ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

М. С. Шун

(Харьков)

Рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$(m+1)\; Z_{m+1}(z) - (2m+1)\cdot z\, Z_m(z) + m Z_{m-1}(z) = 0, \tag{1}$$

общее решение которого имеет вид:

$$Z_m(z) = A(z)\, P_m(z) + B(z)\, Q_m(z),$$

где $P_m(z)$ и $Q_m(z)$ — функции Лежандра 1-го и 2-го рода.

Пусть $m = n + \alpha$, $n = 0;\ 1;\ 2; \ldots \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Положим далее

$$Z_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2n+2\alpha+1}}\, X_n(z).$$

Тогда $X_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{n+1} X_{n+1}(z) - z X_n(z) + a_n X_{n-1}(z) = 0, \tag{1$_1$}$$

$$a_n = \frac{n+\alpha}{\sqrt{(2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha+1)}}\,.$$

Если выбрать решение (1_1), удовлетворяющее условиям:

$$X_0(z) = 1,$$

$$X_1(z) = \frac{\sqrt{(2\alpha+1)(2\alpha+3)}}{\alpha+1}\, z,$$

то после выкладки получаем:

$$X_n(z) = \alpha \sqrt{\frac{2n+2\alpha+1}{2\alpha+1}}\, \{ P_{n+\alpha}(z)\, Q_{\alpha-1}(z) - Q_{n+\alpha}(z)\, P_{\alpha-1}(z) \}. \tag{2}$$

Полиномы $X_n(z)$ образуют полную ортонормированную систему.

Выбирая решение $R_n(z)$ уравнения (1_1), удовлетворяющее условиям

$$R_0(z) = 0,$$

$$R_1(z) = \frac{\sqrt{(2\alpha+1)(2\alpha+3)}}{\alpha+1}\,,$$

получим полиномы 2-го рода:

$$R_n(z) = \sqrt{(2\alpha+1)(2n+2\alpha+1)}\,\{P_\alpha(z)\,Q_{n+\alpha}(z) - Q_\alpha(z)\,P_{n+\alpha}(z)\}. \quad (2_1)$$

Для определения веса полученной системы вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(z)}{X_n(z)} = q(z).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = 0$ для $z \overline{\in} [-1;+1]$, то

$$q(z) = \frac{2\alpha+1}{\alpha}\;\frac{Q_\alpha(z)}{Q_{\alpha-1}(z)}.$$

Для дальнейшего используем представление $Q_\alpha(z)$ в виде гипергеометрической функции [1]:

$$Q_\alpha(z) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\,z^{\alpha+1}}\,F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha}{2}+1,\alpha+\frac{3}{2},z^{-2}\right),$$

где $|z|>1$, $|\arg z|<\pi$.

Тогда

$$q(z) = \frac{1}{z}\;\frac{F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha}{2},\alpha+\frac{3}{2},z^{-2}\right)}{F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\frac{1}{2},z^{-2}\right)}. \quad (3)$$

Очевидно, что $q(z)$ — аналитическая функция в плоскости с разрезом $-1 \leqslant z \leqslant +1$ и принимающая вещественные значения на вещественной оси вне разреза.

Поэтому

$$\lim_{\eta\to+0} q(t+i\eta) = 0, \quad |t|>1. \quad (4)$$

Используя аналитическое продолжение $F(a, b, c, z)$ в область $|z|>1$, получаем [1]:

$$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\frac{1}{2},z^{-2}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot z^\alpha\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\left\{\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2iz}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+1}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},z^2\right)\right\}.$$

Здесь $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

Принимая во внимание соотношения между смежными гипергеометрическими функциями [1], находим:

$$q(z)=\frac{1}{z}-$$

$$-\frac{\dfrac{(\alpha+1)^2}{4z}\dfrac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}\cdot F\left(\frac{\alpha+2}{2},\frac{-\alpha-1}{2},\frac{1}{2},z^2\right)}{\dfrac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\cdot F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+\dfrac{2iz}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+1}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},z^2\right)}$$

$$-\frac{\dfrac{(\alpha+1)^2}{4z}\dfrac{2iz}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+3}{2},-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},z^2\right)}{\dfrac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\cdot F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+\dfrac{2iz}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+1}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},z^2\right)}\qquad(5)$$

$$0<\arg z<\frac{\pi}{2}.$$

Положив здесь $z=t+i\eta$, где $\eta>0$, $0<t<1$, и отделив в (5) мнимую часть, легко найдём после предельного перехода, что

$$\lim_{\eta\to+0}\operatorname{Im}q(t+i\eta)=-\frac{(\alpha+1)^2}{2}\frac{B_0C_0-A_0D_0}{C_0^2+4t^2D_0^2},$$

где

$$A_0=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+2}{2},\frac{-\alpha-1}{2},\frac{1}{2},t^2\right);$$

$$B_0=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+3}{2},-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},t^2\right);$$

$$C_0=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2},\frac{1}{2},t^2\right);$$

$$D_0=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha+1}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},t^2\right).$$

Непосредственный подсчёт даёт:

$$B_0C_0-A_0D_0=\frac{2^{2\alpha}(2\alpha+1)}{\pi\Gamma^2(\alpha+2)}.$$

Отсюда

$$\lim_{\eta\to+0}\operatorname{Im}q(t+i\eta)=-\frac{\pi(2\alpha+1)\Gamma^2(\alpha)}{\alpha^2\,2^{2\alpha-3}}\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)F^2\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2},\frac{1}{2},t^2\right)+4t^2\Gamma^4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)F^2\left(\frac{\alpha+1}{2},1-\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2},t^2\right)}.$$

Легко видеть, что сходимость здесь равномерная. Тогда, используя формулу обращения Стильтьеса—Перрона, получаем: система полиномов $\{X_n(x)\}$ ортогональна на отрезке $[-1; +1]$, то есть

$$\int_{-1}^{+1} X_m(x) X_n(x) p_\alpha(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

где

$$p_\alpha(x) = \frac{(2\alpha+1)\Gamma^2(\alpha)}{\alpha^2 2^{2\alpha-3}} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) F^2\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + 4\Gamma^4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x^2 F^2\left(\frac{\alpha+1}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)}.$$

При $\alpha = 0$ получаем полиномы Лежандра, при $\alpha = 1$ получаем полиномы 2-го рода для полиномов Лежандра, ортогональные относительно веса

$$p(x) = \frac{6}{\pi^2 + \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа.