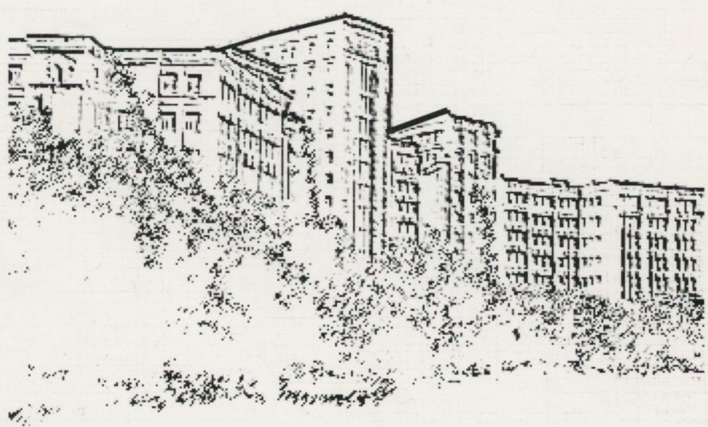
ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна



№ 826

Харків
2008

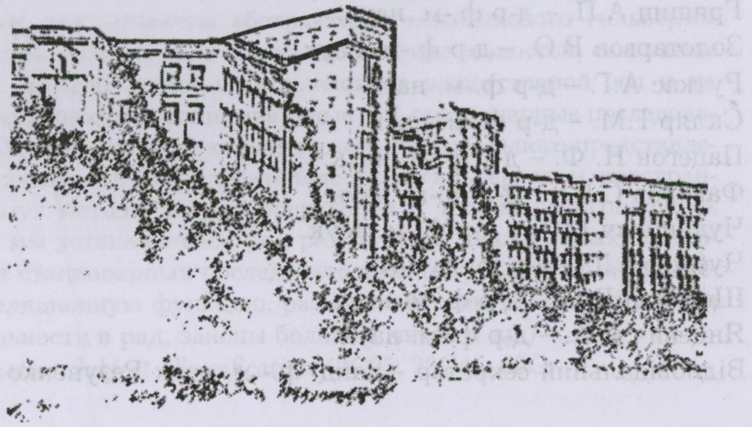
Міністерство освіти та науки України

ISSN 0453–8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна



№ 826

Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 58

Харків

2008

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 13 від 28 листопада 2008 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006 р.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 826, 2008, с.3–37

Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами

С.М. Загороднюк, Л. Клёц

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина
Лейпцигский университет, Германия

Следуя идеям А.Н. Колмогорова мы рассматриваем случайные последовательности, как элементы абстрактного комплексного гильбертова пространства. Мы изучаем классы последовательностей, связанные с системами ортогональных многочленов на вещественной оси и на единичной окружности (полиномиальные и P-стационарные последовательности). Введено понятие канонического интегрального представления для произвольной последовательности в гильбертовом пространстве. Используя методы теории операторов и теории ортогональных многочленов мы устанавливаем ряд результатов, аналогичных результатам теории стационарных последовательностей (разностные уравнения на корреляционную функцию, разложение спектральной функции последовательности в ряд, законы больших чисел и др.)
2000 Mathematics Subject Classification 42C05, 33C45, 60G.

1. Введение

Теория стационарных случайных последовательностей в абстрактной постановке была развита А.Н. Колмогоровым [1]. Обозначим $L_2 = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ стандартное гильбертово пространство случайных величин $\xi(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) с конечным вторым моментом и нулевым математическим ожиданием (здесь Ω есть пространство элементарных событий, $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра событий и P обозначает вероятность). А.Н. Колмогоров рассматривал последовательности в абстрактном гильбертовом пространстве H, которое, в частности, могло быть пространством $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ элементов H называется стационарной, если корреляционная функция $K_{n,m} :=< x_n, x_m >$ зависит от разности $n - m$ (здесь $< \cdot, \cdot >$ обозначает скалярное произведение в H). К наиболее важным результатам теории А.Н. Колмогорова относятся теорема о спектральном представлении стационарной случайной последовательности и теорема о спектральном представлении корреляционной функции. А именно, справедливы следующие разложения:

$$x_n = U^n x_0 = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}; \tag{1}$$

$$K_{n,m} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d < F_\theta x_0, x_0 >, \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ - ортогональное разложение единицы некоторого унитарного оператора U в H (обычно интегралы принято брать в пределах $[-\pi, \pi]$, но нам удобнее приведенное выше представление).

Используя такой подход, А.Н. Колмогоров изучал также некоторые нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве (см. [2, 3]). Некоторые результаты А.Н. Колмогорова были обобщены Ю.А. Розановым на случай многомерных стационарных последовательностей [4]. Отметим, что кривые в гильбертовом пространстве изучались М.Г. Крейном [5, 6].

Обобщением представления (1) является разложение вида

$$x_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) dZ_\lambda, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где φ_n - некоторые комплекснозначные функции на $\mathbb{R}$, Z - некоторая мера на $\mathbb{R}$, а интеграл понимают в том или ином смысле (см. обзорную работу А.М. Яглома [7]). В том случае, когда мера Z имеет ортогональные приращения, К. Карунен показал, что наличие представления (3) эквивалентно наличию представления для корреляционной функции вида [8]

$$K_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) \overline{\varphi_m(\lambda)} dF_\lambda, \; n, m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где F - неотрицательная мера на $\mathbb{R}$ (У К. Карунена индекс n меняется в произвольном множестве T). В случае произвольных меры Z, пространства, по которому интегрируют, и индекса n, который меняется в произвольном множестве T, аналогичный результат также имеет место (см. [7]).

Отметим, что разложение вида (3) с непрерывно меняющимся индексом n в интервале (a, b) является интегральным каноническим представлением случайной функции x_n. Теория канонических представлений случайных функций развивалась В.С. Пугачевым (см. [9]). В случае дискретного параметра n нетрудно показать, что для любой последовательности в H существует представление вида (3) (см. ниже).

Используя теорию неунитарных и несамосопряженных операторов, нестационарные последовательности и кривые в гильбертовом пространстве изучали А.А. Янцевич, К.П. Кирчев, В.А. Золотарев и их ученики (см., например, [10, 11, 12, 13]).

Во втором параграфе мы изучаем последовательности в гильбертовом пространстве H, допускающие следующее представление:

$$x_n = p_n(A) x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ есть ортогональное разложение единицы некоторого самосопряженного оператора A в H, а $\{p_n\}_0^\infty$ являются ортогональными многочленами на $\mathbb{R}$. Подобные последовательности (полиномиальные последовательности) были введены в работах [14, 15].

Важными результатами в теории вероятностей являются законы больших чисел для последовательностей случайных величин. Пусть $x_1, x_2, ...,$ - случайные величины. Если при некоторых постоянных $a_1, b_1, a_2, b_2, ...,$ предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_1^n(x_j-a_j)=:x \tag{6}$$

существует в смысле какой-нибудь сходимости, то говорят, что последовательность $x_1, x_2, ...,$ удовлетворяет закону больших чисел [16]. В том случае, когда случайные величины x_j взаимно независимы и $b_n\to\infty$ при $n\to\infty$, случайная величина x есть константа с вероятностью единица (относительно случая независимых x_j см. монографию В.В. Петрова [17] и ссылки в ней). Относительно законов больших чисел для случая зависимых x_j следует указать на теорему А.А. Маркова [18]. Она гласит, что закон больших чисел (в смысле сходимости средних арифметических случайных величин) применим к зависимым величинам $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ если, при возрастании n, $\frac{B_n}{n^2}$ стремится к нулю, где B_n есть дисперсия суммы $x_1+x_2+...+x_n$. В важнейших случаях эта теорема является и обратимой, т.е. закон больших чисел не может быть применим к величинам $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ если, при возрастании n, $\frac{B_n}{n^2}$ не стремится к нулю. Некоторые достаточные условия для справедливости закона больших чисел в случае зависимых случайных величин появлялись в [19], см. также [20]. Во втором параграфе нами приведен ряд законов больших чисел для полиномиальных последовательностей. Эти соотношения можно также назвать эргодическими, по аналогии с эргодической теоремой для стационарных последовательностей.

Условие стационарности последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H, как легко видеть, эквивалентно выполнению следующего разностного соотношения для корреляционной функции:

$$K_{n+1,m+1}=K_{n,m},\qquad n,m\in\mathbb{Z}. \tag{7}$$

Для полиномиальных последовательностей это условие заменяется следующим разностным соотношением:

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m}-b_nK_{n,m}+c_nK_{n+1,m}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K_{n,m-1}-b_mK_{n,m}+c_mK_{n,m+1}\right),\qquad n,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

где $a_n, c_n>0$, $b_n\in\mathbb{R}$, и $K_{-1,m}=K_{n,-1}=0$, $c_{-1}=0$.

Как показано в пункте 2.2, выполнение условия (8) является характеристическим свойством полиномиальной последовательности.

Заметим, что описанные выше результаты о полиномиальных последовательностях появились ранее в работе [15], где разностное соотношение для корреляционной функции было менее общего вида. Еще раньше часть результатов была анонсирована в [14]. Однако в настоящей работе мы устранили пробелы в доказательствах и некоторые ошибки, имевшиеся в упомянутых работах.

В пункте 2.3 изучается вопрос о восстановлении спектральной функции $< E_\lambda x_0, x_0 >$ полиномиальной последовательности по элементам последовательности.

Вернемся к спектральному разложению (1) стационарной последовательности. Пусть $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Если случайные величины $E_\lambda x_0$ являются вещественными и интеграл можно брать в пределах от 0 до π, то вещественная часть такой последовательности будет полиномиальной (с многочленами Чебышева 1-го рода под интегралом). Заметим также, что если для полиномиальной последовательности в $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ величины $E_\lambda x_0$ из представления (5) являются вещественными, то и последовательность будет вещественной (если только не нормировать многочлены p_n комплексными числами). Поэтому можно предположить, что полиномиальные последовательности могут найти практическое применение при изучении вещественных случайных последовательностей.

В параграфе 3 мы определяем Р-стационарные последовательности в гильбертовом пространстве H. Эти последовательности допускают следующее представление:

$$x_n = p_n(U)x_0 = \int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) dF_\theta x_0, \ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ есть ортогональное разложение единицы некоторого унитарного оператора U в H, а $\{p_n\}_0^\infty$ являются ортогональными многочленами на единичной окружности.

Покажем, что любая последовательность элементов гильбертова пространства H допускает представление вида (9), но при этом многочлены могут быть не ортогональны (и произвольной степени). Прежде всего перенумеруем (если это необходимо) заданную последовательность с помощью целого неотрицательного индекса. Не ограничивая общности можно считать, что элементы полученной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ линейно независимы (поскольку представление вида (9) для зависимых элементов будет следовать из представления для независимых элементов). Проводя процесс ортогонализации Грама-Шмидта получаем ортонормированную последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Заметим, что в силу построения $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^r = \mathrm{Lin}\{\varepsilon_n\}_{n=0}^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$. Обозначим $H_x = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и определим изометрический оператор V в H_x равенствами

$$V\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Оператор V является хорошо известным оператором сдвига и допускает унитарное расширение W в пространстве $H_1 \supset H_x$. Из равенств (10) непосред-

ственно видно, что
$$\varepsilon_n = W^n \varepsilon_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$
Следовательно, для элементов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ справедливы равенства
$$x_n = p_n(W)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$
где p_n есть многочлен степени n, что и требовалось показать.

Для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ гильбертова пространства H представление вида (9) с необязательно ортогональными многочленами p_n мы будем называть *каноническим интегральным представлением.*

Очевидно, что с помощью линейных операций можно всегда перейти от канонического интегрального представления к представлению (9) с ортогональными многочленами и использовать преимущества, которые дает ортогональность. В частности, в пункте 3.2 показано, что при некоторых условиях можно определить спектральную функцию стационарной последовательности, используя лишь элементы последовательности с неотрицательными индексами.

В пункте 3.1 приведены равенства, которым удовлетворяет корреляционная функция P-стационарной последовательности. В том случае, когда задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ гильбертова пространства H с линейно независимыми элементами, эти равенства являются достаточными, для того, чтобы последовательность была P-стационарной. В пункте 3.2 (помимо упомянутого выше) изучается вопрос разложения спектральной функции P-стационарной последовательности в ряд по элементам последовательности.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Посредством $<\cdot,\cdot>_H$, $\|\cdot\|_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Для линейного обратимого оператора A в H, обозначаем A^{-1} обратный оператор. Посредством $\mathrm{Lin}\, M$ и $\mathrm{span}\, M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в некотором гильбертовом пространстве, соответственно.

2. Полиномиальные последовательности

2.1 Определение полиномиальной последовательности

Рассмотрим стационарную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H. Предположим, что она допускает разложение (1), где интеграл берется в пределах $[0,\pi]$. Рассмотрим четную и нечетную части последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:
$$\widehat{x}_n = \frac{x_n + x_{-n}}{2} = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}; \tag{13}$$

$$\widetilde{x}_n = \frac{x_n - x_{-n}}{2} = i\int_0^\pi \sin(n\theta) dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

В случае, когда $H = L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и $F_\theta x_0$ является вещественным случайным процессом (по θ), последовательности $\widehat{x}_n$ и $\frac{1}{i}\widetilde{x}_n$ являются вещественной и мнимой частью последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, соответственно. Не ограничивая общность, мы можем рассматривать последовательности из (13),(14) лишь для неотрицательных индексов ($n \in \mathbb{Z}_+$). После замены переменной $\theta = \arccos\lambda$ мы получим

$$\widehat{x}_n = \int_{-1}^1 \cos(n\arccos\lambda) dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+; \tag{15}$$

$$\widetilde{x}_n = i\int_{-1}^1 \sin(n\arccos\lambda) dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где $E_\lambda := F_{\cos\theta}$.

Функции, находящиеся под интегралом в (15), являются многочленами Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda)$. Они ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Обобщение представления (15) приводит нас к следующему определению (см. [14, с.31],[15, с.62-63]).

Определение 1 *Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H называется* **полиномиальной** *или* **P-последовательностью**, *если x_n допускает следующее представление:*

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17}$$

где $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является системой ортогональных многочленов на вещественной оси, A есть некоторый самосопряженный оператор в H и $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ есть его ортогональное разложение единицы (не обязательно непрерывное слева или справа).

Напомним (см. [21],[22]), что набор многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно неубывающей функции $\sigma(\lambda)$, если выполнены соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda) d\sigma(\lambda) = A_n\delta_{n,m}, \quad A_n > 0, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

В дальнейшем мы будем обозначать $L_2([a,b], d\sigma)$ пространство измеримых квадратично суммируемых функций на $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ относительно меры $d\sigma$. В том случае, когда носитель меры σ сосредоточен на отрезке $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^1$ и σ

[1]Здесь и далее в работе при обозначении некоторого вещественного отрезка $[a,b]$ подразумевается исключение из него бесконечных концов, если a и/или b не являются конечными.

абсолютно непрерывна на $[a, b]$, мы обозначаем $h(\lambda) = \sigma'(\lambda)$, п.в. на $[a, b]$ и пишем $L_2([a, b], h)$ вместо $L_2([a, b], d\sigma)$. При этом функцию $h(\lambda)$ будем называть весом. Введем также следующее обозначение для ортонормированных многочленов: $\widehat{p}_n(\lambda) := \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n(\lambda)\|_{L_2([a,b],h)}}$.

2.2 Характеристическое свойство полиномиальной последовательности в терминах разностных соотношений для корреляционной функции

По аналогии со стационарным случаем, для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H функцию $K_{n,m} =< x_n, x_m >$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$ называем корреляционной функцией последовательности. Имеет место следующее характеристическое свойство полиномиальной последовательности:

Теорема 1 *Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H. Эта последовательность является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$ тогда и только тогда, когда корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности удовлетворяет следующим разностным соотношениям:*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m} - b_nK_{n,m} + c_nK_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}(c_{m-1}K_{n,m-1} - b_mK_{n,m} + c_mK_{n,m+1}), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1} = 0$, и $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Из представления (17) следует представление для корреляционной функции последовательности:

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d < E_\lambda x_0, x_0 >_{\widetilde{H}}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{20}$$

Заметим, что ортогональные многочлены на вещественной оси удовлетворяют соотношениям (см. [23, с.149])

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda) - b_np_n(\lambda) + c_np_{n+1}(\lambda)\right) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{21}$$

где $c_n > 0$, $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, $c_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$. Подставляя представление (20) в левую или правую часть равенства (19) с коэффициентами из (21) и используя (21) мы получим $\int_{\mathbb{R}} \lambda p_n(\lambda) p_m(\lambda) d < E_\lambda x_0, x_0 >_{\tilde{H}}$ в обоих случаях.

Достаточность. Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, для которой выполняется соотношение (19). Введем в рассмотрение разностный оператор $\mathbf{L}$, действующий на последовательности комплексных чисел:

$$(\mathbf{L}u)_j = \sum_{a=-1}^{1} \beta_{j,a} u_{j+a}, \tag{22}$$

где $u = (u_0, u_1, u_2, ...)$ - последовательность комплексных чисел, $\beta_{k,-1} = \frac{c_{k-1}}{a_k}$, $\beta_{k,0} = -\frac{b_k}{a_k}$, $\beta_{k,1} = \frac{c_k}{a_k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Определим также оператор $(\overline{\mathbf{L}}u)_j = \sum_{a=-1}^{1} \overline{\beta}_{j,a} u_{j+a}$. Условие (19) может быть записано в форме

$$(\mathbf{L}_m K_{n,m})_n = (\overline{\mathbf{L}^n} K_{n,m})_m, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

где $\mathbf{L}_m$ означает применение оператора $\mathbf{L}$ к m-му столбцу матрицы $(K_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$, а $\mathbf{L}^n$ означает применение оператора $\mathbf{L}$ к n-й строке матрицы $(K_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$. Согласно теоремы Ю.М. Березанского (см. [24, Теорема 5.2, с.723]) мы получаем, что для корреляционной функции $K_{n,m}$ существует представление:

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} X_{1,n}(\lambda) \overline{X_{1,m}(\lambda)} d\sigma_1(\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

.

где $\sigma_1(\lambda)$ является некоторой неубывающей функцией на $\mathbb{R}$, а интеграл существует в смысле $L_2((-\infty,\infty), d\sigma_1)$. Здесь $(X_{1,0}(\lambda), X_{1,1}(\lambda), X_{1,2}(\lambda), ...)$ является решением разностного уравнения

$$(\mathbf{L}u)_j - \lambda u_j = 0, \qquad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{25}$$

с начальным условием $X_{1,0} = 1$. Положим $p_n(\lambda) := X_{1,n}(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из (25) следует, что выполнено (21). По индукции заключаем, что $\deg p_n = n$ и многочлены p_n имеют вещественные коэффициенты ($n \in \mathbb{Z}_+$). Из известной теоремы [23, Теорема 5.2.1, с.147] следует, что многочлены p_n ортогональны на вещественной оси, т.е. выполнено (18) с некоторой неубывающей функцией $\sigma(\lambda)$. Используя многочлены p_n перепишем (24) в форме

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\sigma_1(\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

Заметим, что $+\infty > \|x_0\|_H^2 = K_{0,0} = \int_{\mathbb{R}} d\sigma_1(\lambda) = \sigma_1(+\infty) - \sigma_1(-\infty)$. Положим $C := \sigma_1(+\infty) - \sigma_1(-\infty)$. Если $C = 0$, то $\sigma_1 \equiv \mathrm{const}$ и $K_{n,m} \equiv 0$. Следовательно, $\|x_n\|^2 = K_{n,n} = 0$ и мы получим $x_n \equiv 0$. В этом случае можно взять любую систему ортогональных многочленов на вещественной оси, любой самосопряженный оператор A, и при этом (17) будет выполнено. Следовательно, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будет полиномиальной в этом случае.

Пусть $C > 0$. Если $\sigma_1(-\infty) = \pm\infty$, то $\sigma_1(+\infty) = \pm\infty$, и интеграл в (26) не имеет смысла. Значит $\sigma_1(-\infty)$ конечно. Положим

$$\widetilde{\sigma}_1(\lambda) := \frac{\sigma(\lambda) - \sigma(-\infty)}{C}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Можно рассматривать эту функцию, как неубывающую операторнозначную функцию. Ее значением при $\lambda \in \mathbb{R}$ является оператор умножения на $\sigma_1(\lambda)$ в одномерном гильбертовом пространстве $H^1 := \mathbb{C}$:

$$\widetilde{\sigma}_1(\lambda)x := \widetilde{\sigma}_1(\lambda) \cdot x, \qquad x \in H^1. \tag{28}$$

