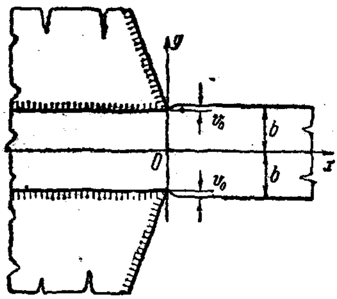
И. Г. АЛЬПЕРИН (Харьков)

НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ, РАВНОМЕРНО СЖАТОЙ НА ПОЛОВИНЕ ДЛИНЫ

В настоящей работе даётся решение одной задачи теории упругости. Эта задача представляет известный практический интерес. Однако не только это обстоятельство послужило поводом для написания статьи. Как мне кажется, большее значение имеют некоторые детали метода, который здесь использован и который с успехом может быть распространён на целый ряд задач математической физики со специальными граничными условиями. Применённые рассмотрения были впервые предложены *А. М. Данилевским* [1], памяти которого и посвящается данная статья.

В числе задач, решаемых указанным способом, настоящая задача является типичной. Для лучшего выяснения специфики этого рода задач мы впоследствии назовём ещё несколько задач, решения которых получаются почти точным повторением приведённых здесь рассуждений.



Фиг. 1.

§ 1. Постановка задачи

Бесконечно длинная полоса ширины $2b$ и толщины 1 сжимается без трения полубесконечными абсолютно жёсткими тисками в поперечном направлении *на постоянную величину* $2V_0$. *Определить напряжения, возникающие* внутри полосы. Система координат и характер деформаций указаны на фиг. 1.

Задача, очевидно, состоит в нахождении функции напряжения $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \ |y| < b, \tag{1}$$

и условиям на контуре $y = \pm b$:

а) относительно напряжений

$$\sigma_y^* = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{2}$$

$$\tau_{xy}^0 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad -\infty < x < +\infty; \tag{3}$$

б) относительно перемещений вдоль оси y

$$v^0 = \mp V_0, \quad -\infty < x \leqslant 0, \tag{4}$$

и условиям на бесконечности:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \to 0, \quad x \to +\infty, \ |y| \leqslant b, \\ &\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \to 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \to 0, \quad x \to -\infty, \ |y| \leqslant b. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

§ 2. Вспомогательное решение

Отыщем предварительно вспомогательное решение (1) в виде

$$\varphi_1(x, y) = f(y)\, e^{mx}$$

при следующих условиях на контуре $y = \pm b$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad \text{т. е.} \quad f'(\pm b) = 0; \quad \sigma_y = Ke^{mx}, \quad \text{т. е.} \quad f(\pm b) = \frac{K}{m^2}, \quad (6)$$

где $m \neq 0$, $K \neq 0$—произвольные комплексные числа.

Находим ($\Delta\Delta\varphi_1 = 0$):

$$f(y) = A\cos my + B\, my \sin my,$$

где нечётные члены отброшены ввиду условий (6). Эти же условия дают

$$A\sin mb - B(\sin mb + mb\cos mb) = 0,$$

$$A\cos mb + B\, mb \sin mb = \frac{K}{m^2},$$

и мы получаем

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2K}{m^2} \frac{(\sin mb + mb\cos mb)\cos my + my\sin mb \sin my}{2mb + \sin 2mb} e^{mx}. \quad (7)$$

Из закона Гука

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = (f'' - \nu m^2 f)\, e^{mx},$$

$$E\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = (m^2 f - \nu f'')\, e^{mx},$$

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -2(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} = -2(1+\nu)\, mf' e^{mx},$$

после элементарных вычислений, находим при $y = \pm b$

$$Ev = \pm\frac{4K}{m}\frac{\sin^2 mb}{2mb + \sin 2mb}\, e^{mx}.$$

Итак, мы получили решение (7), удовлетворяющее следующим условиям на контуре $y = \pm b$, $-\infty < x < +\infty$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = Ke^{mx}, \quad Ev = \pm\frac{4K}{m}\frac{\sin^2 mb}{2mb + \sin 2mb}. \quad (8)$$

§ 3. Метод решения

В решении (7), (8) K—произвольное комплексное число, которое мы можем считать произвольной функцией от mb: $K = K(mb)$. Предполагая m непрерывно изменяющимся в комплексной плоскости, образуем сумму частных решений (7) в виде интеграла

$$\varphi(x, y) = \int_{-i\infty}^{(0-), +i\infty} \varphi_1(x, y; m)\, dm =$$

$$= 2\int_{-i\infty}^{(0-), +i\infty} \frac{K(mb)}{m^2} \frac{(\sin mb + mb\cos mb)\cos my + my\sin mb\sin my}{2mb + \sin 2mb} e^{mx}\, dm \quad (9)$$

(где символом (0—) обозначается обход начала координат слева).

