УДК 513.33

Л. Б. ГОЛИНСКИЙ, Г. П. ЧИСТЯКОВ

ТОЧНЫЕ В СМЫСЛЕ ПОРЯДКА ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В λ-МЕТРИКЕ

Нормальная функция распределения (ф.р.) была первой, для которой в 1951 г. Н. А. Сапоговым были получены оценки устойчивости разложений в равномерной метрике. Не вдаваясь в историю вопроса (об истории развития исследований по устойчивости разложений ф.р. [1]), отметим, что оценкам устойчивости разложений нормальной ф.р. в различных метриках посвящено значительное число работ. Среди этих метрик выделим две: метрику Леви L и λ-метрику. Сходимость ф.р. в метрике L эквивалентна слабой сходимости, и в этой метрике всегда имеет место эффект устойчивости разложений ф.р. Этим объясняется важность получения точных в смысле порядка оценок устойчивости разложений стандартной нормальной ф.р. в метрике Леви. Такие оценки были получены совсем недавно [2].

λ-метрика была введена В. М. Золотаревым и быстро нашла применение в исследованиях устойчивости характеризационных задач математической статистики и других вопросах. Эта метрика определяется с помощью характеристических функций (х.ф.) F и G

$$\lambda(F, G) = \inf_{t>0} \max\left\{\frac{1}{2} \max_{|u|<\frac{1}{t}} |\varphi(u, F) - \varphi(u, G)|, t\right\}.$$

λ-метрика эквивалентна метрике Леви в том смысле, что сходимость в λ-метрике влечет за собой сходимость в метрике Леви и наоборот. Тем не менее не существует такой неотрицательной и убывающей к нулю при $x \to 0$ функции $\psi(x)$, для которой выполняется хотя бы одно из следующих неравенств: $\lambda \leqslant \psi(L)$, $L \leqslant \psi(\lambda)$ для любых пар соответствующих функций ($F \leftrightarrow \varphi(u, F)$, $G \leftrightarrow \varphi(u, G)$). Это показано в работе [3]. Для λ-метрики как метрике, эквивалентной метрике Леви, эффект устойчивости разложений ф.р. всегда имеет место. Возникает вопрос об оценке устойчивости разложений нормальной ф.р. в λ-метрике, насколько ее порядок отличается от оценки, полученной для нормальной ф.р. в метрике Леви.

Пусть G — ф. р., G_ε — класс ф. р. F, таких что $\lambda(F, G) \leqslant \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ а K_F, K_G — классы компонент ф. р. F и G соответственно. Следия В. М. Золотареву [4], введем величину

$$\beta_\lambda(\varepsilon, G) = \sup_{F \in G_\varepsilon} \sup_{F' \in K_F} \inf_{G' \in K_G} \lambda(F', G'),$$

которая является количественной характеристикой устойчивости разложений ф.р. G в λ-метрике. Цель настоящей статьи — получение точной в смысле порядка оценки этой величины при $\varepsilon \to 0$. А именно, имеет место

Теорема 1. *Справедливы оценки*

$$C_1 \frac{\left(\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}}{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/4}} \leqslant \beta_\lambda(\varepsilon, \Phi) \leqslant C_2 \frac{\left(\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}}{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/4}}. \quad (1)$$

В дальнейшем символы C, C_1, C_2... обозначают абсолютные положительные постоянные, причем символ C будем использовать для обозначения, вообще говоря, различных постоянных в тех случаях, когда нас не интересует их численное значение.

Оценка сверху величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$. Нам понадобится следующий результат о связи между λ-метрикой и метрикой Леви L, полученный в работе [3].

Теорема А. *Пусть* H_1, H_2 — *ф. р.,* $W_{H_j}(x) = H_j(-x) + 1 - H_j(x+0)$ *и* $u(x) = \min\{W_{H_1}(x), W_{H_2}(x)\}$, $x > 0$. *Величина* $L = L(H_1, H_2)$ *оценивается сверху с помощью величины* $\lambda = \lambda(H_1, H_2)$ *следующим образом:* $L \leqslant 8\lambda \ln \frac{\beta}{\lambda}$, *где в качестве* β *можно взять любое число, удовлетворяющее условиям:* $\beta \geqslant e$, $u(\beta/e) \leqslant \lambda \ln(\beta/\lambda)$.

