УДК 517.977.1.

В. И. КОРОБОВ, Г. М. СКЛЯР

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР

В последнее время значительный интерес вызывает изучение бесконечномерных управляемых систем. Этим вопросам посвящено большое число работ, в том числе ряд монографий.

Рассмотрим один из центральных вопросов теории управляемости — задачу синтеза ограниченных управлений.

Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$d\varphi/dt = A\varphi + f(\varphi, u), \tag{1}$$

где $\varphi \in H$, $u \in U$; H, U — банаховы пространства, оператор A порождает сильно непрерывную группу $\{e^{At}\}$ $-\infty < t < \infty$, т. е. операторы A и $-A$; область определения которых обозначим через $D(A)$ и $D(-A)$ соответственно $(D(A) = D(-A))$, порождают сильно непрерывные полугруппы $\{e^{At}\}$ и $\{e^{-At}\}$, $t \geq 0$, $f(\varphi, u)$ непрерывная на $H \times U$ функция.

В уравнении (1) u будем выбирать в виде непрерывной функции от фазовых координат $u = u(\varphi)$.

Определение. *Обобщенным решением (обобщенной траекторией) уравнения*

$$d\varphi/dt = A\varphi + f(\varphi, u(\varphi)) \tag{2}$$

с начальным условием $\varphi(0) = \varphi_0 \in H$ *называется непрерывная функция* $\varphi(t)$, *удовлетворяющая интегральному уравнению*

$$\varphi(t) = e^{At}\left(\varphi_0 + \int_0^t e^{A\tau} f(\varphi(\tau), u(\varphi(\tau))\, d\tau\right). \tag{3}$$

Если оператор A *ограниченный, то обобщенное решение, определяемое формулой* (3), *удовлетворяет уравнению* (2).

Рассмотрим задачу синтеза ограниченных управлений. Она состоит в построении управления u в виде функции от фазовых координат $u(\varphi)$, удовлетворяющего заданным ограничениям $u(\varphi) \in \Omega$, такого, что обобщенная траектория уравнения (1), выходящая из произвольной точки φ_0, попадает в ноль за конечное время $T(\varphi_0)$, т. е. $\lim\limits_{t \to T(\varphi_0)} \varphi(t) = 0$.

Для решения задачи введем вспомогательный функционал $\theta(\varphi)$, который назовем функционалом управляемости, роль его аналогична роли функционала Ляпунова в задачах устойчивости. Метод введения функционала управляемости для конечномерных задач впервые был предложен в работах [1—3].

В данной работе результаты, полученные в [1—3], распространены на бесконечномерный случай, доказана общая теорема о решении задачи синтеза управления в банаховых пространствах для уравнений с неограниченным оператором A [4], предложен метод построения функционала $\theta(\varphi)$.

Подробно рассматривается решение задачи синтеза ограниченного управления для волнового процесса. Получена теорема, усиливающая результат работы [4].

В настоящей статье производные функционалов понимаются по Фреше. В дальнейшем использовано следующее утверждение.

Если оператор A порождает сильно непрерывную группу, то существуют положительные λ_1, λ_2, $C_1 \leqslant 1$, $C_2 \geqslant 1$ такие, что для любого $\varphi \in H$ выполнено

$$C_1 e^{-\lambda_1 t} \| \varphi \| \leqslant \| e^{At} \varphi \| \leqslant C_2 e^{\lambda_2 t} \| \varphi \|, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Справедливость оценки (4) установлена в работе [5].

§ 1. Общий подход к задаче синтеза. Теорема 1. *Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением*

$$d\varphi/dt = A\varphi + f(\varphi, u),$$

где $\varphi \in H$, $u \subset U$; H, U — *банаховы пространства, оператор* A *порождает сильно непрерывную группу операторов* $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < \infty$, $f(\varphi, u)$ *непрерывна на* $H \times U$ *и в любой области* $0 < \rho_1^2 \leqslant \| \varphi \|^2 + \| u \|^2 \leqslant \rho_2^2$ *удовлетворяет условию Липшица* $\| f(\varphi'', u'') - f(\varphi', u') \| \leqslant L_1(\rho_1, \rho_2)(\| \varphi'' - \varphi' \| + \| u'' - u' \|)$.

Пусть существует в замкнутой области Q_1, $0 \in \operatorname{int} Q_1$ *непрерывный функционал* $\Theta(\varphi)$, $\varphi \in Q_1$, *удовлетворяющий условиям:*

1) $\Theta(\varphi) > 0$ *при* $\varphi \neq 0$ *и* $\Theta(0) = 0$;

2) если $\Theta(\varphi) \to 0$, *то* $\varphi \to 0$, *т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что из* $\Theta(\varphi) < \delta$ *следует* $\| \varphi \| < \varepsilon$;

3) существует $C > 0$ *такое, что множество* $Q = \{\varphi : \Theta(\varphi) \leqslant C\}$ *ограничено и* $Q \subset \operatorname{int} Q_1$;

4) $\Theta(\varphi)$ *непрерывно дифференцируемый везде, за исключением, быть может, точки* $\varphi = 0$;

5) существует управление $u(\varphi)$, $\varphi \in H$, *удовлетворяющее ограничению* $u(\varphi) \in \Omega \subset U$, $\varphi \in Q$, *такое, что в любом кольце*

$$K(\rho_1, \rho_2) = \{\varphi : \rho_1 \leqslant \| \varphi \| \leqslant \rho_2\}, \quad \rho_1 > 0$$

выполняется условие Липшица

$$\| u(\varphi'') - u(\varphi') \| \leqslant L_2(\rho_1, \rho_2) \| \varphi'' - \varphi' \|;$$

6) функция $\Phi(\varphi_0, t) = \Theta(\varphi(t))$ *непрерывно дифференцируема по* t, *если* $\varphi(t)$ *является обобщенным решением задачи Коши*

$$d\varphi/dt = A\varphi + f(\varphi, u(\varphi)), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in Q \setminus \{0\},$$

а функционал $\Psi(\varphi_0) = \Phi_t(\varphi_0, 0)$ *непрерывен при* $\varphi_0 \neq 0$ *и* $\varphi_0 \in Q$;

7) при $\varphi \in D(A) \cap Q$ *выполняется при некоторых* $\alpha > 0$ *и* $\beta >$ *неравенство*

$$\Psi(\varphi) = \langle \Theta_\varphi, A\varphi + f(\varphi, u(\varphi)) \rangle \leqslant -\beta \Theta^{1 - \frac{1}{\alpha}}(\varphi). \tag{5}$$

Тогда для любого $\varphi_0 \in Q \setminus \{0\}$ *существует* $0 < T(\varphi_0) \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(\varphi_0)$ *(если* $\alpha = \infty$, *то* $0 < T(\varphi_0) \leqslant \infty$*) такое, что*

а) существует единственное на полуинтервале $[0, T(\varphi_0))$ *обобщенное решение* $\varphi(t)$ *задачи Коши* $d\varphi/dt = A\varphi + f(\varphi, u(\varphi))$, $\varphi(0) = \varphi_0$;

б) $$\lim_{t\to T(\varphi)} \varphi(t) = 0; \ \varphi(t) \in Q, \ t \in [0, \ T(\varphi_0)].$$

В доказательстве теоремы мы используем следующую лемму.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда существует отрезок* $[0, \Delta]$, *одинаковый для всех начальных условий* $\varphi_0 \in K(\rho_1, \rho_2)$, *на котором существует обобщенное решение* $\varphi(t)$, $t \in [0, \Delta]$; $\varphi(0) = \varphi_0$ *уравнения* (2).

