Министерство образования и науки, молодёжи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ЗАДАЧНИК

Учебно-методическое пособие для студентов
I курса физического и радиофизического факультетов

Харьков – 2011

УДК 514.742(075.8)
ББК 22.151.54я73
А 64

Рецензенты: **Герасин С. Н.** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Харьковского национального университета внутренних дел;

Кондратьев Б. В. – кандитат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики физического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Утверждено к печати Научно-методическим советом
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 3 от 22.02.2011 г.)

А 64 **Аналитическая** геометрия: задачник : учеб.-методич. пособ. для студентов I курса физического и радиофизического факультетов / Сост. : Н. Д. Парфёнова. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 52 с.

Данное пособие предназначено для студентов первого курса физического и радиофизического факультетов. Материал пособия разбит на темы, соответствующие темам практических занятий, даны задачи для аудиторной, домашней работы, а также приведены краткие теоретические сведения и схематические рисунки.

УДК 514.742(075.8)
ББК 22.151.54я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Процесс обучения геометрии невозможно представить без решения задач. В отличие от алгебры здесь, как правило, нет готовых алгоритмов решения. Поэтому особое внимание уделялось подбору задач, охватывающих необходимый минимум.

Пособие охватывает все разделы курса «Аналитическая геометрия», читаемого на физическом и радиофизическом факультетах Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, включает краткие теоретические сведения и задачи для практических занятий. Задачи для домашней работы снабжены ответами.

Данный курс «Аналитической геометрии» традиционно содержит следующие разделы: векторную алгебру, преобразования плоскости и пространства, уравнения линий и поверхностей первого и второго порядков. Объем и глубина излагаемого материала выбраны соответственно потребностям данных специальностей.

В процессе подготовки данного пособия был использован многолетний опыт преподавания этого курса на физическом и радиофизическом факультетах Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина и учебную литературу из списка в конце пособия.

Составитель выражает свою искреннюю благодарность С. Н. Зиненко, Н. И. Познахаревой, а также рецензентам Б. В. Кондратьеву и С. Н. Герасину за критические замечания и ценные рекомендации.

1. Определители второго порядка и система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Матрицей второго порядка называется квадратная таблица из четырех чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрицы обычно обозначают большими латинскими буквами, например

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а их элементы такими же маленкими буквами с двумя индексами, например a_{12}. Первый индекс показывает номер строки, второй номер — столбца, в которых стоит этот элемент в матрице. Например, элемент a_{12} в первой строке во втором столбце.

Определителем второго порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Этот определитель обозначается либо $detA$, либо $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Таким образом,

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Говорят, что элементы a_{11}, a_{22} лежат на главной диагонали определителя, a_{12}, a_{21} — на побочной. Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях. Например,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -8.$$

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

с двумя неизвестными x, y. Введем обозначения

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \triangle_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \triangle_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\triangle$, составленный из коэффициентов при неизвестных системы, называется определителем этой системы. Определитель $\triangle_x$ получается путем замены элементов первого столбца определителя $\triangle$ свободными членами системы; определитель $\triangle_y$ получается из определителя $\triangle$ при помощи замены свободными членами системы элементов его второго столбца.

Теорема Крамера

Если $\underline{\triangle \neq 0}$ то система имеет единственное решение; оно определяется формулами

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle},\ y = \frac{\triangle_y}{\triangle}.$$

Если $\underline{\triangle = 0}$ и при этом хотя бы один из определителей $\triangle_x$, $\triangle_y$ отличен от нуля, то система совсем не имеет решений (как говорят, уравнения этой системы несовместимы).

Если же $\underline{\triangle = 0}$, но также $\underline{\triangle_x = \triangle_y = 0}$, то система имеет бесконечно много решений (в этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого).

Пусть в уравнениях системы $b_1 = b_2 = 0$; тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}.$$

Система уравнений вида называется однородной; она всегда имеет нулевое решение: $x = 0, y = 0$. Если $\triangle \neq 0$, то это решение является единственным, если же $\triangle = 0$, то система, кроме нулевого, имеет бесконечно много других решений.

1.1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$.

1.2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$.

1.3. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$.

1.4. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2x & x \end{vmatrix} > 0$.

1.5. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$

1.6. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4x - 6y = 5. \end{cases}$

1.7. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 1, \\ \sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3}. \end{cases}$

Домашнее задание 1

1.8. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.9. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$.

1.10. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

1.11. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5.$

1.12. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} 3y - 4x = 1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$

1.13. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} x\sqrt{5} - 5y = \sqrt{5}, \\ x - y\sqrt{5} = 5. \end{cases}$

1.14. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2}x + 2y = -2. \end{cases}$

Ответы:

1) -3; 2) 0; 3) $x = 2$; 4) $x \in (-4,5; 0)$; 5) $x = 16, y = 7$; 6) система не имеет решений; 7) система имеет бесконечно много различных решений, каждое из которых может быть вычислено по формуле $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$;

8) 10; 9) -50; 10) $x = 12$; 11) $x < -3$; 12) $x = 2, y = 3$; 13) система не имеет решений; 14) системаимеет бесконечно много различных решений, каждое из которых может быть вычислено по формуле $x = -\sqrt{2}(y+1)$.

2. Определители третьего порядка и система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Матрицей третьего порядка называется квадратная таблица из девяти чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

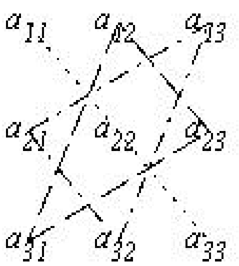
Определителем третьего порядка, соответствующим матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число, обозначаемое либо $detA$, либо $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

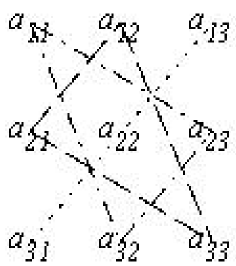
$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для практического вычисления полезно заметить, что чтобы ввычислить определитель третьего порядка нужно сложить произведения элементов определителя, взятые по три так, как показано различными пунктирами на нижеприводимой схеме слева и вычесть произведения элементов определителя, взятые по три так, как показано различными пунктирами на нижеприводимой схеме справа.





Теперь рассмотрим систему трёх уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

с тремя неизвестными x, y, z. Введем обозначения

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \triangle_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \triangle_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\triangle$, составленный из коэффициентов при неизвестных системы, называется определителем этой системы.

Определители $\triangle_x$, $\triangle_y$,$\triangle_z$ получаются из определителя $\triangle$ при помощи замены соответственно его первого, второго и, наконец, третьего столбца — столбцом свободных членов данной системы.

Теорема Крамера

Если $\underline{\triangle \neq 0}$, то система <u>имеет</u> <u>единственное решение</u>; оно определяется формулами

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle}, \ y = \frac{\triangle_y}{\triangle}, \ z = \frac{\triangle_z}{\triangle}.$$

Если $\underline{\triangle = 0}$ и при этом <u>хотя бы один из определителей $\triangle_x$, $\triangle_y$, $\triangle_z$ отличен от нуля</u>, то система совсем <u>не имеет решений</u> (уравнения этой системы несовместимы).

В случае, когда $\underline{\triangle = 0}$ и одновременно $\underline{\triangle_x = \triangle_y = \triangle_z = 0}$, система также <u>может совсем не иметь решений</u>; но если система при этих условиях имеет хотя бы одно решение, то она имеет <u>бесконечно много различных решений</u>.

Пусть в уравнениях системы $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases}$$

Система уравнений такого вида называется однородной; она всегда имеет нулевое решение: $x = 0, y = 0, z = 0$. Если $\triangle \neq 0$, то это решение является единственным, если же $\triangle = 0$, то система, кроме нулевого, имеет бесконечно много других решений.

2.1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

2.2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

2.3. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

2.4. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

2.5. Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;
2) не имеет решений;
3) имеет бесконечно много решений.

2.6. Не раскрывая определитля, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.7. Не раскрывая определитля, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} + \alpha \cdot a_{21} & a_{12} + \alpha \cdot a_{22} & a_{13} + \alpha \cdot a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

для любого числа α.

2.8. Вычислить определитель раскрывая его про первой строке $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

Домашнее задание 2

2.9. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

2.10. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2.11. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$

2.12. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$

2.13. Не раскрывая определитля, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

2.14. Не раскрывая определитля, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} \beta \cdot a_{12} + \gamma \cdot a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \beta \cdot a_{22} + \gamma \cdot a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \beta \cdot a_{32} + \gamma \cdot a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

для любых чисел β и γ.

