ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ КРИВИЗНАМИ

А. В. Погорелов

Харьков

Предметом настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) поверхность, не содержащая сферических (в частности плоских) областей, определяется однозначно с точностью до движения и зеркального отражения ее нормальными кривизнами.

Точный смысл этой теоремы заключается в следующем. Пусть F и F' — регулярные поверхности и f — регулярное одно-однозначное отображение F на F'. Пусть P — произвольная точка F и P' — соответствующая ей точка на F'. Отображение f индуцирует соответствие направлений в точках P и P' на поверхностях F и F'.

Теоремой утверждается, *что если нормальные кривизны поверхностей F и F' в соответсвующих точках по соответствующим направлениям равны, то поверхности F и F' равны.*

Доказательство теоремы.

Пусть P — произвольная точка на поверхности F, не являющаяся шаровой точкой или точкой уплощения. В достаточно малой окрестности U_p точки P на поверхности F можно ввести координатную сеть (u, v) из линий кривизны.

Отнесем в качестве криволинейных координат точки на поверхности F' координаты u, v соответствующей точки поверхности F. Введенная таким образом координатная сеть на F' будет также состоять из линий кривизны, так как направления на поверхностях F, F', соответствующие экстремальным значениям нормальных кривизн, должны соответствовать друг другу.

Пусть E, G, L, N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности F, а E', G', L', N' — коэффициенты соответствующих форм F'. Так как нормальная кривизна поверхности в направлении $(du : dv)$ равна отношению второй квадратичной формы к первой, то в силу равенства нормальных кривизн поверхностей F и F' равенство

$$\frac{Ldu^2 + Ndv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \frac{L'du^2 + N'dv^2}{E'du^2 + G'dv^2}$$

должно выполняться тождественно по u, v, du, dv. Отсюда немедленно получается

$$E' = \lambda(u, v) E, \qquad G' = \lambda(u, v) G$$
$$L' = \lambda(u, v) L, \qquad N' = \lambda(u, v) N \tag{1}$$

Согласно формулам Петерсона—Кодацци для поверхности F

$$L_v = HE_v, \qquad N_u = HG_u, \tag{2}$$

где H — средняя кривизна поверхности. Аналогично для поверхности F'

$$L'_v = H' E'_v, \qquad N'_u = H' G'_u. \tag{3}$$

Подставляя в эти формулы выражения $E', \ldots N'$ согласно (1), получим

$$(\lambda L)_v = H(\lambda E)_v, \qquad (\lambda N)_u = H(\lambda G)_u$$

($H = H'$ из-за равенства нормальных кривизн поверхностей). Выполняя дифференцирование и принимая во внимание равенства (2), получим

$$\lambda_v\left(\frac{L}{E} - H\right) = 0, \quad \lambda_u\left(\frac{N}{G} - H\right) = 0.$$

Так как L/E и N/G суть главные кривизны, то выражения в скобках представляют собой полуразности главных кривизн и, следовательно, отличны от нуля. Поэтому $\lambda_u = \lambda_v = 0$, то есть λ постоянно.

Пусть $r = r(u, v)$ — уравнение поверхности F. Рассмотрим поверхность F_λ, заданную векторным уравнением $r = \sqrt{\lambda}\, r(u, v)$. Очевидно, первая и вторая квадратичные формы этой поверхности совпадают с соответствующими формами поверхности F'. По теореме Бонне поверхности F_λ и F' равны, а следовательно, поверхности F и F' подобны.

Так как нормальные кривизны поверхностей F и F' в соответствующих точках и направлениях равны, то коэффициент подобия $\sqrt{\lambda}$ равен единице.

Таким образом, каждая точка P поверхности F_1 не являющаяся шаровой точкой или точкой уплощения, имеет окрестность U_p такую, что соответствующая ей окрестность U'_p точки P' на F' равна U_p. Так как такие точки P на F расположены всюду плотно, то поверхности F и F' равны в целом.

Теорема доказана.

Заметим, что требование отсутствия сферических и плоских областей, содержащееся в условии теоремы, существенно. Область G на сфере ω не определена своими нормальными кривизнами. Действительно, пусть G' образ G на сфере ω при любом регулярном гомеоморфизме. Очевидно, поверхности G и G' в соответствующих точках и направлениях имеют одинаковые нормальные кривизны, но сами поверхности, как правило, не равны.

Доказанной теореме можно дать другую эквивалентную формулировку.

Регулярная поверхность определяется однозначно с точностью до движения и зеркального отражения отношением ее первой и второй квадратных форм.

В таком виде эта теорема несколько обобщает известную теорему Бонне о том, что поверхность определяется однозначно с точностью до движения и зеркального отражения заданием первой и второй квадратичных форм.