ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

К ТЕОРИИ СПАРЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. И. Ахиезер

Харьков

Многие краевые задачи математической физики сводятся к нахождению некоторой функции, если известен результат применения к ней одного интегрального оператора на одной части некоторого интервала I и другого интегрального оператора на остальной части этого интервала. Пусть при этом каждый из операторов таков, что знание на всем интервале I результата его применения к функции позволяет найти эту функцию. В таких случаях мы говорим, что задача сводится к спаренным интегральным уравнениям [1]. В качестве простейшего примера можно указать на пару интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda &= f(x) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda &= g(x), \end{aligned} \tag{1}$$

из которых первое должно удовлетворяться на некоторой заданной системе интервалов полуоси $x \geqslant 0$, а второе — на остальной части этой полуоси. К этим тригонометрическим спаренным уравнениям приводятся некоторые смешанные краевые задачи теории логарифмического потенциала для полуплоскости, а один из способов их решения основан на формулах обращения сингулярных интегралов. Если от полуплоскости перейти к полупространству, то при наличии осевой симметрии некоторые задачи теории потенциала приводят к спаренным уравнениям с бесселевыми функциями вида

$$\int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda r) \, d\lambda = f(r)$$

$$\int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = g(r).$$

Эта система рассматривалась в ряде работ [2] для случая, когда одно из уравнений должно иметь место на конечном интервале $(0, a)$, а

---

[1] В литературе приняты также термины: дуальные интегральные уравнения и парные интегральные уравнения.

[2] [5], [14], [10]

второе—на полуоси (a, ∞). При тех же условиях изучалась [1] более общая система

$$\int_0^\infty S(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, d\lambda = f(r)$$
$$\int_0^\infty S(\lambda) J_\nu(\lambda r) \lambda^\alpha d\lambda = g(r).$$

Здесь следует отметить, что авторы перечисленных работ занимались лишь формальным решением этих уравнений и применением полученных результатов к конкретным физическим задачам.

Настоящая статья, в которой дается подробное изложение, а также дальнейшее развитие результатов заметки [1], посвящена спаренным уравнениям в некотором отношении более общего вида, а именно

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty S(\lambda) J_\nu(\lambda r) (\lambda^2 - k^2)^\beta\, d\lambda = f(r) \qquad (0 < r < a) \\ &\int_0^\infty S(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, d\lambda = g(r) \qquad (r > a), \end{aligned} \tag{2}$$

где целое число $\nu \geqslant 0$, а также числа k $(k \geqslant 0)$ и $\beta\,(0 < \beta^2 < 1)$ заданы. Рассмотрение этих уравнений вызвано не простым стремлением к обобщению, а тем, что к уравнениям (2), правда, при частных значениях β, приводят многие краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

1. Формулы обращения Н. Я. Сонина. В дальнейшем нам понадобятся некоторые формулы обращения, указанные Н. Я. Сониным[2] и являющиеся частным случаем его общих формул обращения. Выражаемый этими формулами факт состоит в следующем.

Пусть $p > 0$, $q > 0$ и $p + q = 1$, а k — любое комплексное число. Пусть далее $H(x)\,(0 < x < l)\,(l \leqslant \infty)$ — заданная непрерывная функция. Утверждается, что уравнение

$$H(x) = \int_0^x F(t) \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2 - t^2})\, dt \tag{3}$$
$$(0 < x < l)$$

имеет непрерывное решение $F(x)$ в том и только том случае, если функция

$$\int_0^x H(t)\, t \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{k}\right)^{-q} J_{-q}(k\sqrt{x^2 - t^2})\, dt$$

непрерывно дифференцируема, и в этом случае

$$F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x H(t)\, t \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{k}\right)^{-q} J_{-q}(k\sqrt{x^2 - t^2})\, dt \tag{3$_1$}$$
$$(0 < x < l).$$

Иногда вместо уравнения (3) приходится рассматривать уравнение

$$\Psi(x) = \int_x^l \Phi(t) \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{t^2 - x^2})\, dt, \tag{4}$$

[1] [7], [15], [16], [6] [9].
[2] [12], стр. 148.

где $\Psi(x)$ — заданная непрерывная функция в интервале $0 < x < l$ ($l \leqslant \infty$). В этом случае решение дается формулой

$$\Phi(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^l \Psi(t)\, t \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{k}\right)^{-q} J_{-q}(k\sqrt{t^2 - x^2})\, dt \tag{4_1}$$

Доказательство сформулированного предложения можно легко получить на основе общей теории уравнения [1]

$$\int_0^x \frac{G(x, s)}{(x-s)^p}\varphi(s)\, ds = f(x),$$

где $G(x, s)$ — непрерывная функция, не обращающаяся тождественно в нуль при $s = x$. При этом нужно еще воспользоваться так называемым вторым определенным интегралом Н. Я. Сонина [2].

Заметим, что при $k = 0$ уравнения (3) и (4) переходят в классические уравнения Абеля, а (3_1) и (4_1) — в известные формулы, служащие для решения уравнений Абеля.

2. Обобщение теоремы Винера — Пэйли. Из других вспомогательных средств нам будет нужна теорема, которая является обобщением одной теоремы Винера—Пэйли и состоит в следующем:

Функция $f(x)$ $(0 < x < \infty)$ допускает представление

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{xt}\, J_{\nu - 1/2}(xt)\, h(t)\, dt, \tag{5}$$

где $\nu \geqslant 0$ и $h(t) \in L^2$, в том и только том случае, если

1) $f(x) \in L^2$

и

2) $f(x) = x^\nu g(x)$, *где $g(x)$ — четная целая трансцендентная функция степени $\leqslant 1$.*

При $\nu = 0$ и $\nu = 1$ эта теорема представляет частные случаи теоремы Винера—Пэйли. Для любого натурального ν она была установлена в кандидатской диссертации В. В. Сташевской [3], которая использовала для доказательства вырождение функций Бесселя, имеющее место при целом ν.

Мы докажем здесь теорему во всей общности. В одну сторону доказательство не представляет никакого труда. Поэтому нужно лишь доказать, что при условиях 1), 2) функция $f(x)$ допускает представле-

---

[1] Э. Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. II, ГТТИ, 1934, стр. 23—25.

[2] Н. Я. Сонин [12 стр. 62], а также Г. Н. Ватсон [18, стр. 410]. Речь идет об интеграле

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu(z \sin\theta)\, J_\nu(\zeta\cos\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{\nu+1}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{z^\mu \zeta^\nu J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{z^2+\zeta^2})}{(\sqrt{z^2+\zeta^2})^{\mu+\nu+1}} \qquad (R\mu > -1,\ R\nu > -1),$$

[3] Краткое извлечение из этой диссертации опубликовано в заметке [13].

ние (5). При этом достаточно рассмотреть только такие функции $f(x)$, для которых кроме 1), 2) выполняется еще условие [1].

3) $f(x) \in L^1$, $x^\nu [x^{-\nu} f(x)]' \in L^2$ и L^1.

Это предположение мы и сделаем. Далее, поскольку утверждение наверно справедливо при $\nu = 0$, достаточно доказать, что справедливость нашего утверждения при $\nu = \lambda + \alpha$ для любого α из интервала $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ есть следствие справедливости его при одном лишь значении $\lambda (\geqslant 0)$.

Итак, пусть утверждение справедливо для $\nu = \lambda (\geqslant 0)$ и пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3) при $\nu = \lambda + \alpha$, где α — какое-нибудь число из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Возьмем представления

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt}\, J_{\lambda+\alpha-1/2}(xt)\, h(t)\, dt \tag{6}$$

$$x^\lambda g(x) = \int_0^1 \sqrt{xt}\, J_{\lambda-1/2}(xt)\, \varphi(t)\, dt, \tag{6_1}$$

первое из которых с функцией $h(t) \in L^2$ есть представление $f(x)$ по теореме Ганкеля, а второе, также с функцией $\varphi(t) \in L^2$, вытекает из предположения. При этом в силу наших условий 1) и 3) $(1+t)\, h(t)$ есть ограниченная функция, принадлежащая L^2. Действительно, обращая (6), мы получаем

$$h(t) = \int_0^\infty \sqrt{xt}\, J_{\nu-1/2}(xt) f(x)\, dx = \int_0^\infty \sqrt{xt}\, x^\nu J_{\nu-1/2}(xt)\, g(x)\, dx.$$

Отсюда видно, что $h(t)$ — ограниченная функция. Вместе с тем абсолютно сходящееся представление функции $h(t)$ можно записать в виде

$$h(t) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \sqrt{xt}\, x^\nu J_{\nu-1/2}(xt)\, g(x)\, dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left\{ g(A)\, A^{\nu+1} \frac{J_{\nu+1/2}(At)}{\sqrt{At}} - \frac{1}{t} \int_0^A g'(x)\, x^\nu \sqrt{xt}\, J_{\nu+1/2}(xt)\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{t} \int_0^\infty \sqrt{xt}\, J_{\nu+1/2}(xt)\, x^\nu g'(x)\, dx,$$

откуда в силу 3) следует, что $t h(t)$ — ограниченная функция из L^2.

[1] Действительно, если $f(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то функция

$$f_\delta(x) = f(x) \left(\frac{\sin \delta x}{\delta x} \right)^{[\nu]+2}$$

при любом $\delta > 0$ удовлетворяет также и условию 3). А с другой стороны, $f_\delta(x)$ стремится к $f(x)$ при $\delta \to 0$ как в каждой точке $x \geqslant 0$, так и в метрике L^2.

Возьмем произвольное $s>1$ и напишем легко проверяемое тождество

$$\frac{s^{\lambda+1/2}}{x^{1/2}} J_{\lambda+1/2}(xs)=\int_0^s \sqrt{xt}\, t^{\lambda} J_{\lambda-1/2}(xt)\, dt.$$

Сопоставляя его с равенством (6_1), найдем в силу равенства Парсеваля, что

$$\int_0^1 \varphi(t)\, t^{\lambda}\, dt = s^{\lambda+1/2}\int_0^\infty x^{\lambda-1/2} J_{\lambda+1/2}(xs)\, g(x)\, dx =$$

$$= s^{\lambda+1/2}\int_0^\infty J_{\lambda+1/2}(xs)\frac{f(x)}{x^{\alpha+1/2}}\, dx$$

или, в силу (6),

$$\int_0^1 \varphi(t)\, t^{\lambda}\, dt = s^{\lambda+1/2}\int_0^\infty J_{\lambda+1/2}(xs)\frac{dx}{x^{\alpha}}\int_0^\infty \sqrt{t}\, J_{\lambda+\alpha-1/2}(xt)\, h(t)\, dt. \tag{7}$$

Так как

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\, |h(t)|\, dt\int_0^\infty |J_{\lambda+1/2}(xs)|\cdot|J_{\lambda+\alpha-1/2}(xt)|\frac{dx}{x^{\alpha}}<\infty,$$

то равенство (7) можно переписать в виде

$$\int_0^1 \varphi(t)\, t^{\lambda} dt = \int_0^\infty \sqrt{t}\, h(t)\, \omega(t, s)\, dt, \tag{7_1}$$

где

$$\omega(t, s) = s^{\lambda+1/2}\int_0^\infty J_{\lambda+1/2}(xs)\, J_{\lambda+\alpha-1/2}(xt)\frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Но

$$\frac{\partial\omega(t, s)}{\partial s} = s^{\lambda+1/2}\int_0^\infty J_{\lambda-1/2}(xs)\, J_{\lambda+\alpha-1/2}(xt)\, x^{1-\alpha}\, dx =$$

$$=\begin{cases} 0 & (t<s) \\ \dfrac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,\dfrac{s^{2\lambda+1}}{t^{\lambda+\alpha-1/2}(t^2-s^2)^{1-\alpha}} & (t>s).\end{cases}$$

А так как

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\, |h(t)|\cdot\left|\frac{\partial\omega(t, s)}{\partial s}\right| dt =$$

$$=\int_s^\infty \sqrt{t}\, |h(t)|\,\frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{s^{2\lambda+1}}{t^{\lambda+\alpha-1/2}(t^2-s^2)^{1-\alpha}}\, dt <$$

$$< C\cdot s^{2\lambda+1}\int_s^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+\alpha}(t^2-s^2)^{1-\alpha}}<\infty,$$

то в (7_1) можно дифференцировать по s, и это дает

$$\int_s^\infty \sqrt{t}\, h(t) \frac{dt}{t^{\lambda+\alpha-1/2}(t^2-s^2)^{1-\alpha}}=0 \qquad (s>1).$$

Отсюда по формуле обращения Абеля

$$h(t)=0 \qquad\qquad (t>1),$$

и утверждение доказано.

3. Постановка задач. Формулировка типичного результата. Теперь мы можем перейти к нашей задаче — изучению спареннных интегральных уравнений с цилиндрическими функциями. Простые соображения показывают, что заданную функцию $g(r)$ во втором из уравнений (2) можно считать равной нулю. Действительно, в противном случае, продолжив ее на интервал $(0, a)$ каким-нибудь способом, мы сможем найти по формуле обращения Ганкеля функцию $S_0(\lambda)$, для которой

$$\int_0^\infty S_0(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, d\lambda = g(r) \qquad\qquad (r>a).$$

Но тогда, полагая $S(\lambda)-S_0(\lambda)=S^*(\lambda)$, уы придем к спаренным уравнениям

$$\int_0^\infty S^*(\lambda) J_\nu(\lambda r)(\lambda^2-k^2)^\beta\, d\lambda = f^*(r) \qquad\qquad (0<r<a)$$

$$\int_0^\infty S^*(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad\qquad (r>a),$$

где

$$f^*(r)=f(r)-\int_0^\infty S_0(\lambda) J_\nu(\lambda r)(\lambda^2-k^2)^\beta\, d\lambda.$$

Правда, приведенные рассмотрения носят чисто формальный характер, но нетрудно указать достаточные условия для функции $g(r)$, при которых они полностью обоснованы. Поэтому мы примем в дальнейшем, что $g(r)=0$.

Подробно мы рассмотрим случай $\nu=0$, а затем коротко покажем, как к этому случаю сводится случай любого целого $\nu>0$. Что касается параметра β, то, как выше указано, он удовлетворяет неравенству

$$0<\beta^2<1.$$

Целесообразно рассмотреть случаи $\beta>0$ и $\beta<0$ отдельно. Соответствующие, несколько более общие, чем (2), системы запишем в виде

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda = 0 \qquad\qquad (r>a)\\ &\int_0^k H(\lambda) C(\lambda) J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda + \int_k^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} = f(r) \; (0<r<a),\end{aligned}\right.$$

$$
(B)\begin{cases} \int\limits_0^\infty C(\lambda)\,J_0(\lambda r)\dfrac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p}=0 & (r>a)\\ \int\limits_0^k H(\lambda)\,C(\lambda)J_0(\lambda r)\,\lambda d\lambda+\int\limits_k^\infty C(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,\lambda d\lambda=f(r) & (0<r<a),\end{cases}
$$

где $p\,(0<p<1)$, $k\geqslant 0$, а также непрерывная функция $f(r)$ и суммируемая функция $H(\lambda)$ заданы.

Этими уравнениями мы и будем главным образом заниматься.

В тех случаях, когда подлежащая интегрированию функция не принадлежит пространству L, мы будем интеграл понимать как l. i. m., если такой подход будет оправдан. Например, так приходится рассматривать интеграл в уравнении (A_1)[1], если о функции $C(\lambda)$ известно лишь, что $\sqrt{\lambda}\,C(\lambda)\in L^2$. В этом случае, на основании теории преобразования Ганкеля, уравнение (A_1) можно заменить на

$$
(A_1') \qquad \frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty C(\lambda)\,r J_1(\lambda r)\,d\lambda=0 \qquad (r>a).
$$

Для примера сформулируем один из получаемых далее результатов.

Если система (A) *при* $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ *имеет решение* $C(\lambda)$, *для которого* $\sqrt{\lambda}\,C(\lambda)\in L^2$, *то оно представимо в виде*

$$
C(\lambda)=\int\limits_0^a\sqrt{s}\,h(s)\,(\sqrt{\lambda^2-k^2})^p J_{-p}\,(s\sqrt{\lambda^2-k^2})\,ds, \tag{8}
$$

где функция $h(s)\,(0<s<a)$ *принадлежит* L^2 *и удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма*

$$
h(x)+\int\limits_0^a K(x,\ s)\,h(s)\,ds=\varphi(x) \tag{9}
$$

с ядром

$$
K(x,s)=\sqrt{xs}\int\limits_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\,I_{-p}(xt)\,I_{-p}(st)\,t^{1+2p}\,dt
$$

и правой частью

$$
\varphi(x)=x^{p-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p}J_{-p}\,(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.
$$

Обратно, если $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ *и если интегральное уравнение* (9) *обладает решением* $h(s)$, *для которого функция*

$$
s^{1/2-p}\,\frac{d}{ds}\,[s^{p-1/2}h(s)] \tag{10}
$$

---

[1] Мы обозначаем так первое из уравнений (A).

имеет смысл и кусочно-непрерывна, то функция $C(\lambda)$, *определяемая формулой* (8), *является решением системы* (A_1'), (A_2) *и удовлетворяет условию* $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$, *когда* $0 < p < \frac{1}{2}$, *и условию*

$$\int_0^\infty \lambda \mid C(\lambda) \mid^q d\lambda < \infty$$

для любого $q > 2$, *когда* $p = \frac{1}{2}$.

К этому нужно добавить, что требование о кусочной непрерывности функции (10) наверно будет выполнено, если является кусочно непрерывной функция

$$x^{1/2-p} \frac{d}{dx} \left\{ x^{2p-1} \frac{d}{dx} \int_0^x r f(r) \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{ik} \right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2 - r^2})\, dr \right\},$$

а это последнее условие наверно выполняется, если $f(r) = A + Br^2 g(r)$, где A и B — постоянные, а $g(r)$ имеет кусочно-непрерывную вторую производную.

4. Изучение системы (A) при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$. Займемся доказательством предложений, сформулированных в конце предыдущего п°.

Итак, пусть известно, что система (A) имеет решение $C(\lambda)$, для которого $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$. Из равенства (A_1) в силу формулы обращения Ганкеля следует, что

$$C(\lambda) = \int_0^a \sqrt{s}\, \omega(s) J_0(\lambda s)\, ds,$$

где $\omega(s) \in L^2$. Поэтому $C(\lambda)$ является четной целой трансцендентной функцией степени $\leqslant a$. Тем же свойством, очевидно, обладает и функция $C(\sqrt{k^2 + \lambda^2})$. А так как

$$\int_0^\infty \lambda^{1-2p} \left| C(\sqrt{k^2 + \lambda^2}) \right|^2 d\lambda = \int_k^\infty \mid C(t) \mid^2 \frac{tdt}{(t^2 - k^2)^p} < \infty,$$

то $\lambda^{1/2-p} C(\sqrt{k^2 + \lambda^2}) \in L^2$ и, следовательно, по обобщенной теореме Винер—Пэйли

$$C(\sqrt{k^2 + \lambda^2}) = \int_0^a \sqrt{s}\, h(s) \lambda^p J_{-p}(\lambda s)\, ds,$$

где $h(s) \in L^2$. Наша задача сводится к нахождению функции $h(s)$. Мы покажем, что для этой функции получается уравнение Фредгольма (9).

С этой целью умножим равенство (A_2) на

$$r \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{ik} \right)^{-p} J_{-p}\ (ik\sqrt{x^2 - r^2})$$

и проинтегрируем по r от 0 до $x\, (0 < x < a)$. Используя второй определенный интеграл Н. Я. Сонина, найдем, что

$$\int_0^x J_0(\lambda r) J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2}) \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} r dr = x^{1-p} \frac{J_{1-p}(x\sqrt{\lambda^2-k^2})}{(\sqrt{\lambda^2-k^2})^{1-p}}.$$

Поэтому уравнение (A_2) принимает вид

$$x^{1-p}\int_0^k H(\lambda) C(\lambda) \frac{J_{1-p}(x\sqrt{\lambda^2-k^2})}{(\sqrt{\lambda^2-k^2})^{1-p}} \lambda d\lambda +$$

$$+ x^{1-p}\int_k^\infty C(\lambda) \frac{J_{1-p}(x\sqrt{\lambda^2-k^2})}{(\sqrt{\lambda^2-k^2})^{1+p}} \lambda d\lambda =$$

$$= \int_0^x r f(r) \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\, dr$$

или

$$x^{1-p}\int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\, C(\sqrt{k^2-t^2}) \frac{J_{1-p}(ixt)}{(it)^{1-p}}\, t dt +$$

$$+ x^{1-p}\int_0^\infty C(\sqrt{k^2+t^2}) \frac{J_{1-p}(xt)}{t^p}\, dt =$$

$$= \int_0^x r f(r) \left(\sqrt{\frac{x^2-r^2}{ik}}\right)^{-p} J_{-p}\; ik\sqrt{x^2-r^2})\, dr. \quad (12)$$

Мы должны лишь выяснить, при каких условиях справедливы все выполненные нами операции.

Относительно функции $f(r)$ здесь достаточно предположить непрерывность или даже ограниченность. Однако, имея в виду дальнейшее, мы примем, что почти всюду существует и принадлежит $L^2(0, a)$ производная

$$\frac{d}{dx}\int_0^x r f(r) \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\, dr.$$

Мы должны прежде всего оправдать равенство

$$\int_0^x r \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\, dr \int_k^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} =$$

$$= \int_k^\infty C(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} \int_0^x J_0(\lambda r)\, r \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\, dr. \quad (13)$$

Мы покажем, что это равенство справедливо и притом не только при сделанных предположениях, но и при более широких, а именно, оно справедливо при $0 \leqslant p < \frac{1}{2}$, если, $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$, а также при $\frac{1}{4} < p < 1$, если

$$\int_0^\infty \lambda \mid C(\lambda) \mid^q d\lambda < \infty,$$

где q либо равно 2, либо больше чем 2, но достаточно близко к 2 (для краткости скажем: при $q = 2 + \varepsilon$).

Если $0 \leqslant p < \frac{1}{2}$ и $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$, то наше равенство является следствием равенства Парсеваля для преобразования Ганкеля. Действительно, возьмем две функции из L^2

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda}\, C(\lambda)}{(\lambda^2 - k^2)^p} & (k < \lambda < \infty) \\ 0 & (0 < \lambda < k) \end{cases}$$

$$\psi(r) = \begin{cases} \sqrt{r}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}\left(ik\sqrt{x^2 - r^2}\right) & (0 < r < x). \\ 0 & (x < r < \infty) \end{cases}$$

Пусть

$$\varphi_1(r) = \int_k^\infty \sqrt{\lambda r}\, \frac{\sqrt{\lambda}\, C(\lambda)}{(\lambda^2 - k^2)^p} J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (r > 0)$$

$$\psi_1(\lambda) = \int_0^x \sqrt{\lambda r}\, \sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}\left(ik\sqrt{x^2 - r^2}\right) J_0(\lambda r)\, dr$$

$$(\lambda > 0).$$

Тогда по равенству Парсеваля

$$\int_0^x \psi(r)\, \varphi_1(r)\, dr = \int_k^\infty \varphi(\lambda)\, \psi_1(\lambda)\, d\lambda,$$

но это и есть нужное нам равенство (13).

Допустим теперь, что $\frac{1}{4} < p < 1$ и что

$$\int_0^\infty \lambda \mid C(\lambda) \mid^q d\lambda < \infty$$

при $q = 2 + \varepsilon$.

В таком случае

$$\int_k^\infty \mid C(\lambda) \mid \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{(\lambda^2 - k^2)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \mid C(\lambda) \mid \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{(\lambda^2 - k^2)^p} +$$

$$+ \left\{ \int_{k+1}^\infty \mid C(\lambda) \mid^q \lambda\, d\lambda \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{k+1}^\infty \left[\frac{\lambda^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}}{(\lambda^2 - k^2)^p} \right]^{\frac{q}{q-1}} d\lambda \right\}^{\frac{q-1}{q}},$$

где правая часть конечна при $q=2+\varepsilon$. Поэтому

$$\int\limits_{k}^{\infty} |C(\lambda)| \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} \int\limits_{0}^{x} \left| J_0(\lambda r)\cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2}) \right| . rdr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{\infty} |C(\lambda)| \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} \int\limits_{0}^{x} \frac{A\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda}} \frac{dr}{(x^2-r^2)^p} =$$

$$= A(x) \int\limits_{k}^{\infty} |C(\lambda)| \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} < \infty.$$

Следовательно, при рассматриваемых здесь условиях справедливость равенства (13) вытекает из теоремы Фубини.