2.15. Вычислить определитель раскрывая его про первой строке $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответы:
1) -12; 2) -29; 3) $x = y = z = 1$; 4) $x = 1, y = 3, z = 5$; 5) 1) $a \neq -3$, 2) $a = -3$, $b \neq 1/3$, 3) $a = -3, b = 1/3$; 8) 87; 9) 29; 10) 0; 11) $x = 2, y = 3, z = 4$; 12) $x = 2, y = -1, z = 1$; 15) -4.

Свойства определителей

1) Строки и столбцы определителей равноправны, то есть величина определителя не изменится, если его строки заменить столбцами с теми же номерами (такая операция называется *транспонированием*).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A^T.$$

2) Перестановка двух строк (столбцов) определителя равносильна умножению его на -1. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{31} \\ a_{22} & a_{21} & a_{32} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) определителя равны, то определитель равен нулю.

4) Умножение всех элементов одного столбца (строки) определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это число k. Например,

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5) Если все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то сам определитель равен нулю. Это свойство есть частный случай предыдущего (при k = 0).

6) Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7) Если каждый элемент n-го столбца или n-й строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце, или соответственно в n-й строке, имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой — вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} b_{11} + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} + a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8) Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятием алгебраического дополнения и минора.

Минором элемента a_{ij} называется определитель, обозначаемый символом M_{ij}, получаемый из данного путем вычеркивания i-й строки и j-ого столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число, обозначаемое символом A_{ij} и равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

9) Определитель

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (или строки) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеют место

«разложение по элементам i-й строки»

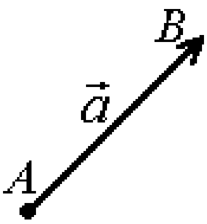
$$\triangle = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3$$

«разложение по элементам j-го столбца»

$$\triangle = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

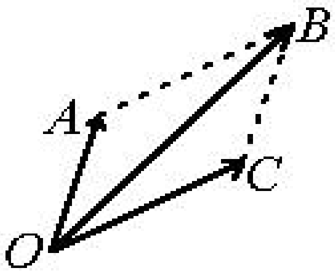
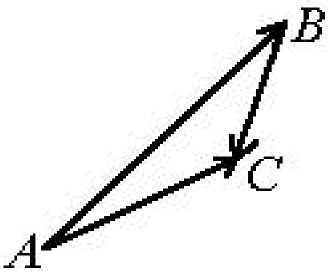
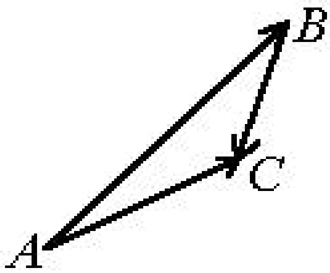
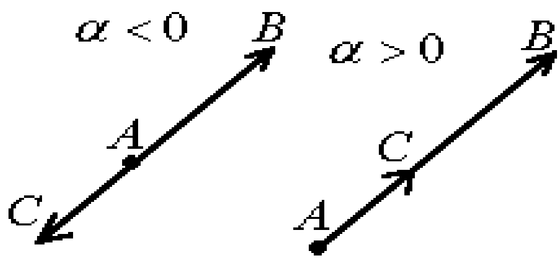
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3. Линейные действия над векторами и их координаты



Вектором *называется направленный отрезок прямой. У вектора $\overrightarrow{AB}$ точка A называется началом, а точка B – концом. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, или $\overline{AB}$.*
Иногда все векторы приводят к общему началу – точке O. Тогда их обозначают одной маленькой латинской буквой: $\vec{a}$.

Линейные операции над векторами:

Сложение векторов		***Вычитание векторов***
Правило параллелограмма:	*Правило треугольника:*	
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$
		
Умножение вектора на число		
Произведением вектора $\overrightarrow{AB}$ на число α называется вектор $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$, имеющий длину $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ и направление, совпадающее с $\overrightarrow{AB}$, если $\alpha>0$ и противоположное, если $\alpha<0$.		

Система векторов $\{\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_n}\}$ называется базисом пространства V, если
1) она линейно независимая,
2) любой вектор $\overrightarrow{a}$ из V линейно выражается через эти векторы

$$\overrightarrow{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+\dots x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Размерностью пространства называется число векторов в базисе.

Коэффициенты $x_1,\dots x_n$ разложения вектора $\overrightarrow{a}$ по базису называется координатами вектора в данном базисе.

Координаты вектора определяются однозначно, значит, можно заменить работу с векторами работой с его координатами.

Пусть в некотором базисе $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. *Тогда в этом же базисе*

– *сложение* $\quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$,

– *умножение на число* $\quad \alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix}$.

Длина вектора: $\quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Орт (единичный) вектор: $\quad \overrightarrow{a_e} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$.

3.1. Нарисуйте два произвольных неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$. По ним постройте 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{5}\vec{b}$; 5) $-2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

3.2. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ служат сторонами треугольника. С их помощью выразить векторы, совпадающие с медианами этого треугольника.

3.3. На векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ построен параллелограмм $ABCD$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где точка M—точка пересечения диагоналей параллелограмма.

3.4. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ служат сторонами треугольника. С их помощью выразить орты биссектрис этого треугольника.

3.5. Даны: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Вычислить: $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3.6. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну или в противоположные стороны.

3.7. Определить, при каких α, β векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ коллинеарны.

3.8. Найти орт вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3.9. Дано разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\vec{d}$, параллельного вектору и противоположного с ним направления, при условии, что $|\vec{d}| = 75$.

3.10. Два вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

3.11. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ по базису $\{\vec{p}, \vec{q}\}$.

3.12. Даны три вектора $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Найти разложение вектора $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, по базису $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$.

Домашнее задание 3

3.13. Нарисуйте два произвольных неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$. По ним постройте 1) $2\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

3.14. На трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ построен параллелепипед. С их помощью выразить векторы, совпадающие с остальными ребрами, диагоналями и диагонали граней этого параллелепипеда.

3.15. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ делил пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Предполагается, что все три вектора отнесены к общему началу.

3.16. В ромбе $\vec{a}$, $\vec{b}$ служат диагоналями. С их помощью найти стороны этого ромба.

3.17. Определить начало вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, если его конец совпадает с точкой $(1; -1; 2)$.

3.18. Даны два вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Определить координаты следующих векторов: $1)\vec{a} + \vec{b}$; $2)\vec{a} - \vec{b}$; $3)2\vec{a}$; $4) -\frac{1}{2}\vec{b}$; $5)2\vec{a} + 3\vec{b}$; $6)\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

3.19. Проверить, что четыре точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ служат вершинами трапеции.

3.20. Найти орт вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$.

3.21. Найти модули суммы и разности $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3.22. Даны три вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Определить разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

3.23. Даны четыре вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$. Определить разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.

Ответы:

15) $|a| = |b|$; 17) $(-1, 2, 3)$; 18) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$; 20) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$; 21) $|\vec{a} + \vec{b}| = 6, |\vec{a} - \vec{b}| = 14$; 22) $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; 23) $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$.

4. Скалярное произведение

Скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$ *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$:

$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, *где* φ – *угол между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$;

$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Работа силы $\vec{F}$ *по перемещению материальной точки из начала в конец вектора* $\vec{S}$ *есть:* $A = (\vec{F},\vec{S})$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \qquad \vec{a}\perp\vec{b} \;\Leftrightarrow\; (\vec{a},\vec{b}) = 0.$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}| \text{ пр }_{\vec{b}}\, \vec{a} = |\vec{a}| \text{ пр }_{\vec{a}}\, \vec{b}.$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

4.1. (795) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$; 2) $(\vec{a},\vec{a})$; 3) $\left(\vec{b},\vec{b}\right)$; 4) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)$; 5) $\left(3\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right)$; 6) $\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)$; 7) $\left(3\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}+2\vec{b}\right)$.

4.2. (800) Даны единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. Вычислить $\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \left(\vec{b},\vec{c}\right) + (\vec{c},\vec{a})$.

4.3. (803) Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

4.4. (805) Доказать, что векторы $\vec{p} = (\vec{a},\vec{v})\,\vec{b} - \left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c}$ и $\vec{a}$ перпендикулярны.

4.5. (812) Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти: 1)$\sqrt{\left(\vec{b},\vec{b}\right)}$; 2) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)$.

4.6. (816) Даны три силы $\vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ и $\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5;3;-7)$ в положение $M_2(4;-1;-4)$.

