Приложенія.

I.

О ПРИВЕДЕНІИ УРАВНЕНІЙ

ОТНОСИТЕЛЬНАГО ДВИЖЕНІЯ СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ КЪ КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ.

Студента *А. А. Клюшникова.*

§ 1. Для опредѣленія относительнаго движенія какой-либо системы n матеріальныхъ точекъ по отношенію къ прямоугольной системѣ координатныхъ осей, движущихся извѣстнымъ образомъ въ пространствѣ, можно получить $6n$ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка слѣдующаго вида[1].

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{aligned}
m_i\frac{d\xi_i}{dt} &= X_i - m_i u + m_i r\eta_i - m_i q\zeta_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x_i},\\
m_i\frac{d\eta_i}{dt} &= Y_i - m_i v + m_i p\zeta_i - m_i r\xi_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial y_i},\\
m_i\frac{d\zeta_i}{dt} &= Z_i - m_i w + m_i q\xi_i - m_i p\eta_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k}\lambda_\varepsilon\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial z_i},
\end{aligned}
\right.
$$

[1] *Bour,* Mém. sur les mouvem. relatifs. Journ. de Liouville. 1863. Janvier.

$$
(\mathrm{II}) \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \xi_i + ry_i - qz_i\,, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = \eta_i + pz_i - rx_i\,, \\ \dfrac{dz_i}{dt} = \zeta_i + qx_i - py_i\,, \end{cases}
$$

гдѣ i—одно изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$; m_i—масса какой-либо изъ разсматриваемыхъ матеріальныхъ точекъ; x_i, y_i, z_i—ея координаты въ концѣ времени t относительно системы подвижныхъ осей, слагающія по которымъ дѣйствующей на эту матеріальную точку въ концѣ времени t данной силы суть X_i, Y_i, Z_i, и $L_1=0$, $L_2=0, \ldots\ldots L_{3n-k}=0$—условныя уравненія, въ которыя входятъ $3n$ относительныхъ координатъ и время t.

Затѣмъ p, q, r; u, v, w—слагающія по подвижнымъ осямъ соотвѣтственно угловой скорости вращенія координатной системы въ теченіи промежутка времени dt и ускоренія, которое имѣетъ начало координатной системы въ концѣ времени t; наконецъ, количества ξ_i, η_i, ζ_i—функціи, опредѣленныя уравненіями (II).

Вопросъ, рѣшеніе котораго предлагается въ въ этой статьѣ состоитъ въ слѣдующемъ:

Преобразовать систему 6n уравненій вида (I) (II) въ каноническую, допустивъ, что

$$
(1) \qquad X_i = \frac{\partial V}{dx_i}, \quad Y_i = \frac{\partial V}{dy_i}\,, \quad Z_i = \frac{\partial V}{dz_i}\,,
$$

гдѣ $V = \Phi\,(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t)$, *и не дѣлая никакого ограниченія относительно условныхъ уравненій*[2].

§ 2. Введемъ количества T, K, G, V_1 опредѣленныя слѣдующими уравненіями:

---

[1] Буръ предполагалъ, что время t не входитъ явно ни въ V, ни въ уравненія $L_1=0$, $L_2=0\ldots$

$$
(2)\quad \begin{cases} T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]= \\ =\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2\right)+\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[(ry_i-qz_i)\xi_i+ \\ +(pz_i-rx_i)\eta_i+(qx_i-py_i)\zeta_i\Big]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[(ry_i-qz_i)^2 \\ \qquad +(pz_i-rx_i)^2+(qx_i-py_i)^2\Big], \end{cases}
$$

$$
(3)\quad K=-u\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i - v\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i - w\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i,
$$

$$
(4)\quad G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[(ry_i-qz_i)^2+(pz_i-rx_i)^2+(qx_i-py_i)^2\Big],
$$

$$
(5)\quad V_1=V+K+G.
$$

На основаніи послѣднихъ формулъ, а также уравненія (1), и въ-силу того обстоятельства, что u, v, w, p, q, r независятъ отъ x_i, y_i, z_i, уравненія (I) и (II) можно замѣнить соотвѣтственно уравненіями:

$$
(\mathrm{I}')\begin{cases}
m_i \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{\partial (V_1 - T)}{\partial x} + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_\varepsilon \dfrac{\partial L_\varepsilon}{\partial x_i}, \\[2ex]
m_i \dfrac{d\eta_i}{dt} = \dfrac{\partial (V_1 - T)}{\partial y_i} + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_\varepsilon \dfrac{\partial L_\varepsilon}{\partial y_i}, \\[2ex]
m_i \dfrac{d\zeta_i}{dt} = \dfrac{\partial (V_1 - T)}{\partial z_i} + \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_\varepsilon \dfrac{\partial L_\varepsilon}{\partial z_i}
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II}')\begin{cases}
\dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial m_i \xi_i}, \\[2ex]
\dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial m_i \eta_i}, \\[2ex]
\dfrac{dz_i}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial m_i \zeta_i}.
\end{cases}
$$

