n} m\mathsf{K}_m t^{m-1} & n \geq 2 \end{cases}. \tag{101}$$

Proof. To find the difference $\mathsf{U}_n(t)$ we use the expansion (95) and the band conditions for components (96)–(98). □

CONCLUSION

In general one-parametric matrix semigroups and corresponding superoperator semigroups represented by antitriangle idempotent supermatrices and their generalization to higher dimensions $(p+q) \times (m+n)$ have many unusual and nontrivial properties [8, 9, 25, 39]. Here we considered only some of them related to their connection with functional and differential equations of corresponding superoperators. The stated **Problems 1-3** are worthwhile to investigate in future. It would be also interesting to generalize the above constructions to higher dimensions, to study continuity properties of the introduced idempotent superoperators, to consider multi-time evolution and to find the corresponding applications in modern supersymmetric models.

Acknowledgement. The author is grateful to Jan Okniński for valuable remarks and kind hospitality at the Institute of Mathematics, Warsaw University, where this work was begun. Also fruitful discussions with W. Dudek, A. Kelarev, G. Kourinnoy, W. Marcinek, B. V. Novikov and Yu. S. Samoilenko are greatly acknowledged.

REFERENCES

1. Berezin F. A. Introduction to Superanalysis. Dordrecht. *Reidel*, 1987.
2. Leites D. A. // *Introduction to the theory of supermanifolds*. Russian Math. Surv. 1980. V. **35**. № 1. P. 1–64.
3. Bars I. // *Supergroups and their representations*. Introduction to Supersymmetry in Particle and Nuclear Physics. New York. *Plenum Press*, 1984. P. 107–184.
4. van Nieuwenhuizen P., West P. Principles of Supersymmetry and Supergravity. Cambridge. *Cambridge Univ. Press*, 1989. 453 p.
5. Kaku M. Introduction to Superstrings and M-Theory. Berlin. *Springer-Verlag*, 1998. 587 p.
6. Bailin D., Love A. Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory. Bristol. *Institute of Physics*, 1994. 322 p.
7. Quantum Fields and Strings: A Cource for Mathematicians // Deligne P., Etingof P., Freed D. S., Jeffrey L. C., Kazhdan D., Morgan J. W., Morrison D. R., Witten E., *eds.* V. **1**, **2** Providence. *American Mathematical Society* 1999. 1495 p.
8. Duplij S. Semigroup methods in supersymmetric theories of elementary particles. Kharkov. *Habilitation Thesis, Kharkov State University*, math-ph/9910045, 1999. 483 p.
9. Duplij S. Semisupermanifolds and semigroups. Kharkov. *Krok*, 2000. 220 p.
10. Howie J. M. An Introduction to Semigroup Theory. London. *Academic Press*, 1976. 270 p.
11. Higgins P. M. Techniques of Semigroup Theory. Oxford. *Oxford University Press*, 1992. 254 p.
12. Lawson M. V. Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries. Singapore. *World Sci.*, 1998. 412 p.
13. Okniński J. Semigroups of Matrices. Singapore. *World Sci.*, 1998. 453 p.
14. Ponizovskii J. S. // *On a type of matrix semigroups*. Semigroup Forum. 1992. V. **44**. P. 125–128.
15. Okniński J., Ponizovskii J. S. // *A new matrix representation theorem for semigroups*. Semigroup Forum. 1996. V. **52**. P. 293–305.
16. Mohapatra R. N. Unification and Supersymmetry: The Frontiers of Quark-lepton Physics. Berlin. *Springer-Verlag*, 1986. 309 p.
17. Salam A., Strathdee J. // *Supersymmetry and superfields*. Fortschr. Phys. 1978. V. **26**. P. 57–123.
18. Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., et al. Superspace. Reading. *Benjamin*, 1983.
19. De Witt B. S. Supermanifolds. Cambridge. *Cambridge Univ. Press*, 2nd edition. 1992. 407 p.
20. Khrennikov A. Y. Superanalysis. M.. *Nauka*, 1997. 304 p.
21. Vladimirov V. S., Volovich I. V. // *Superanalysis*. **1**. *Differential calculus*. Theor. Math. Phys. 1984. V. **59**. № 1. P. 3–27.
22. Duplij S. // *On semigroup nature of superconformal symmetry*. J. Math. Phys. 1991. V. **32**. № 11. P. 2959–2965.
23. Duplij S. // *Ideal structure of superconformal semigroups*. Theor. Math. Phys. 1996. V. **106**. № 3. P. 355–374.

24. Duplij S. // *Some abstract properties of semigroups appearing in superconformal theories*. Semigroup Forum. 1997. V. 54. № 2. P. 253–260.

25. Duplij S. // *On an alternative supermatrix reduction*. Lett. Math. Phys. 1996. V. **37**. № 3. P. 385–396.

26. Hille E., Phillips R. S. Functional Analysis and Semigroups. Providence. *Amer. Math. Soc.*, 1957. 808 p.

27. Davies E. B. One-Parameter Semigroups. London. *Academic Press*, 1980. 230 p.

28. Goldstein J. A. Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford. *Oxford University Press*, 1985. 347 p.

29. Hille E. Methods in Classical and Functional Analysis. Reading. *Addison-Wesley*, 1972. 267 p.

30. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution processes. Berlin. *Springer-Verlag*, 1999. 584 p.

31. Belleni-Morante A. Applied Semigroups and Evolution Equations. Oxford. *Oxford University Press*, 1979. 341 p.

32. Daners D., Koch Medina P. Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications. New York. *Longman*, 1992. 267 p.

33. Berg C., Christensen J. P. R., Ressel P. Harmonic Analysis on Semigroups. Berlin. *Springer-Verlag*, 1984.

34. Satyanarayana M. Positively Ordered Semigroups. New York. *Dekker*, 1979.

35. Berglund J., Junghenn H. D., Milnes P. Analysis on Semigroups. New York. *Wiley*, 1989.

36. Ahmed N. U. Semigroup Theory With Application to Systems and Control. New York. *Wiley*, 1991.

37. Gawedzki K. // *Supersymmetries — mathematics of supergeometry*. Annales Poincare Phys.Theor. 1977. V. **27**. P. 335–366.

38. Choquet-Bruhat Y. // *Mathematics for classical supergravities*. Lect. Notes Math. 1987. V. **1251**. P. 73–90.

39. Duplij S. // *Supermatrix representations of semigroup bands*. Pure Math. Appl. 1996. V. **7**. № 3-4. P. 235–261.

40. Clemént P., Heijmans H. J. A. M., Angenent S., van Duijn C. J., de Pagter B. One-Parameter Semigroups. Amsterdam. *North-Holland*, 1987. 436 p.

41. Duplij S. // *On supermatrix idempotent operator semigroups*. Kharkov, 2000. 11 p. (*Preprint / Kharkov National Univ.*, `math.FA/0006001`).

42. Rogers A. // *A global theory of supermanifolds*. J. Math. Phys. 1980. V. **21**. № 5. P. 1352–1365.

43. Ivashchuk V. D. // *Invertibility of elements in infinite-dimensional Grassmann-Banach algebras*. Theor. Math. Phys. 1990. V. **84**. № 1. P. 13–22.

44. Pestov V. G. // *On enlargability of infinite-dimensional Lie superalgebras*. J. Geom. and Phys. 1993. V. **10**. P. 295–314.

45. Bahturin Y. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite-dimensional Lie Superalgebras. Berlin. *Walter de Cruyter*, 1992. 325 p.

46. Backhouse N. B., Fellouris A. G. // *Grassmann analogs of classical matrix groups*. J. Math. Phys. 1985. V. **26**. № 6. P. 1146–1151.

47. Urrutia L. F., Morales N. // *The Cayley-Hamilton theorem for supermatrices*. J. Phys. 1994. V. **A27**. № 6. P. 1981–1997.

48. Nashed M. Z. Generalized Inverses and Applications. New York. *Academic Press*, 1976. 321 p.

49. Davis D. L., Robinson D. W. // *Generalized inverses of morphisms*. Linear Algebra Appl. 1972. V. **5**. P. 329–338.

50. McAlister D. B. // *Representations of semigroups by linear transformations*. **1,2**. Semigroup Forum. 1971. V. **2**. P. 189–320.

51. Clifford A. H., Preston G. B. The Algebraic Theory of Semigroups. V. **1** Providence. *Amer. Math. Soc.*, 1961.

52. Howie J. M. // *Why study semigroups?* Math. Chronicle. 1987. V. **16**. P. 1–14.

53. Grillet P.-A. Semigroups. An Introduction to the Structure Theory. New York. *Dekker*, 1995. 416 p.

54. Boyd J. P. Social semigroups. A unified theory of scaling and blockmodelling as applied to social networks. Fairfax. *George Mason Univ. Press*, 1991. 267 p.