4.7. (817) Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

4.8. (825) Вектор $\vec{x}$ образует с осью Oy тупой угол и перпендикулярен к векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$. Найти его координаты, зная, что $|\vec{x}| = 14$.

4.9. (828) Даны три вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = -5$, $\left(\vec{x}, \vec{b}\right) = -11$, $(\vec{x}, \vec{c}) = 20$.

4.10. (836) Сила, определяемая вектором $\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$, разложена по трем направлениям, одно из которых задано вектором $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти составляющую силы $\vec{R}$ в направлении вектора $\vec{a}$.

4.11. (837) Даны точки $M(-5; 7; -6)$, $N(7; -9; 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ на ось вектора $\overrightarrow{MN}$.

Домашнее задание 4

4.12. (796) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, найти: 1) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c}\right)$; 2) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$; 3) $\left(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$.

4.13. (801) Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) + (\vec{c}, \vec{a})$.

4.14. (804) Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ был перпендикулярен к вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

4.15. (806) Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})}\vec{a}$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

4.16. (812) Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Вычислить: 1) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$; 2) $\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$; 3) $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}\right)$; 4) $\left(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\right)$.

4.17. (813) Вычислить, какую работу производит сила $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

4.18. (815) Вычислить, какую работу производит сила $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2;-3;5)$ в положение $B(3;-2;-1)$.

4.19. (826) Найти вектор $\vec{x}$, если он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и удовлетворяет условию $\left(\vec{x}, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = -6$.

4.20. (827) Даны два вектора: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Найти вектор $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $\left(\vec{x}, \vec{b}\right) = -4$.

4.21. (838) Даны две точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$, $D(3;2;-4)$. Вычислить проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось вектора $\overrightarrow{CD}$.

Ответы:

12) 1) -62, 2) 162, 3) 373; 13) -13; 14) $|a| = |b|$; 16) 1) 22, 2) 6, 3) -200, 4) 41; 17) 17; 18) 31; 19) $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; 20) $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; 21) $-\frac{47}{7}$.

5. Векторное произведение

Векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *:*

1) вектор $\vec{c}$*, перпендикулярный к каждому из векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*;*
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$*, где* φ *– угол между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*;*
3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *– образуют "правую" тройку векторов.*

Пусть в декартовой системе координат: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. *Тогда*

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

5.1. (843) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|a| = 1$, $|b| = 2$ вычислить: 1) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2$; 2) $\left|\left[\vec{a}+3\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right]\right|^2$.

5.2. (845) Доказать тождество: $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2 + \left(\vec{a},\vec{b}\right)^2 = (\vec{a},\vec{a})^2\left(\vec{b},\vec{b}\right)^2$.

5.3. (848) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. Доказать, что

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{b},\vec{c}\right] = [\vec{c},\vec{a}].$$

5.4. (850) Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти координаты векторных произведений: $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{b}\right]$.

5.5. (854) Сила $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ приложена к точке $C(2;-1;-2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

5.6. (858) Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$ $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

5.7. (862) Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяет условию: $(\vec{x},\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-7\vec{k}) = 10$ и перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание 5

5.8. (843) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|a| = 1$, $|b| = 2$ вычислить: $\left|\left[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}\right]\right|^2$.

5.9. (847) Даны произвольные векторы: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$. Доказать, что векторы $\vec{a} = [\vec{p}, \vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q}, \vec{n}]$, $\vec{c} = [\vec{r}, \vec{n}]$ компланарны.

5.10. (849) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ связаны соотношениями $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{c}, \vec{d}\right]$, $[\vec{a}, \vec{c}] = \left[\vec{b}, \vec{d}\right]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

5.11. (850) Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти координаты векторных произведений: $\left[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}\right]$.

5.12. (853) Сила $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ приложена к точке $M_0(4; -2; 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(3; 2; -1)$.

5.13. (857) Даны точки $A(1; -1; 2)$ $B(5; -6; 2)$ и $C(1; 3; -1)$. Вычислить площадь $\triangle\ ABC$.

5.14. (860) Вектор $\vec{x}$, перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

Ответы:

1) 1) 3, 2) 300; 4) $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$; 5) 15, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{-2}{15}$, $\cos\alpha = \frac{11}{15}$; 6) 5; 7) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; 8) 27; 11) $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 28 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 13) 14 кв. ед.; 14) $\begin{pmatrix} -6 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$.

6. Смешанное произведение и двойное векторное произведение

Смешанным произведением *трех векторов $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и вектора $\vec{c}$*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

Замечание: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right).$

Если в некотором базисе $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ *и* $\vec{c}=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$, *то*

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Три вектора $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ комплонарны тогда и только тогда, когда $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$

Двойное векторное произведение:

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c})\quad \text{или} \quad \left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}).$$

6.1. (869) Доказать тождество: $\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}\right)=2\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right).$

6.2. (871) Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right],$$

компланарны.

6.3. (875) Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

6.4. (877) Даны вершины тетраэдра: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

6.5. (881) Даны вершины треугольника $A(2;-1;-3)$, $B(1;2;-4)$, и $C(3;-1;-2)$. Вычислить координаты вектора $\vec{h}$, коллинеарного с его высотой, опущенной из вершины A на противоположную сторону, при условии, что вектор $\vec{h}$ образует с осью Oy тупой угол и что его модуль равен $2\sqrt{34}$.

6.6. (883) Доказать тождества:

1) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=0;$

2) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)+\left([\vec{a},\vec{c}],\left[\vec{d},\vec{b}\right]\right)+\left(\left[\vec{a},\vec{d}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=0.$

3) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right],[\vec{c},\vec{a}]\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2.$

Домашнее задание 6

6.7. (870) Доказать тождество $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, где λ и μ – произвольные числа.

6.8. (873) Даны три вектора: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$.

Вычислить $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

6.9. (874) Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

6.10. (876) Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

6.11. (882) Считая, что каждый из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отличен от нуля, установить, при каком их взаимном расположении справедливо равенство:

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right].$$

6.12. (883). Доказать тождества: 1) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)=(\vec{a},\vec{c})\left(\vec{b},\vec{d}\right)-\left(\vec{a},\vec{d}\right)\left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

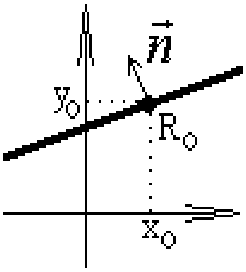
2) $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)-\vec{d}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Ответы:

4) 11; 5) $\vec{h}=\begin{pmatrix}-6\\-8\\-6\end{pmatrix}$; 8) -7; 9) не копланарны; 10) 3 куб. ед.; 11) либо векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, либо вектор $\vec{b}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Общее уравнение прямой



Уравнение прямой, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0)$ *перпендикулярно вектору нормали* $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, *имеет вид*

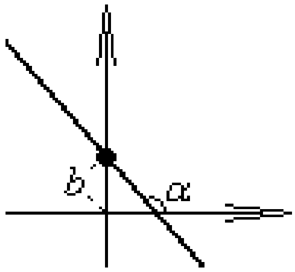
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Или, обозначив $C = -Ax_0 - By_0$,

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнением прямой с угловым коэффициентом

Угол α *между прямой и положительной вещественной полуосью называется углом наклона прямой к оси* Ox. *Тангенс угла наклона прямой к оси* Ox *называется угловым коэффициентом прямой:*



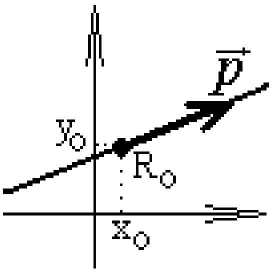
$$k = \mathrm{tg}\alpha.$$

Пусть k *– угловой коэффициент,* b *– величина отрезка, который отсекает прямая на оси* Oy, *считая от начала координат. Уравнение*

$$y = kx + b$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

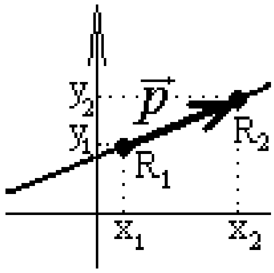
Каноническое уравнение прямой



Уравнение прямой, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0)$ *параллельно направляющему вектору* $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, *имеет вид*

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}.$$

Если прямая проходит через две точки $R_1(x_1, y_1)$ *и* $R_2(x_2, y_2)$, *то в качестве направляющего вектора* $\vec{p}$ *можно взять вектор* $\overrightarrow{R_1R_2}$, *получим*