Предположим далее, что образованный интеграл сходится абсолютно и равномерно относительно x и y в области $|x|<\infty$, $|y|\leqslant b$ со всеми его производными по x и y до 4-го порядка включительно. Тогда (9) будет также решением (1) при следующих условиях на контуре $y=\pm b$:

$$\tau^0_{xy}=0,\ \sigma^0_y=\int\limits_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} K(mb)\,e^{mx}\,dm,$$
$$Ev^0=\pm 4\int\limits_{-i\infty}^{(0-),+i\infty}\frac{K(mb)}{m}\,\frac{\sin^2 mb}{2mb+\sin 2mb}\,e^{mx}\,dm. \tag{10}$$

Положим в интегралах (10) $mb=\mu$, $x=b\xi$. Тогда будет

$$\sigma^0_y=\frac{1}{b}\int\limits_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} K(\mu)\,e^{\mu\xi}\,d\mu, \tag{11}$$

$$Ev^0=\pm 4\int\limits_{-i\infty}^{(0-),+i\infty}\frac{K(\mu)}{\mu}\,\frac{\sin^2\mu}{2\mu+\sin 2\mu}\,e^{\mu\xi}\,d\mu. \tag{12}$$

Оказывается, что можно построить функцию $K(\mu)$ таким образом, чтобы указанные выше предположения выполнялись и чтобы функция (9) была не только каким-то решением, но именно решением поставленной задачи. Выясним свойства, которыми должна обладать для этого функция $K(\mu)$.

Из (11) очевидно, что для удовлетворения условию (2) задачи: $\sigma^0_y=0$ при $x>0$, достаточно потребовать, чтобы $K(\mu)$ была регулярна и удовлетворяла условиям леммы Жордана в области $\operatorname{Re}\mu\leqslant 0$, за исключением, может быть, точки $\mu=0$.

Аналогично условие (4) задачи: $v^0=\mp V_0$ при $x\leqslant 0$, потребует [см. (12)], чтобы функция $\frac{K(\mu)}{\mu}\frac{\sin^2\mu}{2\mu+\sin 2\mu}$ была регулярна и удовлетворяла условиям той же леммы в области $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$, за исключением $\mu=0$. В этой точке указанная функция должна иметь простой полюс с вычетом ($\xi<0$)

$$\operatorname{Res}_{\mu=0}=\frac{1}{2\pi i}\oint^{(0+)}\frac{K(\mu)}{\mu}\,\frac{\sin^2\mu}{2\mu+\sin 2\mu}\,e^{\mu\xi}\,d\mu=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(0-),+i\infty}\frac{K(\mu)}{\mu}\,\frac{\sin^2\mu}{2\mu+\sin 2\mu}\,e^{\mu\xi}\,d\mu=$$
$$=\mp\frac{Ev^0}{4\cdot 2\pi i}=\frac{EV_0}{8\pi i} \tag{*}$$

(здесь и в дальнейшем под символом $(0+)$ мы будем понимать обход начала координат в положительном направлении).

Однако, чтобы указанные условия выполнялись, $K(\mu)$ должна иметь нулями все нули функции $2\mu+\sin 2\mu$ с положительной реальной частью. Вместе с тем $K(\mu)$ может иметь 2-кратные полюсы в точках $\mu=n\pi$ $(n=1,2,\ldots)$, где $\sin^2\mu=0$.

Резюмируя изложенное, перечислим свойства функции $K(\mu)$, гарантирующие выполнение условий (2) и (4) задачи:

1) она регулярна, и для всякого достаточно большого $|\mu|\geqslant R(\varepsilon)$ $|K(\mu)|<\varepsilon$ во всей плоскости, за исключением произвольно малой окрестности точки $\mu=0$ и, может быть, точек $\mu=n\pi$ $(n=1,2,\ldots)$;

2) имеет нулями все корни с положительной реальной частью уравнения $2\mu+\sin 2\mu=0$;

3) в точках $\mu = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ допускает 2-кратные полюсы;

4) в точке $\mu = 0$ имеет на основании (*)

$$\mathrm{Res}_{\mu=0}\frac{K(\mu)\sin^2\mu}{\mu(2\mu+\sin 2\mu)} = \mathrm{Res}_{\mu=0}\frac{K(\mu)}{4} = \frac{EV_0}{2\pi i}$$