55. Duplij S. // *Noninvertible $N=1$ superanalog of complex structure*. J. Math. Phys. 1997. V. **38**. № 2. P. 1035–1040.

56. Borel A. Linear Algebraic Groups. Moscow. *Science*, 1972.

57. Radjavi H., Rosenthal P. Simultaneous Triangularization. Berlin. *Springer-Verlag*, 1999. 318 p.

ПОЛУГРУППЫ СУПЕРМАТРИЦ И ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИДЕМПОТЕНТНЫХ СУПЕРОПЕРАТОРОВ

С. А. Дуплий

Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

В работе рассматриваются полугруппы суперматриц и исследуются их различные редукции. Определяются однопараметрические полугруппы антитреугольных суперматриц и изучаются свойства соответствующих полугрупп супероператоров. Показано, что t-линейные идемпотентные супероператоры и обычные экспоненциальные супероператоры являются дуальными в некотором смысле, и первые дают дополнительное (нечетное) решение (по отношению с стандартному экспоненциальному) проблемы Коши. Найдены соответствующее функциональное уравнение и получен аналог резольвенты. Для идемпотентных (супер)операторов с t-зависимостью степенного вида найдены дифференциальные и функциональные уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: суперматрица, редукция, однопараметрическая полугруппа, идемпотент, проблема Коши, резольвента

УДК 539.12

SUPERSYMMETRY, NONTRIVIAL FERMIONIC SHELL AND NILPOTENT MECHANICS

S. A. Duplij [1), A. Frydryszak [2)

[1) *Department of Physics and Technology, Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij
[2) *Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, Pl. Maxa Borna 9, 50-204 Wrocław, Poland*
E-mail: amfry@ift.uni.wroc.pl
Received January 20, 2001

A need of the introduction of nilpotent even variables to the consistent classical supersymmetric theory is justyfied on the example of simple supersymmetric system. It is claimed that any classical supersymmetric theory on fermionic shell is equivalent to the corresponding nilpotent mechanics.

KEYWORDS : supermechanics, dual number, nilpotence, fermionic shell, Legendre transformation, Poisson bracket

Natural formulation of supersymmetric models is based on the formalism involving so called Grassmannian coordinates [1, 2], i.e. functions taking values in an appropriate Grassmann algebra [3]. Usually nilpotence is associated to the fermions due to the anticommutativity of objects describing them. However even in simple supersymmetric mechanical models (for review see e.g. [4]) it turns out that we must consider nilpotent even coordinates to describe consistently the model [5, 6] and to have nontrivial description on the fermionic shell [7]. These nilpotent even elements appear as an extension of the field of numbers used in the formalism. In our approach such an algebra of the so called Study numbers [8] or dual numbers [9, 10] replaces the basic field of numbers (complex or real) and resulting configuration and phase spaces have a geometric structure which we shall call a *nilfold*.

In the present paper we want to show that the even nilpotent sector of the supersymmetric models is very important and should not be neglected. Moreover, it is connected in a natural way to the two-time physics approach proposed by Bars at al. [11, 12, 13]. The notion of even nilpotent "directions" as such is not new. It appears in supermanifold theory [14, 15, 16, 17] and classical SUSY models [18, 19, 20, 21, 22, 23] (see also [24, 25, 26, 27] and [28]). Some interesting properties of nilpotent directions in mechanics were discussed in [29, 6, 7]. A generalization of the notion of supermanifold including even nilpotent coordinates has also been considered in [30, 31].

CLASSICAL SUPERSYMMETRY. TOY MODEL

Let us consider $(1|2)$ dimensional superspace and in the chiral basis (t, θ^+, θ^-) and a scalar superfield $\Phi(t, \theta^+, \theta^-)$ which has the expansion $\Phi(t, \theta^+, \theta^-) = q(t) + i\theta^+\psi_-(t) + i\theta^-\psi_+(t) + \theta^+\theta^- F(t)$, where $q(t)$ is a bosonic coordinate, $F(t)$ is an auxiliary bosonic field, $\psi_\pm(t)$ are fermionic coordinates. The superfield Lagrangian of the model with a superpotential $V(\Phi)$ can be written as

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D^+\Phi \cdot D^-\Phi + V(\Phi), \tag{1}$$

where $D^\pm = \partial/\partial\theta^\mp + i\theta^\pm\partial/\partial t$ and the equations of motion are

$$\frac{1}{2}\left[D^+, D^-\right]\Phi - V'(\Phi) = 0.$$

The action has standard form $S = \int dt\mathcal{L}$, where $L = \int d\theta^- d\theta^+ \mathcal{L}$ is the component Lagrangian. After expansion in θ and using the nondynamical equation for auxiliary field $F(t) = -V'(q)$ it takes the following form

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{V'^2(q)}{2} + i\psi_+\dot{\psi}_- + V''(q)\psi_+\psi_-. \tag{2}$$

From (2) the equations of motion are

$$\ddot{q} + V'(q)V''(q) - V'''(q)\psi_+\psi_- = 0, \tag{3}$$

$$\dot{\psi}_\pm \pm iV''(q)\psi_\pm = 0. \tag{4}$$

The bosonic equation (3) cannot be satisfied by real $q(t)$ outside trivial fermionic shell $\psi_\pm(t) = 0$. Taking nontrivial solutions of the fermionic equations of motion (4), what means that fermionic coordinates are not zero, we obtain

$$\psi_\pm(t) = \lambda_\pm e^{\mp i\varphi(q_0, E)}, \tag{5}$$

where $\sin p(q_0, E) = \frac{V_0'}{\sqrt{2E}}$, $V_0' = V'(q_0(t))$, E is the energy of the system, and $q_0(t)$ is a standard solution for one-dimensional nonsupersymmetric system (see below (19)). In this case we obviously have

$$\psi_+(t)\,\psi_-(t) = \lambda_+\lambda_- = \mathbf{e} = const, \tag{6}$$

and therefore e is a nilpotent even Grassmann number $\mathbf{e}^2 = 0$.

On the fermionic shell the original SUSY lagrangian (2) takes the form

$$L_{FermiShell}(q, V|\mathbf{e}) = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{V'^2(q)}{2} + V''(q)\,\mathbf{e}. \tag{7}$$

Let us represent it as the one-dimensional lagrangian

$$L_{NilMech}(q, \mathbf{U}) = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\mathbf{U}'^2}{2}, \tag{8}$$

where

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(q|\mathbf{e}) = V(q) + \mathbf{e}\ln\frac{1}{V'(q)}. \tag{9}$$

Thus

$$L_{FermiShell}(q, V|\mathbf{e}) = L_{NilMech}(q, \mathbf{U}) \tag{10}$$

and we see that the lagrangian of supersymmetric mechanics on fermionic shell is equal to a lagrangian with potential of the special form (9) in which some even nilpotent part is added. We expect that such property may take place in larger class of theories, and this equivalence can be the fundamental property of any classical supersymmetric theory on a fermionic shell.

The lagrangian (2) is invariant with respect to the following supersymmetry transformations

$$\delta q = i\left(\varepsilon_+\psi_- + \varepsilon_-\psi_+\right), \tag{11}$$

$$\delta\psi_+ = \varepsilon_+\left(-\dot{q} + iV'\right), \quad \delta\psi_- = \varepsilon_-\left(-\dot{q} - iV'\right). \tag{12}$$

On the fermionic shell the parameters $\varepsilon_\pm$ take the form

$$\varepsilon_\pm = k_\pm\lambda_\pm, \tag{13}$$

where $k_\pm$ are some even parameters. Now the form of the supersymmetry parameters $\varepsilon_\pm$ is fixed: they are expressed a product of arbitrary even parameter $k_\pm$ defining the transformation and fixed odd constants of fermionic motion $\lambda_\pm$. Then the bosonic part of the supersymmetry transformation (11) becomes

$$\delta q = i\mathbf{e}\left(k_+\sin p(q_0, E) + k_-\cos p(q_0, E)\right) = i\mathbf{e}\frac{k_+V_0' + k_-\sqrt{2E - V_0'^2}}{\sqrt{2E}}, \tag{14}$$

which means that this transformation is pure nilpotent and numerical part of q does not change. On the fermionic shell the bosonic equation (3) takes the form

$$\ddot{q} + V'(q)\,V''(q) - V'''(q)\,\mathbf{e} = 0. \tag{15}$$

Therefore the bosonic solution on the fermionic shell can be written as follows

$$\mathbf{q}(t) = q_0(t) + \mathbf{e}q_N(t). \tag{16}$$

Then for $q_0(t)$ and $q_N(t)$ we have the equations

$$\ddot{q_0} + V_0'V_0'' = 0, \tag{17}$$

$$\ddot{q_N} + \left(V_0'V_0''\right)'q_N - V_0''' = 0. \tag{18}$$

After first integration we formally obtain

$$\dot{q}_0^2 + V_0'^{\,2} = 2E_0, \tag{19}$$

$$\dot{q}_0\dot{q}_N + V_0''q_N - V_0'' = E_N, \tag{20}$$

where E_0 and E_N are even integration constants and $V_0 \equiv V(q_0)$. Then the trajectory of such classical system is given by

$$t = \int \frac{dq_0}{\sqrt{2E_0 - V_0'^{\,2}}}, \tag{21}$$

$$q_N = 2\sqrt{2E_0 - V_0'^{\,2}} \int dq_0 \frac{E_N + V_0''}{(2E_0 - V_0'^{\,2})^{3/2}} + C\sqrt{2E_0 - V_0'^{\,2}}. \tag{22}$$

Let us assume that $q_0(t), q_N(t) \in \mathbb{R}$ (for simplicity, but more complicated cases are possible). From the above example one can see that classical "bosonic" trajectory of supersymmetric one dimensional system takes values not in the usual real or complex numbers but *in the larger structure*. This structure is known as the Study numbers [8] which form the so called dual algebra $\mathbf{D}_1(\iota;\mathbb{R})$ with one nilpotent generator, where $\iota = \mathbf{e}$. Dual numbers were introduced in 1873 by Clifford [32]. The dual algebra $\mathbf{D}_n(\iota;\mathbb{R})$ is defined as an associative algebra with unit and *nilpotent* generators $\iota_1,\ldots,\iota_n,\ \iota_k^2 = 0,\ k = 1,\ldots,n$ with *commutative* multiplication $\iota_k\iota_m = \iota_m\iota_k,\ k \neq m$. The general element of $\mathbf{D}_n(\iota;\mathbb{C})$ has the form $\mathbf{a} = a_0 + \sum_{p=1}^{2^n-1}\sum_{k_1<\ldots<k_p} a_{k_1\ldots k_p}\iota_{k_1}\ldots\iota_{k_p},\quad a_0, a_{k_1\ldots k_p} \in \mathbb{C}$.For $n = 1$ we have $\mathbf{D}_1(\iota_1;\mathbb{C}) \ni \mathbf{a} = a_0 + a_1\iota_1$, i.e. dual (or Study) numbers, when $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. For $n = 2$ the general element of $\mathbf{D}_2(\iota_1,\iota_2;\mathbb{C})$ is written as follows: $\mathbf{a} = a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_{12}\iota_1\iota_2$. A function of a dual argument is defined by its Taylor expansion $f(\mathbf{x}) = f(x_0 + \iota_k x_N) = f(x_0) + \iota_k x_N f'(x_0)$. The dual numbers have many applications, e.g. in such fields as 3D measurement problem [33], Lie and Hopf algebra contractions [10, 34].

NILPOTENT MECHANICS. LAGRANGIAN FORMULATION

Let us consider the one-dimensional trajectory as a *dual algebra* valued function[1] $\mathbf{x}(\mathbf{T})$, $\mathbf{x}, \mathbf{T} \in \mathbf{D}_1(\iota;\mathbb{R})$ (i.e. with values in a Banach superalgebra Λ_0 with two generators $1,\ \iota$, where $\iota^2 = 0$ [35, 36]). Then

$$\mathbf{T} = t + \iota t_N, \quad \mathbf{x}(\mathbf{T}) = x_0(\mathbf{T}) + \iota x_N(\mathbf{T}). \tag{23}$$

The derivative is of the following form [35, 36]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial}{\partial t} + \iota\frac{\partial}{\partial t_N}, \tag{24}$$

the conjugation is defined as

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{T}}} = \frac{\partial}{\partial t} - \iota\frac{\partial}{\partial t_N}, \quad \bar{\mathbf{T}} = t_N, \tag{25}$$

and the Cauchy-Riemann conditions are

$$\frac{\partial x_0(\mathbf{T})}{\partial t_N} = 0, \quad \frac{\partial x_0(\mathbf{T})}{\partial t} = \frac{\partial x_N(\mathbf{T})}{\partial t_N}. \tag{26}$$

Now the full derivative is

$$\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}} = \dot{x}_0(t) + \iota\left[\dot{x}_N(t) + \ddot{x}_0(t)\, t_N\right], \tag{27}$$

where dot denotes differentiation by t.

Let $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) + \iota U_N(\mathbf{x})$, then the *dual algebra* valued lagrangian $\mathbf{L}$ has the form

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\right)^2 - \mathbf{U}(\mathbf{x}(\mathbf{T})). \tag{28}$$

Expanding in series with respect to ι we obtain decomposition $\mathbf{L} = L_0 + \iota L_N$ (cf. (7) with $\mathbf{e} = \iota$), where

$$L_0 = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2(t) - U_0(x_0(t)), \tag{29}$$

$$L_N = \dot{x}_0(t)\,\dot{x}_N(t) - x_N(t)\,U_0'(x_0(t)) - U_N(x_0(t)) + t_N\dot{x}_0(t)\left[\ddot{x}_0(t) - U_0'(x_0(t))\right], \tag{30}$$

The prime here denotes differentiation with respect to the variable.

The second time parameter t_N emerges naturally within this approach and suggests relation to the two-time theory developed by Bars at al. [37, 38, 11, 12, 39, 13] and allows various holographic pictures of the supersymmetric model. We will discuss this in the forthcoming paper. Here we consider only the simplest picture where one takes into account single time t with $t_N = 0$.

[1] Dual valued variables will be written in bold.

Let us consider a model of the nilpotent mechanics defined by lagrangians (30) on hyperplane $t_N = 0$. In this case nilpotent mechanics is described by two lagrangians

$$L_0 = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 - U_0(x_0), \tag{31}$$

$$L_N = \dot{x}_0\dot{x}_N - x_N U_0'(x_0) - U_N(x_0), \tag{32}$$

where $L_0 = L_0(x_0, \dot{x}_0)$ is a usual lagrangian of point particle, $L_N = L_N(x_0, x_N, \dot{x}_0, \dot{x}_N)$ is nil lagrangian which depends on two degrees of freedom [2].

At the first glance we have three generalized momenta

$$p_0 = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_0} = \dot{x}_0, \tag{33}$$

$$p_N = \frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}_0} = \dot{x}_N, \tag{34}$$

$$p_1 = \frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}_N} = \dot{x}_0. \tag{35}$$

Let us notice that

$$p_1 = p_0, \tag{36}$$

what is a consequence of nilpotence and $\iota^2 = 0$.

Equations of motion are of the form

$$\ddot{x}_0 + U_0'(x_0) = 0, \tag{37}$$

$$\ddot{x}_N + x_N U_0''(x_0) + U_N'(x_0) = 0. \tag{38}$$

So we formally have an *additional* integral of motion E_N

$$\dot{x}_0\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_0} - L_0 = \frac{\dot{x}_0^2}{2} + U_0(x_0) = E_0, \tag{39}$$

$$\dot{x}_0\frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}_0} + \dot{x}_N\frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}_N} - L_N = \dot{x}_0\dot{x}_N + x_N U_0'(x_0) + U_N(x_0) = E_N. \tag{40}$$

Using (40) and $\partial/\partial t = \dot{x}_0\partial/\partial x_0$ we obtain

$$2\left(E_0 - U_0(x_0)\right)x_N'(x_0) + U_0'(x_0)\,x_N(x_0) = E_N - U_N(x_0). \tag{41}$$

One can see that the system has two return points

$$E_0 = U_0(x_0) \Longleftrightarrow x_N(x_0) = \frac{E_N - U_N(x_0)}{U_0'(x_0)}, \tag{42}$$

$$E_N = U_N(x_0) \Longleftrightarrow x_N(x_0) = C\sqrt{E_0 - U_0(x_0)}, \tag{43}$$

where C is integration constant. If simultaneously $E_0 = U_0(x_0)$ and $E_N = U_N(x_0)$, then $x_N(x_0) = 0$.

The solution for $x_N(x_0)$ can be obtained in the explicit form

$$x_N(x_0) = \sqrt{E_0 - U_0(x_0)}\left(\frac{1}{2}\int dx_0 \frac{E_N - U_N(x_0)}{\left(E_0 - U_0(x_0)\right)^{3/2}} + C\right). \tag{44}$$

The term with C can be removed by shifts in parameter t_N and therefore we choose $C = 0$. Then the on-shell lagrangians take the form

$$L_0 = E_0 - 2U_0(x_0), \tag{45}$$

$$L_N = E_N - 2U_N(x_0) - U_0'(x_0)\sqrt{E_0 - U_0(x_0)}\int dx_0 \frac{E_N - U_N(x_0)}{\left(E_0 - U_0(x_0)\right)^{3/2}}. \tag{46}$$

Note that we cannot put the term L_N to zero using parameters of the theory, and therefore the full lagrangian of the nilpotent mechanics always takes value in Study numbers ($L_N \neq 0$).