Допустивъ теперь, что каждое изъ количествъ $x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n$ выражено помощью k новыхъ перемѣнныхъ $q_1, q_2, \ldots q_k$ и (количества) t, входящаго явно въ условныя уравненія, такимъ образомъ что, по вставкѣ этихъ выраженій въ уравненія $L_1 = 0, L_2 = 0, \ldots . L_{3n-k} = 0$, послѣднія обращаются въ тождественныя; умножимъ уравненія (I′) соотвѣтственно на $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}, \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}, \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}$ (m — одно изъ чиселъ $1, 2, \ldots k$) и затѣмъ сложимъ; а взявъ сумму подобныхъ результатовъ для $i = 1, 2, \ldots . n$, получимъ:

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\frac{d\xi_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{d\eta_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{d\zeta_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right]=\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)\\
&-\sum_{i=1}^{i=1}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Принимая во вниманіе равенства

$$
\frac{\partial V_1}{\partial q_m}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial V_1}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)
$$

и

$$
\frac{\partial T}{\partial q_m}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m}\right),
$$

уравненію (6) можно дать видъ

$$
\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\frac{d\xi_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\frac{\partial\eta_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\frac{\partial\zeta_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)+
$$

$$
+\frac{\partial T}{\partial q_m}-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m}\right)=\frac{\partial V_1}{\partial q_m}
$$

или слѣдующій:

$$(7)\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+\eta_i\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+\zeta_i\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)\\&-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\xi_i\frac{d\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}+\eta_i\frac{d\frac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt}+\zeta_i\frac{d\frac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}\right)\\&+\frac{\partial T}{\partial q_m}-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial\eta_i}\frac{\partial\eta_i}{\partial q_m}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_m}\right)=\frac{\partial V_1}{\partial q_m};\end{aligned}\right.$$

но изъ формулъ

$$x'_i=\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}q'_k$$

$$y'_i=\frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}q'_k$$

$$z'_i=\frac{dz_i}{dt}=\frac{\partial z_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}q'_k,$$

гдѣ $q'_m=\frac{dq_m}{dt}$

слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\frac{\partial x'_i}{q_m}=\frac{\partial\xi_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial x_i}{\partial q_m},\ \frac{\partial y'_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial\eta_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial y_i}{\partial q_m},\ \frac{\partial z'_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial\zeta_i}{\partial q'_m}=\frac{\partial z_i}{\partial q_m}$$

и во-вторыхъ, что

$$\frac{d\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}=\frac{\partial\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{\partial t}+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m\partial q_1}q'_1+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m\partial q_k}q'_k=\frac{\partial x'_i}{\partial q_m}=\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial m_i\xi_i}}{\partial q_m}$$

и подобнымъ же образомъ

$$\frac{d\frac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt}=\frac{\partial y'_i}{\partial q_m}=\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial m_i\eta_i}}{\partial q_m};\quad \frac{d\frac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}=\frac{\partial z'_i}{\partial q_m}=\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial m_i z_i}}{\partial q_m},$$

такъ-что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \eta_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \zeta_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i \frac{d\,\frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt} + \eta_i \frac{d\,\frac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt} + \zeta_i \frac{d\,\frac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i \frac{\partial\,\frac{\partial T}{\partial m_i \xi_i}}{dt} + \eta_i \frac{\partial\,\frac{\partial T}{\partial m_i \eta_i}}{dt} + \zeta_i \frac{\partial\,\frac{\partial T}{\partial m_i \zeta_i}}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=i}^{i=n}\left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m}\right),$$

а, слѣдовательно, уравненію (7) можно дать видъ:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m}\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=1}^{i=n}\left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_m} = \frac{\partial V_i}{\partial q_m}. \quad (8)$$

Желая придать послѣднему уравненію болѣе простую форму, введемъ количества T_2 и T_1, опредѣленныя уравненіями:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2\right), \tag{9}$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[\left(ry_i - qz_i\right)\xi_i + \left(pz_i - rx_i\right)\eta_i + \left(qx_i - py_i\right)\zeta_i\Big], \tag{10}$$