Применяя теорему М.А. Наймарка [25, Теорема 2, с.271] мы заключаем, что существует гильбертово пространство $\widetilde{H} \supseteq H^1$ и ортогональное разложение единицы $\widetilde{E}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в $\widetilde{H}$, такие, что

$$\widetilde{\sigma}_1(\lambda)x = P\widetilde{E}_\lambda x, \qquad x \in H^1,$$

где P является оператором ортогонального проектирования на H^1 в $\widetilde{H}$. Мы можем записать $\sigma_1(\lambda) = C\widetilde{\sigma}_1(\lambda) + \sigma_1(-\infty) =< \widetilde{\sigma}_1(\lambda)\sqrt{C}, \sqrt{C} >_{H^1} + \sigma_1(-\infty) = < \widetilde{E}_\lambda\sqrt{C}, \sqrt{C} >_{\widetilde{H}} + \sigma_1(-\infty)$. Значит

$$\sigma_1(\lambda) =< \widetilde{E}_\lambda \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 >_{\widetilde{H}} + \sigma_1(-\infty), \qquad \widetilde{x}_0 := \sqrt{C} \in \widetilde{H}. \tag{29}$$

Положим $\widetilde{x}_n := \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) d\widetilde{E}_\lambda \widetilde{x}_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Это определение корректно, поскольку $\int_{\mathbb{R}} |p_n(\lambda)|^2 d < \widetilde{E}_\lambda \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0 >= \int_{\mathbb{R}} |p_n(\lambda)|^2 d\sigma_1(\lambda) = K_{n,n} < \infty$, что следует из (26). Определим оператор $\widetilde{A} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\widetilde{E}_\lambda$. С его помощью можно записать равенство

$$\widetilde{x}_n = p_n(\widetilde{A})\widetilde{x}_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{30}$$

Из соотношений (26),(29) и (30) заключаем, что

$$< \widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m >_{\widetilde{H}} = K_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{31}$$

Рассмотрим множества $D := \mathrm{span}\{x_0, x_1, x_2, ...\}$, $\widetilde{D} := \mathrm{span}\{\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ...\}$, $M := \mathrm{Lin}\{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Определим отображение V, $V : M \to \widetilde{D}$:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k x_k \to Vx := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \widetilde{x}_k, \qquad \gamma_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Покажем, что такое определение корректно. Допустим, что есть два различных представления элемента $x \in M$:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k x_k, \ x = \sum_{k=0}^{n} \gamma'_k x_k,$$

(верхние индексы суммирования можно считать одинаковыми, добавив в случае необходимости слагаемые с нулевыми γ_k). Тогда $\sum_{k=0}^{n}(\gamma_k - \gamma'_k)x_k = 0$ и значит $||\sum_{k=0}^n (\gamma_k - \gamma_k')x_k|| = 0$. Используя равенство (31), из последнего равенства получаем

$$0 = \sum_{k,l=0}^n (\gamma_k - \gamma_k')\overline{(\gamma_l - \gamma_l')} < x_k, x_l > = \sum_{k,l=0}^n (\gamma_k - \gamma_k')\overline{(\gamma_l - \gamma_l')} K_{k,l} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^n (\gamma_k - \gamma_k')\overline{(\gamma_l - \gamma_l')} < \widetilde{x}_k, \widetilde{x}_l > = || \sum_{k=0}^n (\gamma_k - \gamma_k')\widetilde{x}_k ||^2,$$

и значит

$$\sum_{k=0}^n \gamma_k \widetilde{x}_k = \sum_{k=0}^n \gamma_k' \widetilde{x}_k.$$

Таким образом, определение корректно. Возьмем произвольные элементы $x^1, x^2 \in M$, $x^1 = \sum_{k=0}^n \gamma_k^1 x_k$, $x^2 = \sum_{k=0}^n \gamma_k^2 x_k$, $(\gamma_k^1, \gamma_k^2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+)$. Для них можно записать

$$< x^1, x^2 >_H = \sum_{k,l=0}^n \gamma_k^1 \overline{\gamma_l^2} < x_k, x_l >_H = \sum_{k,l=0}^n \gamma_k^1 \overline{\gamma_l^2} K_{k,l} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^n \gamma_k^1 \overline{\gamma_l^2} < \widetilde{x}_k, \widetilde{x}_l >_{\widetilde{H}} = < Vx^1, Vx^2 >_{\widetilde{H}},$$

и, следовательно, оператор V изометричен. Продолжим его по непрерывности до изометрического оператора из D в $\widetilde{D}$. Положим $U := V^{-1}$. Продолжим оператор U до оператора во всем пространстве $\widetilde{H}$. Для $x \in \widetilde{H}$, $x = x_{\widetilde{D}} + x_{\widetilde{H}\ominus\widetilde{D}}$, $x_{\widetilde{D}} \in \widetilde{D}$, $x_{\widetilde{H}\ominus\widetilde{D}} \in \widetilde{H} \ominus \widetilde{D}$, мы полагаем

$$Ux = Ux_{\widetilde{D}} + x_{\widetilde{H}\ominus\widetilde{D}}. \tag{32}$$

Продолженный оператор U будет изометрическим оператором из $\widetilde{H}$ в $D \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D})$. Используя (30) мы записываем

$$x_n = U\widetilde{x}_n = Up_n(\widetilde{A})\widetilde{x}_0 = Up_n(\widetilde{A})U^{-1}x_0 = p_n(U\widetilde{A}U^{-1})x_0. \tag{33}$$