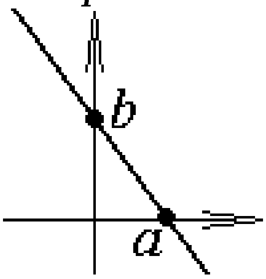
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Параметрические уравнения прямой

Уравнение прямой, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0)$ *параллельно направляющему вектору* $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, *может быть задано параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t, \\ y = y_0 + p_2 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

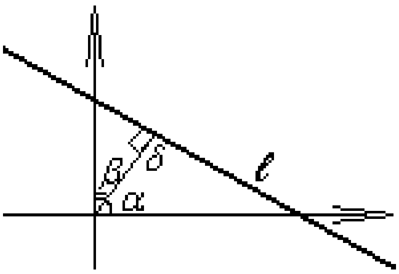
Уравнение прямой «в отрезках» на осях



Прямая отсекающая от осей Ox *и* Oy *отрезки* $a \neq 0$ *и* $b \neq 0$ *(т. е. проходящая через точки* $(a, 0)$ *и* $(0, b)$*) задается уравнением*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нормированное уравнение прямой

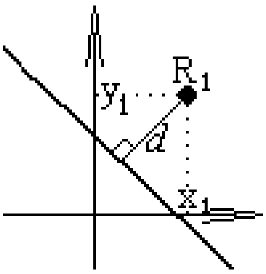


Уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ *называется нормированным, если вектор нормали единичный* $(A^2 + B^2 = 1)$ *и из двух возможных направлений вектора нормали выбрано то, при котором* $C < 0$. *Общее уравнение превращается в нормированное, если обе части разделить на число* $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, *знак выбирают так, чтобы свободный член был отрицательный* $(A = \cos\alpha,$ $B = \cos\beta, \delta = -C)$:

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 = 1, C < 0;$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta = 0.$$

Расстояние от точки до прямой



Пусть $R_1(x_1, y_1)$ *точка плоскости не лежащая на прямой* ℓ *с нормированным уравнением* $x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta = 0$, *тогда*

$$d = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - \delta|$$

расстояние от точки R_1 *до прямой* ℓ.

Если прямая ℓ *задана уравнением* $Ax + By + C = 0$, *тогда*

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

расстояние от точки R_1 *до прямой* ℓ.

7. Прямая на плоскости I

7.1. (210) Определить, какие из точек $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$, а какие нет.

7.2. (213) Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

7.3. (216) Определить координаты вершин параллелограмма, если уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и $3x+2y+3=0$ уравнение одной из его диагоналей.

7.4. (221) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямых: 1)$5x-y+3=0$; 2) $y-3=0$.

7.5. (222) Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой:

1) параллельной данной прямой;
2) перпендикулярной к данной прямой.

7.6. (223) Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$:

1) параллельной данной прямой;
2) перпендикулярной к данной прямой.

7.7. (227) Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

7.8. (238) Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами в точках $A(3;2), B(5;-2), C(1;0)$.

7.9. (253) Определить угол φ между двумя прямыми:
1) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$; 2) $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$.

7.10. (299) Составить для них уравнения «в отрезках» и построить данные прямые. 1)$4x-3y+24=0$; 2)$2x+3y-6=0$.

Домашнее задание 7

7.11. (211) Определить ординаты точек P_1, P_2, расположенных на прямой $3x-2y-6=0$, абсциссы которых соответственно равны: 4, 0.

7.12. (214) Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

7.13. (217) Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить его площадь.

7.14. (224) Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

7.15. (225) Найти вершины прямоугольника, если уравнения двух его сторон $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и $7x+y-15=0$ уравнение одной из его диагоналей.

7.16. (226) Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

7.17. (235) Определить точку пересечения высот треугольника, если его стороны даны уравнениями $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$.

7.18. (237) Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из C на биссектрису внутреннего угла A, если вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(3;-5)$, $C(5;7)$.

7.19. (247) Найти проекцию точки $P(-8;12)$ на прямую, проходящую через $A(2;-3)$ и $B(-5;1)$.

7.20. (253)Определить угол φ между двумя прямыми: 1) $5x-y+7=0$, $\quad 3x+2y=0$; 2) $3x+2y-1=0$, $\quad 5x-2y+3=0$.

7.21. (299) Даны прямые. Составить для них уравнения «в отрезках» и построить эти прямые. 1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$; 4) $3x-5y-2=0$; 5) $5x+2y-1=0$.

Ответы:

1) $M_1\in\ell,\ M_3\notin\ell$; 2) $(6,0),\ (0,-4)$; 3) $(1,-3),\ (-2,5),(5,-9),(8,-17)$; 4) 1) $k=5, b=3$, 2) $k=0, b=3$; 5) 1) $-5/3$, 2) $3/5$; 6) 1) $2x+3y-7=0$, 2) $3x-2y-4-0$; 7) $Q(11,-11)$; 8) стороны $AB: 2x+y-8=0, BC: x+2y-1=0, CA: x-y-1=0$, медианы из вершины $A: x-3=0, B: x+y-3=0, C: y=0$; 9) 1) $\varphi=arctg\frac{16}{11}$, 2) $\varphi=0$; 10) 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$, 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{8}=1$.

11) $-3,\ 0$; 12) $(3,-5)$; 13) 17 кв. ед.; 14) $3x+2y=0,\ 2x-3y-13=0$; 15) $(2,1),(4,2),(-1,7),(1,8)$; 16) $(-2,-1)$; 17) $(3,4)$; 18) $x-5=0$; 19) $(-12,5)$; 20) 1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 21) 1) $\frac{x}{4{,}5}+\frac{y}{3}=1$, 2) $\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2/5}=1$.

8. Прямая на плоскости II

8.1. (288) Доказать, что две данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:

$$1) x + 5y - 35 = 0, \qquad 3x + 2y - 27 = 0;$$
$$2) 3x + 5 = 0, \qquad y - 2 = 0.$$

8.2. (289) Доказать, что две данные прямые параллельны:

$$1) 3x + 5y - 4 = 0, \qquad 6x + 10y + 7 = 0;$$
$$2) 2x - 1 = 0, \qquad x + 3 = 0.$$

8.3. (290) Доказать, что две данные прямые совпадают:

$$1) 3x + 5y - 4 = 0, \qquad 6x + 10y - 8 = 0;$$
$$2) x\sqrt{3} - 1 = 0, \qquad 3x - \sqrt{3} = 0.$$

8.4. (309) Определить, какие из уравнений прямых являются нормироваными:

$$1) \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y - 3 = 0; \qquad 2) \tfrac{2}{5}x + \tfrac{3}{5}y - 1 = 0;$$
$$3) - x + 2 = 0; \qquad 4) x - 2 = 0.$$

8.5. (310) Привести общее уравнение прямой к нормированому виду:

$$1) 4x - 3y - 10 = 0; \qquad 2) \tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y + 10 = 0;$$
$$3) x + 2 = 0; \qquad 4) 2x - y - \sqrt{5} = 0.$$

8.6. (315) Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$$3x - 2y - 5 = 0, \qquad 2x + 3y + 7 = 0$$

и одна из его вершин $A(-2; 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

8.7. (320) Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из B на медиану, проведенную из C, если вершины треугольника: $A(-10; -13), B(-2; 3), C(2; 1)$.

8.8. (322) Вычислить расстояние между параллельными прямыми

$$3x - 4y - 10 = 0; \quad 6x - 8y + 5 = 0.$$

8.9. (339) Составить уравнения биссектрис углов, образованных пересекающимися прямыми:

$$1) \ \begin{array}{l} x - 3y + 5 = 0, \\ 3x - y - 2 = 0; \end{array} \qquad 2) \ \begin{array}{l} x - 2y - 3 = 0, \\ 2x + 4y + 7 = 0; \end{array} \qquad 3) \ \begin{array}{l} 3x + 4y - 1 = 0, \\ 5x + 12y - 2 = 0. \end{array}$$

8.10. (344) Определить, лежит ли точка $M(-3; 2)$ внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями:
$x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$, $4x - y - 31 = 0$.

8.11. (345) Определить, какой из углов, острый или тупой, образованных двумя прямыми $3x - 2y + 5 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$, содержит начало координат.