Применим теорему А при $H_1 = F$, $H_2 = \Phi$, полагая $\beta = 5\sqrt{-\ln\varepsilon}$, где $\varepsilon = \varepsilon_\lambda = \lambda(F, \Phi)$ — достаточно малое положительное число. Поскольку

$$\min\left\{W_F\left(\frac{\beta}{e}\right), W_\Phi\left(\frac{\beta}{e}\right)\right\} \leqslant W_\Phi\left(\frac{\beta}{e}\right) \leqslant \frac{e}{\sqrt{2\pi}\beta}\exp\left\{-\frac{\beta^2}{2e^2}\right\} < \varepsilon,$$

то имеем $\varepsilon_L = L(F, \Phi) \leqslant C\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}$. Последняя оценка позволяет использовать некоторые результаты, связанные с устойчивостью разложений нормальной ф. р. в метрике Леви и равномерной метрике [2, 5].

Пусть $\varepsilon_\rho = \rho(F, \Phi) = \sup\limits_x |F(x) - \Phi(x)|$ — равномерное расстояние между ф. р. F и Φ. Имеем [5, с. 352]

$$\varepsilon_\rho \leqslant C\varepsilon_L \leqslant C\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Искомая оценка сверху величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$ будет установлена, если мы докажем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $F = F_1 * F_2$, F_j^* — усеченные ф. р. на уровне $M = 1 + \sqrt{-2\ln\varepsilon_\rho}$; a_j, s_j^2 — соответственно среднее значение и дисперсия ф. р. F_j^*; $\Phi_j(x) = \Phi((x - a_j)/s_j)$ ($\Phi_j(x) = E_{a_j}(x)$ — единичный закон с точкой роста a_j при $s_j = 0$) [5, с. 341]. Если ф. р. F_1^* имеет нулевую медиану, то*

$$\lambda(F_j, \Phi_j) \leqslant C\frac{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/4}}; \; j = 1, 2. \tag{3}$$

Доказательство. Оценим величину $\lambda(F_j, \Phi_j)$, полагая для определенности $j = 1$. В силу инвариантности λ-метрики относительно сдвигов можно считать $a_1 = 0$. Согласно [2, т. 3] х. ф. $\varphi(z, F_1^*)$ допускает представление

$$\varphi(z, F_1^*) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \frac{1}{T_1}\theta(z)\right\}; \; \sigma^2 = s_1^2, \; |z| \leqslant T_1,$$

где функция $\theta(z)$ голоморфна в круге $\{|z| \leqslant T_1\}$, и

$$|\theta(z)| \leqslant C(\sigma^2 + T^{-3}T_1^{-1})|z|^3, \; |z| \leqslant \frac{1}{2}T_1. \tag{4}$$

Здесь $T = \frac{1}{3}\sqrt{-\ln\varepsilon_\rho}$, $T_1 = CT(\ln T)^{-1}$. Поэтому при вещественных t, $|t| \leqslant \frac{1}{2}T_1$ имеем

$$\left|\varphi(t, F_1^*) - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right| \leqslant \frac{|\theta(t)|}{T_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \frac{|\theta(t)|}{T_1}\right\}.$$

Поскольку при $|t| \leqslant CT_1^{1/2}\, C\sigma^2 |t|^3 T_1^{-1} \leqslant \frac{1}{4}\sigma^2 t^2$, то в силу (4) получим

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + |\theta(t)|\, T_1^{-1}\right\} \leqslant C \exp\left\{-\frac{1}{4}\sigma^2 t^2\right\}$$

и

$$\max_{|t| \leqslant CT_1^{1/2}} \left| \varphi(t, F_1^*) - \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \max_{|t| \leqslant CT_1^{1/2}} \left\{ \frac{|t|}{T_1} \sigma^2 t^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\sigma^2 t^2\right) \right\} + CT^{-3} T_1^{1/2} \leqslant CT_1^{-1/2},$$

так что $\lambda(F_1^*, \Phi_1) \leqslant CT_1^{-1/2}$. Для оценки величины $\lambda(F_1^*, F_1)$ заметим, что

$$\lambda(F_1^*, F_1) \leqslant \max_{t \in R} |\varphi(t, F_1^*) - \varphi(t, F_1)| \leqslant 2W_{F_1}(M).$$

Как известно [5, с. 342], $W_{F_1}(M) \leqslant C\varepsilon_\rho < CT_1^{-1/2}$. Поэтому

$$\lambda(F_1, \Phi_1) \leqslant \lambda(F_1, F_1^*) + \lambda(F_1^*, \Phi_1) \leqslant CT_1^{-1/2}.$$

Учитывая неравенства (2), приходим к оценке $T_1 \geqslant C\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2} \times \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$, откуда и следует утверждение теоремы 2.