такъ что, на основаніи формулъ (2) и (4), имѣемъ

$$T = T_2 + T_1 + G. \tag{11}$$

Дифференцированіе формулы (9) доставляетъ

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m}\right), \tag{12}$$

а изъ уравненія (11), въ силу теоремы однородныхъ функцій, имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i}\right) = 2T_2 + T_1 . \tag{13}$$

Обративъ вниманіе на равенства (11), (12) и (13), уравненіе (8) можно представить подъ видомъ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\left(T_2 - G\right) = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}$$

или такъ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = \frac{\partial (T_2 + V + K)}{\partial q_m}.$$

Приписывая въ послѣднемъ уравненіи указателю m послѣдовательно значенія $1, 2, 3, \ldots k$, мы образуемъ слѣдующую систему k совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_1}=\frac{\partial(T_2+V+K)}{\partial q_1}; \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_2}=\frac{\partial(T_2+V+K)}{\partial q_2};$$

$$\ldots\ldots\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_k}=\frac{\partial(T_2+V+K)}{\partial q_k}, \qquad (14)$$

въ которыя входятъ независимое перемѣнное t, искомыя количества $q_1, q_2, \ldots q_k$ и ихъ производныя въ отношеніи t перваго и втораго порядковъ. Эти k дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка можно привести къ $2k$ дифференціальнымъ уравненіямъ 1-го порядка, введя k новыхъ количествъ $p_1, p_2, \ldots p_k$, извѣстнымъ образомъ связанныхъ съ производными $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$.

Такъ, если положимъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_1}=p_1, \frac{\partial T_2}{\partial q'_2}p_2, \ldots \frac{\partial T_2}{\partial q'_k}=p_k, \qquad (15)$$

то для опредѣленія искомыхъ количествъ $q_1, q_2, \ldots q_k$ и $p_1, p_2, \ldots p_k$ будемъ имѣть $2k$ дифференціальныхъ уравненій (14) и (15) перваго порядка.

Съ цѣлью преобразовать послѣднія уравненія, условимся на время разсматривать $2k$ количествъ $q_1, q_2, \ldots q_k; p_1, p_2, \ldots p_k$, какъ независимыя перемѣнныя, и дѣйствіе дифференцированія относительно нихъ означать характеристикой δ; количества же q'_1, $q_2, \ldots q_k$ суть по формуламъ (15) функціи предыдущихъ $2k$ перемѣнныхъ и еще количества t. Подставивъ въ выраженіе

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]=T$$

вмѣсто производныхъ $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ ихъ выраженія въ количествахъ t, q_1, q_2, ... q_k; q_1', q_2', ... q_k', какъ напр. $\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k'} q_k'$ вмѣсто $\frac{dx_i}{dt}$, можно количество T представить подъ видомъ суммы трехъ членовъ T'', T', T^0, которые соотвѣтственно суть однородныя функціи второй, первой и нулевой степени относительно производныхъ q_1', q_2', ... q_k'. Итакъ, имѣемъ равенство:

$$T = T'' + T' + T^{(0)}, \tag{16}$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m'} q_m' = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial (T'' + T' + T^{(0)})}{\partial q_m'} q_m'$

$= \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T''}{\partial q_m'} q_m' + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T'}{\partial q_m'} q_m' + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_m'} q_m'$, но такъ-какъ

$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T''}{\partial q_m'} q_m' = 2T''$ и $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T'}{\partial q_m} q_m' = T'$ — на основаніи теоремы однородныхъ функцій, а $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_m'} q_m' = 0$ — вслѣдствіе того, что $T^{(0)}$ не содержитъ производныхъ q_1', q_2',... q_k'; то имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m'} q_m' = 2T'' + T'. \tag{17}$$

Изъ равенствъ (17) и (16) находимъ черезъ дифференцированіе:

$$2\delta T'' + \delta T' = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \, \delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$$

и $\delta T = \delta T'' + \delta T' + \delta T^0 = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$;

а отсюда черезъ вычитаніе получимъ:

$$\delta\left(T'' - T^{(0)}\right) = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \, \delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} - \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m . \qquad (18)$$

Обращаясь теперь къ уравненію (11) и замѣчая, во-первыхъ, что G не содержитъ $q'_1, q'_2, \ldots . q'_k$, а во-вторыхъ, что, на основаніи уравненій (15), $\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = p_m$, найдемъ, что

$$\frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m + \frac{\partial T_1}{\partial q'_m},$$

откуда $$\delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} = \delta p_m + \delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m}; \qquad (19)$$