Standard passage to the phase space is not possible for the lagrangian $\mathbf{L}$, since its Hessian vanishes

$$\left|\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right| = \iota^2 = 0, \quad \dot{q}^i = \dot{x}_0, \dot{x}_N. \tag{47}$$

Nevertheless, we will not use here the Dirac constraint approach (see e.g.[40]), but we will try to provide some modification of the Legendre transformation specially for the dual space $\mathbf{D}_1(\iota;\mathbb{R})$ [29].

[2] We note that $x_0(t)$ and $x_N(t)$ are considered as 2 independent functions.

GENERALIZED LEGENDRE TRANSFORMATION

Let us consider a general function on dual space $\mathbf{D}_1(\iota;\mathbb{R}) \to \mathbf{D}_1(\iota;\mathbb{R})$ $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + \iota h(\mathbf{x})$, where $\mathbf{x} = x_0 + \iota x_N$. Then

$$\mathbf{y} = y_0 + \iota y_N, \tag{48}$$

$$y_0(x_0) = f(x_0), \tag{49}$$

$$y_N(x_0, x_N) = x_N f'(x_0) + h(x_0). \tag{50}$$

We construct the Legendre transformation for $y_0(x_0) \to g_0(p_0, x_0)$ and $y_N(x_0, x_N)$ separately taking into account that $y_N(x_0, x_N) \to g_N(p_N, p_1, x_0, x_N)$ is a function of two variables [41] as follows

$$g_0(p_0, x_0) = p_0 x_0 - y_0(x_0), \tag{51}$$

$$g_N(p_N, p_1, x_0, x_N) = p_N x_0 + p_1 x_N - y_N(x_0, x_N). \tag{52}$$

As usually [41] we determine parameters p_0, p_N, p_1 from condition of maximum of $g_0(p_0, x_0)$ and $g_N(p_N, p_1, x_0, x_N)$ as the functions of x_0, x_N, and obtain

$$p_0 = \frac{\partial y_0(x_0)}{\partial x_0} = f'(x_0), \tag{53}$$

$$p_N = \frac{\partial y_N(x_0, x_N)}{\partial x_0} = x_N f''(x_0) + h'(x_0), \tag{54}$$

$$p_1 = \frac{\partial y_N(x_0, x_N)}{\partial x_N} = f'(x_0). \tag{55}$$

Equality of p_0 and p_1, i.e.

$$p_0 = p_1 \tag{56}$$

is a consequence of generalized Cauchy-Riemann conditions for the analyticity of dual number valued functions [35].

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_N} = 0, \tag{57}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_0} = \frac{\partial y_N}{\partial x_N}. \tag{58}$$

We use (52), (56) and (50) to obtain

$$g_N = p_N x_0 + p_0 x_N - y_N = p_N x_0 + f'(x_0) x_N - x_N f'(x_0) - h(x_0) = p_N x_0 - h(x_0). \tag{59}$$

Then the final form of the Legendre transformation (taking into account (56)) is

$$\mathbf{g}(p_N, p_1, x_0, x_N) = g_0(p_0, x_0) + \iota g_N(p_N, p_1, x_0, x_N), \tag{60}$$

where

$$g_0(p_0) = p_0 x_0(p_0) - f(x_0(p_0)), \tag{61}$$

$$g_N(p_N, p_0) = p_N x_0(p_0) - h(x_0(p_0)). \tag{62}$$

The function $x_0(p_0)$ is determined from eq.(53). Notice that the difference between (61) and (62) is only in $f(x_0(p_0))$ and $h(x_0(p_0))$.

NILPOTENT MECHANICS. HAMILTONIAN FORMULATION

Let us apply previously generalized Legendre transformation to the nilpotent mechanics lagrangian $\mathbf{L} = L_0 + \iota L_N$, where L_0 and L_N are given by eqs. (31) and (32) respectively. In this way we obtain the following hamiltonian

$$\mathbf{H} = H_0 + \iota H_N, \tag{63}$$

where

$$H_0(x_0, p_0) = p_0 \dot{x}_0 - L_0 = \frac{p_0^2}{2} + U_0(x_0), \tag{64}$$

$$H_N(x_0, x_N, p_0, p_N) = p_N \dot{x}_0 + p_0 \dot{x}_N - L_N = p_0 p_N + x_N U_0'(x_0) + U_N(x_0), \tag{65}$$

and we have used condition $p_1 = p_0$ (56). The resulting hamiltonian equations of motion are of the form

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\partial H_0}{\partial p_0}, \quad \dot{x}_0 = \frac{\partial H_N}{\partial p_N}, \quad \dot{x}_N = \frac{\partial H_N}{\partial p_0}, \\ \dot{p}_0 &= -\frac{\partial H_0}{\partial x_0}, \quad \dot{p}_N = -\frac{\partial H_N}{\partial x_0}, \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial H_N}{\partial x_N}. \end{aligned} \tag{66}$$

Analogously as for L_N now H_N contains all the information about motion of the system. Component energies are defined by

$$H_0 (x_0, p_0) = E_0, \tag{67}$$

$$H_N (x_0, x_N, p_0, p_N) = E_N \tag{68}$$

and the full energy is a dual valued number as well $\mathbf{E} = E_0 + \iota E_N$. The component phase space has two sectors with Poisson brackets specific for each sector. Namely

$$\{A, B\}_0 = \left(\frac{\partial A}{\partial x_0}\frac{\partial B}{\partial p_0} - \frac{\partial A}{\partial p_0}\frac{\partial B}{\partial x_0}\right) \tag{69}$$

and

$$\{A, B\}_N = \left(\frac{\partial A}{\partial x_0}\frac{\partial B}{\partial p_N} - \frac{\partial A}{\partial p_N}\frac{\partial B}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial x_N}\frac{\partial B}{\partial p_0} - \frac{\partial A}{\partial p_0}\frac{\partial B}{\partial x_N}\right). \tag{70}$$

We note that in "nilpotent" sector of the phase space the Poisson bracket is related to unusual conjugation of canonical variables

$$x_0 \leftrightarrow p_N \text{ and } x_N \leftrightarrow p_0. \tag{71}$$

The second Poisson bracket here ω_N^{ij} can lead to additional quantization rule with additional (to Planck $\hbar$) constant $\hbar_N$ using nil Hamiltonian H_N (65). Analogous effect is also present in the quantization over the oddons of anti-bracket (supersymmetric) systems (cf. [42, 43] and references therein).

CONCLUSIONS

We emphasize that the dual numbers are necessary to formulate in a consistent way supersymmetric models. The supersymmetry transformations as well as the dynamics of the model have to be written in terms of a new nilfold language. General picture of new nilpotent models on the dual space $\mathbf{D}_1(\iota; \mathbb{R})$ corresponding to $N = 1$ supersymmetric models requires the presence of two time parameters what is related closely to the two-time approach developed by Bars at al.[37, 38]. In case of N supersymmetries [44, 45] one should consider many-time approach. This aspect of the nilpotent mechanics as well as its relation to the $D = 11$ supersymmetric mechanics and string/brane/M theory will be presented elsewhere.

Acknowledgments. One of the authors (S.D.) would like to thank Jerzy Lukierski for kind hospitality at the University of Wrocław, where this work was begun, and V. G. Zima for useful discussions.

REFERENCES

1. Martin J. L. // *General classical dynamics, and the 'classical analogue' of a Fermi oscillator*. Proc. Roy. Soc. London. 1959. V. **A251**. № 12571. P. 536–543.
2. Martin J. L. // *The Feymann principle for a Fermi system*. Proc. Roy. Soc. London. 1959. V. **A251**. № 1267. P. 543–549.
3. Berezin F. A. Introduction to Superanalysis. Dordrecht. *Reidel*, 1987.
4. Junker G. // *Recent developments in supersymmetric quantum mechanics*. Turkish J. Phys. 1995. V. **19**. P. 230–248.
5. Akulov V. P. // *New class of solutions for Boson-Fermion system of equations and supersymmetry*. Ukrainian J. Phys. 1986. V. **31**. № 11. P. 1615–1618.
6. Akulov V. P., Duplij S. // *Quasiclassical quantization in supersymmetric quantum mechanics*. Ukrainian J. Phys. 1988. V. **33**. № 2. P. 309–311.
7. Akulov V. P., Duplij S. // *Nilpotent marsh and SUSY QM*. Supersymmetries and Quantum Symmetries. Heidelberg. *Springer-Verlag*, 1998. P. 235–242.
8. Study E. Geometrie der Dynamen. Leipzig. *Leipzig Univ.*, 1903. 321 p.
9. Gromov N. A. Contractions and analytical continuations of classical groups. Syktyvkar. *Ural section AN SSSR*, 1990. 220 p.
10. Gromov N. A. // *Contraction of algebraical structures and different couplings of Cayley-Klein and Hopf structures*. Group Theory in Physics. Edirne. *Turkish Journal of Physics, Vol. 21, No. 3*, 1995. P. 113–119.
11. Bars I., Kounnas C. // *Theories with two times*. Phys. Lett. 1997. V. **B402**. № 1. P. 25–32.
12. Bars I., Kounnas C. // *String and particle with two times*. Phys. Rev. 1997. V. **D56**. P. 3664–3671.