Домашнее задание 8

8.12. (288) Доказать, что две данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:

$$1) 14x - 95y - 24 = 0, \qquad 7x - 2y - 17 = 0;$$
$$2) 8x - 33y - 19 = 0, \qquad 12x + 55y - 19 = 0.$$

8.13. (289) Доказать, что две данные прямые параллельны:

1) $2x-4y+3=0, \qquad x-2y=0;$
2) $y+3=0, \qquad 5y-7=0.$

8.14. (290) Доказать, что прямые совпадают: $x-y\sqrt{2}=0,\ x\sqrt{2}-2y=0.$

8.15. (309) Определить, какие из уравнений прямых являются нормированными:
1) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0;$ 2) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0;$
3) $y+2=0,$ 4) $-y-2=0.$

8.16. (310) Привести уравнение прямой к нормированому виду

$$12x-5y+13=0.$$

8.17. (314) Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь этого квадрата.

8.18. (322) Вычислить расстояние между параллельными прямыми

$$5x-12y+26=0, \qquad 5x-12y-13=0.$$

8.19. (338) Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых:

1) $3x-y+7=0,$ $3x-y-3=0;$ 2) $x-2y+3=0,$ $x-2y+7=0;$ 3) $5x-2y-6=0,$ $10x-4y+3=0.$

8.20. (343) Определить, лежит ли начало координат внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями:
$7x-5y-11=0,\ 8x+3y+31=0,\ x+8y-19=0.$

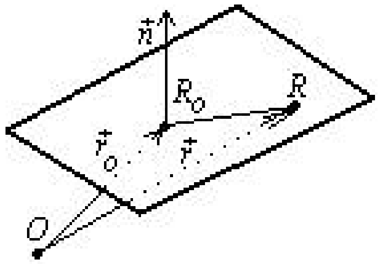
Ответы:

8.1. 1) $(5;6)$, 2) $(-5/3;2)$; **8.4.** Нормированными являются 1) и 4); **8.5.** 1) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0,$ 2) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0,$ 3) $-x-2=0,$ 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-1=0;$ **8.6.** 6 кв. ед. **8.7.** 4; **8.8.** $d=2,5;$ **8.9.** 1) $4x-4y+3=0,\ 2x+2y-7=0,$ 2) $4x+1=0,\ 8y+13=0,$ 3) $14x-8y-3=0,\ 64x+112y-23=0;$ **8.10.** Вне треугольника; **8.11.** Острый угол.

8.12. 1) $(2;3)$, 2) $(2;-1/11)$; **8.15.** Нормироваными являются 2) и 4); **8.16.** $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0;$ **8.17.** 5 кв. ед. **8.18.** $d=3;$ **8.19.** 1) $3x-y+2=0,$ 2) $x-2y+5=0,$ 3) $20x-8y-9=0,$ **8.20.** Внутри треугольника.

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Общее уравнение плоскости



Плоскость, проходящая через точку R_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$, может быть задана векторным уравнением

$$(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0.$$

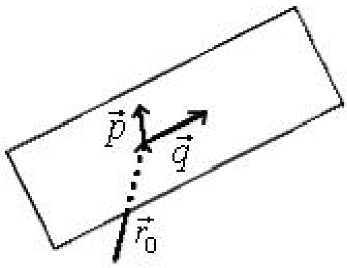
Или в координатном виде, если $R_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r_0} = \overrightarrow{OR_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, то векторное уравнение примет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Параметрические уравнения плоскости



Плоскость, проходящая через точку R_0 параллельно векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, может быть задана векторным уравнением

$$(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

Или в координатном виде, если $R_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r_0} = \overrightarrow{OR_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, то векторное уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение $(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{p}, \vec{q}) = 0$ может быть записано и так:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{p} \cdot t + \vec{q} \cdot s, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

Или в координатном виде

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t + q_1 s, \\ y = y_0 + p_2 t + q_2 s, \\ z = z_0 + p_3 t + q_3 s, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

Уравнение плоскости по трем точкам

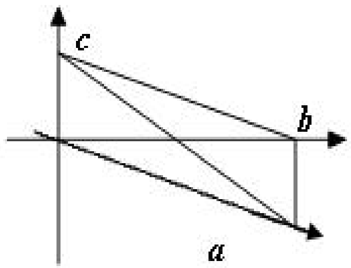
Плоскость, проходящая через три точки $R_1(x_1, y_1, z_1)$, $R_2(x_2, y_2, z_2)$, и $R_3(x_3, y_3, z_3)$, может быть задана векторным уравнением

$$(\vec{r} - \vec{r_1}, \vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{r_3} - \vec{r_1}) = 0,$$

или с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости «в отрезках» на осях



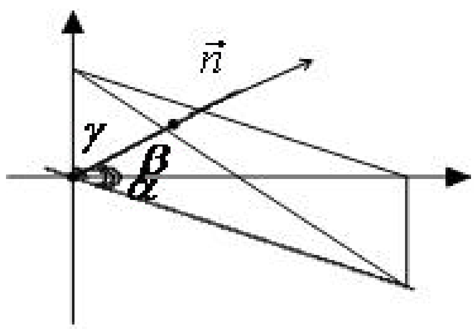
Плоскость, отсекающая от координатных осей отрезки $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Нормированное уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости называется нормированным, если вектор нормали $|\vec{n}| = 1$ единичный и $(\vec{r_0}, \vec{n}) \geq 0$.

Обозначим $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, D = -(\vec{r_0}, \vec{n})$. *Уравнение плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ *– нормированное, если* $A^2 + B^2 + C^2 = 1,\ D \leq 0$.



Общее уравнение превращается в нормированное, если обе части разделить на число $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, причем знак выбирают так, чтобы свободный член был отрицательный.

$A = \cos\alpha, B = \cos\beta, \cos\gamma$ *направляющие косинусы* $(|\vec{n}| = 1), \delta = -D$ *– расстояние от начала координат до плоскости.*

Расстояние от точки пространства до плоскости

Пусть $(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0$ нормированное уравнение плоскости (т. е. $|\vec{n}| = 1$ и $(\vec{r_0}, \vec{n}) \geq 0$); R_1 – произвольная точка пространства. Тогда $d = |(\overrightarrow{OR_1} - \vec{r_0}, \vec{n})|$ – расстояние от точки R_1 пространства до плоскости.

Или если $R_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка пространства и уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

9. Плоскость в пространстве I

9.1. (915) Точка $P(2;-1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

9.2. (917) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9.3. (924) Установить, какие из пар уравнений определяют параллельные плоскости:
1) $2x-3y+5z-7=0, \quad 2x-3y+5z+3=0;$
2) $x-3z+2=0, \quad 2x-6z-7=0.$

9.4. (925) Установить, какие из пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:
1) $3x-y-2z-5=0, \quad x+9y-3z+2=0;$
2) $2x-5y+z=0, \quad x+2z-3=0.$

9.5. (931) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям:

$$2x-y+3z-1=0, \ x+2y+z=0.$$

9.6. (936) Установить, что три плоскости

$$x-2y+z-7=0, \quad 2x+y-z+2=0, \quad x-3y+2z-11=0$$

имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

9.7. (943) Найти точки пересечения плоскости $2x-3y-4z=24$ с осями координат.

9.8. (944) Написать уравнение «в отрезках» плоскости $x+2y-3z-6=0$.

9.9. (948) Составить уравнение плоскости «в отрезках», если она отсекает на оси Ox отрезок $a=-3$ и на оси Oy отрезок $c=2$ и проходит через точку $M_1(6;-10;1)$.

9.10. (953) Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c=-5$ и перпендикулярной вектору $n = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

9.11. (942)Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $P_1(2;-1;1)$ и $P_2(3;1;2)$ параллельно оси Oy.

Домашнее задание 9

9.12. (925) Перпендикулярны ли плоскости $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$?

9.13. (916) Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

9.14. (924) Параллельны ли плоскости $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$?

9.15. (929) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

9.16. (930) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

9.17. (932) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x-z+1=0$, $\quad y=0$.

9.18. (942) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(7;2;-3)$ и $M_2(5;6;-4)$ параллельно оси Ox.

9.19. (945) Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $-3x+4y+24z=12$ на координатных осях.

9.20. (949) Составить уравнение плоскости «в отрезках», если она проходит через точки $M_1(1;2;-1)$ и $M_2(-3;2;1)$ и отсекает на оси Oy отрезок $b=3$.

Ответы:

9.1. $2x-y-z-6=0$; **9.2.** $x+4y+7z+16=0$; **9.3.** Плоскости параллельны; **9.4.** 1) плоскости перпендикулярны, 2) плоскости не перпендикулярны; **9.5.** $7x-y-5z=0$; **9.6.** $x=1,\ y=-2,\ z=2$; **9.7.** $(12,0,0),(0,-8,0),(0,0,-6)$; **9.8.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$; **9.9.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$; **9.10.** $2x-y-3z-15=0$; **9.11.** $x-z-1=0$.