Что касается изменения порядка интегрирования, приведшего к первому члену равенства (12), то оно наверно оправдано, так как по условию

$$\int\limits_{0}^{k} |H(\lambda)|\cdot \lambda d\lambda < \infty.$$

Итак, равенство (12) доказано. Теперь подставим в него вместо функции $C(\sqrt{k^2+z^2})$ ее выражение (11). Второй член левой части будет иметь вид

$$\int\limits_{0}^{\infty} J_{1-p}(xt) \frac{dt}{t^p} \int\limits_{0}^{a} \sqrt{s}\, h(s) t^p J_{-p}(ts)\, ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} J_{1-p}(xt) \frac{dt}{\sqrt{t}} \int\limits_{0}^{a} \sqrt{st}\; h(s) J_{-p}(ts)\, ds.$$

Докажем, что здесь можно изменить порядок интегрирования. Для этого положим

$$h_1(t) = \int\limits_{0}^{a} \sqrt{st}\; h(s) J_{-p}(ts)\, ds$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} J_{1-p}(xt),$$

где $x>0$ фиксировано. Обе функции принадлежат L^2. Поэтому в силу равенства Парсеваля

$$\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(t) h_1(t)\, dt = \int\limits_{0}^{a} \varphi_1(s) h(s)\, ds,$$

где

$$\varphi_1(s) = \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{st}\; J_{-p}(st) \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{s} J_{-p}(st) J_{1-p}(xt)\, dt.$$

Изменение порядка интегрирования таким образом доказано

Мы можем теперь воспользоваться равенством

$$\int_0^\infty J_{-p}(st)J_{1-p}(xt)\,dt = \begin{cases} 0 & (0 < x < s) \\ \dfrac{s^{-p}}{x^{1-p}} & (x > s > 0). \end{cases}$$

В силу этого равенства уравнение (12) примет вид

$$\int_0^a \sqrt{s}\,h(s)\,ds \int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\,x^{1-p}\,\frac{J_{1-p}(ist)}{(it)^{-p}}\,\frac{J_{1-p}(ixt)}{(it)^{1-p}}\,tdt +$$

$$+\int_0^x \sqrt{s}\,h(s)\,\frac{ds}{s^p} = \int_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.$$

Дифференцируя по x, найдем уравнение

$$x^{1/2-p}\,h(x) + \int_0^a \sqrt{s}\,h(s)\,ds \int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\,x^{1-p}\,J_{-p}(ixt)\,J_{-p}(ist)\,\frac{tdt}{(it)^{-2p}} =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr,$$

откуда, полагая

$$\varphi(x) = x^{p-1/2}\,\frac{d}{dx}\int_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.$$

$$K(x,s) = \sqrt{xs}\int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\,I_{-p}(xt)\,I_{-p}(st)\,t^{1+2p}\,dt,$$

и получим уравнение Фредгольма

$$h(x) + \int_0^a K(x,s)\,h(s)\,ds = \varphi(x)$$

для функции $h(x)$.

Таким образом, первое предложение n° 4 доказано.

Переходя к доказательству второго предложения, примем, что уравнение Фредгольма (9) имеет решение $h(s)$, для которого функция $s^{p-1/2}\,h(s)$ дифференцируема, а произведение

$$s^{1/2-p}\frac{d}{ds}\left[s^{p-1/2}\,h(s)\right] = h^*(s)$$

кусочно непрерывно. Если $p = \frac{1}{2}$, то это требование сводится к тому что $h'(s)$ кусочно-непрерывна. С помощью функции $h(s)$ находим по формуле (11) функцию $C(\sqrt{k^2+\lambda^2})$. Затем берем функцию

$$\lambda^{1-p} C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) = \lambda \int_0^a [s^{p-1/2} h(s)] s^{1-p} J_{-p}(\lambda s)\, ds =$$

$$= \int_0^a [s^{p-1/2} h(s)] \frac{d}{ds} \{s^{1-p} J_{1-p}(\lambda s)\}\, ds.$$

Интегрируя по частям находим, что

$$\lambda^{1-p} C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) =$$

$$= \sqrt{a}\, h(a) J_{1-p}(\lambda a) - \int_0^a \sqrt{s}\, h^*(s) J_{1-p}(\lambda s)\, ds.$$

Отсюда при $0 < p < \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\lambda}\, C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) =$$

$$= \sqrt{a}\, h(a) \frac{J_{1-p}(\lambda a)}{\lambda^{1/2-p}} - \int_0^a \sqrt{s}\, h^*(s) \frac{J_{1-p}(\lambda s)}{\lambda^{1/2-p}}\, ds. \qquad (14)$$

Правая часть этого равенства принадлежит L^2. Поэтому $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$. Если $p = \frac{1}{2}$, то равенство (14) принимает вид

$$C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h(a) \frac{\sin \lambda a}{\lambda} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h^*(s) \frac{\sin \lambda s}{\lambda}\, ds, \qquad (14_1),$$

откуда видно, что в этом случае при любом $q > 2$

$$\int_0^\infty |C(\lambda)|^q \lambda d\lambda < \infty.$$

Теперь мы должны доказать, что функция $C(\lambda)$, определяемая равенством (14), удовлетворяет уравнениям (A).

Из представления (14) вытекает, что $C(\lambda)$—четная целая трансцендентная функция степени $\leqslant a$. При $0 < p < \frac{1}{2}$ произведение $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda)$ принадлежит L^2. Поэтому при $0 < p < \frac{1}{2}$ в силу обобщенной теоремы Винера—Пэйли

$$C(\lambda) = \int_0^a \sqrt{s}\, \omega(s) J_0(\lambda s)\, ds,$$

где $\omega(s) \in L^2$. Но это означает, что $C(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (A_1).

Если $p = \frac{1}{2}$, то из представления (14_1) следует, что

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, h(a) \frac{\sin a\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h^*(s) \frac{\sin s\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, ds.$$

Но из поведения функции

$$\lambda\left\{\frac{\sin t\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}-\frac{\sin t\lambda}{\lambda}\right\} \qquad (t>0)$$

при больших $|\lambda|$ вытекает, что эта нечетная целая функция степени $\leq t$ принадлежит L^2 на вещественной оси. Следовательно, существует функция $G(t, \tau)$ $(0<\tau<t)$, принадлежащая L^2 по τ и такая, что

$$\frac{\sin t\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}=\frac{\sin t\lambda}{\lambda}+\int_0^t G(t, \tau)\frac{\sin\tau\lambda}{\lambda}d\tau.$$

Поэтому представление (14_1) примет вид

$$C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h(a)\frac{\sin\lambda a}{\lambda}+\int_0^a\Omega(s)\frac{\sin\lambda s}{\lambda}ds,$$

где $\Omega(s)\in L^2$. Но эта функция наверно удовлетворяет уравнению (A_1'). Действительно, при $r>a$

$$\frac{d}{dr}\int_0^\infty C(\lambda)\,r J_1(\lambda r)\,d\lambda=$$

$$=\frac{d}{dr}r\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h(a)\int_0^\infty J_1(\lambda r)\,\frac{\sin\lambda a}{\lambda}d\lambda+\right.$$

$$\left.+\int_0^a\Omega(s)ds\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\sin\lambda s}{\lambda}d\lambda\right\}=$$

$$=\frac{d}{dr}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,ah(a)+\int_0^a\Omega(s)\,s\,ds\right\}=0.$$

Чтобы показать, что наша функция $C(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (A_2), подставим ее в левую часть уравнения (A_2). Мы получим некоторую функцию $f^*(r)$. Повторяя затем построения, которыми мы пользовались при доказательстве первого предложения, мы получим, что

$$h(x)+\int_0^a K(x, s)\,h(s)\,ds=\varphi^*(x),$$

где

$$\varphi^*(x)=x^{p-1/2}\frac{d}{dx}\int_0^x rf^*(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p}J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.$$

Сравнивая это тождество с (9), получим равенство

$$\frac{d}{dx}\int_0^x rf^*(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p}J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p}J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.$$

Отсюда с помощью формул обращения Н. Я. Сонина мы и заключаем, что

$$f^*(r)=f(r).$$

5. Изучение системы (A) при $\frac{1}{2}<p<1$. Случай системы (A) при $\frac{1}{2}<p<1$ представляет некоторые особенности. Действительно, если $C(\lambda)$ есть решение системы (A) в этом случае и если $\sqrt{\lambda}C(\lambda)\in L^2$, то, как и выше

$$C(\lambda)=\int_0^a \sqrt{s}\,\omega(s)\,J_0(\lambda s)\,ds, \tag{15}$$

где $\omega(s)\in L^2$, то есть $C(\lambda)$ является четной целой трансцендентной функцией степени $\leqslant a$. Однако теперь мы не можем утверждать, что справедливо представление [1]

$$C(\lambda)=\int_0^a \psi(s)\,\frac{J_{-p}(s\sqrt{\lambda^2-k^2})}{(\sqrt{\lambda^2-k^2})^{-p}}\,ds,$$

так как такое представление не может быть получено с помощью нашего обобщения теоремы Винера—Пэйли.