Доказательство леммы проводится традиционным способом с помощью теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения и с использованием оценки (4).

Доказательство теоремы. Решение уравнения (2) с начальным условием $\varphi_0 \in Q \setminus \{0\}$ в силу предположений теоремы существует на отрезке $[0, \ \tau(\varphi_0)]$ $(\tau(\varphi_0) > 0)$. Поскольку функционал $\Psi(\varphi)$ непрерывен и удовлетворяет неравенству (5) на плотном множестве в Q, для любого $\varphi \in Q \setminus \{0\}$ будет справедливо неравенство

$$\Psi(\varphi) \leqslant -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(\varphi).$$

Тогда на траектории $\varphi(t)$ системы (2) с начальным условием $\varphi(0) = \varphi_0$ справедливо неравенство

$$\Psi(\varphi(t)) \leqslant -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(\varphi(t)).$$

Так как $\theta(\varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$, отсюда следует, что при $\varphi(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt} \Theta^{1/\alpha}(\varphi(t)) \leqslant -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{6}$$

Пусть $\tau > 0$ — произвольное число, но такое, что решение $\varphi(t)$ существует на отрезке $[0, \tau]$ и $\varphi(t) \neq 0$ при $t \in [0, \tau]$. Из неравенства (6) следует, что

$$\Theta^{1/\alpha}(\varphi(t)) \leqslant \Theta^{1/\alpha}(\varphi_0) - \frac{\beta}{\alpha} t, \ t \in [0, \ \tau]. \tag{7}$$

Обозначим через $S(\varepsilon)$ и $S(\rho_0)$ шары с центром в 0 радиуса ε и ρ_0, соответственно, причем $\varepsilon < \|\varphi_0\|$, а ρ_0 таково, что $Q \subset S(\rho_0)$. Покажем, что за время $T(\varepsilon) \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(\varphi_0)$ траектория $\varphi(t)$ попадает на границу шара $S(\varepsilon)$.

Предположим противное. Тогда поскольку любое решение, начинающееся в точке $\varphi_0 \in Q \setminus \{0\}$, остается в Q (в силу того, что $\Theta(\varphi(t)) \leqslant 0$) и $\|\varphi(t)\| > \varepsilon$ для тех $t \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(\varphi_0)$, пока решение существует, то по лемме траектория $\varphi(t)$ продолжима на отрезок $[0, \ T_1]$ такой, что $T_1 > \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(\varphi_0)$, и неравенство (7) на этом отрезке справедливо. Это приводит к противоречию, так как при $t = T_1$ правая часть неравенства (7) отрицательна, а левая положительна, ибо $\|\varphi(t)\| \geqslant \varepsilon$.

В силу непрерывности функционала $\Theta(\varphi)$ для любого $\delta>0$ ε можно выбрать настолько малым, что $\Theta(\varphi)<\delta$ при $\varphi \in S(\varepsilon)$. Следовательно, при $t>T(\varepsilon)$ будет $\Theta(\varphi(t))<\delta$. Так как время попадания на шар радиуса ε монотонно возрастает при уменьшении ε и так как $T(\varepsilon) \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(\varphi_0)$, то при конечном α существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = T \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(\varphi_0)$ и $\Theta(\varphi(t)) \to 0$ при $t\to T$. А в силу условия теоремы это значит, что $\varphi(t)\to 0$ при $t\to T$, следовательно, $\varphi(t)$ непрерывно продолжается в 0 при $t=T$. При $\alpha=\infty$ будет $\Theta(\varphi(t))\to 0$ при $t\to+\infty$, и следовательно, $\varphi(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Замечание. В случае ограниченности оператора A условие 6 вытекает из остальных условий теоремы.

В качестве примера, иллюстрирующего теорему, рассмотрим следующую задачу.

Найти $u(\psi)$, удовлетворяющее заданным ограничениям так, чтобы решение $\psi(t, x)$ краевой задачи

$$\psi_t = \psi_x + u(\psi);\quad \psi(t, 0) = \psi(t, 1),$$

удовлетворяющее произвольному начальному условию $\psi(0, x) = \psi_0(x)$, за конечное время T стремилось к нулю по норме $L_2[0, 1]$.

Сформулированную краевую задачу запишем в следующей форме:

$$d\varphi/dt = A\varphi + u, \tag{8}$$

где $\varphi = \psi(t, \cdot) \in L_2[0, 1]$, т. е. функция $\psi(t, x)$ при фиксированном первом аргументе является элементом пространства $L_2[0, 1]$, $u \in L_2[0, 1]$ с ограничением вида $\|u\|<1$; $A=\frac{d}{dx}$ и областью определения $D(A)$ оператора A служат абсолютно непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции $\varphi(\cdot)$ такие, что $\varphi(0)=\varphi(1)$.

Покажем, что управление $u(\varphi) = -\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$ переводит произвольную точку $\varphi_0(\cdot)$ в 0 по обобщенным траекториям системы (8). Для доказательства введем функционал $\Theta(\varphi)=\|\varphi\|$. Воспользуемся теоремой 1. Очевидно, что достаточно проверить условия 6 и 7 теоремы.