простой полюс с вычетом

$$\mathrm{Res}_{\mu=0} K(\mu) = \frac{EV_0}{2\pi i}. \tag{13}$$

В дальнейшем мы построим фактически функцию $K(\mu)$, обладающую всеми указанными свойствами 1), 2), 3), 4). Но тогда вместе с (11) и (12) будет, как это легко видеть, также сходиться и интеграл (9). При $x > 0$ путь интегрирования может быть непрерывно деформирован в достаточно узкой области $\frac{\pi}{2} \leqslant |\arg\mu| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Нетрудно проверить, что интеграл (9), взятый вдоль такого пути, будет сходиться абсолютно и равномерно относительно x и y в области значений $0 < x < +\infty$ и $|y| \leqslant b$ вместе со своими производными по ним любого порядка. Аналогично, предполагая путь интегрирования заходящим в область $\frac{\pi}{2} - \delta \leqslant |\arg\mu| < \frac{\pi}{2}$, будем иметь указанные свойства сходимости для области значений x и y:

$$-\infty < x < 0, \quad |y| \leqslant b.$$

В точках $x = 0$, $|y| < b$ эти свойства сохраняются при любом из указанных путей. И только в двух точках: $x = 0$, $y = \pm b$, сходимость нарушается уже для вторых производных (напряжений), что естественно.

В таком случае (9) будет решением (1), принимающим на гранях $y = \pm b$ значения (11) и (12), которые в свою очередь удовлетворяют условиям (2) и (4) нашей задачи. Кроме того, условие (3) удовлетворяется по построению решения (7), (8).

Для доказательства того, что (9) будет решением поставленной задачи, останется установить выполнение условий (5) на бесконечности.

§ 4. Построение функции $K(\mu)$

Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\alpha_n > 0$,—корень уравнения

$$\sin 2z + 2z = 0. \tag{14}$$

Имеем

$$2\alpha_n = -\sin 2\alpha_n \operatorname{ch} 2\beta_n, \tag{15}$$

$$2\beta_n = -\cos 2\alpha_n \operatorname{sh} 2\beta_n. \tag{16}$$

Очевидно, что корни (14) попарно сопряжённые и симметричные. Полагаем $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$; тогда из (15) и (16) следует $\sin 2\alpha_n < 0$, $\cos 2\alpha_n < 0$, откуда

$$(2n-1)\pi < 2\alpha_n < \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из (15) находим: при $\alpha_n \to \infty$ $\beta_n \to \infty$; тогда из (16) $\cos 2\alpha_n \to 0$, следовательно,

$$\alpha_n = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi - \varepsilon_n, \qquad 0 < \varepsilon_n = o(1). \tag{17}$$

Далее следует $\operatorname{ch} 2\beta_n = -\frac{2\alpha_n}{\sin 2\alpha_n}$, откуда $(\sin 2\alpha_n \to -1)$

$$\beta_n = O(\ln n). \tag{18}$$

Заметим, кроме того, что

$$\varepsilon_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{19}$$

Образуем три целые функции с нулями a_n, $\bar{a}_n$ и $n\pi$, соответственно, по типу канонических произведений Вейерштрасса:

$$\mathfrak{G}_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}, \quad \mathfrak{G}_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}},$$

$$\mathfrak{G}_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}. \tag{20}$$

Покажем, что все произведения сходятся абсолютно и равномерно. Для $\mathfrak{G}_3(z)$ это очевидно. Рассмотрим общий член $\mathfrak{G}_1(z)$:

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}} = \left(1-\frac{z}{a_n+i\beta_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}} =$$

$$= \left(1-\frac{z}{\left[\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi-\varepsilon_n\right]+i\beta_n}\right)\left(1+\frac{z}{n\pi}+\frac{z^2}{2n^2\pi^2}+\ldots\right) =$$

$$= 1 + z\,\frac{\left[\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi-\varepsilon_n\right]+i\beta_n-n\pi}{(a_n+i\beta_n)\,n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

[см. (17)—(19)], откуда произведение $\mathfrak{G}_1(z)$, а вместе с ним и $\mathfrak{G}_2(z)$, сходится абсолютно и равномерно для всех конечных значений z.