Отметим, наконец, что при $\sigma^2 > 1$ (т. е. в том случае, когда $\Phi_1 \notin K_\Phi$) имеем $1 < \sigma^2 \leqslant 1 + CM^2\varepsilon_\rho$, и, как нетрудно убедиться, $\lambda(F_1, \Phi) \leqslant CT_1^{-1/2}$. Оценка сверху величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$ тем самым доказана

Замечание. Если усеченные дисперсии $s_j^2 \geqslant C > 0$, то из неравенств (2) и доказательства теоремы Н. А. Сапогова (см. [5, с. 346]) нетрудно получить такую оценку; $\lambda(F_j, \Phi_j) \leqslant C\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}$. Эта оценка была использована в задаче устойчивости характеризации нормальной ф. р. равнораспределенностью линейных статистик [6, след. 2.5.2].

Оценка снизу величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$. При построении примера, реализующего точную в смысле порядка оценку снизу величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$, мы следуем методу работ [1, 2]. Искомая оценка снизу будет получена, если для каждого $T_1 > C$ мы укажем ф. р. $F_j = F_{j, T_1}$, $j = 1, 2$, такие, что выполнены оценки

$$\lambda(F_1 \ast F_2\, \Phi) \leqslant C \exp\{-CT^2\},\ T = T_1 \ln T_1 \tag{5}$$

и в то же время

$$\inf_{H \in K_\Phi} \lambda(F_1, H) \geqslant CT_1^{-1/2}. \tag{6}$$

Приступим к построению ф. р. F_j, $j = 1, 2$.

1. Пусть F_1 — ф. р. Пуассона с х. ф.

$$\varphi(t, F_1) = \exp\left\{T_1\left(e^{it/T_1} - 1 - i\frac{t}{T_1}\right)\right\},\ T_1 > C;$$

$G(x)$ — функция ограниченной вариации, преобразование Фурье которой есть $\varphi(t, G) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\{\varphi(t, F_1)\}^{-1}$. Покажем, что $G(x)$ близка к некоторой ф. р. в том смысле, что

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\,\varphi(t, G)\,dt > 0 \tag{7}$$

на «длинном» интервале и мала вне его.

1.1. В (7) перенесем интегрирование на прямую $t-iy$, $y>0$:

$$p(x) = \frac{\exp(-yx)\,\varphi(-iy, G)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(t, x, y)\,dt; \quad R(t, x, y) = e^{-ixt}\frac{\varphi(t-iy, G)}{\varphi(-iy, G)}.$$

Имеем

$$\ln R(t, x, y) = -it(x - y + e^{y/T_1} - 1) - T_1 e^{y/T_1}\left(e^{it/T_1} - 1 - i\frac{t}{T_1}\right) - \frac{t^2}{2}.$$

Выберем y из «уравнения перевала»

$$x = y - (e^{y/T_1} - 1) = y\{1 - y^{-1}(e^{y/T_1} - 1)\}. \tag{8}$$

Если $y \leqslant \frac{1}{2}T$, то $y^{-1}(e^{y/T_1} - 1) \leqslant T_1^{-1/2} < \frac{1}{2}$, т. е. уравнение (8) разрешимо, причем $y \leqslant 2x \leqslant 2y$. При таких y

$$\ln R(t, x, y) = -\frac{t^2}{2} - T_1 e^{y/T_1}\left(e^{it/T_1} - 1 - i\frac{t}{T_1}\right),$$

так что

$$\operatorname{Re}\ln R(t, x, y) = -\frac{t^2}{2} + 2T_1 e^{yT_1}\sin^2\frac{t}{2T_1}; \tag{9}$$

$$\operatorname{Im}\ln R(t, x, y) = T_1 e^{y/T_1}\left(\frac{t}{T_1} - \sin\frac{t}{T_1}\right). \tag{10}$$