13. Bars I., Deliduman C., Andreev O. // *Gauged duality, conformal symmetry, and spacetime with two times*. Phys. Rev. 1998. V. **D58**. P. 066004.
14. Rogers A. // *A global theory of supermanifolds*. J. Math. Phys. 1980. V. **21**. № 5. P. 1352–1365.
15. Rabin J. M., Crane L. // *How different are the supermanifolds of Rogers and DeWitt?* Comm. Math. Phys. 1985. V. **102**. № 1. P. 123–137.
16. Rabin J. M., Crane L. // *Global properties of supermanifolds*. Comm. Math. Phys. 1985. V. **100**. № 2. P. 141–160.
17. De Witt B. S. Supermanifolds. Cambridge. *Cambridge Univ. Press*, 2nd edition. 1992. 407 p.
18. Berezin F. A., Marinov M. S. // *Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics*. Ann. Phys. 1977. V. **104**. P. 336–362.
19. Junker G., Matthiesen S. // *Supersymmetric classical mechanics*. J. Phys. 1994. V. **A27**. P. L751–L755.
20. Junker G., Matthiesen S., Inomata A. // *Classical and quasiclassical aspects of supersymmetric quantum mechanics*. Erlangen, 1995. 8 p. (*Preprint / Inst. Theor. Phys.*, hep-th/9510230).
21. Tabunschyk K. V. // *The Hamilton-Jakobi method for the classical mechanics in Grassmann algebra*. Lviv, 1998. 10 p. (*Preprint / Inst. Cond. Matter Phys.*; ICMP-98-22E, hep-th/9811020).
22. Manton N. S. // *Deconstructing supersymmetry*. J. Math. Phys. 1999. V. **40**. P. 736–750.
23. Heumann R., Manton N. S. // *Classical supersymmetric mechanics*. Ann. Phys. 2000. V. **284**. P. 52–88.
24. Palumbo F. // *Nilpotent commuting scalar fields and random walk*. Phys. Lett. 1994. V. **B328**. P. 79–83.
25. Palumbo F. // *Nilpotent commuting fields*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1994. V. **34**. P. 522–531.
26. Palumbo F. // *ϕ^4 theory with even elements of a Grassmann algebra*. Phys. Rev. 1994. V. **D50**. P. 2826–2829.
27. Barbaro M. B., Molinari A., Palumbo F. // *Bosonization and even Grassmann variables*. Nucl. Phys. 1997. V. **B487**. P. 492–511.
28. McCarthy R. // *On the computation of stabilized tensor functors and relative algebraic K-theory of dual numbers*. Urbana, 1994. 17 p. (*Preprint / Univ. Illinois*).
29. Duplij S. // *Nilpotent mechanics and supersymmetry*. Probl. Nucl. Phys. Cosm. Rays. 1988. V. **30**. P. 41–49.
30. Konechny A., Schwarz A. // *On $(k \oplus l \mid q)$-dimensional supermanifolds*. Davis, 1997. 19 p. (*Preprint / Univ. of California*, hep-th/9706003).
31. Fei S.-M., Guo H.-Y., Yu Y. // *Symplectic geometry and geometric quantization on supermanifold with U numbers*. Z. Phys. 1989. V. **C45**. P. 339–348.
32. Clifford W. // *Preliminary sketch of bi-quaternions*. Proc. London Math. Soc. 1873. V. **4**. P. 381–395.
33. Goddard J. S., Abidi M. A. // *Pose and motion estimation using dual quaternion-based extended Kalman filtering*. Knoxville, 1997. 12 p. (*Preprint / Univ. Tennessee*).
34. Ballesteros A., Gromov N. A., Herranz F. J., del Olmo M. A., Santander M. // *Lie bialgebra contractions and quantum deformations of quasiorthogonal algebras*. J. Math. Phys. 1995. V. **36**. P. 5916–5937.
35. Vladimirov V. S., Volovich I. V. // *Superanalysis*. **1**. *Differential calculus*. Theor. Math. Phys. 1984. V. **59**. № 1. P. 3–27.
36. Khrennikov A. Y. Superanalysis. M.. *Nauka*, 1997. 304 p.
37. Bars I., Kounnas C. // *A new supersymmetry*. Geneva, 1996. 26 p. (*Preprint / CERN*; CERN-TH/96-351, hep-th/9612119).
38. Bars I., Deliduman C. // *Superstrings with new supersymmetry in* $(9,2)$ *and* $(10,2)$ *dimensions*. Phys. Rev. 1997. V. **D56**. P. 6579–6587.
39. Bars I., Deliduman C., Minic D. // *Supersymmetric two-time physics*. Los Angeles, 1998. 18 p. (*Preprint / Univ. Southern California*; USC-98/HEP-B6, hep-th/9812161).
40. Gitman D. M., Tyutin I. V. Canonical quantization of constrained fields. M.. *Nauka*, 1986. 216 p.
41. Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Berlin. *Springer*, 1989.
42. Frydryszak A. // *Supersymmetric mechanics with an odd action functional*. J. Phys. 1993. V. **A26**. P. 7227–7234.
43. Frydryszak A. // *The graded Heisenberg group and its Q-representations (The odd part)*. Lett. Math. Phys. 1998. V. **44**. P. 89–97.
44. Paban S., Sethi S., Stern M. // *Constraints from extended supersymmetry in quantum mechanics*. Princeton, 1998. 12 p. (*Preprint / Inst. Adv. Study*, hep-th/9805018).
45. Akulov V., Kudinov M. // *Extended supersymmetric quantum mechanics*. Phys. Lett. 1999. V. **B460**. P. 365–370.

СУПЕРСИММЕТРИЯ, НЕТРИВИАЛЬНАЯ ФЕРМИОННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Дуплий [1], А. Фридрушак [2]

[1] *Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина*
[2] *Институт теоретической физики, университет Вроцлава, пл. Макса Борна 9, 50-204 Вроцлав, Польша*

Необходимость рассматривать четные нильпотентные направления в последовательной классической суперсимметричной теории продемонстрирована на примере простейшей суперсимметричной модели. Утверждается, что любая суперсимметричная теория на фермионной массовой поверхности эквивалентна соответствующей нильпотентной механике.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: супермеханика, дуальное число, нильпотентность, фермионная массовая поверхность, преобразование Лежандра, скобки Пуассона

УДК: 532.783

К ГИДРОДИНАМИКЕ ОДНООСНЫХ НЕМАТИКОВ С КОНФОРМАЦИОННЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

М.Ю. Ковалевский, А.Л. Шишкин
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
61108, Харьков, Академическая,1
E-mail: mik@kipt.kharkov.ua
Поступила в редакцию 5 февраля 2001

На основе гамильтонова подхода рассмотрена динамика одноосных нематических жидких кристаллов и дан вывод нелинейных уравнений идеальной гидродинамики учитывающих форму молекул (дископодобные и стержнеподобные молекулы) и конформационные степени свободы. Плотности аддитивных интегралов движения и соответствующие им потоки представлены в терминах термодинамического потенциала. Рассмотрены спектры линейных колебаний в этих жидких кристаллах. Найдены две ветви акустических колебаний и выяснен характер анизотропии обеих скоростей звуков.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нематик, конформация, гидродинамика, спектры, второй звук, анизотропия.

В настоящее время большой интерес вызывает изучение жидкокристаллических сред. Хорошо известно, что достаточно сложный состав элементов образующих жидкие кристаллы (ЖК) приводит к иерархии структурных уровней их организации. Обычно выделяют локальный (молекулярный) порядок, координационный (межмолекулярный) и макроскопический (дальний порядок) [1]. Каждому уровню упорядочения соответствует набор параметров характеризующих симметрию и структуру ЖК. В работах [2-3] показано, что уже на масштабах порядка молекулярного размера необходимо введение параметров конформационного состояния молекулярного ансамбля. Равновесные свойства и фазовые переходы описывают взаимосогласованным образом используя представление о конформационных параметрах порядка и критических параметрах ориентационного порядка [4]. Проблема динамического поведения жидких кристаллов хорошо разработана на макроскопическом уровне. В существенно меньшей степени учтено влияние формы молекул и конформационных степеней свободы на динамические процессы жидких кристаллов [5-8].