Переходя к рассмотрению случая $\frac{1}{2}<p<1$, заметим прежде всего, что при любом $\alpha>\frac{1}{2}$ отношение

$$\frac{J_\alpha(a\lambda)}{\lambda^\alpha}$$

представляет четную целую трансцендентную функцию степени $\leqslant a$, которая после умножения на $\sqrt{\lambda}$ принадлежит L^2.

Пусть $C(\lambda)$ есть решение системы (A) и пусть $\sqrt{\lambda}\,C(\lambda)\in L^2$. В таком случае можно положить

$$C(\sqrt{\lambda^2+k^2})=A\,\frac{J_\alpha(a\lambda)}{\lambda^\alpha}+D(\sqrt{\lambda^2+k^2}),$$

где $\alpha>\frac{1}{2}$ как-то зафиксировано, а константа A выбрана так, что $D(k)=0$.

Подставляя выражение $C(\lambda)$ через $D(\lambda)$ в уравнение (A_2), мы получим для $D(\lambda)$ некоторое уравнение, которое будет отличаться от (A_2) лишь правой частью. Поэтому мы можем предположить с самого начала, что $C(k)=0$.

Из представления (15) следует, что

$$C_1(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}C(\sqrt{k^2+\lambda^2})$$

[1] Впрочем, искать в таком виде решение не возбраняется, и при определенных условиях такой вид решения оказывается правильным. Так сделано в заметке [1], где функция $H(\lambda)$ есть тождественный нуль. Пользуюсь случаем, чтобы отметить опечатку в этой заметке: на стр. 335 в формуле для $g(x)$ при $p>0$ вместо $g(x)$ должно быть $-g(x)$.

есть нечетная целая трансцендентная функция степени $\leqslant a$, для которой

$$\int_0^\infty \lambda |C_1(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Поэтому наверно справедливо представление

$$C_1(\lambda) = \int_0^a \sqrt{s}\, h(s) \frac{J_{1-p}(\lambda s)}{\lambda^{-p}} ds,$$

где $h(s) \in L^2$ во всяком случае, но кроме того должна быть такой, чтобы $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$. С помощью интегрирования найдем, что

$$C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) = \int_0^a \frac{h(s)}{s^{1/2+p}} \left\{ \frac{2^p}{\Gamma(1-p)} - \frac{J_{-p}(\lambda s)}{(\lambda s)^{-p}} \right\} ds. \tag{16}$$

Теперь произведем интегрирование по частям, полагая

$$\psi(s) = s^{p-1/2} \int_s^a \frac{h(t)}{t^{1/2+p}}\, dt.$$

Таким путем мы находим, что

$$C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) = \int_0^a \sqrt{s}\, \psi(s) \lambda^{1+p} J_{1-p}(\lambda s)\, ds, \tag{16_1}$$

где $\sqrt{s}\,\psi(s)$ во всяком случае ограничено.

Подставим теперь выражение для $C(\sqrt{k^2+\lambda^2})$ в равенство (12). При этом в первый член подставим (16_1), а во второй — (16). Мы получим тогда равенство

$$x^{1-p} \int_0^a \sqrt{s}\, \psi(s)\, ds \int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2}) \frac{J_{1-p}(ixt)}{(it)^{1-p}} (it)^{1+p} J_{1-p}(ist)\, t dt +$$

$$+ x^{1-p} \int_0^a \frac{h(s)}{s^{1/2+p}}\, ds \int_0^\infty J_{1-p}(xt) \left\{ \frac{2^p}{\Gamma(1-p)} - \frac{J_{-p}(st)}{(st)^{-p}} \right\} \frac{dt}{t^p} =$$

$$= \int_0^x r f(r) \left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik} \right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\, dr. \tag{17}$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{J_{1-p}(xt)}{t^p} dt = x^{p-1} \int_0^\infty \frac{J_{1-p}(u)}{u^p} du = x^{p-1} \frac{\Gamma(1-p)}{2^p},$$

получаем

$$x^{1-p} \int_0^a \frac{h(s)}{s^{1/2+p}}\, ds \int_0^\infty \frac{J_{1-p}(xt)}{t^p} \left\{ \frac{2^p}{\Gamma(1-p)} - \frac{J_{-p}(st)}{(st)^{-p}} \right\} dt =$$

$$= \int_x^a \frac{h(s)}{s^{1/2+p}}\, ds = x^{1/2-p}\, \psi(x).$$

Таким образом, уравнение (17) принимает вид

$$\int_0^a \psi(s)\,ds \int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\, t\cdot (it)^{2p} \sqrt{xs}\, J_{1-p}(ixt)\, J_{1-p}(ist)\,dt +$$

$$+\psi(x) = x^{p-1/2}\int_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.$$

Итак, мы пришли к следующему результату.

Если система (*A*) *при* $\frac{1}{2}<p<1$ *имеет решение* $C(\lambda)$, *для которого*

$$C(k)=0,\quad \sqrt{\lambda}C(\lambda)\in L^2,$$

то

$$C(\lambda)=\int_0^a \sqrt{s}\,\psi(s)\,(\sqrt{\lambda^2-k^2})^{1+p} J_{1-p}(s\sqrt{\lambda^2-k^2})\,ds,$$

где $\psi(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\psi(x)-\int_0^a L(x,s)\,\psi(s)\,ds=\varphi(x),$$

в котором

$$L(x,s)=\sqrt{xs}\int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\,t^{1+2p} I_{1-p}(xt)\, I_{1-p}(st)\,dt$$

и

$$\varphi(x)=x^{p-1/2}\int_0^x rf(r)\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{x^2-r^2})\,dr.$$

Этот результат аналогичен первому предложению, сформулированному в конце п° 4. На формулировке и доказательстве соответствующего второго предложения мы не остановимся.

6. Изучение системы (*B*). При рассмотрении системы (*B*) нет необходимости различать два случая в зависимости от того, какое из неравенств $0<p\leqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<p<1$ имеет место.

Допустим, что система (*B*) обладает решением $C(\lambda)$, для которого $\sqrt{\lambda}C(\lambda)\in L^2$ и, кроме того,

$$\frac{\sqrt{\lambda}\,C(\lambda)}{(\lambda^2-k^2)^p}\in L^2.$$

Это второе условие показывает, что

$$\frac{C(\lambda)}{(\lambda^2-k^2)^p}=\int_0^a \sqrt{s}\,\omega(s)\,J_0(s\lambda)\,ds,$$

где $\omega(s)\in L^2$. Таким образом $C(\lambda)(\lambda^2-k^2)^{-p}$ есть четная целая трансцендентная функция от λ степени $\leqslant a$. Тем же свойством обладает функция $C(\sqrt{\lambda^2+k^2})\,\lambda^{-2p}$.

Поэтому

$$\frac{C(\sqrt{\lambda^2+k^2})}{\lambda^{2p}} = \int_0^a \sqrt{s}\, h(s) \frac{J_p(\lambda s)}{\lambda^p}\, ds, \tag{18}$$

где во всяком случае $h(s) \in L^2$, так как $\lambda^{\frac{1}{2}-p} C(\sqrt{\lambda^2+k^2})$ наверно принадлежит L^2. Но $h(s)$ не только должна удовлетворять условию $h(s) \in L^2$, но должна быть такой, чтобы $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda) \in L^2$. Так как

$$C(\lambda) = (\lambda^2 - k^2)^p\, G(\lambda),$$

где $G(\lambda)$ — чётная целая функция, то для полного определения функции $C(\lambda)$ на полуоси $\lambda > 0$ необходимо условиться, как определяется выражение $(\lambda^2 - k^2)^p$. Мы примем, что это выражение положительно при $\lambda > k$ и имеет аргумент $-\pi p$ при $0 < \lambda < k$.