Оператор $A := U\widetilde{A}U^{-1}$ будет самосопряженным в $D \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D})$ и равенство (33) дает

$$x_n = p_n(A)x_0. \tag{34}$$

Определим пространство $\widehat{H} := D \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D}) \oplus (H \ominus D) = H \oplus (\widetilde{H} \ominus \widetilde{D})$ и разложение единицы в $\widehat{H}$:

$$E_\lambda^1 := \begin{cases} E_\lambda, & \lambda \leq 0 \\ E_\lambda + P_{H\ominus D}, & \lambda > 0 \end{cases},$$

где $P_{H\ominus D}$ является проектором на $H \ominus D$ в $\widehat{H}$. Это разложение единицы соответствует некоторому самосопряженному оператору A_1 в $\widehat{H}$. Если $x \in$

D, то $A_1x = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE^1_\lambda x = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x = Ax$. Записывая соотношение (21) для операторного аргумента, умножая на x_0 и пользуясь (34) получаем

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1}\right) = Ax_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, если $x \in M$, то $Ax \in M$. А тогда и $A^k x \in M$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Покажем по индукции, что

$$A^k x = A_1^k x, \qquad x \in M,\ k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

При $k = 1$ равенство выполнено. Пусть оно выполнено для $k = l \in \mathbb{N}$. Тогда $A_1^{l+1}x = A_1A^l x = AA^l x = A^{l+1}x$, поскольку $A^l x \in M$. Значит (35) выполнено. Используя (35), в частности, получаем, что

$$p_n(A)x_0 = p_n(A_1)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, используя (34) можно записать

$$x_n = p_n(A_1)x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{36}$$

Таким образом, соотношение (17) выполнено и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью в пространстве $\widehat{H} \supseteq H$. □

Если в доказательстве необходимости последней теоремы мы дополнительно предположим, что система многочленов $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортонормирована, то $a_n \equiv 1$ в (21) (см. [23]), а значит и в (19).

С другой стороны, если в доказательстве достаточности мы дополнительно предположим, что в (19) $a_n \equiv 1$, то в (18) будет $A_n \equiv 1$ (см. [23]) и $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ будут ортонормированными. Таким образом, мы приходим к следующему следствию:

Следствие 1 *Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H. Эта последовательность является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$ с ортонормированной системой многочленов в представлении (17) тогда и только тогда, когда для корреляционной функции $K_{n,m}$ выполняется соотношение:*

$$c_{n-1}K_{n-1,m} - b_nK_{n,m} + c_nK_{n+1,m} = c_{m-1}K_{n,m-1} - b_mK_{n,m} + c_mK_{n,m+1}, \tag{37}$$
$$n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является некоторой последовательностью положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является некоторой последовательностью вещественных чисел, $c_{-1} = 0$, $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

2.3 Разложение спектральной функции в ряд.

Хорошо известно, что спектральная функция стационарной последовательности допускает разложение в ряд по элементам последовательности [26, Теорема 6.3, с.38]. Нашей целью в данном пункте будет получить аналогичное разложение для полиномиальной последовательности. Рассмотрим следующую функцию:

$$\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda\in[\lambda_1,\lambda_2] \\ 0, & \lambda\in\mathbb{R}\backslash[\lambda_1,\lambda_2] \end{cases}. \tag{38}$$

Имеет место следующее предложение:

Предложение 1 *Пусть в гильбертовом пространстве H задана полиномиальная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, в представлении (17) которой многочлены $\{p_n(\lambda)\}_0^\infty$ ортонормированы с весом $h(\lambda)$ на отрезке $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ и разложение единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ постоянно вне (a,b). Предположим, что*

(i) функция $< E_\lambda x_0, x_0 >$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и значит п.в. на $[a,b]$ существует производная $(< E_\lambda x_0, x_0 >)' =: f(\lambda)$;

(ii) $f(\lambda)\le Ch(\lambda)$, $C\ge 0$ на $[a,b]$;

(iii) многочлены $\{p_n\}_0^\infty$ плотны в $L_2([a,b],h)$.

Тогда

$$(E_{\lambda_2}-E_{\lambda_1})x_0 = \sum_{k=0}^\infty a_k x_k, \tag{39}$$

где ряд сходится в метрике H, $\lambda_1,\lambda_2\in[a,b]$ и

$$a_k = \int_a^b \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)p_k(\lambda)h(\lambda)d\lambda. \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, удовлетворяющая условиям предложения. Прежде всего заметим, что для функции $\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ можно записать

$$\int_a^b |\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)|^2 d< E_\lambda x_0, x_0 >\le \int_a^b d< E_\lambda x_0, x_0 >= \|x_0\|^2 <\infty;$$

$$\int_a^b |\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)|^2 h(\lambda)d\lambda \le \int_a^b h(\lambda)d\lambda<\infty.$$