Цель настоящей работы - изучение динамических процессов в одноосных нематиках с учетом конформационных параметров и геометрической формы молекул этих жидких кристаллов используя гамильтонов подход. Как показано в работах [9-11] скобки Пуассона (СП) и соответственно уравнения гидродинамики имеют различный вид для дископодобных и стержнеподобных молекул. Физическими примерами влияния геометрии молекул являются разный знак реактивного коэффициента в уравнениях гидродинамики [12], различные возможности реализации сегнетоэлектрического состояния [13,14], спектральные особенности поляризованного поглощения света [15]. В работе [16] выяснено, что в двухосных нематиках также имеет место связь между формой молекул и гидродинамикой жидких кристаллов. Она проявляется, во - первых, в различной структуре скобок Пуассона для параметров сокращенного описания, во вторых в расширении числа параметров сокращенного описания на гидродинамической стадии эволюции. Появление дополнительной скалярной величины обусловлено угловой степенью свободы в двухосном жидком кристалле.

В нематематической фазе жидких кристаллов происходит спонтанное нарушение вращательной инвариантности, поэтому, наряду с динамическими переменными, описывающими состояние изотропной жидкости, - плотностью массы $\rho(x)$, плотностью импульса $\pi_k(x)$, плотностью энтропии $\sigma(x)$, вводят в рассмотрение дополнительный параметр - единичный вектор пространственной анизотропии $\vec{n}(x)$ (директор), связанный с нарушением вращательной симметрии. В работе [11] показано как этот вектор анизотропии может быть представлен в терминах матрицы произвольных деформаций $b_{ij}(x)$. В рамках гамильтонова подхода получен набор СП для выписанных гидродинамических переменных

$$\{\pi_i(x),\sigma(x')\}=-\sigma(x)\nabla_i\delta(x-x'),\qquad \{\pi_i(x),b_{kj}(x')\}=-b_{ki}(x)\nabla_j\delta(x-x'),$$
$$\{\pi_i(x),\pi_j(x')\}=\pi_j(x)\nabla'_i\delta(x-x')-\pi_i(x')\nabla_j\delta(x-x'),\tag{1}$$
$$\{\pi_i(x),\rho(x')\}=\rho(x)\nabla'_i\delta(x-x'),$$

служащих основой построения нелинейных уравнений гидродинамического типа для нормальных жидкостей, кристаллов и жидких кристаллов. Здесь матрица произвольных деформаций

$$b_{ki}(x) \equiv \delta_{ki} - \nabla_i u_k(x) \tag{2}$$

определяется в терминах вектора смещения $u_k(x)$ канонически сопряженного к плотности импульса, связывающего лагранжеву координату ξ_k с эйлеровой координатой x_k: $x_k = \xi_k + u_k(x)$.

Рассмотрим две возможности введения единичного вектора пространственной анизотропии в терминах матрицы произвольных деформаций. Одна из них соответствует нематику с молекулами стержнеобразной формы, другая - нематику с дискообразными молекулами. Пусть частицы среды состоят из молекул стержнеобразной формы (нематики каламитного типа). Тогда в не деформированном состоянии можно задать некоторое семейство линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением стержней. Пусть $\xi_i = \xi_i(\alpha)$ - параметрические уравнения одной из линий этого семейства. Тогда направление стержней в каждой точке характеризуется вектором с координатами $\underline{a}_i \equiv d\xi_i / d\alpha$. Этот вектор описывает ориентационный и конформационный порядок недеформированного жидкого кристалла и имеет смысл лагранжевой переменной. Модуль этого вектора задает конформационную степень свободы недеформированного состояния. При деформации среды линии семейства также деформируются, происходит изменение направления оси анизотропии и конформационного параметра. Пусть $x_i = x_i(\alpha)$ - новые параметрические уравнения уже рассмотренной линии семейства после деформации характеризуются вектором $a_i(x) = dx_i / d\alpha$ Учитывая, что $x_i = x_i(\xi)$, легко видеть, что векторы $\underline{a}_i$ и $a_i(x)$ связаны соотношением

$$a_i(x) = b_{ij}^{-1}(x)\underline{a}_j \ . \tag{3}$$

Отсюда следует, что единичный вектор для произвольного неравновесного состояния, может быть определен формулой

$$n_i(x) = a_i(x)/a(x) \ . \tag{4}$$

Используя определение матрицы произвольных деформаций $b_{ij}(x)$ (2), легко найти СП:

$$\left\{\pi_i(x),\, b_{sl}^{-1}(x')\right\} = \delta(x-x')\nabla_i\, b_{sl}^{-1}(x) - \delta_{is} b_{kl}^{-1}(x')\nabla'_k\, \delta(x-x'). \tag{5}$$

Из (1)(4)(5) получим СП для переменных $\pi_i(x)$, $n_j(x)$:

$$\left\{\pi_\lambda(x),\, n_j(x')\right\} = \delta(x-x')\nabla_\lambda\, n_j(x) - \delta_{\lambda j}^{\perp}(\vec{n}(x'))n_k(x')\nabla'_k\, \delta(x-x'),$$
$$\delta_{ij}^{\perp}(n(x)) \equiv \delta_{ij} - n_i(x)n_j(x). \tag{6}$$

Сделаем теперь пояснение, обосновывающее необходимость расширения набора параметров сокращенного описания для жидких кристаллов, которое обусловлено конформационной нежесткостью мезогенных молекул. Матрица $b_{ki}(x)$ (2) задает ориентационные и трансляционные состояния равновесия и определяет группу движений в неравновесном состоянии. Плотность вещества произвольного состояния $\rho(x)$ связана с плотностью вещества недеформированного состояния $\underline{\rho}$ равенством [11]

$$\rho(x) = \underline{\rho}\det\left|b_{ij}(x)\right| .$$

Другая возможность проявления группы произвольных деформаций реализуется в двухосном нематике, где параметром сокращенного описания является величина $\approx b_{ik}\xi_k b_{il}\xi_l{}'$, имеющая физический смысл угла между осями [16], где $\vec{\xi}, \vec{\xi}'$ - лагранжевы векторы описывающие недеформированные оси. Для одноосного нематика естественной величиной имеющей физический смысл конформационного порядка является свертка $\approx b_{ik}\xi_k b_{il}\xi_l$, где $\vec{\xi}$ - лагранжев вектор задает недеформированную ось нематика. Учет конформационных степеней свободы при описании динамики нематиков мы проводим путем включения в набор параметров сокращенного описания дополнительной переменной - модуля вектора $a(x) = |\vec{a}(x)|$, придавая ему физическую интерпретацию конформационного структурного элемента. В соответствии с формулой (3) при учете соотношений (1) получим скобку Пуассона для этой гидродинамической величины

$$\{\pi_i(x), a(x')\} = \delta(x-x')\nabla_i a(x) + a(x')\delta_{i\lambda}^{\perp}(\vec{n}(x'))\nabla'_\lambda\delta(x-x') . \tag{7}$$

СП (1),(6)(7) образуют алгебру динамических переменных нематика со стержнеобразными молекулами при наличии конформационных степеней свободы.

Уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a(x)=\left(\varepsilon(x),\pi_k(x),\rho(x)\right)$ имеют вид

$$\dot{\varsigma}_a(x)=-\nabla_k\zeta_{ak}(x), \tag{8}$$

где $\varepsilon(x)$ - плотность энергии. Плотности потоков аддитивных интегралов движения $\zeta_{ak}(x)$ в терминах скобок Пуассона от соответствующих плотностей имеют вид [11]

$$\zeta_{ak}(x)=-\delta_{ak}\varepsilon(x)+\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda\{\zeta_a(x+\lambda x'),\varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}, \qquad a\neq 0,$$

$$\zeta_{0k}(x)=\frac{1}{2}\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda\{\varepsilon(x+\lambda x'),\varepsilon(x-(1-\lambda)x')\}. \tag{9}$$

Полагая, что гамильтониан H имеет галилеево-инвариантный вид

$$H=\int d^3x\left(\frac{\pi_i^2(x)}{2\rho(x)}+\nu(\rho(x),\sigma(x),\vec{n}(x),\nabla\vec{n}(x),a(x))\right), \tag{10}$$

где ν - плотность энергии взаимодействия, локально зависящая от параметров сокращенного описания, и используя формулы (1)(6)(7)(9) получим выражения для плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах термодинамического потенциала $\omega\equiv-\sigma+Y_a\zeta_a=\omega(Y,\vec{n},\nabla\vec{n},a)$:

$$\zeta_{ak}=-\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0}+\left[\frac{\partial\omega}{\partial\nabla_k n_j}\nabla_i n_j+n_i\left(\frac{\partial\omega}{\partial n_k}-\nabla_j\frac{\partial\omega}{\partial\nabla_j n_k}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial a}a\delta_{ik}^{\perp}(\vec{n})\right]\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_i}{Y_0}, \tag{11}$$

здесь Y_a - термодинамические силы, связанные с плотностями аддитивных интегралов движения ζ_a соотношениями $\partial\omega/\partial Y_a=\zeta_a$. Уравнения идеальной гидродинамики одноосной фазы стержнеподобного нематика имеют вид

$$\dot{\sigma}(x)=-\nabla_i\left(\sigma(x)v_i(x)\right), \quad \dot{\rho}(x)=-\nabla_i\pi_i(x), \qquad \dot{\pi}_i(x)=-\nabla_k t_{ik}(x),$$

$$\dot{n}_j(x)=-v_s(x)\nabla_s n_j(x)-\delta_{ij}^{\perp}(x)n_\lambda(x)\nabla_\lambda v_i(x), \tag{12}$$

$$\dot{a}(x)=-v_s(x)\nabla_s a(x)-a(x)\delta_{kl}^{\perp}(\vec{n}(x))\nabla_k v_l(x).$$

Здесь $v_i=\pi_i/\rho$ - скорость движения единицы массы среды. Формулы (11)(12) представляют собой полный набор уравнений идеальной гидродинамики одноосного нематика состоящего из стержнеподобных молекул с учетом конформационной степени свободы.