Следовательно,

$$p(x) = \frac{e^{-yx}}{2\pi}\varphi(-iy, G)\,I(x),$$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\operatorname{Re}\ln R(t, x, y)\}\cos\{\operatorname{Im}\ln R(t, x, y)\}\,dt.$$

Будем считать, что $x \leqslant \frac{1}{4}T$, откуда следует $y \leqslant \frac{1}{2}T$. Отсюда с учетом (9), (10) имеем при $T_1 > C$

$$-\frac{t^2}{2} \leqslant \operatorname{Re}\ln R(t, x, y) \leqslant -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2T_1}e^{y/T_1}t^2 < -\frac{t^2}{4}; \tag{11}$$

$$|\operatorname{Im}\ln R(t, x, y)| \leqslant \frac{1}{6}T_1 e^{y/T_1}\left|\frac{t}{T_1}\right|^3. \tag{12}$$

Выберем постоянную C_3 из условия

$$\frac{1}{2}\int_{-C_3}^{C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt > \int_{|t|>C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)dt \tag{13}$$

и оценим интеграл $I(x)$, разбивая его на два:

$$I(x) = \left\{ \int\limits_{|t|<C_3} + \int\limits_{|t|>C_3} \right\} \exp\{\operatorname{Re}\ln R(t, x, y)\} \cos\{\operatorname{Im}\ln R(t, x, y)\}\, dt = \\ = I_1(x) + I_2(x).$$

Если $|t| \leqslant C_3$ и $T_1 > C_3^2$, то $|\operatorname{Im}\ln R(t, x, y)| < \frac{\pi}{3}$, и с учетом (11), (12) получим

$$I_1(x) \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{-C_3}^{C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad |I_2(x)| \leqslant \int\limits_{|t|>C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt.$$

Из (13) вытекает, что $I_1 > |I_2|$, и значит

$$p(x) > 0, \quad x \leqslant \frac{1}{4} T. \tag{14}$$

1.2. Оценим сверху $p(x)$ при $x \geqslant \frac{1}{4} T$. Имеем

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left(t - i\frac{T}{4}\right)x\right\} \varphi\left(t - i\frac{T}{4}, G\right) dt.$$

Так как при $T_1 > C$

$$\left|\varphi\left(t - i\frac{T}{4}, G\right)\right| = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{32} - T_1\left(e^{T/4T_1}\cos\frac{t}{T_1} - 1 - \frac{T}{4T_1}\right)\right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{24}\right\},$$

то

$$|p(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{Tx}{4}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{24}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Tx}{4} + \frac{T^2}{24}\right\},$$

откуда следует, что

$$|p(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{Tx}{12}\right), \quad x \geqslant \frac{1}{4} T. \tag{15}$$

1.3. Пусть F_2 — ф. р. с плотностью

$$p_2(x) = \begin{cases} \delta^{-1} p(x), & x \leqslant \frac{1}{4} T \\ 0 & x > \frac{1}{4} T \end{cases};$$

$$\delta = \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{4}T} p(x)\, dx = 1 - \int\limits_{\frac{1}{4}T}^{\infty} p(x)\, dx.$$

Тогда при любом $t \in R$

$$|\varphi(t, F_2) - \varphi(t, G)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (p_2(x) - p(x))\, dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |p_2(x) -$$

$$- p(x)|\, dx \leqslant (\delta^{-1} - 1) \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}T} p(x)\, dx + \int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} |p(x)|\, dx \leqslant 2 \int_{\frac{1}{4}T} |p(x)|\, dx.$$

Согласно (15)

$$\int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} |p(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} \exp\left(-\frac{Tx}{12}\right) dx = \frac{12}{\sqrt{2\pi}T} \exp\left(-\frac{T^2}{48}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\varphi(t, F_1)\varphi(t, F_2) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = |\varphi(t, F_1)\varphi(t, F_2) - \varphi(t, F_1)\varphi(t, G)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{12}{\sqrt{2\pi}T} \exp\left(-\frac{T^2}{48}\right),$$

что и доказывает (5).