Построим теперь мероморфную функцию $Q(z)$ в виде дроби

$$Q(z) = \frac{\mathfrak{G}_1(z)\,\mathfrak{G}_2(z)}{[\mathfrak{G}_3(z)]^2} = \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}}{\left[\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\right]^2} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right)}{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)^2}, \tag{21}$$

которая, очевидно, регулярна во всякой области, не содержащей точек $z=n\pi$ $(n=1, 2, \ldots)$, и во всяком случае в области

$$0 < \delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta, \tag{22}$$

причём в той же области бесконечное произведение сходится абсолютно и равномерно для всех конечных z.

Очевидно,

$$Q(0) = 1. \tag{23}$$

Для исследования поведения функции $Q(z)$ на бесконечности введём абсолютно и равномерно сходящееся произведение

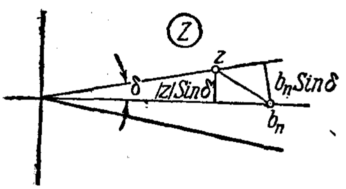
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}, \quad b_n = \left(n-\frac{1}{4}\right)\pi,$$

и представим (21) в виде

$$Q(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar a_n}\right)}{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)^2}\cdot\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}}\right]^2=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar a_n}\right)}{\left(1-\frac{z}{b_n}\right)^2}\cdot\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}}\right]^2=F_1(z)\,[F_2(z)]^2,$$

и все произведения сходятся абсолютно и равномерно в области (22).



Фиг. 2.

Рассмотрим

$$F_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar a_n}\right)}{\left(1-\frac{z}{b_n}\right)^2}=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a_n)(z-\bar a_n)}{(z-b_n)^2}\,\frac{b_n^2}{|a_n|^2} \tag{24}$$

и покажем, что сходится произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a_n)(z-\bar a_n)}{(z-b_n)^2}.$$

В самом деле, на основании (17), (18) и (19)

$$\frac{(z-a_n)(z-\bar a_n)}{(z-b_n)^2}=1+\frac{z^2-2a_n z+|a_n|^2-z^2+2b_n z-b_n^2}{(z-b_n)^2}=$$

$$=1+\frac{2z(b_n-a_n)+(\alpha_n^2-b_n^2)+\beta_n^2}{(z-b_n)^2}=1+\frac{2z\varepsilon_n+\varepsilon_n(a_n+b_n)+\beta_n^2}{(z-b_n)^2}=$$

$$=1+\frac{2z\varepsilon_n+O(\ln^2 n)}{(z-b_n)^2}=1+u_n.$$

Заметим, что при $0<\delta\leqslant\arg z\leqslant 2\pi-\delta$ (фиг. 2)

$$|z-b_n|\geqslant|z|\sin\delta,\quad |z-b_n|\geqslant b_n\sin\delta$$

и, следовательно,

$$|z-b_n|\geqslant\sqrt{|z|\,b_n}\,\sin\delta.$$

В таком случае

$$|u_n|\leqslant\frac{2|z|\varepsilon_n}{|z-b_n|^2}+\frac{O(\ln^2 n)}{|z-b_n|^2}\leqslant\frac{2\varepsilon_n}{\sin^2\delta\cdot b_n}+\frac{O(\ln^2 n)}{\sin^2\delta\cdot b_n^2}=O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right),$$

и оценка не зависит от z.

Следовательно:

а) произведение сходится абсолютно и равномерно для всех z в области (22);

б) произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{|a_n|^2}=L \tag{25}$$

сходится вместе с (24) и

в) $$F_1(z) = L \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a_n)(z-\bar{a}_n)}{(z-b_n)^2}.$$

В таком случае при $0 < \delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta$, $N_1 \geqslant N(\varepsilon_1)$ и при $|z| \geqslant R(\varepsilon_2)$ произвольно большом ($\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$) находим

$$F_1(z) = L \cdot \left\{ \prod_{n=1}^{N_1} \frac{(z-a_n)(z-\bar{a}_n)}{(z-b_n)^2} + \varepsilon_1' \right\} = L \cdot \{1 + \varepsilon_2' + \varepsilon_1'\};\ |\varepsilon_1'| < \varepsilon_1,\ |\varepsilon_2'| < \varepsilon_2,$$

откуда

$$\lim_{|z| \to \infty} F_1(z) = L.$$

Рассмотрим, далее,

$$F_2(z) = \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{\pi}\right)},$$

что очевидно, если учесть, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \frac{e^{\gamma z}\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-z)}.$$

Для выяснения поведения функции $F_2(z)$ на бесконечности воспользуемся известным асимптотическим разложением функции $\ln \Gamma(a+z)$:

$$\ln \Gamma(a+z) = \left(a + z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1),$$

пригодным для $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$, и во всяком случае при $0 < a \leqslant 1$ и где для $\ln$ берётся главное значение.

