

Афінна площа

Курінний Г.Ч, Невмержицька О.М, Шугайло О.О.

Травень 2015 року

Зміст

1	Первісні поняття, аксіоми та моделі афінної площини	1
1.1	Первісні поняття та аксіоми афінної площини	1
1.2	Незалежність і несупречність аксіом афінної площини	2
1.3	Дискретні площини	5

1 Первісні поняття, аксіоми та моделі афінної площини

1.1 Первісні поняття та аксіоми афінної площини

Означення 1.1 *Афінною площиною називається сукупність точок і прямих, що задовольняють наступні аксіоми*

A1. (Аксіома існування прямої, що проходить через дві точки) Через будь-які дві різні точки проходить пряма.

A2. (Аксіома єдиності прямої, що проходить через дві різні точки) Якщо через дві точки проходять дві прямі, то або точки збігаються, або прямі збігаються.

A3. (Аксіома існування трьох неколінеарних точок) Існують такі три точки, що жодна пряма не проходить через усі три.

A4. (Аксіома існування паралельної прямої) Через будь-яку точку, що не лежить на заданій прямій, проходить пряма, що не перетинається із заданою прямою.

A5. (Аксіома єдиності паралельної прямої) Якщо через задану точку проходить дві прямі l, m , що не перетинаються (не мають спільних точок) із заданою прямою, то ці дві прямі l, m збігаються, тобто $l = m$.

Означення 1.2 Дві прямі площини називаємо паралельними, якщо вони або збігаються, або не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна прямій b , то пишемо $a \parallel b$. Якщо пряма a не паралельна прямій b , то пишемо $a \nparallel b$.

1.2 Незалежність і несуперечність аксіом афінної площини

Теорема 1.1 (Теорема про незалежність і несуперечливість системи аксіом афінної площини) Система аксіом $A1, A2, A3, A4$ афінної площини є незалежною, несуперечливою і неповною.

Означення 1.3 Моделью для системи аксіом афінної геометрії називаємо набір точок і прямих разом з відношенням інцидентності, які задовольняють систему аксіом.

Доведення. Несуперечливість системи аксіом означає, що існує модель цієї системи аксіом. Отже довести несуперечливість можна побудувавши таку систему. Розглянемо площину, в якій множина точок чотириелементна — $\{A, B, C, D\}$, множина прямих шестиелементна — a, b, c, d, e, f , а відношення інцидентності задамо таблицею інцидентності, тобто таблицею, в якій рядки позначені точками, стовпчики позначені прямими, а на перетині рядка і стовпчика стоїть відмітина, якщо точка інцидентна прямій, і нічого не стоїть, якщо точка не інцидентна прямій, див. табл.1

	a	b	c	d	e	f
A	•	•	•			
B	•			•	•	
C		•		•		•
D			•		•	•

Табл. 1: Таблиця інцидентності для моделі системи аксіом афінної площини

■

Ми бачимо, що побудована площина задовольняє систему аксіом афінної площини. Зокрема, через точку C що не належить прямій a проходить єдина пряма, а саме f , що паралельна прямій a . Таким чином, ми довели несуперечливість створеної системи аксіом афінної площини.

Наведемо ще один приклад моделі для системи аксіом афінної площини — так звану декартову площину k^2 над певним комутативним чи не комутативним полем¹ k .

¹некомутативні поля називають також тілами

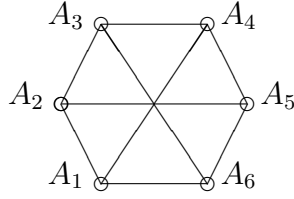
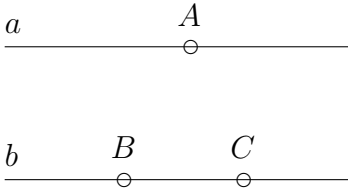


Рис. 1: Модель, що спростовує залежність аксіоми A1
 Рис. 2: Модель, що спростовує залежність аксіоми A2
 Рис. 3: Модель, що спростовує залежність аксіоми A3

Точками площини k^2 є елементи декартового квадрату поля k , тобто пари (x, y) чисел $x, y \in k$. Прямими в цій площині є множини розв'язків (x, y) рівняння

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in k, \quad (a, b) \neq (0, 0). \quad (1)$$

Точка $(u, v) \in k \times k$ інцидентна прямій (1) в площині k^2 , якщо $au + bv + c = 0$.