9.12. Плоскости перпендикулярны; **9.13.** $x-y-3z+2=0$; **9.16.** Плоскости не параллельны; **9.17.** $4x-3y+2z=0$ **9.18.** $2x-3z-27=0$; **9.19.** $x+2z-4=0$; **9.20.** $y+4z+10=0$; **9.21.** $a=-4, b=3, c=1/2$; **9.22.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-3/2}=1$.

10. Плоскость в пространстве II

10.1. (956)Определить, какие из следующих уравнений плоскостей являются нормироваными:

$$1)\ \ \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{2}{3}z - 5 = 0; \qquad 2)\ \ \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z - 3 = 0.$$

10.2. (957)Привести уравнение плоскости к нормированому виду

$$2x - 2y + z = 18.$$

10.3. (960) Вычислить расстояние d от точки $P(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

10.4. (964)Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

$$x - 2y - 2z - 12 = 0, \qquad x - 2y - 2z - 6 = 0.$$

10.5. (972)Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей:

$$4x - y - 2z - 3 = 0, \qquad 4x - y - 2z - 5 = 0.$$

10.6. (973)Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями:

$$x - 3y + 2z - 5 = 0, \qquad 3x - 2y - z + 3 = 0.$$

10.7. (968) На оси Ox найти точку, равноудаленную от двух плоскостей:

$$12x - 16y + 15z + 1 = 0, \qquad 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

10.8. (969) Вывести уравнение геометрического места точек, отклонение которых от плоскости $4x - 4y - 2z + 3 = 0$ равно 2.

Домашнее задание 10

10.9. (956)Определить, какие из следующих уравнений плоскостей являются нормироваными:

$$1)\ \ \tfrac{6}{7}x - \tfrac{3}{7}y + \tfrac{2}{7}z + 5 = 0; \qquad 2)\ \ -\tfrac{6}{7}x + \tfrac{3}{7}y - \tfrac{2}{7}z - 5 = 0.$$

10.10. (957)Привести каждое из следующих уравнений плоскостей к нормированому виду:

$$1)\ \ 4x - 6y - 12z - 11 = 0; \qquad 2)\ \ -4x - 4y + 2z + 1 = 0.$$

10.11. (964)Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

$$2x - 3y + 6z - 14 = 0, \qquad 4x - 6y + 12z + 21 = 0.$$

10.12. (972)Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей:

$$3x + 2y - z + 3 = 0, \qquad 3x + 2y - z - 1 = 0.$$

10.13. (973)Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы, образованные плоскостями:

$$5x - 5y - 2z - 3 = 0,\ x + 7y - 2z + 1 = 0.$$

10.14. (967) На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1; -2; 0)$ и от плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

10.15. (970) Составить уравнение геометрического места точек, отклонение которых от плоскости $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ равно -3.

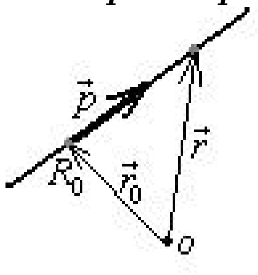
Ответы:

10.2. $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6 = 0$; **10.3.** $d = 4$; **10.4.** $d = 2$; **10.5.** $4x-y-2z-4 = 0$; **10.6.** $4x - 5y + z - 2 = 0,\ 2x + y - 3z + 8 = 0$; **10.7.** $(2, 0, 0), (\frac{11}{43}, 0, 0)$; **10.8.** $4x - 4y - 2z + 15 = 0$.

10.10. 1) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0$, 2) $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{6} = 0$; **10.11.** $d = 3,5$; **10.12.** $3x + 2z - z + 1 = 0$; **10.13.** $x - 3y - 1 = 0,\ 3x + y - 2z - 1 = 0$; **10.14.** $(0, 0, -2), (0, 0, -6\frac{4}{13})$; **10.15.** $6x + 3y + 2z + 11 = 0$.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Параметрические уравнения



Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, *может быть задано в векторной форме*

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{p}t,\ t \in \mathbb{R};$$

или параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t, \\ y = y_0 + p_2 t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + p_3 t, \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, *имеет вид*

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}.$$

Если прямая проходит через две точки $R_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $R_2(x_2, y_2, z_2)$, *то в* качестве направляющего вектора $\vec{p}$ можно взять вектор $\overrightarrow{R_1R_2}$, и получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Векторное уравнение прямой

Так как $\vec{p} \,||\, \vec{r} - \vec{r_0}$, *то* $[\vec{p}, \vec{r} - \vec{r_0}] = 0$.

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, *может быть задано*

$$[\vec{p}, \vec{r} - \vec{r_0}] = 0.$$

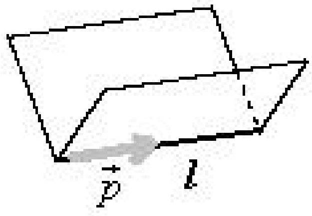
Векторное уравнение прямой называют нормированным, если $|\vec{p}| = 1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть $[\vec{p}, \vec{r} - \vec{r_0}] = 0$ *– нормированное уравнение прямой и* R_0 *произвольная точка пространства. Тогда расстояние от точки* R_0 *до прямой*

$$d = \left| [\vec{p}, \overrightarrow{OR_0} - \vec{r_0}] \right| .$$

Прямая, как линия пересечения двух плоскостей



Прямую можно задавать как линию пересечения двух не параллельных плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда в качестве нарпавляющего вектора этой прямой можно взять вектор $\vec{p} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}]$, *где* $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ *– нормали плоскостей.*

11. Прямая и плоскость в пространстве

11.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,0)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{4}.$$

11.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0,-1,3)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-4t-1 \\ z=t-2 \end{cases}.$$

11.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,0)$ параллельно прямым

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}, \qquad \begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t+1 \\ z=-t-2 \end{cases}.$$

11.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3,4,5)$ перпендикулярно плоскостям $2x-3y+z-3=0$, $3x+2y-4z+2=0$.

11.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4,-2,-1)$, $N(-1,-2,3)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} -3x-2y+6z-1=0 \\ -x+4y-2z+2=0 \end{cases}.$$

11.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3,-4,1)$ и прямую

$$\begin{cases} -3x-2y+6z-1=0 \\ -x+4y-2z+2=0 \end{cases}.$$

11.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3,0)$ параллельно прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-4}.$$

11.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3,-4,1)$ перпендикулярно плоскости

$$-2x+3z-1=0.$$

11.9. Найти проекцию точки $M(-2,-3,1)$ на прямую

$$\begin{cases} x=-3t+1 \\ y=4t-1 \\ z=2t+2 \end{cases}.$$

11.10. Найти проекцию точки $M(2,-3,0)$ на плоскость
$$-3x+y-2z-4=0.$$

11.11. Проверить, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{0}$, $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases}$ лежат в одной плоскости и найти уравнение этой плоскости.

11.12. Проверить, что прямые скрещивающиеся и найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}$, параллельно прямой
$$\begin{cases} x=3t+2 \\ y=t-3 \\ z=t-1. \end{cases}$$

11.13. Найти расстояние от точки $P(-2,5,2)$ до плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(-3,1,0), M_2(2,-1,1), M_3(0,-2,-1)$.

11.14. Найти расстояние от точки $P(3,-1,2)$ до прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,1,3)$.

Домашнее задание 11

11.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-2,3)$ перпендикулярно прямой
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{0}.$$

11.16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,1,3)$ перпендикулярно прямой
$$\begin{cases} x=4t+1 \\ y=3t-1 \\ z=2t+2 \end{cases}.$$

11.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,2,-3)$ параллельно прямым
$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{4}, \qquad \begin{cases} x=-3t-1 \\ y=4t+1 \\ z=-2t-2 \end{cases}.$$

11.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,-4,-5)$ перпендикулярно плоскостям
$$-2x+3y+3=0, \qquad 3x-2y+4z+2=0.$$

11.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-4,2,1)$, $N(-3,-1,-3)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x-4y+2z-1=0 \\ -3x+2y-5z+2=0 \end{cases}.$$

11.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-3,0)$ и прямую

$$\begin{cases} 3x-2y-5z-1=0 \\ -x-4y+2z+3=0 \end{cases}.$$

11.21. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3,-4)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-3}$.

11.22. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,-4,-1)$ перпендикулярно плоскости $2x-3y+1=0$.