но, съ другой стороны, T_1 есть функція первой степени относительно количествъ $q'_1, q'_2, \ldots . q'_k$, такъ-что производная $\frac{\partial T}{\partial q'_m}$ не содержитъ въ себѣ этихъ количествъ, а слѣдовательно, и количествъ $p_1, p_2 \ldots . p_k$, и есть функція только отъ t, $q_1, q_2, \ldots . q_k$; а потому

$$\delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} = \delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \delta q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \delta q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q_m}.$$

На основаніи послѣдней формулы уравненію (19) можно дать видъ

$$\delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} = \delta p_m + \delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \ldots + \delta q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m};$$

а, слѣдовательно, уравненіе (18) можетъ быть представлено такъ

$$\delta\left(T^{(11)} - T^{(0)}\right) = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \delta p_m + \sum_{m=1}^{m=k}\left(q'_1 \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \ldots\right.$$

$$\left. + q'_k \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right) \delta q_m$$

Здѣсь въ первой части $T^{(0)}$ есть функція только количествъ $t, q_1, q_2, \ldots q_k$; тогда какъ T'' содержитъ въ себѣ еще производныя $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$; выключивъ изъ T'' эти производныя помощью уравненій (15), означимъ выраженіе функціи T'' въ количествахъ $q_1, q_2, \ldots q_k; p_1 p_2, \ldots p_k$ черезъ $T^{(11)}$.

Послѣднее равенство, въ которомъ первая часть есть:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial(T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_m} \delta p_m,$$

по произвольности дифференціаловъ δq_m, δp_m разлагается на равенства:

$$q'_m = \frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_m}, \tag{20}$$

и $$\frac{\partial(T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} - \frac{\partial T}{\partial q_m}. \tag{21}$$

Представимъ иначе входящую сюда сумму $\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l}$.

Такъ-какъ формулы (II) § 1 при новыхъ обозначеніяхъ принимаютъ видъ:

$$\xi_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial x}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial x}{\partial t} + qz_i - ry_i ,$$

$$\eta_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial y_i}{\partial t} + rx_i - pz ,$$

$$\zeta_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial z_i}{\partial t} + py_i - qx_i ,$$

то, по формулѣ (10) функцію T_1, можно представить, какъ сумму двухъ другихъ T_1^1 и $T_1^{(o)}$, изъ которыхъ первая есть однородная первой степени относительно производныхъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$, а вторая опредѣляется формулою

$$T_1^{(o)} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big[\Big(qz_i - ry_i\Big)\frac{\partial x_i}{\partial t} + \Big(rx_i - pz_i\Big)\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$+ \Big(py_i - qx_i\Big)\frac{\partial z_i}{\partial t}\Big] - 2G ,$$

такъ-что производныхъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$ въ себѣ не содержитъ:

Такимъ образомъ, на основаніи теоремы однородныхъ функцій, имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} = \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial (T_1^1 + T_1^{(o)})}{\partial q'_l}$$

$$= \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1^1}{\partial q'_l} = T'_1 = T_1 - T_1^{(0)};$$

послѣ этого уравненію (21) можно дать видъ:

$\dfrac{\partial (T_1 - T_1^{(0)} - T)}{\partial q_m} = \dfrac{\partial (T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m}$, или, на основаніи формулы (11),

слѣдующій

$$\frac{\partial(-T_2 - G - T_1^{(0)})}{\partial q_m} = \frac{\partial(T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m}; \text{ а отсюда}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_m} = -\frac{\partial [T^{(11)} - (T^{(0)} - T_1^{(0)} - G)]}{\partial q_m} = -\frac{\partial (T^{(11)} - T_2^{(0)})}{\partial q_m}, \quad (22)$$

гдѣ $T_2^{(0)} = T^{(0)} - T_1^{(0)} - G$.

На основаніи формулъ (22) и (15) уравненія (14) могутъ быть написаны такъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial (T^{(11)} - V - (T^{(0)} + K))}{\partial q_1} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial (T^{(11)} - V - (T_2^{(0)} + K))}{\partial q_k}; \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

что же касается уравненій (15), то послѣднія могутъ быть замѣнены уравненіями вида (20).

Такимъ образомъ вмѣсто уравненій (14) и (15) можетъ взять (23) и слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial T_1^{(11)}}{\partial p_1}, \\ &\dots\dots \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_k} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Положивъ для краткости $H = T^{(11)} - V - (T_2^{(0)} + K)$ и замѣтивъ, что количества V, $T_2^{(0)}$ и K не зависятъ отъ p_1, $p_2, \ldots p_k$, мы можемъ уравненіямъ (23) и (24) дать слѣдующій видъ:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

который и есть *каноническій*.