Мы будем иметь

$$\ln F_2(z) = \ln \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \ln \Gamma\left(1 - \frac{z}{\pi}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{\pi}\right) =$$
$$= \ln \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(-\frac{z}{\pi}\right) + o(1),$$

где для $\ln z$ берётся та ветвь, для которой $\ln(-z)$ вещественно при $z < 0$ и пригодное для всех z в области (22).

Следовательно, во всей плоскости с вырезанным вдоль положительной оси сектором $|\arg z| \leqslant \delta$ и для достаточно больших $|z|$

$$[F_2(z)]^2 \sim \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-z},$$

где, как нетрудно проверить, корень должен быть взят со знаком плюс на нижнем берегу разреза и минус — на верхнем.

Мы получаем, таким образом, для функции $Q(z)$ следующее асимптотическое выражение, пригодное для достаточно больших $|z|$ в области (22):

$$Q(z) \sim L \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot (-i) \sqrt{z} \tag{26}$$

и перед корнем должен быть взят знак плюс на верхнем берегу разреза.

Образуем ещё функцию

$$Q(z)Q(-z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{z^2}{a_n^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{(\bar{a}_n)^2}\right)}{\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^2}=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_n^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\bar{a}_n^2}\right)}{\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\right]^2}=\frac{z^2S(z)}{\sin^2 z}, \tag{27}$$

что очевидно и где через $S(z)$ обозначено

$$S(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_n^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\bar{a}_n^2}\right).$$

Корни $S(z)$, как это следует из построения, совпадают с корнями функции

$$\frac{\sin 2z+2z}{4z}=T(z);$$

кроме того,

$$S(0)=T(0)=1. \tag{28}$$

Далее, в областях $\delta\leqslant|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, на основании (26)

$$\frac{z^2S(z)}{\sin^2 z}=Q(z)Q(-z)\sim\left\{\frac{L\cdot\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\right\}^2(\mp i\sqrt{z})(-i\sqrt{-z})=\mp i\,\frac{L^2\cdot\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}\,z, \tag{29}$$

где знак минус берётся для области $\operatorname{Im} z>0$, а знак плюс — для $\operatorname{Im} z<0$.

С другой стороны,

$$\frac{z^2T(z)}{\sin^2 z}\sim\mp iz, \tag{30}$$

где знаки относятся к тем же областям, что и в (29).

Сравнивая (29) и (30) и учитывая (28) и что все функции целые конечного порядка, заключаем, что

$$S(z)\equiv T(z).$$

Из этого же сравнения следует $\frac{L^2\cdot\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}=\frac{1}{2}$, откуда [см. (25)]

$$L=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n-\frac{1}{4}\right)^2\pi^2}{|a_n|^2}=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}. \tag{25a}$$

Вместо (26) и при тех же условиях можно теперь написать

$$Q(z)\sim-i\sqrt{\frac{z}{2}}. \tag{26a}$$

Теперь мы можем уже положить

$$K(\mu)=\frac{EV_0}{2\pi i\mu}Q(\mu)=\frac{EV_0}{2\pi i}\,\frac{1}{\mu}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\mu}{a_n}\right)\left(1-\frac{\mu}{\bar{a}_n}\right)}{\left(1-\frac{\mu}{n\pi}\right)^2}, \tag{31}$$

и очевидно, что построенная таким образом функция (31) обладает всеми указанными в § 3 свойствами.

§ 5. Решение поставленной задачи

Полагая в (9) снова: $mb=\mu$, $x=b\xi$, $y=b\eta$ и $K(\mu)$, из (31) получим

$$\varphi(\xi,\eta)=\frac{EV_0b}{\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(0-),+i\infty}\frac{Q(\mu)}{\mu^3}\,\frac{(\sin\mu+\mu\cos\mu)\cos\mu\eta+\mu\eta\sin\mu\sin\mu\eta}{2\mu+\sin 2\mu}\,e^{\mu\xi}\,d\mu. \tag{32}$$

Нетрудно проверить, что разложение подинтегральной функции, стоящей множителем при $e^{\mu\xi}$, в ряд Лорана в окрестности точки $\mu=0$ имеет следующую главную часть:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu^3}+\frac{A}{\mu^2}+\frac{B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}}{\mu}\right), \tag{33}$$

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\bar a_n}-\frac{2}{n\pi}\right),\quad B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{\bar a_n^2}-\frac{2}{n^2\pi^2}\right).$$