11.23. Найти проекцию точки $M(-2,-3,1)$ на плоскость $3x+2y-z-4=0$.

11.24. Найти проекцию точки $M(-2,-3,1)$ на прямую $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-4t-1 \\ z=3t+2 \end{cases}$.

11.25. Проверить, что прямые лежат в одной плоскости и найти уравнение этой плоскости $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{0}$, $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases}$.

11.26. Проверить, что прямые скрещивающиеся и найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=3t+2 \\ y=t-3 \\ z=t-1 \end{cases}$ параллельно $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

11.27. Найти расстояние от точки $P(-3,4,-2)$ до плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3,-1,0)$, $M_2(1,-2,1)$, $M_3(0,2,-1)$.

11.28. Найти расстояние от точки $P(2,-1,-2)$ до прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(-1,0,2)$, $M_2(3,-1,2)$.

Вопросы «Допуска» к модульной работе № 1.

1. Определение *коллинеарных* векторов. Критерий *коллинеарности.*

2. Определение *компланарных* векторов. Критерий *компланарности.*

3. Определение *скалярного произведения* двух векторов. Теорема о вычислении скалярного произведения «в координатах».

4. Определение *векторного произведения* двух векторов. Теорема о вычислении векторного произведения «в координатах».

5. Определение *смешанного произведения* трех векторов. Теорема о вычислении смешанного произведения «в координатах».

6. Формула для двойного векторного произведения.

7. Определение *ортогональных* векторов. Критерий *ортогональности* двух векторов.

8. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

9. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

10. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки.

11. Уравнение прямой «в отрезках» на осях.

12. Нормированное уравнение прямой на плоскости.

13. Уравнение плоскости, проходящей через точку R_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

14. Уравнение плоскости, проходящей через точку R_0 параллельно векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

15. Уравнение плоскости по трем точкам.

16. Уравнение плоскости «в отрезках» на осях.

17. Нормированное уравнение плоскости.

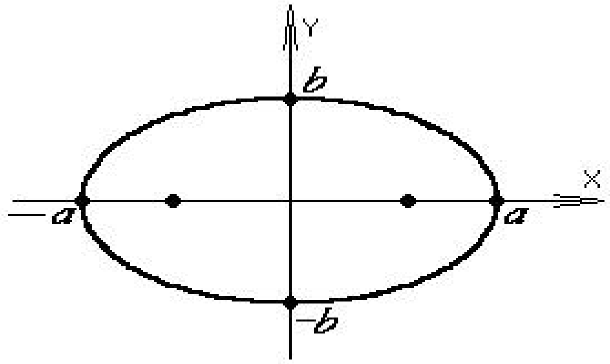
18. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $R_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

19. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

20. Расстояние от точки до плоскости.

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

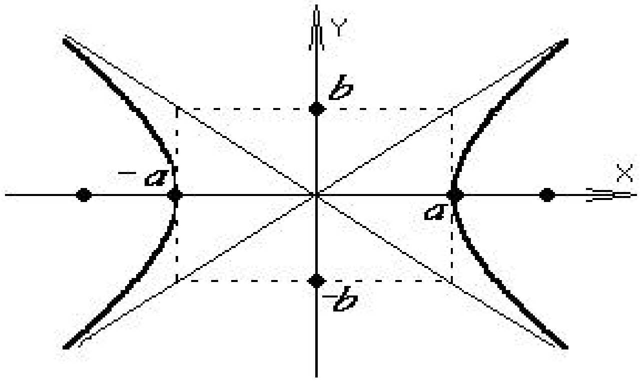
Канонические уравнения кривых второго порядка:



эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

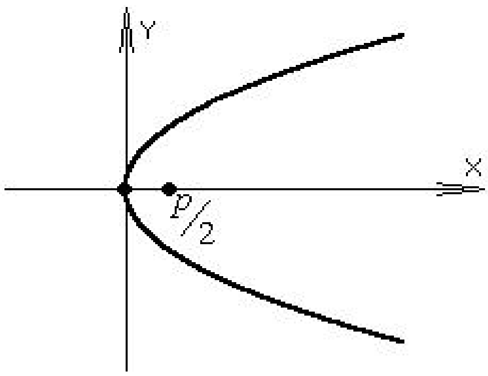
где a – большая и b – малая полуоси;



гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – вещественная и b – мнимая полу



парабола

$$y^2=2px,$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы.

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$:

$\varepsilon<1$ – *у эллипса,* $\varepsilon>1$ – *у гиперболы,* $\varepsilon=1$ – *у параболы.*

Директориальное свойство:

$$\frac{r}{d}=\varepsilon,$$

где r – расстояние от некоторой точки кривой до одного из фокусов; d – расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы.

Полярное уравнение *эллипса, правой ветви гиперболы и параболы:*

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

где p – фокальный параметр.

12. Эллипс

12.1. (444) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;
2) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2 = 10$;
3) расстояние между директрисами равно 32 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

12.2. (447) Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

12.3. (456) Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

12.4. (489) Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярных к прямой $2x - 2y - 13 = 0$.

12.5. (471) Установить, что уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

12.6. (475) Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $y + 3 = 0$.

Домашнее задание 12

12.7. (444) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2 = 8$;
2) его большая оси равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
3) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13.

12.8. (449) Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис.

12.9. (457) Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2}{5}$, расстояние от точки M эллипса до директрисы равно 20. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

12.10. (488) Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, параллельных прямой $3x + 2y + 7 = 0$.

12.11. (471) Установить, что уравнения $a)16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$; $b)$ $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ определяет эллипс, и найти координаты C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

12.12. (474) Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокус $F(2; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x - 5 = 0$.

13. Гипербола

13.1. (515) Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, зная что:
1) его оси $2a = 10$ и $2b = 8$;
2) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
3) уравнение асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами $12,8$.

13.2. (518) Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

13.3. (524) Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 2$, фокальный радиус ее точки M, проведенный из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние от от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

13.4. (561) Провести касательные к гиперболе

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = -1$$

параллельно прямой $2x + 4y - 5 = 0$ и вычислить расстояние d между ними.

13.5. (563) Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведенных из точки $(-1, -7)$.

13.6. (545) Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{12}$, фокус $F(0; 13)$ и уравнение соответствующей директрисы $13y = 144$.

13.7. (541) Установить, что уравнение

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$$

определяет гиперболу, найти координаты ее центра С, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис.

Домашнее задание 13

13.8. (515) Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная что:
1) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;
2) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
3) уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$.

13.9. (519) Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

13.10. (525) Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 3$, расстояние от точки M гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

13.11. (560) Составить уравнения касательных к гиперболе

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1,$$

параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

13.12. (564) Из точки $C(1; -10)$ проведены касательные к гиперболе

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1.$$

Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

13.13. (544) Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5; 0)$ и уравнение соответствующей директрисы $5x = 16$.

13.14. (541) Установить, что уравнение $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ определяет гиперболу, найти координаты ее центра С, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис.

14. Парабола

14.1. (583) Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она расположена симметрично относительно:

1) оси Ox, в правой полуплоскости, и ее параметр $p=3$;
2) оси Ox и проходит через $A(9;6)$.

14.2. (589) Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2=24x$.

14.3. (615) Провести касательную к параболе $y^2=12x$ параллельно прямой $3x-2y+30=0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и прямой.

14.4. (600) Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7;2)$ и директриса $x-5=0$.

14.5. (598) Установить, определяет ли уравнение $x=2y^2-12y+14$ параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p.

14.6. (599)Установить, какую линию определяет уравнение $y=3-4\sqrt{x-1}$.

14.7. (632) Установить, какие линии определяют уравнения в полярных координатах: 1) $\rho=\frac{5}{1-\frac{1}{2}cos\varphi}$, 2) $\rho=\frac{6}{1-cos\varphi}$, 3) $\rho=\frac{5}{3-4cos\varphi}$.

Домашнее задание 14

14.8. (583) Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она расположена симметрично относительно:

1) оси Oy, в нижней полуплоскости, и ее параметр $p=3$;
2) оси Oy и проходит через $C(1;1)$.

14.9. (590) Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.

14.10. (614) Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.

14.11. (601) Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(4;3)$ и директриса $y+1=0$.

14.12. (598) Установить, определяет ли уравнение $x=-\frac{1}{4}y^2+y$ параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p.

14.13. (599) Установить, какую линию определяет уравнение $x=-4+3\sqrt{y+5}$.

14.14. (632) Установить, какие линии определяют уравнения в полярных координатах: 1) $\rho=\frac{10}{1-\frac{3}{2}cos\varphi}$, 2) $\rho=\frac{12}{2-cos\varphi}$, 3) $\rho=\frac{1}{3-3cos\varphi}$.

15. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

15.1. Назвать кривую. Найти центр, полуоси, фокусы, директрисы кривой. Нарисовать.

1) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0;$
2) $16x^2 - 9y^2 + 64x - 18y + 199 = 0;$
3) $x^2 - 4x - 4y = 0.$

15.2. Найти уравнение эллипса, гиперболы, параболы, если известны эксцентриситет, фокус и соответствующая директриса. Найти центр, полуоси, фокусы кривой и нарисовать.

1) $\varepsilon = \frac{3}{5},\ F(-4;2),\ 3x + 28 = 0;$
2) $\varepsilon = \frac{5}{4},\ F(-2;4),\ 5y - 11 = 0;$
3) $F(3;-2),\ x + 1 = 0.$

Домашнее задание 15

15.3. Назвать кривую. Найти центр, полуоси, фокусы, директрисы кривой. Нарисовать.

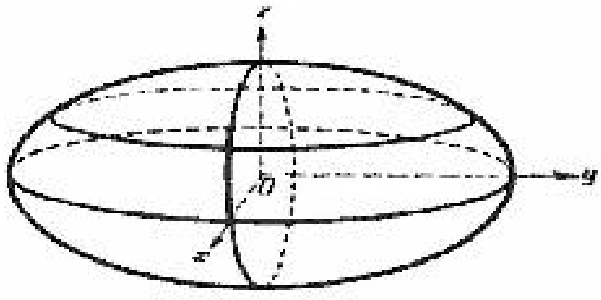
1) $25x^2 - 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0;$
2) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0;$
3) $y^2 - 2y + 12x + 25 = 0.$

15.4. Найти уравнение эллипса, гиперболы, параболы, если известны эксцентриситет, фокус и соответствующая директриса. Найти центр, полуоси, фокусы кривой и нарисовать.

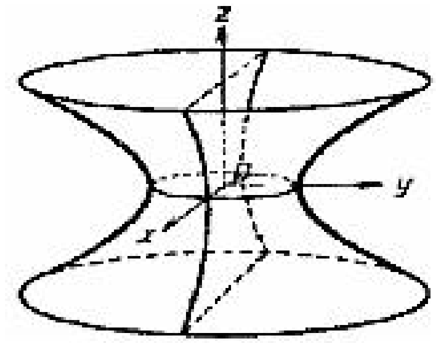
1) $\varepsilon = \frac{4}{5},\ F(2;1),\ 4x - 13 = 0;$
2) $\varepsilon = \frac{5}{3},\ F(-7;-1),\ 5x + 19 = 0;$
3) $F(-5;1),\ x - 1 = 0.$

16. Поверхности второго порядка

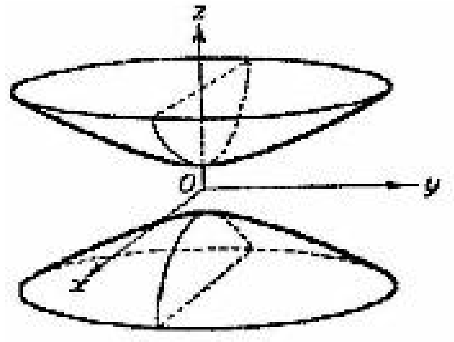
1. **Эллипсоид**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



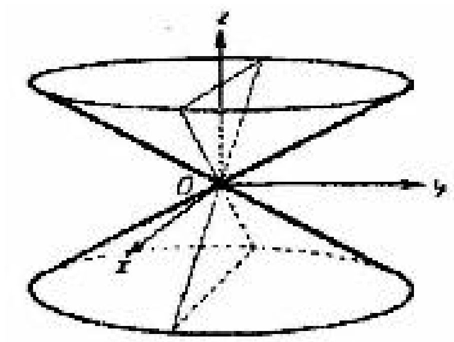
2. **Однополостный гиперболоид**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



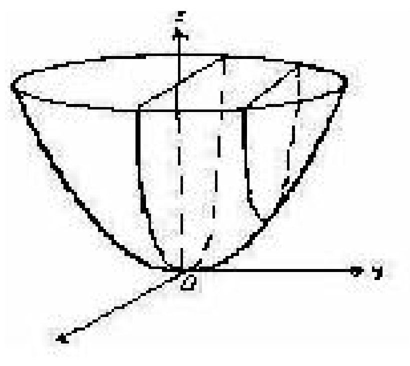
3. **Двуполостный гиперболоид**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



4. **Конус**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

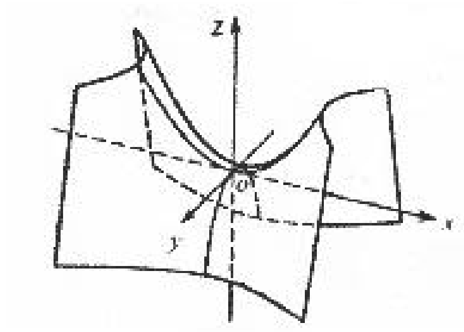


5. **Эллиптический параболоид**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$



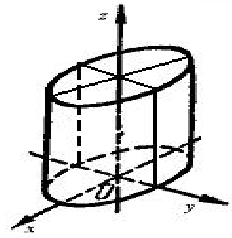
6. **Гиперболический параболоид**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$



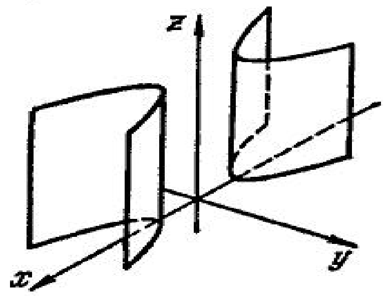
7. **Эллиптический цилиндр**

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



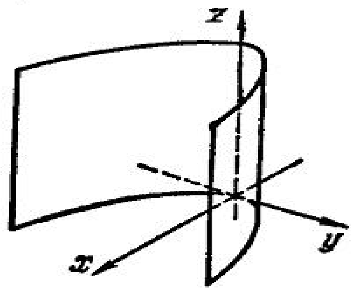
8. **Гиперболический цилиндр**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



9. **Параболический цилиндр**

$y^2 = 2px$



16.1. Нарисовать поверхности, установив их названия.

1)	$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4;$	2)	$12x^2 + 8y^2 - 6z^2 = -24;$
3)	$12x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 12;$	4)	$4z = x^2 + 2y^2;$
5)	$x^2 = 3y;$	6)	$16x^2 + 25y^2 = 400;$
7)	$-10x^2 + 5y^2 + 2z^2 = 10;$	8)	$6x^2 - 6y^2 + 9z^2 = 0;$
9)	$9x^2 - 16y^2 = -144;$	10)	$z = xy;$
11)	$15x^2 - 15y^2 - 9z^2 = 45;$	12)	$20x^2 - 10y^2 + 8z = 40.$

Домашнее задание 16

16.2. Нарисовать поверхности, установив их названия.

1)	$8x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 8;$	2)	$12x^2 - 4y^2 + 3z^2 = -12;$
3)	$6x^2 + 6y^2 - 9z^2 = 18;$	4)	$6z = 9x^2 + 4y^2;$
5)	$y^2 = 2x;$	6)	$25x^2 + 9y^2 = 225;$
7)	$-12x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 0;$	8)	$9x^2 + 25y^2 = 225;$
9)	$15x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 15;$	10)	$25x^2 - 9y^2 = 225;$
11)	$16x^2 - 9y^2 = 144;$	12)	$6z = 3x^2 - 9y^2.$

Литература

[1] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 388 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. III.)

[2] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1971. – 232 с.

[3] Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

[4] Бортаковский А. С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с: ил. – (Серия «Прикладная математика».)

[5] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 2000. – 318 с.

[6] Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Наука, 1987. – 496 с.

[7] Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988. – 240 с.

[8] Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

[9] Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1970. – 336 с.

[10] Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

[11] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986. – 309 с.

[12] Постников М. М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

Навчальне видання

Парфьонова Наталія Дмитрівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ: ЗАДАЧНИК

Навчально-методичний посібник для студентів
I курсу фізичного та радіофізичного факультетів

(Рос. мовою)

Коректор *Л. Є. Стешенко*
Комп'ютерна верстка *Н. Д. Парфьонова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Умов. друк. арк. 2,5. Наклад 50 прим. Зам. № 48/11

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна.
61077, Харків, пл. Свободи, 4
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна. Тел.: 705-24-32