Умножим теперь уравнение (B_2) на

$$r\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{ik}\right)^{-1+p} J_{-1+p}(ik\sqrt{x^2-r^2})$$

и проинтегрируем по r от 0 до x. Мы получим, как и выше, уравнение

$$\int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\, C(\sqrt{k^2-t^2}) x^p J_p(ixt) \frac{t\,dt}{(it)^p} +$$

$$+ \int_0^\infty C(\sqrt{k^2+t^2})\, x^p J_p(xt)\, t^{1-p}\, dt =$$

$$= \int_0^x tf(t) \left(\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{ik}\right)^{-1+p} J_{-1+p}(ik\sqrt{x^2-t^2})\, dt.$$

Умножим это уравнение на x и проинтегрируем по x от 0 до r. Мы получим

$$\int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\, C(\sqrt{k^2-t^2})\, r^{p+1} J_{p+1}(irt) \frac{t\,dt}{(it)^{p+1}} +$$

$$+ \int_0^\infty C(\sqrt{k^2+t^2})\, r^{p+1} J_{p+1}(rt) \frac{dt}{t^p} =$$

$$= \int_0^r x\,dx \int_0^x tf(t) \left(\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{ik}\right)^{-1+p} J_{-1+p}(ik\sqrt{x^2-t^2})\, dt.$$

Подставим сюда выражение (18) для C. Мы получим тогда уравнение

$$e^{-\pi pi} \int_0^a \sqrt{s}\, h(s)\, ds \int_0^k r^{p+1} H(\sqrt{k^2-t^2})\, I_p(st)\, I_{p+1}(rt)\, dt +$$

$$+ \int_0^r s^{1/2+p} h(s)\, ds = \int_0^r x\,dx \int_0^x tf(t) \left(\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{ik}\right)^{-1+p} J_{-1+p}(ik\sqrt{x^2-t^2})\, dt.$$

Дифференцируя его по r, получаем

$$h(r)+e^{-\pi pi}\int_0^a h(s)\,ds\int_0^k \sqrt{sr}\,H(\sqrt{k^2-t^2})\,t\,I_p(st)\,I_p(rt)dt=$$

$$=r^{1/2-p}\int_0^r tf(t)\left(\frac{\sqrt{r^2-t^2}}{ik}\right)^{-1+p}J_{-1+p}(ik\sqrt{r^2-t^2})\,dt. \qquad (19)$$

Этот результат аналогичен соответствующему результату для системы (A). Мы пришли и здесь к интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным, симметрическим ядром, и это ядро

$$\int_0^k \sqrt{sr}\,H(\sqrt{k^2-t^2})\,t\,I_p(st)\,I_p(rt)\,dt$$

вещественно, если вещественна функция $H(\lambda)$.

7. *Уравнения с цилиндрическими функциями высших порядков.* Покажем коротко, как к изученным нами уравнениям сводятся спаренные уравнения того же типа, но содержащие вместо функций Бесселя нулевого порядка функции любого целого порядка. Примем для определенности, что речь идет об уравнениях типа (A) и напишем эти уравнения в виде

$$\int_0^\infty C(\lambda)\lambda^m J_m(\lambda r)\lambda d\lambda = 0 \qquad (r>a)$$

(C)

$$\int_0^k H(\lambda)\,C(\lambda)\,\lambda^m J_m(\lambda r)\,\lambda d\lambda+\int_k^\infty C(\lambda)\,\lambda^m J_m(\lambda r)\,\frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p}=r^m F(r) \quad (0<r<a),$$

где m — натуральное число, а $F(r)$ — заданная функция, удовлетворяющая некоторым условиям регулярности, например, достаточно, чтобы имело смысл и представляло непрерывную функцию выражение

$$\left(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\right)^2 F(r).$$

Для определенности примем также, что $0<p\leqslant\frac{1}{2}$. То, что искомую функцию мы записали в виде $C(\lambda)\lambda^m$, конечно, не существенно, так как класс, в котором она ищется, остается прежним, а именно, произведение $\sqrt{\lambda}\,[C(\lambda)\,\lambda^m]$ должно принадлежать L^2. В силу этого условия

$$C(\lambda)\,\lambda^m=\int_0^a \sqrt{s}\,\omega(s)\,J_m(\lambda s)\,ds,$$

где $\omega(s)\in L^2$. Следовательно, $C(\lambda)$ имеет вид

$$C(\lambda)=\int_0^a \sqrt{s}\;\omega(s)\,\frac{J_m(\lambda s)}{\lambda^m}\,ds$$

и поэтому является четной целой трансцендентной функцией степени $\leqslant a$.

Так как функция $C(\sqrt{k^2+\lambda^2})$ также является четной целой трансцендентной функцией степени $\leqslant a$ и так как $\lambda^{1/2-p}\, C(\sqrt{k^2+\lambda^2})$ наверно принадлежит L^2, то по обобщенной теореме Винера—Пэйли справедливо представление

$$C(\sqrt{k^2+\lambda^2}) = \int_0^a \sqrt{s}\, h(s) \frac{J_{-p}(\lambda s)}{\lambda^{-p}}\, ds, \tag{20}$$

где $h(s) \in L^2$. Из этого представления следует, что

$$C(\lambda) = \int_0^a \sqrt{s}\, h(s) (\sqrt{\lambda^2-k^2})^p J_{-p}(s\sqrt{\lambda^2-k^2})\, ds.$$

Мы пришли к той же формуле (8), которую имели при $m=0$. Новым является то, что теперь пространству L^2 должно принадлежать не только произведение $\sqrt{\lambda}\, C(\lambda)$, но и произведение $\sqrt{\lambda}\, [C(\lambda)\, \lambda^m]$. Это обстоятельство требует, чтобы функция $h(s)$ удовлетворяла определенным условиям, и наша задача состоит в том, чтобы выяснить, в чем эти условия состоят и за счет чего они будут выполняться.

С этой целью обратимся ко второму из уравнений (C) и заметим предварительно, что

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^m J_0(\lambda r) = (-1)^m \frac{\lambda^m}{r^m} J_m(\lambda r).$$

В силу этого замечания второе из уравнений (C) можно заменить на

$$(C_2) \qquad \int_0^k H(\lambda)\, C(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda + \int_k^\infty C(\lambda)\, J_0(\lambda r) \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2-k^2)^p} = f(r) \quad (0 < r < a),$$

где $f(r)$ находится с помощью квадратур из уравнения

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^m f(r) = (-1)^m F(r).$$

При определении из этого уравнения функции $f(r)$ появятся m произвольных постоянных, а именно:

$$f(r) = f_0(r) + \sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu r^{2\nu}.$$

Для определения $h(s)$ мы должны подставить в уравнение (C_2) выражение (20). Мы получим интегральное уравнение вида (9), а именно:

$$h(x) + \int_0^a K(x, s)\, h(s)\, ds = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu \psi_\nu(x),$$

где

$$K(x, s) = \sqrt{xs} \int_0^k H(\sqrt{k^2-t^2})\, I_{-p}(xt)\, I_{-p}(st)\, t^{1+2p}\, dt,$$

$$\varphi_0(x) = x^{p-1/2} \frac{d}{dx} \int_0^x r f_0(r) \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{ik} \right)^{-p} J_{-p}\left(ik\sqrt{x^2 - r^2}\right) dr,$$

$$\psi_\nu(x) = x^{p-1/2} \frac{d}{dx} \int_0^x r^{2\nu+1} \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{ik} \right)^{-p} J_{-p}\left(ik\sqrt{x^2 - r^2}\right) dr.$$

Но $x^{p-1/2} K(x, s)$ есть, очевидно, четная целая функция от x и поэтому неограниченно дифференцируема. С другой стороны,

$$x^{p-1/2} \varphi_0(x) = x^{2p-1} \frac{d}{dx} \int_0^x f_0\left(\sqrt{x^2 + t^2}\right) \frac{t^{1-p}}{(ik)^{-p}} J_{-p}(ikt)\, dt =$$

$$= f_0(x\sqrt{2}) \frac{J_{-p}(ikx)}{(ixk)^{-p}} + x^{1+p} \int_0^1 f_0'\left(x\sqrt{1 + s^2}\right) \frac{s^{1-p}}{\sqrt{1+s^2}} J_{-p}(ikxs)\, ds.$$

Отсюда видно, что функция $x^{p-1/2}\varphi_0(x)$ допускает во всяком случае m-кратное применение операции $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$. Тем же свойством обладают и функции $x^{p-1/2}\psi_\nu(x)$, а следовательно, и функция $x^{p-1/2} h(x)$.