2. Перейдем теперь к неравенству (6), считая всюду в дальнейшем $T_1 > C$. В силу теоремы Крамера, надо доказать, что для любого $a \in R$ и $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ найдется константа C_4, такая что

$$\lambda(F_1, \Phi_{\tau^2, a}) \geqslant C_4 T_1^{-1/2}; \quad \Phi_{\tau^2, a}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\tau}\right).$$

Так как $\varphi(t, \Phi_{\tau^2, a}) = \exp\left(iat - \frac{\tau^2 t^2}{2}\right)$, речь идет об оценке снизу величины

$$B(t) = \left|\varphi(t, F_1) - \exp\left(iat - \frac{\tau^2 t^2}{2}\right)\right|.$$

В зависимости от значений a и τ возможны следующие случаи.

2.1. Пусть

$$\tau^2 - T_1^{-1} < -C_5 T_1^{-3/2} \tag{16}$$

константа C_5 выбирается ниже. Имеем

$$B(t) \geqslant \left|\exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) + \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) - |\varphi(t, F_1)|\right| \geqslant$$
$$\geqslant |B_1(t)| - |B_2(t)|,$$

где

$$B_1(t) = \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) \times$$
$$\times \left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left(\tau^2 - \frac{1}{T_1}\right)\right\} - 1\right];$$

$$B_2(t) = |\varphi(t, F_1)| - \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) =$$
$$= \exp\left\{-2T_1 \sin^2 \frac{t}{2T_1}\right\}\left[1 - \exp\left\{-2T_1\left(\frac{t^2}{4T_1^2} - \sin^2 \frac{t}{2T_1}\right)\right\}\right].$$

При $t = t_1 - T_1^{1/2}$ получим с учетом (16)

$$|B_1(t_1)| \geqslant \frac{C_5}{2}(eT_1)^{-1/2}, \quad |B_2(t_1)| \leqslant CT_1\left(\frac{t_1^2}{4T_1^2} - \sin^2\frac{t_1}{2T_1}\right) \leqslant C\frac{t_1^4}{T_1^3} = \frac{C}{T_1},$$

так что при $T_1 > C$ $|B(t_1)| > CT_1^{-1/2}$. Последнее неравенство справедливо и при $\tau^2 - T_1^{-1} > C_5 T_1^{-3/2}$, что устанавливается аналогично. Таким образом, доказано неравенство

$$\lambda(F_1, \Phi_{\tau^2, a}) \geqslant CT_1^{-1/2}, \quad |\tau^2 - T_1^{-1}| > C_5 T_1^{-3/2}.$$

2.2. Предположим сейчас, что

$$|a| \leqslant C_6 T_1^{-1}, \quad |\tau^2 - T_1^{-1}| \leqslant C_5 T_1^{-3/2}, \tag{17}$$

константа C_6 выбирается ниже. Имеем

$$B(t) = \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right)\left|\exp\left\{-iat - \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{T_1} - \tau^2\right) + T_1\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{it}{T_1}\right)^k\right\} - 1\right| =$$

$$= \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right)|B_3(t) + B_4(t)|,$$

где

$$B_3(t) = \exp\left\{-iat - \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{T_1} - \tau^2\right) + T_1\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{it}{T_1}\right)^k\right\} - \exp\left\{-\frac{it^3}{6T_1^2}\right\};$$

$$B_4(t) = \exp\left\{-\frac{it^3}{6T_1^2}\right\} - 1.$$

При $t = t_1$ получим с учетом (17)

$$|B_3(t_1)| = \left|\exp\left\{-iat_1 - \frac{t_1^2}{2}\left(\frac{1}{T_1} - \tau^2\right) + T_1\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{it}{T_1}\right)^k\right\} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(|at_1| + \frac{C_5}{2}T_1^{-1/2} + \frac{2t_1^4}{T_1^3}\right)\exp\left(|at_1| + \frac{C_5}{2}T_1^{-1/2} + \frac{2t_1^4}{T_1^3}\right) <$$

$$< e^2\left\{\left(\frac{C_5}{2} + C_6\right)T_1^{-1/2} + \frac{2}{T_1}\right\};$$

$$|B_4(t_1)| \geqslant \left|\sin\frac{t_1^3}{6T_1^2}\right| \geqslant \frac{1}{3\pi}T_1^{-1/2};$$

$$\tau^2 t^2 = 1 + (\tau^2 - T_1^{-1})T_1 \leqslant 1 + C_5 T_1^{-1/2} < 2.$$

Выберем константы C_5 и C_6 из условия $e^2\left(\frac{1}{2}C_5 + C_6\right) < (12\pi)^{-1}$. В таком случае имеем

$$|B(t_1)| \geqslant \exp\left(-\frac{\tau^2 t_1^2}{2}\right)\{|B_4(t_1)| - |B_3(t_1)|\} > \frac{1}{6\pi e}T_1^{-1/2},$$

так что и при условиях (17) имеет место оценка $\lambda(F_1, \Phi_{\tau^2, a}) \geqslant CT_1^{-1/2}$.