Проверим дифференцируемость по t функции

$$\Phi(\varphi_0, t) = \Theta(\varphi(t)) = \|\varphi(t)\|.$$

Имеем

$$\frac{\|\varphi(h)\| - \|\varphi_0\|}{h} = \frac{\left\| e^{Ah}\left(\varphi_0 - \int\limits_0^h e^{-A\tau} \frac{\varphi(\cdot)(\tau)\,d\tau}{\|\varphi(\cdot)(\tau)\|}\right)\right\| - \|\varphi_0\|}{h} =$$

$$= \frac{\left\| \varphi_0 - \int\limits_0^h e^{-A\tau} \frac{\varphi(\cdot)(\tau)}{\|\varphi(\cdot)(\tau)\|} d\tau \right\| - \|\varphi_0\|}{h} =$$

$$= \frac{\left(\varphi_0 - \int\limits_0^h e^{-A\tau} \frac{\varphi(\cdot)(\tau)}{\|\varphi(\cdot)(\tau)\|} d\tau,\ \varphi_0 - \int\limits_0^h e^{-A\tau} \frac{\varphi(\cdot)(\tau)}{\|\varphi(\cdot)(\tau)\|} d\tau\right) - (\varphi_0, \varphi_0)}{h\left(\left\| \varphi_0 - \int\limits_0^h e^{-A\tau} \frac{\varphi(\cdot)(\tau)}{\|\varphi(\cdot)(\tau)\|} d\tau \right\| + \|\varphi_0\|\right)}.$$

Здесь использована унитарность группы $\{e^{At}\}$ [5]. Тогда

$$\Psi(\varphi_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{\|\varphi(h)\| - \|\varphi_0\|}{h} = -1.$$

Из этого равенства следует непрерывность функционала $\Psi(\varphi_0)$, а также справедливость условия 7 теоремы 1.

Отметим аналогию данной задачи с задачей синтеза для обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = u$, $|u| \leqslant 1$. Как показано в [2], в этом случае функция управляемости $\theta(x) = |x|$, а $u = -\frac{x}{|x|}$.

Для более сложных управляемых процессов, чем рассмотренный выше, например для управляемого процесса волнового типа, выбор функции $\Theta(\varphi)$ и проверка условия 6 теоремы 1 представляет значительные трудности. Эти вопросы рассмотрены в следующей теореме.

Теорема 2. *Рассмотрим уравнение* (1) *в случае, когда H — гильбертово пространство. Предположим, что в ограниченной замкнутой области $Q_1 \subset H$ такой, что $0 \subset \operatorname{int} Q_1$, непрерывный функционал $\Theta(\varphi)$ $(\Theta(\varphi) > 0,\ \varphi \neq 0;\ \Theta(0) = 0)$ удовлетворяет при $x \neq 0$ уравнению*

$$2a_0\Theta = (F(\Theta)\varphi, \varphi),\quad a_0 > 0, \tag{9}$$

где $\{F(\Theta)\}$, $\Theta > 0$ — непрерывное семейство положительно определенных ограниченных операторов, отображающих $D(A)$ на $D(A^*)$ и на множестве $D(A)$, удовлетворяющих соотношению

$$F(\Theta)A + A^*F(\Theta) = W(\Theta), \tag{10}$$

$\{W(\Theta)\}$, $\Theta > 0$ — непрерывное семейство ограниченных операторов.

Пусть множество $Q = \{\varphi : \Theta(\varphi) \leqslant C\}$ таково, что $Q \subset \operatorname{int} Q_1$ и функция $\Pi(\Theta, \varphi) = (F(\Theta)\varphi, \varphi)$ имеет на множестве $\{(0, C] \times Q\}$ непрерывную по совокупности переменных производную по Θ, причем $(F(\Theta(\varphi))\varphi, \varphi)_\Theta \neq 2a_0$ при $\varphi \in \Theta \setminus \{0\}$. Тогда при любом управлении $u(\varphi)$, $\varphi \in H$, удовлетворяющем условию Липшица в каждом кольце $K(\rho_1, \rho_2)$, функционал $\Psi(\varphi_0)$ определен и непрерывен в $Q \setminus \{0\}$ $(\Psi(\varphi_0) = \Phi_t(\varphi_0, 0)$, где $\Phi(\varphi_0, t) = \Theta(\varphi(t)))$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \subset Q \setminus \{0\}$, $\varphi(0) = \varphi_0$ решение уравнения (1) с управлением $u(\varphi)$. Рассмотрим функцию

$$G(z, t) = z - \frac{1}{2a_0}(F(z)\varphi(t), \varphi(t)), \; z \in (0, C].$$

Тогда функция $\Phi(\varphi_0, t) = \Theta(\varphi(t))$ удовлетворяет уравнению $G(\Phi(\varphi_0, t), t) = 0$. Покажем, что частная производная $\frac{\partial G}{\partial t}(z, t)$ существует и непрерывна в окрестности точки $(\Phi(\varphi_0, 0), 0)$.

Действительно,

$$\frac{1}{\Delta}[(F(z)\varphi(t+\Delta), \varphi(t+\Delta)) - (F(z)\varphi(t), \varphi(t))] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Big[\Big(F(z)e^{A\Delta}\Big(\varphi(t) + \int_0^\Delta e^{-A\tau}f(\varphi(\tau+t), u(\varphi(\tau+t)))\,d\tau\Big),$$

$$e^{A\Delta}\Big(\varphi(t) + \int_0^\Delta e^{-A\tau}f(\varphi(\tau+t), u(\varphi(\tau+t)))\,d\tau\Big) - (F(z)\varphi(t); \varphi(t))\Big] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}[(F(z)e^{A\Delta}\varphi(t), e^{A\Delta}\varphi(t)) - (F(z)\varphi(t), \varphi(t))] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\Big(F(z)e^{A\Delta}\varphi(t), \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}f(\varphi(\tau+t), u(\varphi(\tau+t)))\,d\tau\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\Big(F(z)\int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}f(\varphi(\tau+t), u(\varphi(\tau+t)))\,d\tau, e^{A\Delta}\varphi(t)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\Big(F(z)\int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}f(\varphi(\tau+t), u(\varphi(\tau+t)))\,dt;$$

$$\int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}f(\varphi(\tau+t), u(\varphi(\tau+t)))\,d\tau\Big) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Из непрерывности функции $f(\varphi(t), u(\varphi(t)))$ следует, что

$$I_2 \to (F(z)\varphi(t), f(\varphi(t), u(\varphi(t))));$$

$$I_3 \to (F(z)f(\varphi(t), u(\varphi(t))), \varphi(t));$$

$$I_4 \to 0 \text{ при } \Delta \to 0.$$

Из уравнения (10) вытекает, что на множестве $D(A)$

$$A = F^{-1}(z)(-A^* + W(z)F^{-1}(z))F(z).$$

Обозначим при фиксированном z через A_1 оператор $-A^* + W(z)F^{-1}(z)$, определенный на $D(A^*)$. Тогда $A = F^{-1}A_1F$. Отсюда $\sigma(A) = \sigma(A_1)$ и при $\lambda \in \sigma(A)$ $R_\lambda(A) = F^{-1}R_\lambda(A_1)F$, где $\sigma(A)$,