Определим коэффициенты a_k равенством (40). Для произвольных $\lambda_1,\lambda_2\in[a,b]$ записываем

$$\|(E_{\lambda_2}-E_{\lambda_1})x_0 - \sum_{k=0}^N a_k x_k\|^2 = \|\int_a^b \mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)dE_\lambda x_0 -$$

$$-\int_a^b \sum_{k=0}^N a_k p_k(\lambda)dE_\lambda x_0\|^2 = \int_a^b \left|\mathbf{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \sum_{k=0}^N a_k p_k(\lambda)\right|^2 *$$

$$*d < E_\lambda x_0, x_0 >= \int_a^b \left| \mathrm{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(\lambda) \right|^2 f(\lambda) d\lambda \leq$$

$$\leq C \int_a^b \left| \mathrm{X}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(\lambda) \right|^2 h(\lambda) d\lambda \to 0, \; N \to \infty,$$

поскольку многочлены плотны в $L_2([a,b], h(\lambda))$. □

2.4 Законы больших чисел

Хорошо известным свойством стационарной последовательности (1) является эргодическое свойство (или закон больших чисел)

$$\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} x_k \to (F(+0) - F(-0)) x_0, \quad s \to \infty; \tag{41}$$

$$\frac{1}{2s+1} \sum_{k=-s}^{s} x_k \to (F(+0) - F(-0)) x_0, \quad s \to \infty. \tag{42}$$

Целью данного пункта является получение аналогичных соотношений для различных типов полиномиальных последовательностей.

Рассмотрим полиномиальную последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. В зависимости от того, какая система многочленов присутствует в представлении последовательности (17), можно выделить подклассы полиномиальных последовательностей. Мы будем называть последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$

(i) полиномиальной последовательностью Чебышева 1-го рода;

(ii) полиномиальной последовательностью Чебышева 2-го рода;

(iii) полиномиальной последовательностью Лежандра;

(iv) полиномиальной последовательностью Эрмита,

если соответственно

(i) $p_n(\lambda) = \cos(n \arccos \lambda)$, вес $h(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ сосредоточен на $[a,b] = [-1,1]$,

(ii) $p_n(\lambda) = \frac{\sin((n+1)\arccos \lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, вес $h(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}$ сосредоточен на $[a,b] = [-1,1]$,

(iii) $p_n(\lambda) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{d\lambda^n}[(\lambda^2 - 1)^n]$, вес $h(\lambda) = 1$ сосредоточен на $[a,b] = [-1,1]$,

(iv) $p_n(\lambda) = (-1)^n e^{\lambda^2} \frac{d^n}{d\lambda^n}(e^{-\lambda^2})$, вес $h(\lambda) = e^{-\lambda^2}$ сосредоточен на $[a,b] = (-\infty, \infty)$.

Заметим, что из соотношений (13) и (42) следует, что для четной части стационарной последовательности с разложением на $[0,\pi]$ выполняется

$$\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} \widehat{x}_k \to (F(+0) - F(-0)) x_0, \quad s \to \infty. \tag{43}$$

Принимая во внимание соотношение (15) мы видим, что $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью Чебышева 1-го рода. При этом разложение единицы $\{E_\lambda\}$ постоянно вне $(-1,1)$. Обратно, всякая полиномиальная последовательность Чебышева 1-го рода с разложением единицы $\{E_\lambda\}$, которое постоянно вне $(-1,1)$, является четной частью стационарной последовательности с разложением на $[0,\pi]$. Следовательно, полиномиальная последовательность Чебышева 1-го рода с разложением единицы $\{E_\lambda\}$, которое постоянно вне $(-1,1)$, обладает свойством (43).

Чтобы получить законы больших чисел для полиномиальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, нам потребуется наложить дополнительные условия:

$$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \text{ постоянно вне } (a,b); \tag{44}$$

$$K_{n,n} \leq M^2 ||p_n||^2_{L_2([a,b],h)}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{45}$$

где $M = \mathrm{const}$, $M \geq 0$.

Отметим, что условие (45) эквивалентно условию

$$||x_n||_H \leq M ||p_n||_{L_2([a,b],h)}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ M\geq 0, \tag{46}$$

или условию

$$\int_a^b |p_n(\lambda)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 > \leq M^2 \int_a^b |p_n(t)|^2 h(t)dt, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ M\geq 0. \tag{47}$$

Заметим, что для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda)$ условие (47) всегда выполнено (см. [15, с.67-68]). Действительно, поскольку их модули не превышают единицу на $[-1,1]$, мы можем записать $\int_{-1}^1 |p_n(\lambda)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 > \leq ||x_0||^2$. Поскольку $||p_n||_{L_2([a,b],h)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $n\in\mathbb{N}$, $||p_0||_{L_2([a,b],h)} = \sqrt{\pi}$ (см. [21, с.76]), мы получаем $||p_n||_{L_2([a,b],h)} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Если выбрать $M := \sqrt{\frac{2}{3}}||x_0||^2$, мы получим (47).