В таком случае, замечая, что при $\xi>0$ (32) сходится вдоль любого пути, лежащего в секторе $\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}+\delta$, а при $\xi<0$ — в секторе $\frac{\pi}{2}-\delta\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$, мы можем написать

$$\begin{aligned}\varphi(\xi,\eta)&=\frac{EV_0b}{\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\left[\frac{Q(\mu)}{\mu^3}\,\frac{(\sin\mu+\mu\cos\mu)\cos\mu\eta+\mu\eta\sin\mu\sin\mu\eta}{2\mu+\sin 2\mu}-\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu^3}+\frac{A}{\mu^2}+\frac{B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}}{\mu}\right)\right]e^{\mu\xi}\,d\mu+\\&\qquad+\begin{cases}0\\ \dfrac{EV_0b}{2\pi i}\displaystyle\oint^{(0-)}\left(\frac{1}{\mu^3}+\frac{A}{\mu^2}+\frac{B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}}{\mu}\right)e^{\mu\xi}\,d\mu=\end{cases}\\&=\frac{EV_0b}{\pi i}\begin{cases}0 & \xi\geqslant 0\\ \displaystyle\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\mathrm{idem}-EV_0b\left[\frac{(A+\xi)^2}{2}+B-\frac{1}{3}\right] & \xi<0.\end{cases}\end{aligned} \tag{34}$$

Положим, наконец, $\mu=+it$ на верхней мнимой полуоси, $\mu=-it$ — на нижней, и мы получим окончательно искомое решение в следующем виде $[\xi^2+(\eta^2-1)^2\neq 0]$:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi,\eta)=&-\frac{2EV_0b}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{(\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}t\eta-t\eta\operatorname{sh}t\operatorname{sh}t\eta}{2t+\operatorname{sh}2t}\cdot\frac{\operatorname{Im}[Q(it)\,e^{it\xi}]}{t^3}-\right.\\&\left.-\frac{\sin t\xi}{t^3}-\frac{A\cos t\xi}{t^2}\right\}dt+\begin{cases}-EV_0b\left(B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}\right) & \xi\geqslant 0,\\ -EV_0b\left(\frac{\xi^2}{2}+A\xi\right) & \xi<0.\end{cases}\end{aligned} \tag{35*}$$

Нам остаётся выяснить поведение (35) на бесконечности. Для этого рассмотрим снова (32) и положим в нём $\mu\xi=u$. Ввиду равномерной сходимости интеграла и в соответствии с леммой Жордана,

*) Заметим, что вторая производная по ξ от последнего члена, стоящего под знаком интеграла, равна нулю, так как интеграл от первой его производной равен постоянной.

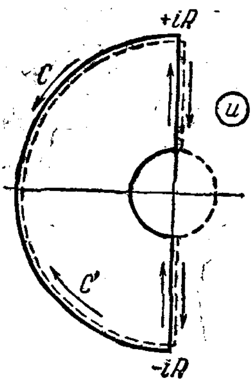
условия которой выполняются, мы можем написать

$$\varphi(\xi,\,\eta)=$$

$$=\pm\frac{EV_0b}{\pi i\xi}\int\limits_{-i\infty}^{(0\mp),+i\infty}\frac{Q\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\left(\frac{u}{\xi}\right)^3}\,\frac{\left(\sin\frac{u}{\xi}+\frac{u}{\xi}\cos\frac{u}{\xi}\right)\cos\frac{u}{\xi}\eta+\frac{u}{\xi}\eta\sin\frac{u}{\xi}\sin\frac{u}{\xi}\eta}{2\frac{u}{\xi}+\sin 2\frac{u}{\xi}}\,e^u\,du=$$

$$=\frac{EV_0b}{\pi i\xi}\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{C}^{(0-)}+\varepsilon_1 & \xi>0,\\ \displaystyle\int\limits_{C'}^{(0+)}+\varepsilon_2 & \xi<0,\end{cases}$$

где C и C' — замкнутые контуры, указанные на фиг. 3, $R(\varepsilon)$ достаточно велико, $R_1\geqslant R(\varepsilon)$ и не совпадает ни с одним из модулей полюсов подинтегральной функции, а $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|<\varepsilon$ не зависят от ξ.



Фиг. 3.