Рассмотрим теперь нематик, состоящий из дискообразных молекул. Направление ориентации таких жидких кристаллов определяется единичным вектором нормали к плоскости таких молекул. Если ввести семейство поверхностей, касательные поверхности к которым в каждой точке совпадают с плоскостями дисков, то, как следует из предыдущего рассмотрения, два неколлинеарных вектора $d_i(x)$, $f_i(x)$, определяющих деформированное положение плоскости, могут быть представлены в виде

$$d_i(x)=b_{ij}^{-1}(x)\underline{d}_j, \quad f_i(x)=b_{ij}^{-1}(x)\underline{f}_j,$$

где $\underline{d}_i$, $\underline{f}_i$ - некоторые постоянные неколлинеарные векторы, определяющие положение плоскости и конформационные степени свободы недеформированного состояния. Тогда вектор нормали к плоскости, натянутой на векторы $d_i(x)$, $f_i(x)$, равен

$$b_i(x)=\underline{b}_k\,\partial\xi_k/\partial x_i\equiv\underline{b}_k b_{ki}(x),$$

где $\bar{\underline{b}}=\left(\bar{\underline{d}}\times\bar{\underline{f}}\right)$ - вектор, определяющий направление пространственной анизотропии и конформацию недеформированного состояния. Единичный вектор нормали к плоскости дискообразной молекулы определим формулой

$$n_i(x)=b_i(x)/b(x). \tag{13}$$

Используя определение вектора анизотропии $n_i(x)$ (13) и формулы (1), для величин $\pi_i(x), n_i(x), b(x) \equiv |\vec{b}(x)|$ получим скобки Пуассона:

$$\left\{\pi_i(x),\ n_j(x')\right\} = \delta(x-x')\nabla_i\, n_j(x) + \delta^{\perp}_{jk}(x')\, n_i(x')\nabla'_k\ \delta(x-x'). \tag{14}$$

$$\left\{\pi_i(x), b(x')\right\} = \delta(x-x')\nabla_i b(x) + b(x') n_i(x') n_\lambda(x')\nabla'_\lambda \delta(x-x').$$

СП (1),(14) образуют алгебру динамических переменных нематика с дискообразными молекулами при наличии конформационных степеней свободы. Далее поступая аналогично рассмотренному предыдущему случаю не трудно получить уравнения идеальной гидродинамики для молекул дископодобной формы молекул с учетом конформационной степени свободы

$$\dot{\sigma}(x) = -\nabla_i\left(\sigma(x) v_i(x)\right),\quad \dot{\rho}(x) = -\nabla_i \pi_i(x),\qquad \dot{\pi}_i(x) = -\nabla_k t_{ik}(x),$$

$$\dot{n}_j(x) = -v_s(x)\nabla_s n_j(x) - n_i(x)\delta^{\perp}_{j\lambda}(\vec{n}(x))\nabla_\lambda v_i(x), \tag{15}$$

$$\dot{b}(x) = -v_s(x)\nabla_s b(x) - b(x) n_k(x) n_l(x)\nabla_k v_l(x).$$

Плотности потоков аддитивных интегралов движения в этом случае имеют вид

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[\frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j}\nabla_i n_j + n_i\left(\frac{\partial \omega}{\partial n_k} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_k}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial b} b n_i n_k\right]\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_i}{Y_0}. \tag{16}$$

Обратим внимание, что выбор параметров сокращенного описания на гидродинамическом этапе эволюции для вырожденных конденсированных сред не является тривиальной задачей. Концепция спонтанного нарушения симметрии, хорошо "работающая" для квантовых жидкостей и магнетиков, для жидкокристаллических сред не совсем достаточна. Причина этого не только отсутствие свойства квантовости объекта исследований, но и явное влияние геометрии структурных элементов таких сред на количество и характер параметров сокращенного описания. Кроме того, как не трудно заметить, введенные конформационные параметры сокращенного описания в соответствии с уравнениями (12)(15) имеют вполне "гидродинамический" вид, то есть время релаксации для таких переменных растет с уменьшением характерного волнового вектора гидродинамического движения.

Исследуем теперь спектры коллективных возбуждений на основе полученных уравнений одноосного нематика. Полагаем, что состояние равновесия такой среды однородно и среда как целое покоится ($v_k = 0$). Линеаризация уравнения идеальной гидродинамики (11),(12) приводит к дисперсионному уравнению

$$\det\left|\omega^2\delta_{ij} - k_i k_j \frac{\partial P}{\partial \rho} - \underline{A}(a) R_i(\vec{k}) R_j(\vec{k})\right| = 0,$$

где $R_i(\vec{k}) \equiv \delta^{\perp}_{il}(\vec{n}) k_l$. Раскрывая определитель, найдем уравнение для определения спектров коллективных возбуждений

$$\omega^2\left(\omega^4 - \omega^2 L_4(\vec{k}) + L_2(\vec{k})\right) = 0, \tag{17}$$

где введены обозначения

$$L_4(\vec{k}) = k^2\left(c^2 + \underline{A}\right) - (\vec{k}\vec{n})^2\underline{A} > 0,\qquad L_2(k) = c^2\underline{A}(\vec{k}\vec{n})^2\left(k^2 - (\vec{k}\vec{n})^2\right) > 0,$$

$$c^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} > 0,\qquad \underline{A} \equiv a^2\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial a^2} > 0.$$

Здесь c - скорость акустических волн в нормальной фазе. Таким образом, видим, что в одноосном нематике каламитного типа возможно распространение двух акустических ветвей колебаний

$$\omega^2_{\pm}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\left(L_4(\vec{k}) \pm \sqrt{L_4^2(\vec{k}) - 4L_2(\vec{k})}\right) \equiv c^2_{\pm}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)k^2, \tag{18}$$

соответствующих первому и второму звуку. Решение (18) со знаком (+) отвечает ветви аналогичной первому звуку, который имеется и в нормальной жидкости. Решение со знаком (-) представляет собой новую ветвь возбуждений, обусловленную учетом конформационного фактора жидкого кристалла a. Эта мода характеризует изменение величины размера вектора анизотропии за счет процессов сжатия или растяжения. Для обоих решений существенна анизотропия скоростей звуков.

В сферической системе координат $\bar{k}\bar{n} = k\cos\theta$, где θ - полярный угол, задающий направление волнового вектора $\bar{k}$. В терминах этой угловой переменной скорости $c_{\pm}$ имеют вид

$$c_{\pm}(\theta,\varphi) = \frac{c}{\sqrt{2}}\left\{1 + \lambda\sin^2\theta \pm \left[\left(1 + \lambda\sin^2\theta\right)^2 - \lambda\sin^2 2\theta\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \qquad (19)$$

где $\lambda \equiv \underline{A}/c^2$. Компьютерная графика раскрывает характер анизотропии спектров (19) (см. рис.1).

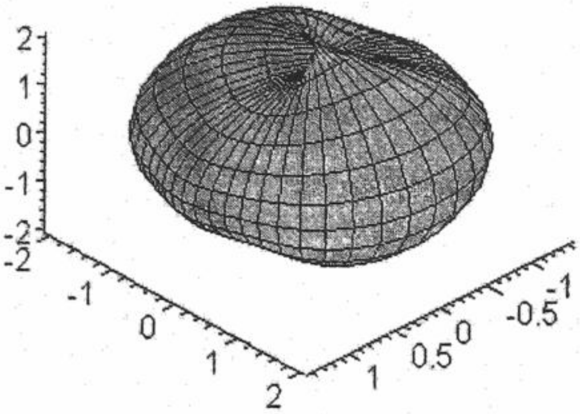

Рис.1.а

Угловая зависимость скорости c_+ при $\lambda = 1$.