$\sigma(A_1)$ спектры операторов A и A_1, соответственно, и $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $R_\lambda(A_1) = (\lambda I - A_1)^{-1}$. Оператор A_1 порождает сильно непрерывную группу $\{e^{A_1 t}\}$, $-\infty < t < \infty$ [6], причем $e^{A_1 t} = s - \lim\limits_{\lambda \to \infty} e^{(\lambda^2 R_\lambda(A_1) - \lambda I)t}$ [5] (символ $s - \lim$ означает сильный предел). Оператор A также порождает сильно непрерывную группу и

$$e^{At} = s - \lim_{\lambda \to \infty} e^{(\lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I)t} = s - \lim_{\lambda \to \infty} F^{-1} e^{(\lambda^2 R_\lambda(A_1) - \lambda I)t} F.$$

Учитывая обратимость оператора F, запишем

$$e^{At} = F^{-1} (s - \lim_{\lambda \to \infty} e^{(\lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I)t}) F = F^{-1} e^{A_1 t} F,$$

откуда

$$F(z) e^{A\Delta} \varphi(t) = e^{A_1 \Delta} F(z) \varphi(t) = e^{-A^* \Delta} F(z) \varphi(t) + \\ + \int_0^\Delta e^{-A^*(\Delta - \tau)} W(z) F^{-1}(z) e^{A_1 \tau} F(z) \varphi(t) \, d\tau.$$

Используя последнее равенство, имеем

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} [(F(z) e^{A\Delta} \varphi(t),\ e^{A\Delta} \varphi(t)) - (F(z) \varphi(t),\ \varphi(t))] = \\ = \frac{1}{\Delta} [(e^{-A^*\Delta} F(z) \varphi(t),\ e^{A\Delta} \varphi(t)) - (F(z) \varphi(t),\ \varphi(t))] + \\ + \frac{1}{\Delta} \left[\left(\int_0^\Delta e^{-A^*(\Delta - \tau)} W(z) F^{-1}(z) e^{A_1 \tau} F(z) \varphi(t) \, d\tau,\ e^{A\Delta} \varphi(t)\right)\right] = \\ = \frac{1}{\Delta} \left(\int_0^\Delta e^{A^* \tau} W(z) F^{-1}(z) e^{A_1 \tau} F(z) \varphi(t) \, d\tau,\ \varphi(t)\right).$$

Откуда $I_1 \to (W(z) \varphi(t),\ \varphi(t))$ при $\Delta \to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} [F(z) \varphi(t + \Delta),\ \varphi(t + \Delta)) - (F(z) \varphi(t),\ \varphi(t))] = \\ = (W(z) \varphi(t),\ \varphi(t)) + 2 \operatorname{Re} (F(z) \varphi(t),\ f(\varphi(t),\ u(\varphi(t)))$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial G(z,\ t)}{\partial t} = - \frac{1}{2a_0} [(W(z) \varphi(t),\ \varphi(t)) + \\ + 2 \operatorname{Re} (F(z) \varphi(t),\ f(\varphi(t),\ u(\varphi(t)))],$$

т. е. эта производная существует и непрерывна по условию теоремы.

Учитывая, что

$$\frac{\partial G}{\partial z}(\Phi(\varphi_0, 0), 0) = 1 - \frac{1}{2a_0}(F(\Theta(\varphi_0))\varphi_0, \varphi_0)_\Theta \neq 0,$$

по теореме о неявной функции получим, что $\Phi(\varphi_0, t)$ — дифференцируемая функция и

$$\Phi_t(\varphi_0, 0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial t}(\Phi(\varphi_0, 0), 0)}{\frac{\partial G}{\partial z}(\Phi(\varphi_0, 0), 0)} =$$

$$= \frac{(W(\Theta(\varphi_0))\varphi_0, \varphi_0) + 2\,\mathrm{Re}\,(F(\Theta(\varphi_0))\varphi_0, f(\varphi_0, u(\varphi_0))}{2a_0 - (F(\Theta(\varphi_0))\varphi_0, \varphi_0)}.$$

Теорема доказана.

§ 2. **Волновое уравнение.** Рассмотрим процесс построения управления $u(\varphi)$, удовлетворяющего заданным ограничениям так чтобы решение уравнения

$$\psi_{tt} = \Delta\psi + u(\psi, \psi_t), \quad \psi|_{\partial G} = 0, \quad x \in G,$$

где G — замкнутая ограниченная область в E_n, обладающая границей класса C^2 с произвольными начальными условиями $\psi(0, x) = \psi_0(x)$, $\psi_t(0, x) = \psi_1(x)$, обращалось в 0 в конечный момент времени T в энергетической норме, т. е. $\|\psi(T, x)\|_E = 0$.

Эту задачу сведем к следующей задаче управления. Для этого введем гильбертово пространство $H = H_1 \times H_2$ с элементами $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, где H_1 — замыкание по норме

$$\|\varphi_1(\circ)\|_1^2 = \int_G |\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx$$

гладких скалярных функций φ_1 с компактным носителем в G, а $H_2 = L_2(G)$. Таким образом,

$$\|\varphi\|_E^2 = \frac{1}{2}(\|\varphi_1(\cdot)\|_1^2 + \|\varphi_2(\cdot)\|_{L_2}^2).$$

В этом пространстве волновой процесс описывается уравнением

$$d\varphi/dt = A\varphi + Bu, \tag{11}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix},$$

и областью определения $D(A)$ является множество функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ таких, что $A\varphi \in H$, т. е. [7] лапласиан, взятый в смысле теории обобщенных функций, является квадратично интегрируемой функцией на G, а функция φ_2 квадратично интегрируема и принадлежит H_1. Как показано в [7], этот оператор порождает унитарную группу. Оператор $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$, ограниченный оператор из $U = L_2(G)$ в H.

Зададим в пространстве H квадратичную форму

$$(F\varphi,\ \varphi)=\left(bd+\frac{c+d}{b}a\right)\int\limits_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+d\left(\int\limits_G\varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_G\overline{\varphi_1(x)}\varphi_2(x)\,dx\right)+\frac{c+a}{b}\left(\int\limits_G|\varphi_2(x)|^2\,dx+\int\limits_G|\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx\right),$$

$$a,\ b,\ c,\ d>0.$$

Определим оператор F, порождающий квадратичную форму. Заметим, что если функция $\varphi\in L_2(G)$, то в смысле обобщенных функций однозначно разрешима краевая задача

$$\Delta g+\varphi=0\quad g|_{\partial G}=0. \tag{12}$$

причем решение имеет вид

$$g(x)=\int\limits_G\Gamma(x,\ y)\varphi(y)\,dy=K\varphi(\cdot),$$

где $\Gamma(x,\ y)$ — функция Грина задачи (12).