Незалежність однієї аксіоми від решти означає, що її неможливо довести, використовуючи решту аксіом. Щоб довести неможливість доведення, будують модель, де ця аксіома не виконується, а решта аксіом виконується. Отже для доведення незалежності 5 аксіом досить побудувати 5 моделей площини, в кожній із яких порушується лише одна аксіома.

Перша модель складається із трьох точок A, B, C і двох прямих a, b , де (див. рис. 1) — точка A інцидентна прямій a , а точки B, C інцидентні прямій b .

$$A \in a, \quad B, C \in b.$$

Друга модель складається із шести точок $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ і дев'яти прямих

$$\{A_1, A_4\}, \quad \{A_2, A_5\}, \quad \{A_3, A_6\}, \quad \{A_1, A_2, A_3\}, \quad \{A_2, A_3, A_4\}, \\ \{A_3, A_4, A_5\}, \quad \{A_4, A_5, A_6\}, \quad \{A_5, A_6, A_1\}, \quad \{A_1, A_2, A_6\}$$

(див. рис. 2) — відношення інцидентності збігається із теоретико-множинним $\in$. Прямую, що паралельна прямій $\{A_1, A_4\}$ і проходить через A_2 буде $\{A_2, A_5\}$, а прямою, що паралельна прямій $\{A_1, A_2, A_3\}$ і проходить через A_4 буде $\{A_4, A_5, A_6\}$. В цій моделі через дві різні точки A_1, A_2 проходять дві різні прямі $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{A_1, A_2, A_6\}$

Третя модель, що спростовує залежність третьої аксіоми, складається із двох точок і однієї прямої (див. рис. 3)

Таблиця 2 є таблицею інцидентності площини, в якій немає паралельних прямих, отже аксіома 4 не виконується, але решта аксіом виконуються.

	a	b	c	d	e	f	∞
A	•	•	•				
B	•			•	•		
C		•		•		•	
D			•		•	•	
∞_1	•					•	•
∞_2		•			•		•
∞_3			•	•			•

Табл. 2: Таблиця інцидентності для площини Фано

Площина, яка має 5 точок $1, 2, 3, 4, 5$, прямими є двоелементні підмножини множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а відношення інцидентності збігається із теоретико-множинним відношенням $\in$ належності елемента множині, є моделлю, в якій остання п'ята аксіома порушується, а решта чотири виконуються. Тобто існування цієї моделі доводить, що 5 аксіома незалежна від інших.

Для доведення неповноти системи аксіом досить побудувати дві неізоморфні моделі, в одній із яких виконується певна додаткова аксіома, а в другій ця аксіома не виконується. Такою додатковою аксіомою можна взяти

“Кожна пряма інцидентна лише двом точкам”

Додана аксіома не робить систему аксіом суперечливою — ми маємо афінну площину з таблицею інцидентності 1, в якій на кожній прямій знаходиться рівно дві точки. Але ми можемо побудувати афінну площину, в якій на кожній прямій знаходяться рівно три точки. Для побудови такої площини беремо поле класів лишків за модулем 3 — $GF(3) = \{0, 1, 2\}$, точками беремо впорядковані пари елементів із $GF(3)$, прямими беремо множини тих точок $(x, y) \in GF(3) \times GF(3)$ які є розв'язками певного рівняння

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in GF(3)$$

Так розв'язками рівняння $2x + y + 1 = 0 \in (1, 0), (0, 2), (2, 1)$, відповідна пряма має 3 точки і додана аксіома в цій площині порушується, а решта 5 аксіом виконуються. Тим самим ми довели неповноту системи аксіом, що складається лише із аксіом A1, A2, A3, A4, A5.

Теорема доведена. ■

Теорема 1.2 (Про перетин двох різних прямих) *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то вона єдина — її називаємо точкою перетину цих прямих.*

Доведення. Наявність двох спільних точок у двох різних прямих суперечила б тому, що через дві різні точки проходить лише одна пряма.

■

Теорема 1.3 (Про відношення паралельності) *Бінарне відношення “Пряма a паралельна прямій b ” на множині прямих афінної площини є відношенням евівалентності, тобто рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням.*

Доведення. Відношення паралельності рефлексивне, тому що кожна пряма паралельна собі за означенням.