Беря выражение (20) в виде

$$C\left(\sqrt{\lambda^2 + k^2}\right) = \int_0^a \left[s^{p-1/2} h(s)\right] \lambda^p s^{1-p} J_{-p}(\lambda s)\, ds$$

и применяя интегрирование по частям, получим

$$C\left(\sqrt{\lambda^2 + k^2}\right) = \sqrt{a}\, h(a) \lambda^{p-1} J_{1-p}(\lambda a) -$$

$$- \int_0^a \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left[s^{p-1/2} h(s)\right] \lambda^{p-1} s^{2-p} J_{1-p}(\lambda s)\, ds.$$

Полагая

$$\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left[s^{p-1/2} h(s)\right] = h_1(s)$$

и допуская, что $h(a) = 0$, найдем после второго интегрирования по частям, что

$$C\left(\sqrt{\lambda^2 + k^2}\right) = -h_1(a) \lambda^{p-2} a^{2-p} J_{2-p}(\lambda a) +$$

$$+ \int_0^a \frac{1}{s} h_1'(s) \lambda^{p-2} s^{3-p} J_{2-p}(\lambda s)\, ds.$$

Положим далее

$$\frac{1}{s} h_1'(s) = h_2(s)$$

и снова примем, что $h_1(a) = 0$. Таким образом

$$C\left(\sqrt{\lambda^2 + k^2}\right) = \int_0^a h_2(s) \lambda^{p-2} s^{3-p} J_{2-p}(\lambda s)\, ds.$$

Повторяя эти операции, получим представление

$$C(\sqrt{\lambda^2+k^2}) = (-1)^m \int_0^a h_m(s)\, \lambda^{p-m} s^{m+1-p} J_{m-p}(\lambda s)\, ds,$$

если только

$$h(a) = h_1(a) = \ldots = h_{m-1}(a) = 0. \tag{21}$$

Применяя операцию еще раз (а это возможно в силу сделанного предположения о функции $F(r)$), найдем, что

$$C(\sqrt{\lambda^2+k^2}) = (-1)^m h_m(a)\, \lambda^{p-(m+1)} a^{m+1-p} J_{m+1-p}(\lambda a) +$$
$$+ (-1)^{m+1} \int_0^a h'_m(s)\, \lambda^{p-(m+1)} s^{m+1-p} J_{m+1-p}(\lambda s)\, ds,$$

где $h'_m(s)$ непрерывна. Отсюда непосредственно следует, что $\sqrt{\lambda}\,[C(\lambda)\lambda^m] \in L^2$. Как видим, все упирается в возможность удовлетворить условиям (21). Но эти условия представляют систему линейных алгебраических уравнений относительно тех постоянных $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$, которые входят в состав функции $f(r)$, и можно показать, что она всегда разрешима. Таким образом, наше исследование можно считать законченным.

8. Применение к задаче о свободных гармонических колебаниях жесткого диска. Пусть a — радиус диска, ω — частота колебаний, v — постоянная амплитуда скорости диска и, наконец, c — скорость звука в среде, заполняющей пространство, В таком случае потенциал скоростей будет иметь вид $\varphi e^{-i\omega t}$, где φ зависит только от координат. Скорость представится в виде

$$\vec{V} = -e^{-i\omega t} \operatorname{grad} \varphi,$$

а звуковое давление в виде

$$p = -ikc\rho_0\, e^{-i\omega t} \varphi,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — так называемое волновое число, а ρ_0 — плотность среды в состоянии равновесия. Уравнение для определения функции φ будет иметь вид

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0.$$

Пусть исходным положением диска, около которого он совершает поперечные колебания, является круг $r < a$ в плоскости $z = 0$. В таком случае мы получаем следующие краевые условия для определения функции φ:

1) $-\frac{\partial\varphi}{\partial z} = v$ при $r < a$, $z = 0$,

2) на окружности $r = a$, $z = 0$ функция φ непрерывна,

3) $\varphi = 0$ при $r \geqslant a$, $z = 0$,

4) на большом расстоянии от диска φ ведет себя, как сферическая волна, расходящаяся из начала координат (условие излучения).

Условие 1) следует из того, что на диске в любой момент времени нормальная проекция скорости прилегающих частиц равняется нормальной проекции скорости диска, то есть

$$-e^{-i\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = v e^{-i\omega t}.$$

Что касается условия 3), то оно вытекает из симметрии поля скоростей относительно плоскости $z=0$. Действительно, в точках, симметричных относительно плоскости $z=0$, проекция скорости на ось z должна иметь одинаковые значения, а каждая из остальных проекций — противоположные значения. Так как, кроме того, φ на бесконечности равняется нулю, то φ должна быть нечетной функцией от z. Но при $z=0$, $r \geqslant a$ функция φ непрерывна; поэтому она и должна обращаться в нуль, если $z=0$, $r \geqslant a$.

Из свойства нечетности функции φ следует, что достаточно найти ее при $z \geqslant 0$. Эта задача в свою очередь сводится к нахождению значений $\varphi(r, 0)$ при $r < a$, так как тогда функция φ будет известна всюду в плоскости $z=0$ и определение ее при $z>0$ сможет быть осуществлено при помощи формулы Грина.

Сформулированная задача не нова. Ей посвящено большое число работ [3], [4], [7], [11], Особо следует отметить работу Букампа [4], который с помощью функции Грина свел задачу к интегро-дифференциальному уравнению для определения функции $\varphi(r, 0)\,(0<r<a)$ и получил решение этого уравнения в виде ряда по степеням величины ka. Далее нужно упомянуть о работе Левина—Швингера [8], в которой родственные задачи решаются весьма эффективным и имеющим разнообразные другие применения вариационным методом.

Мы сведем рассматриваемую задачу к спаренным уравнениям, а затем применим полученные выше результаты и получим простое уравнение Фредгольма, позволяющее решать задачу при любых значениях произведения ka.

Будем искать функцию $\varphi(r, z)$ в виде [1]

$$\varphi(r, z) = v\int_0^\infty e^{-\mu z} J_0(\lambda r)\, C(\lambda)\, \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \qquad (z \geqslant 0),$$

где $\mu=\sqrt{\lambda^2-k^2}$. При этом для выполнения условия излучения мы должны считать, что $\mu>0$ при $\lambda>k$ и $\mathrm{I}\,\mu<0$ при $0<\lambda<k$. Записывая краевые условия 1) и 3), получим

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda = 1 \qquad (0<r<a)$$

$$\int_0^\infty C(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, \frac{\lambda d\lambda}{\mu} = 0 \qquad (r>a). \tag{22}$$

Это спаренные уравнения типа (B) (по принятой нами терминологии) причем здесь $p={}^1/_2$, $H(\lambda)=1$.

Как пишет Зоммерфельд, Кинг сделал попытку решить уравнения (22) с помощью метода последовательных приближений, но дальше второго шага пойти не смог. Зоммерфельд ищет $C(\lambda)$ в виде

$$(\alpha) \qquad C(\lambda) = \frac{2a^2}{\pi}\,\frac{\mu}{\lambda}\left\{B_1\frac{S_1(\lambda a)}{\lambda a} + B_2\frac{S_2(\lambda a)}{(\lambda a)^2} + B_3\frac{S_3(\lambda a)}{(\lambda a)^3} + \dots\right\},$$

где $B_1, B_2, B_3, \dots$ — подлежащие определению коэффициенты, а $S_n(\rho)$ означают функции

[1] Мы следуем здесь Кингу [7] и Зоммерфельду [11].

$$S_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\,J_{n+1/2}(\rho).$$

Функция, определяемая рядом (α), в случае надлажащей его сходимости, удовлетворяет второму из уравнений (22) тождественно относительно коэффициентов B_i. Поэтому остается подставить ряд (α) в первое из уравнений (22). Это приводит к некоторой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов B_i. Зоммерфельд ищет их в виде рядов по степеням ka и находит следующие приближенные формулы:

$$B_1=1+\frac{1}{6}(ka)^2-\frac{2i}{9\pi}(ka)^3+\frac{1}{24}(ka)^4-\frac{13i}{225\pi}(ka)^5,$$

$$B_2=\frac{1}{6}(ka)^2-\frac{1}{12}(ka)^4-\frac{i}{15\pi}(ka)^5,$$

$$B_3=\frac{7}{24}(ka)^4.$$

Зоммерфельд отмечает, что, если в его формулах отбросить члены, содержащие величину ka в четвертой и пятой степени, то получатся приближенные формулы Кинга.