Используя свойства функции Грина, можно показать, что $g(\cdot)\in H_1$. Кроме того, функция $g(\cdot)$ обладает лапласианом в смысле теории обобщенных функций, принадлежащим $L_2(G)$.

Заметив, что по формуле Грина

$$\int\limits_G|\varphi_1(x)|^2\,dx=\int\limits_G\nabla(K\varphi_1)(x)\nabla\overline{\varphi_1(x)}\,dx;$$

$$\int\limits_G\overline{\varphi_1(x)}\varphi_2(x)\,dx=\int\limits_G\nabla(K\varphi_2)(x)\nabla\overline{\varphi_1(x)}\,dx;$$

$$\varphi_1(\cdot)\in H_1,\ \varphi_2(\cdot)\in H_2,$$

получаем, что оператор F имеет вид

$$F=\begin{pmatrix}\frac{c+d}{b}I+\left(bd+\frac{c+d}{b}a\right)K & dK\\ dI & \frac{c+d}{b}I\end{pmatrix}.$$

Этот оператор является ограниченным положительно определенным и, кроме того, переводит $D(A)$ на $D(A)=D(A^*)$.

Выберем уравнение u в виде $u=P\varphi=-a\varphi_1-b\varphi_2$. Тогда производная формы $(F\varphi,\ \varphi)$ в силу системы (11) запишется так:

$$\frac{d}{dt}(F\varphi,\ \varphi)=(F(A+BP)\varphi,\ \varphi)+(F\varphi,\ (A+BP)\varphi)=$$

$$=-2ad\int\limits_G|\varphi_1(x)|^2\,dx-2c\int\limits_G|\varphi_2(x)|^2\,dx-$$

$$-2d\int\limits_G|\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx=(W\varphi,\ \varphi),\ \varphi\in D(A),$$

где $\overline{W}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Поскольку F

отображает $D(A)$ в $D(A^*)$, то отсюда $((F\tilde{A}+\tilde{A}^*F)\varphi,\ \varphi) = (\tilde{W}\varphi,\ \varphi)$, $\varphi \in D(A)$, где $\tilde{A} = A + BP$, и, следовательно,

$$FA + A^*F = \overline{W}_1, \quad \varphi \in D(A), \tag{13}$$

где $\overline{W}_1$ — ограниченный самосопряженный оператор.

Определим при $\varphi \neq 0$ функционал $\Theta(\varphi)$ из уравнения

$$2a_0\Theta = \frac{f_{11}}{\Theta^{3/\alpha}} \int_G |\varphi_1(x)|^2\,dx + \frac{f_{12}}{\Theta^{2/\alpha}} \int_G (\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx + \frac{f_{22}}{\Theta^{1/\alpha}} \int_G (|\varphi_2(x)|^2 + |\nabla\varphi_1(x)|^2)\,dx, \tag{14}$$

где $f_{11} = bd + \frac{c+d}{b}a$; $f_{12} = a$; $f_{22} = \frac{c+d}{b}$,

постоянные $a_0 > 0$, $\alpha \geqslant 1$ и определяются в дальнейшем, а при $\varphi = 0$ положим $\Theta(0) = 0$.

Покажем вначале, что уравнение (14) имеет единственное положительное решение при $\alpha \geqslant 1$. Для этого введем вспомогательное пространство $\tilde{H}$, как декартово произведение $n+2$ пространств $L_2(G)$. Норма элемента $h = (h_1, \ldots, h_{n+2})$ равна $\|h\|_0 = \left(\sum_{i=1}^{n+2} \|h_i\|^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим в этом пространстве квадратичную форму $(\tilde{F}h,\ h)_0$, где

$$\tilde{F}(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{f_{11}}{\Theta^{3/\alpha}} I & \frac{f_{12}}{\Theta^{2/\alpha}} I & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{f_{12}}{\Theta^{2/\alpha}} I & \frac{f_{22}}{\Theta^{1/\alpha}} I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{22}}{\Theta^{1/\alpha}} I & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{f_{22}}{\Theta^{1/\alpha}} I \end{pmatrix}.$$

Через $[\tilde{F}(\Theta)]$ будем обозначать матрицу

$$\begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{3}{\alpha}} f_{11} & \Theta^{-\frac{2}{\alpha}} f_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ \Theta^{-\frac{2}{\alpha}} f_{12} & \Theta^{-\frac{1}{\alpha}} f_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{1}{\alpha}} f_{22} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Theta^{-\frac{1}{\alpha}} f_{22} \end{pmatrix}.$$

Предварительно покажем, что уравнение

$$2a_0\Theta = (\tilde{F}(\Theta)h,\ h)_0 \tag{15}$$

имеет при $h \neq 0$ единственное положительное решение. При фиксированном $h \neq 0$ уравнение (15) запишется так:

$$2a_0\Theta^{1+\frac{3}{\alpha}} = g_1 + g_2\Theta^{\frac{1}{\alpha}} + g_3\Theta^{\frac{2}{\alpha}}, \tag{16}$$

где $g_1 = f_{11}\int\limits_G |h_1(x)|^2\,dx$; $g_2 = f_{12}\int\limits_G (h_1(x)\overline{h_2(x)} + \overline{h_1(x)}\,h_2(x))\,dx$;

$g_3 = f_{22}\int\limits_G \sum\limits_{i=2}^{n+2} |h_i(x)|^2\,dx$, причем $g_1 \geqslant 0$ и $g_2 \geqslant 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\Theta) = 2a_0\Theta^{1+\frac{3}{\alpha}} - g_1 - g_2\Theta^{\frac{1}{\alpha}} - g_3\Theta^{\frac{2}{\alpha}}.$$

Пусть $h_1 \neq 0$, тогда $\Phi(0) = -g_1 < 0$, а при достаточно большом $\Theta > 0$ $\Phi(\Theta) > 0$. Это означает существование положительного корня уравнения (16). Если $h_1 = 0$, то уравнение (16) принимает вид $2a_0\Theta^{1+\frac{3}{\alpha}} = g_3\Theta^{\frac{2}{\alpha}}$ и так как $g_3 > 0$, то очевидно существование положительного решения.

Теперь покажем при $h \neq 0$ единственность положительного решения уравнения (16). Имеем

$$\Phi_\Theta = 2a_0\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right)\Theta^{\frac{3}{\alpha}} - \frac{g_2}{\alpha}\Theta^{\frac{1}{\alpha}-1} - \frac{2g_3}{\alpha}\Theta^{\frac{2}{\alpha}-1}. \tag{17}$$

Рассмотрим значение производной Φ_Θ в произвольном положительном корне функции $\Phi(\Theta)$. Тогда, выражая $\Theta^{3/\alpha}$ из (16) и подставляя в (17), получим

$$\Phi_\Theta(\Theta_0) = \Theta_0^{-1}\Bigg[\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) f_{11}\int\limits_G |h_1(x)|^2\,dx + \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) f_{12}\Theta_0^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_G (h_1(x)\overline{h_2(x)} + \overline{h_1(x)}\,h_2(x))\,dx + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) f_{22}\Theta_0^{\frac{2}{\alpha}}\int\limits_G \sum_{i=2}^{n+2} |h_i(x)|^2\,dx\Bigg] \equiv \Theta_0^{-1}(F_1^\alpha(\Theta_0)h,\ h)_0,$$

$$F_1^\alpha(\Theta) = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{3}{\alpha}\right)f_{11}I & \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)f_{12}\Theta^{\frac{1}{\alpha}}I & 0 & \dots & 0 \\ \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)f_{12}\Theta^{\frac{1}{\alpha}}I & \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)f_{22}\Theta^{\frac{1}{\alpha}}I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)f_{22}\Theta^{\frac{2}{\alpha}}I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)f_{22}\Theta^{\frac{2}{\alpha}}I \end{pmatrix}.$$

Пусть α таково, что $(\tilde{F}_1^{\alpha}(\Theta_0)h,\ h)_0 > 0$ при $h \neq 0$, т. е. выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{4}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}\right) f_{11} f_{22} - \left(1+\frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\alpha^2}\right) f_{12}^2 > 0, \tag{18}$$

тогда $(F_1^{\alpha}(\Theta_0)h,\ h)_0 \geqslant \lambda_{\min}^{\alpha} \| h \|_0^2$, где $\lambda_{\min}^{\alpha}$ — наименьшее собственное значение матрицы

$$[\tilde{F}_1^{\alpha}(\Theta)] = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) f_{11} & \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) f_{12}\Theta^{\frac{1}{\alpha}} \ \ldots\ldots & 0 \\ \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) f_{12}\Theta^{\frac{1}{\alpha}} & \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) f_{22}\Theta^{\frac{2}{\alpha}} \ \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 \quad \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) f_{22}\Theta^{\frac{2}{\alpha}} \ \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ \ldots\ldots\ 0 \ \ldots & \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) f_{22}\Theta^{\frac{2}{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в произвольном положительном корне Θ_0 имеем $\Phi_\Theta(\Theta_0) > 0$, а это означает единственность положительного корня функции $\Phi(\Theta)$.

Вернемся теперь к уравнению (14). Заметим, что это уравнение имеет при $\varphi \neq 0$ единственное положительное решение, поскольку уравнение $2a_0\Theta = (\tilde{F}(\Theta)h,\ h)_0$ имеет при $h \neq 0$ единственное положительное решение, а функция $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_1(\cdot) \in L_2(G)$. Следовательно, уравнение (14) неявным образом определяет функционал $\Theta(\varphi)$, $(\Theta(\varphi) > 0,\ \ \varphi \neq 0;\ \ \Theta(0) = 0)$. Уравнение (14) может быть записано в виде

$$2a_0\Theta = (F(\Theta)\varphi,\ \varphi), \tag{19}$$

где $\varphi \in H$; $F(\Theta)$ положительно определенный ограниченный оператор при $\Theta > 0$.

$$F(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{c+d}{b}\Theta^{-\frac{1}{\alpha}} I + \left(bd + \frac{c+d}{b}a\right)\Theta^{-\frac{3}{\alpha}} K & d\Theta^{-\frac{2}{\alpha}} K \\ d\Theta^{-\frac{2}{\alpha}} I & \frac{c+d}{b}\Theta^{-\frac{1}{\alpha}} I \end{pmatrix}.$$

Обе части уравнения (19) непрерывно дифференцируемы по φ и Θ при $\Theta \neq 0$. В силу выбора коэффициентов α, a, b, c, d, удовлетворяющих неравенству (18), выполнено $2a_0 - (F(\Theta(\varphi))\varphi,\ \varphi)_\Theta \neq 0$, тогда по теореме о неявном операторе $\Theta(\varphi)$ непрерывно дифференцируемый функционал при $\varphi \neq 0$. Далее, функционал $\Theta(\varphi)$

непрерывен в нуле. Для доказательства зададим $\varepsilon > 0$. Поскольку непрерывная функция $\|F(\Theta)\|$ стремится к нулю при $\Theta \to \infty$, то при $\Theta \geqslant \varepsilon$ выполнено $\|F(\Theta)\| \leqslant r(\varepsilon)$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, что

$$2a_0\varepsilon > r(\varepsilon)\,\delta^2. \tag{20}$$

Пусть теперь $\|\varphi\| < \delta$. Покажем, что $\Theta(\varphi) < \varepsilon$. От противного, пусть $\Theta(\varphi) \geqslant \varepsilon$, тогда $(F(\Theta(\varphi))\varphi, \varphi) \leqslant r(\varepsilon)\,\delta^2$. Используя (20), получаем

$$2a_0\Theta(\varphi) \geqslant 2a_0\varepsilon > r(\varepsilon)\,\delta^2 \geqslant (F(\Theta(\varphi)), \varphi, \varphi) = 2a_0\Theta(\varphi).$$

Это противоречие показывает, что $\Theta(\varphi) < \varepsilon$.

Установим теперь, что из $\Theta(\varphi) \to 0$ следует $\|\varphi\| \to 0$. Имеем

$$(F(\Theta)\varphi, \varphi) = \Theta^{-\frac{3}{\alpha}}\left(bd + \frac{c+d}{b}a\right)\int\limits_G |\varphi_1(x)|^2\,dx +$$

$$+ \Theta^{-\frac{2}{\alpha}} d \int\limits_G (\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx + \Theta^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{c+d}{b}\int\limits_G (|\varphi_2(x)|^2 +$$

$$+ |\nabla\varphi_1(x)|^2)\,dx = \Theta^{-\frac{3}{\alpha}}\frac{c+d}{b}a\int\limits_G |\varphi_1(x)|^2\,dx +$$

$$+ \frac{d}{b}\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\int\limits_G \left|\Theta^{-\frac{1}{\alpha}} b\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right|^2 dx + \int\limits_G |\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx\right) +$$

$$+ \Theta^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{c}{b}\left(\int\limits_G |\varphi_2(x)|^2\,dx + \int\limits_G |\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx\right) \geqslant \Theta^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{2c}{b}\|\varphi\|_E^2.$$

Таким образом, используя уравнение (15) и полученное неравенство, имеем

$$2a_0\Theta^{1+\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{2c}{b}\|\varphi\|_E^2, \tag{21}$$

откуда и следует искомое утверждение.

Кроме того, согласно неравенству (21) для $\forall C > 0$ множество $Q = \{\varphi : \Theta(\varphi) \leqslant C\}$ ограничено. Следовательно, функционал $\Theta(\varphi)$ удовлетворяет условиям 1—4 теоремы 1. Далее, поскольку оператор F переводит $D(A)$ в $D(A^*)$ и $FA + A^*F = \overline{W}_1$, то по теореме 2 функционал $\Psi(\varphi)$ определен и непрерывен при любом непрерывном в $H \setminus \{0\}$ управлении, т. е. выполнено условие 6 теоремы 1.

Управление $u(\varphi)$ выберем в виде

$$u(\varphi) = -\frac{a}{\Theta^{2/\alpha}(\varphi)}\varphi_1 - \frac{b}{\Theta^{1/\alpha}(\varphi)}\varphi_2, \quad \varphi \neq 0. \tag{22}$$

Покажем, что при таком выборе управления выполнено условие 7 теоремы 1.

Пусть $\varphi \in D(A)$. Перепишем уравнение (14):

$$2a_0\Theta^{1+\frac{3}{\alpha}} = f_{11}\int\limits_G |\varphi_1(x)|^2\,dx + f_{12}\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_G (\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x) +$$

$$+ \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)})\,dx + f_{22}\Theta^{\frac{2}{\alpha}}\int\limits_G (|\varphi_2(x)|^2 + |\nabla\varphi_1(x)|^2)\,dx. \qquad (23)$$

Дифференцируя это равенство по t в силу уравнения (11) с выбранным управлением, получаем

$$2a_0\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)\Theta^{\frac{3}{\alpha}}\Psi(\varphi) = -2ad\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}\int\limits_G |\varphi_1(x)|^2\,dx -$$

$$-2c\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_G |\varphi_2(x)|^2\,dx - 2d\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_G |\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx +$$

$$+\left[\frac{1}{\alpha}\Theta^{-1+\frac{1}{\alpha}} f_{12}\int\limits_G (\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)})\,dx +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\alpha}\Theta^{-1+\frac{2}{\alpha}} f_{22}\int\limits_G (|\varphi_2(x)|^2 + |\nabla\varphi_1(x)|^2)\,dx\right]\Psi(\varphi). \qquad (24)$$

Из (23) и (24) следует равенство

$$\Psi(\varphi) = -\left[2ad\int\limits_G |\varphi_1(x)|^2\,dx + 2c\Theta^{\frac{2}{\alpha}}\int\limits_G |\varphi_2(x)|^2\,dx +\right.$$

$$\left.+2d\Theta^{\frac{2}{\alpha}}\int\limits_G |\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx\right]\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}} \Big/ \left[\left(1+\frac{3}{\alpha}\right) f_{11}\int\limits_G |\varphi_1(x)|^2\,dx +\right.$$

$$+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\Theta^{\frac{1}{\alpha}} f_{12}\int\limits_G (\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)})\,dx +$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Theta^{\frac{2}{\alpha}} f_{22}\int\limits_G (|\varphi_2(x)|^2 + |\nabla\varphi_1(x)|^2)\,dx\right]. \qquad (25)$$

Заметим, что квадратичная форма в числителе правой части равенства (25) положительно определена, а форма, стоящая в знаменателе, положительно определена при условии (18). Отсюда следует, что при условии (18) выполнено

$$\Psi(\varphi) \leqslant -\min_{h\in\tilde{H}\setminus\{0\}} 2\left[ad\int\limits_G |h_1(x)|^2\,dx + c\Theta^{\frac{2}{\alpha}}\int\limits_G |h_2(x)|^2\,dx +\right.$$

$$\left.+d\sum_{i=3}^{n+2}\int\limits_G |h_i(x)|^2\,dx\right]\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}} \Big/ \left[\left(1+\frac{3}{\alpha}\right) f_{11}\int\limits_G |h_1(x)|^2\,dx +\right.$$

$$+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\Theta^{\frac{1}{\alpha}} f_{12}\int\limits_G (\overline{h_1(x)}\,h_2(x)+h_1(x)\,\overline{h_2(x)})\,dx+$$

$$+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Theta^{\frac{2}{\alpha}} f_{22}\sum_{i=2}^{n+2}\int\limits_G |h_i(x)|^2\,dx\Bigg].$$

Делая замену переменных $y_1(x)=h_1(x)$, $y_i(x)=\Theta^{\frac{1}{\alpha}}h_i(x)$, $i=\overline{2,\,n+2}$, получаем оценку

$$\Psi(\varphi)\leqslant-\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}\min_{y\in\tilde H\setminus\{0\}} 2\Bigg[ad\int\limits_G|y_1(x)|^2\,dx+c\int\limits_G|y_2(x)|^2\,dx+$$

$$+d\sum_{i=3}^{n+1}\int\limits_G|y_i(x)|^2\,dx\Bigg]\Big/\Bigg[\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)f_{11}\int\limits_G|y_1(x)|^2\,dx+$$

$$+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)f_{12}\int\limits_G(\overline{y_1(x)}\,y_2(x)+y_1(x)\,\overline{y_2(x)})\,dx+$$

$$+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)f_{22}\sum_{i=2}^{n+2}\int\limits_G|y_i(x)|^2\,dx\Bigg]=-\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}\min_{y\in\tilde H\setminus\{0\}}\frac{(-\tilde W y,\,y)}{(\tilde F^{\alpha}y,\,y)}\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{\omega_{\min}}{\lambda_{\max}}\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}},\quad\frac{\omega_{\min}}{\lambda_{\max}}>0,$$

где $\omega_{\min}$ — минимальное собственное число оператора — $\tilde W$: $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число оператора $\tilde F$.

Итак, условие 7 теоремы 1 выполнено.