2.3. Пусть, наконец,

$$|a|>C_6T_1^{-1},\ |\tau^2-T^{-1}|\leqslant C_5T_1^{-3/2}. \tag{18}$$

Имеем

$$|B(t)|^2=e^{-\tau^2t^2}\left|\exp\left\{\left(T_1\cos\frac{t}{T_1}-T_1+\frac{\tau^2t^2}{2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\left(T_1\sin\frac{t}{T_1}-t-at\right)\right\}-1\right|^2=$$
$$=e^{-\tau^2t^2}\{(e^{u(t)}\cos v(t)-1)^2+e^{2u(t)}\sin^2 v(t)\}, \tag{19}$$

где

$$u(t)=T_1\left(\cos\frac{t}{T_1}-1\right)+\frac{\tau^2t^2}{2};\ v(t)=T_1\left(\sin\frac{t}{T_1}-\frac{t}{T_1}\right)-at.$$

Пусть для определенности $a>0$ (случай $a\leqslant 0$ разбирается аналогично). Тогда при $t\geqslant 0\,|v(t)|=T_1(tT_1^{-1}-\sin(tT_1^{-1}))+at$. Положим $t=t_2=\min(a^{-1/2},a^{-1})$. Если $C_6T_1^{-1}<a\leqslant 1$, то

$$1\leqslant t_2=a^{-1/2}<\left(\frac{T_1}{C_6}\right)^{1/2},\ \left(\frac{C_6}{T_1}\right)^{1/2}<at_2=a^{1/2}\leqslant 1,$$

$$0\leqslant\frac{t_2}{T_1}-\sin\frac{t_2}{T_1}\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{t_6}{T_1}\right)^3\leqslant\frac{C}{T_1^{3/2}},$$

значит

$$\left(\frac{C_6}{T_1}\right)^{1/2}\leqslant|v(t_2)|\leqslant 1+\frac{C}{T_1^{3/2}}<\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Если же $a>1$, то $t_2=a^{-1}<1$, $at_2=1$ и

$$1\leqslant|v(t_2)|\leqslant 1+\frac{1}{T_1^3}. \tag{21}$$

Далее, из (18) и выбора t_2 следует

$$\tau^2t_2^2=\left(\tau^2-\frac{1}{T_1}\right)t_2^2+\frac{t_2^2}{T_1}\leqslant C,\ u(t_2)\geqslant -2T_1\sin^2\frac{t_2}{2T_1}\geqslant-\frac{t_2^2}{2T_1}>-C. \tag{22}$$

Из (19)—(22) непосредственно вытекает $|B(t_2)|\geqslant CT_1^{-1/2}$. Неравенство (6) тем самым установлено, что и завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы: 1. *Чистяков Г. П.* Устойчивость разложений законов распределения // Теория вероятностей и ее применение. 1986. Вып. 3. 31. С. 433—450. 2. *Голинский Л. Б., Чистяков Г. П.* Точные в смысле порядка оценки устойчивости разложений нормального распределения в метрике Леви // Проблемы устойчивости стохастических моделей. М., 1991. С. 16—40. 3. *Золотарев В. М., Сенатов В. В.* Двусторонние оценки метрики Леви // Теория вероятностей и ее применение. 1975. Вып. 2. 20. С. 239—250. 4. *Золотарев В. М.* К вопросу об устойчивости разложения нормального закона на компоненты // Теория вероятностей и ее применение. 1968. Вып. 4. 13. С. 738—741. 5. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 480 с. 6. *Янушкявичюс Р. В.* Устойчивость характеризаций вероятностных распределений. Вильнюс, 1991. 248 с.

Поступила в редколлегию 10.09.91