Воно симетричне завдяки нашому розумінню сполучника “і” — два висловлення “Точка A лежить на прямій a і точка A лежить на прямій b ” і “Точка A лежить на прямій b і точка A лежить на прямій a ” істинні або хибні одночасно.

Транзитивність доводиться методом від протилежного. Припустимо, що на площині є три прямі a, b, c , і $a \parallel b$, $b \parallel c$ і $a \not\parallel c$. Наше припущення означає, що через точку перетину прямих a і c паралельно до b проходить дві прямі — a і c , що суперечить аксіомі А5.

Теорема доведена.

■

Означення 1.4 *Клас прямих, що паралельні заданій прямій, наиваємо пучком паралельних прямих*

1.3 Дискретні площини

Теорема 1.4 (Про рівнопотужність множин точок на прямих) *Між точками двох довільних прямих можна встановити взаємно однозначну відповідність.*

Доведення. За аксіомою А3 існують три неколінеарні точки, отже існують три попарно непаралельні прямі. Отже для двох заданих прямих l_1, l_2 можна знайти пряму l_3 , що їм не паралельна. Через довільну точку на прямій l_1 проводимо пряму, що паралельна прямій l_3 . Точка B перетину цієї побудованої прямої з прямою l_2 і є точкою, що відповідає точці A .

Теорема доведена.

■

Наслідком цієї теореми є те, що коли одна пряма площини має скінченну кількість точок, що їй належать, то кожна пряма в цій площині має ту ж саму кількість точок.

Теорема 1.5 (Про кількість прямих, що проходять через вибрані точки)
Нехай A, B — дві довільні точки афінної площини. Тоді між множиною прямих, що проходять через точку A , і множиною прямих, що проходять через точку B , існує взаємно однозначна відповідність. Якщо в площині існує пряма, на якій розташовано точно q різних точок, то через кожну точку в цій площині проходить точно $q + 1$ пряма.

Доведення. Нехай A, B дві різні точки і a — пряма, що проходить через ці вибрані точки. Пряма a відповідає сама собі. Прямий, u що проходить через точки A і не проходить через B , відповідає пряма v , що проходить через точку B паралельно прямій u .

Кінець доведення.

■

Теорема 1.6 (Про кількість точок і прямих скінченної афінної площини)
Нехай в певній афінній площині деяка пряма має q , $q < \infty$ точок. Тоді в цій площині q^2 точок і $q(q + 1)$ прямих

Доведення. Нехай деяка пряма площини має q точок. Вибираємо в цій площині дві непаралельні прямі a, b . Тоді пучок прямих, що паралельні b , має стільки ж прямих, скільки точок на a , тобто q . Всі точки площини розташовані на прямих цього пучка. І на кожній прямій цього пучка q точок. Отже всього в площині q^2 точок.

Оскільки в кожному пучку q прямих, а пучків стільки, скільки прямих проходить через задану точку, тобто $q + 1$, то всього прямих $q(q + 1)$.

■

Література

- [1] А. В. Погорелов “Лекции по основаниям геометрии” — Харьков:ХГУ, 1959.
- [2] А.Д. Александров “Основания геометрии” — М:Наука, 1987.
- [3] Р. Хартсхорн “Основы проективной геометрии” — Современная математика, популярная серия. — Москва:Мир, 1970 (переклад з “Foundation of projective geometry“ by Robin Hartshorn — Harvard University, Lecture notes, — New York:W.A.Benjamin, 1967)
- [4] Ф.Картеси “Введение в конечные геометрии” — М:Наука, 198. (Переклад з F.Kármész, “Introduction to Finite Geometries“ — Budapest:Akadémiai Kiadó, 1976)

- [5] Ф. Бахман “Построение геометрии на основе симметрии” — М:Наука, 1969
(Переклад з Friedrich Bahmann “Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff” — Berlin:Spiegel-Verlag, 1959)
- [6] Gerard A Venema “Foundation of geometry” — Boston:Pearson Education. 2012

Показчик

аксіоми

афінної площини, 2

несуперечливість, 2

незалежність, 2

інцидентність, 2

модель

системи аксіом, 2

неповнота, 2

паралельність, 2

прямих, 2

перетин

прямих, 4

площина

Декартова над полем, 2

афінна, 1

з таблицею інцидентності, 2

пряма, 2

прямі

паралельні, 2

пучок

паралельних, 5

точка, 2

точки

колінеарні, 1

неколінеарні, 1