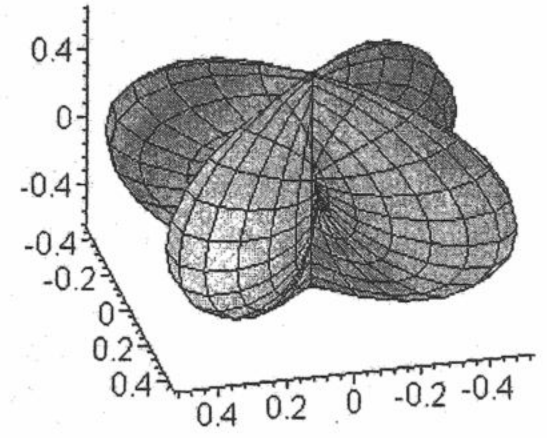

Рис 1.б

Угловая зависимость скорости c_- при $\lambda = 1$.

Линеаризация уравнений гидродинамики (15)(16) для случая дископодобных молекул приводит к дисперсионному уравнению

$$\det\left|\omega^2\delta_{ij} - k_i k_j \frac{\partial P}{\partial\rho} - b^2\frac{\partial^2\omega}{\partial b^2}\left(\bar{n}\bar{k}\right)^2 n_i n_j\right| = 0$$

и к спектрам

$$\omega_{\pm}^2\left(\bar{k}\right) = \frac{1}{2}\left(L_4\left(\bar{k}\right) \pm \sqrt{L_4^2\left(\bar{k}\right) - 4L_2\left(\bar{k}\right)}\right) \equiv c_{\pm}^2\left(\frac{\bar{k}}{k}\right)k^2,$$

где

$$L_2\left(\bar{k}\right) = c^2\underline{B}\left(\bar{k}\bar{n}\right)^2\left(k^2 - \left(\bar{k}\bar{n}\right)^2\right) > 0, \qquad \underline{B} = b^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial b^2} > 0, \qquad L_4\left(\bar{k}\right) = k^2c^2 + \underline{B}\left(\bar{k}\bar{n}\right)^2 > 0.$$

В этом случае также получаются две анизотропные скорости акустических волн

$$c_{\pm}(\theta,\varphi) = \frac{c}{\sqrt{2}}\left\{1 + \lambda\cos^2\theta \pm \left[\left(1 + \lambda\cos^2\theta\right)^2 - \lambda\sin^2 2\theta\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \qquad (20)$$

где $\lambda \equiv \underline{B}/c^2$. Характер анизотропии спектров (20) представлен на рис.2а и 2б. Дополнительная мода характеризует изменение величины размера площадки дископодобного жидкого кристалла за счет процессов сжатия или растяжения. Для обоих решений существенна анизотропия скоростей звуков.

Сравнивая формулы (19)(20) с результатами работ [10,17] отметим, что в последних дополнительные моды в одноосных нематических жидких кристаллах, связанные с нарушенной симметрией относительно поворотов в конфигурационном пространстве, имели чисто диссипативный характер. Учет конформационной степени, как мы увидели, свободы приводит к возможности распространения второго звука у обоих типов одноосных нематиков уже в адиабатическом приближении. При этом анизотропия второго звука имеет гораздо более резкий характер по сравнению с первым звуком. Ситуация в некоторой степени аналогична той, которая имеет место в смектических жидких кристаллах, где появление второго звука связано с появлением в наборе гидродинамических параметров дополнительной смектической переменной.

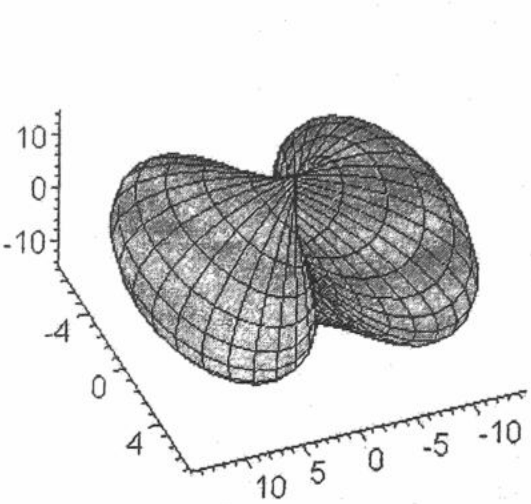

Рис. 2а

Угловая зависимость скорости c_+ при $\lambda = 100$.

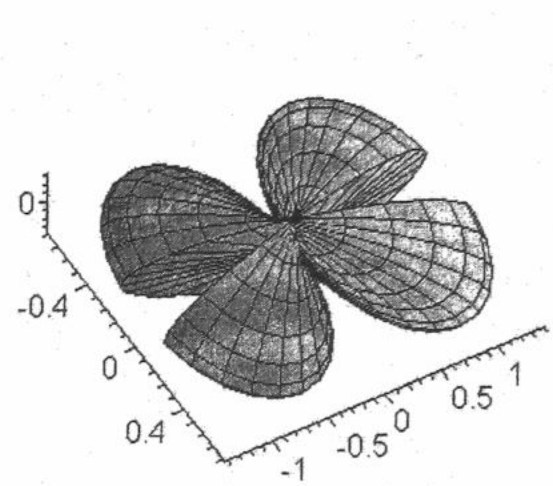

Рис.2.б

Угловая зависимость скорости c_- при $\lambda = 100$.

Авторы благодарят Л.Н. Лисецкого и П.П. Штефанюка за ценные обсуждения некоторых вопросов физики жидких кристаллов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е.М. Аверьянов - Эффекты локального поля в оптике жидких кристаллов - // Новосибирск: Наука 1999, 552с.
2. J.W. Emsley (ed.) - Nuclear magnetic resonance of liquid crystals - // Dordrecht: Riedel Publ. Press, 1985, 572p.
3. C. Zannoni - // Proc. of NATO Advanced Study Inst. 1988, p.57-83.
4. Е.М. Аверьянов - // ФТТ 1982, т.24, № 9, с.2839-2841.
5. R. Tarroni, C. Zannoni - // J. Chem. Phys 1991, v.95, № 6, p.4550-4564.
6. A. Ferrarini, G.J. Moro, P.L.Nordio - // Liq.Cryst. 1990, v.8, № 5, p.593-621.
7. A. Ferrarini, P.L.Nordio - // J. Chem. Soc. Trans. 1992, v.88, № 13, p.1733-1746.
8. A. Ferrarini, A. Pilimeno, P.L.Nordio - // Liq. Cryst. 1993, v.14, № 1, p. 169-184.
9. Г.Е. Воловик - // Письма в ЖЭТФ, 1980, т.31, с.297-300.
10 В.В. Лебедев, Е.М. Кац - Динамика жидких кристаллов. - // М.: Наука, 1988, 144с.
11 A.A. Isayev, M.Y. Kovalevsky, S.V. Peletminsky - // Mod. Phys. Lett. B, 1994, v.8, № 1, c.677-686.
12. T. Carlsson - // J. de Phys. (Fr.), 1983, v.44, № 8, p.909-911.
13. P. Pallfy-Muhoray, V. Lee, R. Petschek - // Phys. Rev. Lett.- 1988, v.60, № 22, -c.2303-2306.
14. C. Ayton, G. Patey - // Phys. Rev. Lett., 1996. - v.60, № 22, c.239-242.
15. Е.М. Аверьянов - // Письма в ЖЭТФ, 1997, v.66, № 12, c.805-810.
16. М.Ю. Ковалевский, В.В. Кузнецов - // Доклады Академии наук Украины, 1999, № 12, с.90-95.
17. R. Blinc, S. Lugomer, B.Zeks - // Phys. Rev A, 1974, v.9, p.2214-2229.

TO HYDRODYNAMICS OF UNIAXIAL NEMATICS WITH CONFORMATION DEGREES OF FREEDOM

M.Y. Kovalevsky, A.L. Shishkin
National centre of science "Kharkov institute of physics and technologies"
Academicheskaya, 1,Kharkov, 61108,Ukraine

On the basis of the Hamiltonian approach dynamics of uniaxial nematics surveyed and the deduction of the nonlinear equations of ideal hydrodynamics, taking into account the shape, (disk-shaped and rod- shaped of a molecule) and conformation degree of freedom is given. The densities of additive integrals of motion and fluxes relevant to them, are represented in the terms of a thermodynamic potential. The spectra of linear oscillations in these liquid crystals surveyed. Two branches of ultrasonic oscillations are found and the character of an anisotropy of both velocities of sounds is found out.

KEY WORDS: nematic, conformation, hydrodynamics, spectrums, second sound, anisotropy.