Пусть теперь $\rho>0$ равно меньшему из чисел π, $|a_1|$, т. е. модулю ближайшего к нулю полюса подинтегральной функции, и $|\xi|>\frac{R_1}{\rho}$. Тогда при $|u|\leqslant R_1$ имеем $\frac{|u|}{|\xi|}<\rho$ и подинтегральную функцию можно представить в следующем виде [см. (33)]:

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{u}{\xi}\right)^3}+\frac{A}{\left(\frac{u}{\xi}\right)^2}+\frac{B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{u}{\xi}}\right]+P\left(\frac{u}{\xi}\right)\right\}e^u,$$

где $P\left(\frac{u}{\xi}\right)$ — голоморфная в области $|u|\leqslant R_1$ функция. В таком случае

$$\varphi(\xi,\,\eta)=$$

$$=\frac{EV_0b}{\pi i\xi}\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{C}^{(0-)}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{u}{\xi}\right)^3}+\frac{A}{\left(\frac{u}{\xi}\right)^2}+\frac{B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{u}{\xi}}\right]+P\left(\frac{u}{\xi}\right)\right\}e^u\,du+\varepsilon_1\\ \displaystyle\int\limits_{C}^{(0+)}\text{idem}\qquad+\varepsilon_2\end{cases}=$$

$$=\frac{EV_0b}{\pi i\xi}\begin{cases}\varepsilon_1 & \xi>0,\\ -\pi i\xi\left(\frac{\xi^2}{2}+A\xi+\frac{A^2}{2}+B-\frac{1}{3}\right)+\varepsilon_2 & \xi<0,\end{cases}$$

и так как $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|<\varepsilon\to 0$ при $\rho|\xi|>R(\varepsilon)\to\infty$, то

$$\varphi(\xi,\,\eta)\sim\begin{cases}0 & \xi>0,\\ -\frac{EV_0b}{2}\xi^2=-\frac{EV_0x^2}{2b} & \xi=\frac{x}{b}<0.\end{cases}\tag{36}$$

Теперь уже очевидно, что условие (5) выполнено *). Кроме того, имеем при $x\to-\infty$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\to-\frac{EV_0}{b},$$

т. е. к равномерному сжатию вдоль оси y, что естественно.

---

*) Следует заметить, что ввиду равномерной сходимости всех подлежащих вычислению интегралов асимптотическое значение $\varphi(\xi,\,\eta)$ можно дифференцировать, так как все рассуждения повторяются.

§ 6. Асимптотические значения полученных результатов вблизи точек $x = 0$, $y = \pm b$

В точках $x = 0$, $y = \pm b$ полученное решение, как уже отмечалось имеет особенности. Для выяснения их характера рассмотрим снова (11) и (12):

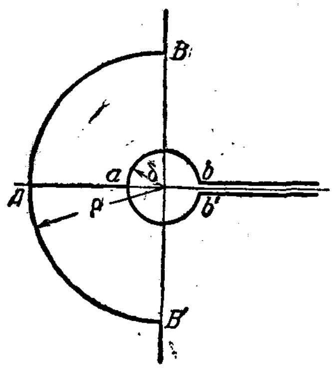
$$\sigma_y^0 = \frac{EV_0}{2\pi i b} \int_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} \frac{Q(\mu)\, e^{\mu\xi}}{\mu}\, d\mu, \tag{11a}$$

$$v^0 = \pm \frac{2V_0}{\pi i} \int_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} \frac{Q(\mu)}{\mu^3} \frac{\sin^2\mu}{2\mu + \sin 2\mu} e^{\mu\xi}\, d\mu. \tag{12a}$$

1. При $\xi > 0$, $\sigma_y^0 \equiv 0$. Положим в (11a) $\xi < 0$, $\varepsilon > 0$ произвольно малым, $|\xi| < \varepsilon$ и $\mu|\xi| = u$. Тогда будет

$$\sigma_y^0 = \frac{EV_0}{2\pi i b} \int_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} \frac{Q\left(\frac{u}{|\xi|}\right) e^{-u}}{u}\, du,$$

и на всём пути интегрирования (фиг. 4) $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg \frac{u}{|\xi|} \leqslant \frac{3}{2}\pi$, $u \geqslant \rho > \delta > 0$ и $\frac{|u|}{|\xi|} > \frac{\rho}{\varepsilon}$ произвольно велико. В таком случае вместо $Q\left(\frac{u}{|\xi|}\right)$ можно приближённо принять его асимптотическое значение (26a). Мы будем иметь



Фиг. 4.

$$\sigma_y^0 \sim \frac{EV_0}{2\pi i b} \int_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} \frac{-i\sqrt{\frac{u}{2|\xi|}}}{u} e^{-u}\, du =$$

$$= -\frac{EV_0}{2\pi b\sqrt{2|\xi|}} \int_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du,$$

где, напоминаем, на верхнем берегу разреза, произведённого вдоль положительной полуоси, следует перед корнем принять знак плюс.