Оценим теперь норму управления $u(\varphi)$, определяемого формулой (22):

$$\|u(\varphi)\|^2=\frac{a^2}{\Theta^{4/\alpha}}\int\limits_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+\frac{ab}{\Theta^{3/\alpha}}\int\limits_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+$$

$$+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+\frac{b^2}{\Theta^{2/\alpha}}\int\limits_G|\varphi_2(x)|^2\,dx.$$

Учитывая, что функционал $\Theta(\varphi)$ удовлетворяет уравнению (23), имеем

$$\|u(\varphi)\|^2=2a_0\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}\Bigg[\frac{a^2}{\Theta^{3/\alpha}}\int\limits_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+\frac{ab}{\Theta^{2/\alpha}}(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+$$

$$+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+\frac{b^2}{\Theta^{1/\alpha}}\int\limits_G|\varphi_2(x)|^2\,dx\Bigg]\Big/\frac{f_{11}}{\Theta^{3/\alpha}}\int\limits_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+$$

$$+\frac{f_{12}}{\Theta^{2/\alpha}}\int\limits_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+$$

$$
+\frac{f_{22}}{\Theta^{1/\alpha}}\left(\int_G |\varphi_2(x)|^2\,dx+\int_G |\nabla\varphi_1(x)|^2\,dx\right)\Bigg]\leqslant
$$

$$
\leqslant 2a_n\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}\frac{\dfrac{a^2}{\Theta^{2/\alpha}}\displaystyle\int_G |\varphi_1(x)|^2\,dx+\dfrac{ab}{\Theta^{1/\alpha}}\int_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+b^2\int_G|\varphi_2(x)|^2\,dx}{\dfrac{f_{11}}{\Theta^{2/\alpha}}\displaystyle\int_G |\varphi_1(x)|^2\,dx+\dfrac{f_{12}}{\Theta^{1/\alpha}}\int_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+f_{22}\int_G|\varphi_2(x)|^2\,dx}.
$$

Отсюда

$$
\|u(\varphi)\|^2\leqslant\max_{\varphi\in H\setminus\{0\}}2a_0\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[a^2\int_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+ab\int_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})dx+b^2\int_G|\varphi_2(x)|^2\,dx\right]\Big/\left[f_{11}\int_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+f_{12}\int_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+f_{22}\int_G|\varphi_2(x)|^2\,dx.\right.
$$

Учитывая вид коэффициентов f_{ij}, имеем

$$
f_{11}\int_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+f_{12}\int_G(\overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)})\,dx+f_{22}\int_G|\varphi_2(x)|^2\,dx=\frac{d}{b}\int_G|b\varphi_1(x)+\varphi_2(x)|^2\,dx+\frac{c}{b}\int_G|\varphi_1(x)|^2\,dx+\frac{c+d}{b}a\int_G|\varphi_2(x)|^2\,dx\geqslant
$$

$$
\geqslant\min\left\{\frac{(c+d)\,a}{b},\ \frac{c}{b}\right\}\int_G(|\varphi_1(x)|^2+|\varphi_2(x)|^2)\,dx.
$$

Откуда $\|u(\varphi)\|^2\leqslant 2a_0r\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}$,

где
$$
r=\frac{a^2+b^2}{\min\left\{\dfrac{c+d}{b}a,\ \dfrac{c}{b}\right\}}.
$$

Таким образом, при $\alpha=1$ управление $u(\varphi)$ будет удовлетворять ограничению вида $u\in\Omega\subset U$, где $\Omega=\{u:\|u\|\leqslant R\}$ при всех $\varphi\in H\setminus\{0\}$ и при $a_0\leqslant\frac{R^2}{2r}$. При $\alpha>1$ управление $u(\varphi)$ будет удовлетворять ограничению такого вида в области $Q\setminus\{0\}$, $Q=\{\varphi:\ \Theta(\varphi)\leqslant C\}$ для любого $C>0$. Для этого требуем $a_0\leqslant\leqslant\dfrac{R^2}{2rC^{1-\frac{1}{\alpha}}}$.

Подведем итог сказанному. Применяя теорему 1, мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть числа* a, b, c, d, $a_0 > 0$ *удовлетворяют неравенству (18), т. е.*

$$8\left[cd + \left(\frac{c+d}{b}\right)^2 a\right] > d^2, \tag{26}$$

тогда однозначно определен в H *функционал* $\Theta(\varphi)$, $\Theta(\varphi) > 0$, $\varphi \neq 0$; $\Theta(0) = 0$, *удовлетворяющий уравнению (14) при* $\alpha = 1$. Определим далее управление $u(\varphi) = -\frac{a}{\Theta^2(\varphi)}\varphi_1 - \frac{b}{\Theta(\varphi)}\varphi_2$, $\varphi \neq 0$.

1. Всякое обобщенное решение $\varphi(t)$ уравнения (11) с управлением $u(\varphi)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t \to T(\varphi_0)} \|\varphi(t)\|_E = 0$, где $T(\varphi_0) \leqslant \frac{1}{\beta}\Theta(\varphi_0)$, $\beta > 0$. При этом управление $u(\varphi)$ будет ограниченным по норме во всем пространстве, т. е. $\|u(\varphi)\| \leqslant R$ при

$$a_0 \leqslant \frac{R^2}{2r}, \quad r = \frac{a^2 + b^2}{\min\left\{\frac{c+d}{b}a, \frac{c}{b}\right\}}.$$

Таким образом, ограниченное по норме управление $u(\varphi)$ осуществляет решение задачи синтеза во всем пространстве H.

2. Уравнение (11) однозначно определяет функционал также и при любом $\alpha > 1$, если справедливо условие (26). При этом управление $u(\varphi) = -\frac{a\varphi_1}{\Theta^{2/\alpha}(\varphi)} - \frac{b\varphi_2}{\Theta^{1/\alpha}(\varphi)}$ дает решение задачи синтеза за время $T(\varphi) \leqslant \frac{\alpha}{\beta}\Theta^{1/\alpha}(\varphi)$ в каждой области $Q = \{\varphi : \Theta(\varphi) \leqslant C\}$ и $\|u(\varphi)\| \leqslant R$ при $a_0 \leqslant \frac{R^2}{2rC^{1-\frac{1}{\alpha}}}$. Кроме того, $\varphi(t) \in Q$ при $t \in [0, T)$.

3. При $\alpha = \infty$, $u(\varphi) = -a\varphi_1 - b\varphi_2$ дает решение задачи стабилизации в области Q, т. е. $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|u(\varphi)\| \leqslant R$ при $a_0 \leqslant \frac{R^2}{2rC}$. Кроме того, $\varphi(t) \in Q$ при $t \geqslant 0$.

Список литературы

1. *Коробов В. И.* Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости.— Докл. АН СССР, 1979, 248, № 5, с. 1051—1055.

2. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости.— Мат. сб., 1979, 109 (151), № 4 (8), с. 582—606.

3. *Коробов В. И.* Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений.— Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205. Прикл. математика и механика, вып. 45, с. 59—73.

4. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, 5, с 11—14.

5. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1974.— 259 с.

6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.

7. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния.— М.: Мир, 1971.— 310 с.

Поступила в редколлегию 14.02.84.