После этих замечаний возвратимся к нашей задаче. Применим результат, полученный нами в п° 7. На основании этого результата решение уравнений (22) дается формулой (18) при $p=\frac{1}{2}$, то есть равно

$$C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\sin\left(s\sqrt{\lambda^2-k^2}\right)ds. \tag{23}$$

При этом функция $h(s)$ должна удовлетворять уравнению Фредгольма (19), которое теперь примет простой вид, так как в рассматриваемом случае

$$\sqrt{sr}\int_0^k tH\left(\sqrt{k^2-t^2}\right)I_p(st)\,I_p(rt)\,dt=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sh}k(s+r)}{s+r}-\frac{\operatorname{sh}k(s-r)}{s-r}\right\}$$

и

$$r^{1/2-p}\int_0^r tf(t)\left(\frac{\sqrt{r^2-t^2}}{ik}\right)^{-1+p}J_{-1+p}\left(ik\sqrt{r^2-t^2}\right)dr=$$

$$=\int_0^r t\left(\frac{ik}{\sqrt{r^2-t^2}}\right)^{1/2}J_{-1/2}\left(ik\sqrt{r^2-t^2}\right)dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sh}kr}{k}.$$

На основании этих подсчетов уравнение для определения функции $h(s)$ принимает вид

$$h(r)-\frac{i}{\pi}\int_0^a\left\{\frac{\operatorname{sh}k(s+r)}{s+r}-\frac{\operatorname{sh}k(s-r)}{s-r}\right\}h(s)\,ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sh}kr}{k}.$$

Если мы продолжим функцию $h(s)$ на интервал $(-a, 0)$ нечетным образом, то полученное уравнение запишется в виде

$$h(r)+\frac{i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\operatorname{sh} k(r-s)}{r-s}\,h(s)\,ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sh} kr}{k}. \tag{24}$$

Собственно говоря, нахождение функции $C(\lambda)$ не является необходимым, так как фактически нужна лишь функция

$$\varphi(r, 0)=v\int_{0}^{\infty}C(\lambda)J_0(\lambda r)\frac{\lambda d\lambda}{\mu} \qquad (0<r<a).$$

Но если воспользоваться формулой (23), то для этой функции без труда получится выражение

$$\varphi(r, 0)=v\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{r}^{a}h(s)\frac{\operatorname{ch}(k\sqrt{s^2-r^2})}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds.$$

Таким образом, после нахождения функции $h(s)$ функция $\varphi(r, 0)$ находится непосредственно.

К интегральному уравнению (24) применимы обычные методы приближенного решения. Мы остановимся здесь на нахождении решения в виде ряда по степеням ka. Для простоты примем, что $a=1$.

Полагая

$$h(r)=\sum_{n=0}^{\infty}k^n h_n(r),$$

мы найдем в силу уравнения (24), что имеют место равенства

$$h_0(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,r,\quad h_1(r)=0,\quad h_2(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{r^3}{3!},$$

а также общие соотношения

$$h_{2\nu+1}(r)=-\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{h_0(s)\frac{(r-s)^{2\nu}}{(2\nu+1)!}+h_2(s)\frac{(r-s)^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}+\right.$$

$$\left.+\ldots+h_{2\nu-2}(s)\frac{(r-s)^2}{3!}\right\}ds,$$

$$h_{2\nu+2}(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{r^{2\nu+3}}{(2\nu+3)!}-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{h_3(s)\frac{(r-s)^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}+\ldots+h_{2\nu-1}(s)\frac{(r-s)^2}{3!}\right\}ds,$$

из которых легко получить следующие выражения для дальнейших функций $h_\nu(r)$;

$$h_3(r)=\frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2r}{9},\quad h_4(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{r^5}{5!},$$

$$h_5(r)=\frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{8}{5!}\left(\frac{r}{5}+\frac{r^3}{3}\right),\quad h_6(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{r^7}{7!}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\pi^2}\frac{2r}{81},$$

$$h_7(r)=\frac{2i}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{7!}\left\{r^5+\frac{24}{5}r^3+\frac{24}{7}r\right\}.$$

Соответствующее разложение функции $\varphi(r, 0)$ будем писать в виде

$$\varphi(r, 0)=v\sum_{n=0}^{\infty}k^n\varphi_n(r).$$

Здесь

$$\varphi_0(r)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-r^2},\qquad \varphi_1(r)=0,$$

а остальные $\varphi_n(r)$ находятся с помощью формул

$$\varphi_{2\nu}(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\left\{\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}h_0(\sqrt{t^2+r^2})+\frac{t^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}h_2(\sqrt{t^2+r^2})+\right.$$

$$\left.+\ldots+h_{2\nu}(\sqrt{t^2+r^2})\right\}\frac{dt}{\sqrt{t^2+r^2}},$$

$$\varphi_{2\nu+1}(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\left\{\frac{t^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}h_3(\sqrt{t^2+r^2})+\ldots+\right.$$

$$\left.+h_{2\nu+1}(\sqrt{t^2+r^2})\right\}\frac{dt}{\sqrt{t^2+r^2}}.$$

Таким путем находим, что

$$\varphi_2(r)=\frac{\sqrt{1-r^2}}{9\pi}(4-r^2),\quad \varphi_3(r)=\frac{4i}{9\pi^2}\sqrt{1-r^2},$$

$$\varphi_4(r)=\frac{\sqrt{1-r^2}}{300\pi}(r^4-12r^2+16),$$

$$\varphi_5(r)=\frac{2i\sqrt{1-r^2}}{225\pi^2}(13-5r^2).$$

При желании можно было бы без большого труда получить сколько угодно дальнейших функций $\varphi_n(r)$ [1].

Изученная нами задача тесно связана с некоторой задачей о дифракции. Другая задача диффракции сводится к уравнениям (A) при $p=\frac{1}{2}$; ее рассмотрению и приближенному решению посвящена заметка [2], в которой указаны и другие относящиеся к ней работы.

---

[1] В существенном эти же функции получает своим методом Букамп [4] (до $\varphi_7(r)$ включительно).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. О некоторых спаренных интегральных уравнениях. ДАН СССР, **98** (1954).

2. Ахиезер Н. И. и Ахиезер А. Н. К задаче о диффракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. ДАН СССР, **109** (1956).

3. Bouwkamp. Diss. Groningen, 1941.

4. Bouwkamp. On the freely vibrating circular disk and the diffraction by circular disks and apertures. Physika, XVI (1950).

5. Busbridge. Dual integral equations. Proc. Lond. Math. Soc., **44** (1938).

6. Gordon. Dual integral equations. Journ. Lond. Math. Soc., **29** (1954).

7. King. On the acoustic radiation pressure on circular discs, inertia and diffraction corrections. Proc. roy. Soc., A. 153, London, 1935—1936.

8. Levine and Schwinger. On the theory of diffraction by an Aperture in an Infinite plane Screen. Phys. Rev., **74** (1948), **75** (1949).

9. Noble. On some dual integral equations. Quart. Journ. Math., Oxf., **6** (1955).

10. Снеддон. Прообразование Фурье, ИЛ, 1955.

11. Sommerfeld. Die frei schwingende Kolbenmembran. Ann. der Physik, **42** (1942).

12. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. ГТТИ, 1954.

13. Сташевская В. В. ДАН СССР, XCIII, № 3, (1953).

14. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Огиз, 1948.

15. Tranter. On some dual integral equations occuring in potential problems... Quart. Journ. Mech. and applied Math 3 (1950).

16. Tranter. On some dual integral equations: Quart. Jorn. Matt. Oxf., **2** (1951).

17. Tranter. A further Note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. Quart. Jorn. Mech and applied Math, VIII (1954).

18. Ватсон. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.