Имеем, очевидно (см. фиг. 4):

$$\int_{-i\infty}^{(0-),+i\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \int_{(-i\infty,\, B',\, A,\, a)} + \int_{(a,\, A,\, B,\, +i\infty)} =$$

$$= \int_{(b',a,b)} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du + \int_{\infty}^{b'} \frac{e^{-u}}{-\sqrt{u}}\, du + \int_{b}^{\infty} \frac{e^{-u}}{+\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = 2\sqrt{\pi}$$

ввиду произвольности $\delta \to 0$ и существования несобственных интегралов.

Таким образом, окончательно, при достаточно малых $|x| = |\xi|\, b$

$$\sigma_y^0 \sim -\frac{EV_0}{2\pi b\sqrt{2|\xi|}}\, 2\sqrt{\pi} = -\frac{EV_0}{\sqrt{2\pi b x}}. \tag{37}$$

2. При $\xi < 0$ и $y = -b$ $v^0 = +V_0$ по построению функции $K(\mu)$. Положим в (12a) $\xi > 0$ и рассмотрим разность

$$-v^0 + V_0 = \frac{2V_0}{\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{(0-), +i\infty} \frac{Q(\mu)\sin^2\mu}{\mu^2(2\mu+\sin 2\mu)} e^{\mu\xi} d\mu + \frac{V_0}{2\pi i} \oint^{(0+)} \frac{d\mu}{\mu} =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{(0-), +i\infty} \frac{Q(\mu)\sin^2\mu}{\mu(2\mu+\sin 2\mu)} \left(\int\limits_0^\xi e^{\mu\xi} d\xi + \frac{1}{\mu} \right) d\mu - \frac{V_0}{2\pi i} \oint^{(0-)} \frac{d\mu}{\mu} =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi i} \int\limits_0^\xi d\xi \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{Q(\mu)\sin^2\mu}{\mu(2\mu+\sin 2\mu)} e^{\mu\xi} d\mu + \frac{2V_0}{\pi i} \oint \left[\frac{Q(\mu)\sin^2\mu}{\mu(2\mu+\sin 2\mu)} - \frac{1}{4} \right] \frac{d\mu}{\mu} =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi i} \int\limits_0^\xi d\xi \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{Q(\mu)\sin^2\mu}{\mu(2\mu+\sin 2\mu)} e^{\mu\xi} d\mu, \tag{38}$$

так как подинтегральная функция во втором интеграле предпоследнего равенства регулярна во всей правой полуплоскости, включая окрестность точки $\mu = 0$.

Положим в последнем интеграле (38) $\mu\xi = -u$; тогда, учитывая (29) и повторяя все рассуждения п. 1, мы легко получим

$$\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{Q(\mu)\sin^2\mu e^{\mu\xi}}{\mu(2\mu+\sin 2\mu)} d\mu = \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{Q\left(-\frac{u}{\xi}\right)\frac{u}{\xi} e^{-u} du}{u \cdot 4Q\left(\frac{u}{\xi}\right) Q\left(-\frac{u}{\xi}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4\xi} \int\limits_{-i\infty}^{(0-), +i\infty} \frac{e^{-u} du}{Q\left(\frac{u}{\xi}\right)} \sim \frac{i}{2\sqrt{2\xi}} \int\limits_{-i\infty}^{(0-), +i\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u}} = i\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}$$

и, следовательно,

$$-v + V_0 \sim \frac{2V_0}{\pi i} \int\limits_0^\xi i\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} d\xi = 2V_0 \sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}, \tag{39}$$

изображающее характер излома контура полосы у грани тисков и пригодное для малых значений $\xi = \frac{x}{b} > 0$.

В заключение назовём несколько других задач, решения которых получаются изложенным способом А. М. Данилевского:

1) бесконечно-длинная полоса заделана без давления в абсолютно жёсткую полуплоскость и растягивается силой на бесконечности;

2) *бесконечно-длинная полоса заделана без трения в абсолютно* жёсткую полуплоскость и изгибается парой на бесконечности;

3) бесконечно-длинный цилиндр заделан без давления в абсолютно жёсткое полупространство и растягивается силой на бесконечности;

4) бесконечная пластина постоянной толщины погружена наполовину в среду постоянной температуры, а на другой половине излучает по закону Ньютона.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Данилевский. «Про розподіл струму в циліндровому електроді», «Записки Науково-дослід. інституту математики и механіки ХДУ» 1936, т. XIII, сер. IV, вып. 1.