Напомним, что для ортонормированных многочленов $\widehat{p}_n(\lambda)$ имеет место формула Кристоффеля-Дарбу (см. [21, Теорема 1.5]):

$$\sum_{k=0}^n \widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(t) = \lambda_n \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t)}{\lambda - t}, \tag{48}$$

где $\lambda_n > 0$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\lambda, t\in\mathbb{R} : \lambda\neq t$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1 *Пусть задана полиномиальная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H, в представлении (17) которой многочлены $\{p_n(\lambda)\}_0^\infty$ ортогональны с весом $h(\lambda)$ на отрезке $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ и выполнены условия (44),(45). Пусть $t_0\in[a,b]$ - конечная точка из $[a,b]$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\gamma_{n,t_0} \to 0$, *при* $n \to \infty$, *где*
$\gamma_{n,t_0} := \frac{|\widehat{p}_n(t_0)|+|\widehat{p}_{n+1}(t_0)|}{M_{n,t_0}}$,
$M_{n,t_0} := \widehat{p}'_{n+1}(t_0)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(t_0)\widehat{p}_{n+1}(t_0), \quad n \in \mathbb{N};$
2) $\max_{\lambda \in U_{\varepsilon_0}(t_0)\cap[a,b]} \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|}{M_{n,t_0}} < C, \quad n \in \mathbb{N},$
где $U_{\varepsilon_0}(t_0) = \{\lambda \in R : |\lambda - t_0| \le \varepsilon_0\}$ *является* ε_0*-окрестностью точки* t_0, $\varepsilon_0 > 0$ *и* C *не зависит от* n.
Тогда

$$\frac{1}{\lambda_n M_{n,t_0}} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} x_k \to (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0, \qquad n \to \infty, \quad (49)$$

где $\lambda_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *являются коэффициентами из формулы Кристоффеля-Дарбу (48) для многочленов* $\{\widehat{p}_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, удовлетворяющая условию леммы. Обозначим $F_n(\lambda, t_0) = \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0}$, $\lambda \in \mathbb{R} :\ \lambda \ne t_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При $\lambda = t_0$ мы полагаем $F_n(t_0, t_0) := \lim_{\lambda \to t_0} F_n(\lambda, t_0)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Используя (48) при $t = t_0$ получаем

$$F_n(t_0, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} F_n(\lambda, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(t_0) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}^2_k(t_0). \qquad (50)$$

С другой стороны, используя правило Лопиталя получаем

$$F_n(t_0, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} F_n(\lambda, t_0) = \lim_{\lambda \to t_0} \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0} =$$

$$= \widehat{p}'_{n+1}(t_0)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(t_0)\widehat{p}_{n+1}(t_0) = M_{n,t_0}, \qquad (51)$$

где M_{n,t_0} из условия леммы.

Отметим, что $F_n(\lambda, t_0)$ является многочленом от λ. Используя (48) при $t = t_0$ записываем

$$F_n(A, t_0) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(A)\widehat{p}_k(t_0),$$

где оператор A из представления (17) для $\{x_n\}$. Значит

$$F_n(A, t_0)x_0 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \widehat{p}_k(t_0) \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} p_k(A)x_0;$$

$$\int_a^b F_n(\lambda, t_0) dE_\lambda x_0 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} \widehat{p}_k(t_0) x_k,$$

что следует из (17).

Заметим, что $M_{n,t_0} > 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, как следует из соотношений (50),(51). Разделим последнее равенство на M_{n,t_0}:

$$\frac{1}{\lambda_n M_{n,t_0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\|p_k\|_{L_2([a,b],h(\lambda))}} \widehat{p}_k(t_0) x_k = \int_a^b \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0. \tag{52}$$

Изучим интеграл в правой части. Его можно представить в виде суммы:

$$\int_a^b \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 = \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 + \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0, \tag{53}$$

где $U_\varepsilon(t_0)$ из условия леммы, $\varepsilon > 0$. Оценим первое слагаемое:

$$\| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} F_n(\lambda,t_0) dE_\lambda x_0 \|^2 = \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} |F_n(\lambda,t_0)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >=$$

$$= \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} |\frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0}|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >\leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} |\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >\leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_a^b |\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|^2 d < E_\lambda x_0, x_0 >= \frac{1}{\varepsilon^2} *$$

$$* < \int_a^b \left(\frac{p_{n+1}(\lambda)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_n(t_0) - \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_{n+1}(t_0) \right) dE_\lambda x_0,$$

$$\int_a^b \left(\frac{p_{n+1}(\lambda)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_n(t_0) - \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} \widehat{p}_{n+1}(t_0) \right) dE_\lambda x_0 >=$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \| \frac{\widehat{p}_n(t_0)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} x_{n+1} - \frac{\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} x_n \|^2.$$

Следовательно, можно записать

$$\| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 \| \leq \frac{1}{\varepsilon M_{n,t_0}} \| \frac{\widehat{p}_n(t_0)}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} x_{n+1} -$$

$$- \frac{\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} x_n \| \leq \frac{1}{\varepsilon M_{n,t_0}} \left(\frac{|\widehat{p}_n(t_0)| \|x_{n+1}\|}{\|p_{n+1}\|_{L_2([a,b],h)}} + \frac{|\widehat{p}_{n+1}(t_0)| \|x_n\|}{\|p_n\|_{L_2([a,b],h)}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{M}{\varepsilon M_{n,t_0}} (|\widehat{p}_n(t_0)| + |\widehat{p}_{n+1}(t_0)|) = \frac{M}{\varepsilon} \gamma_{n,t_0};$$

$$\| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 \| \leq \frac{M}{\varepsilon} \gamma_{n,t_0}, \tag{54}$$

где M из (45), γ_{n,t_0} из условия леммы.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (53). Полагаем

$$\widehat{E}_\lambda = \begin{cases} E_\lambda;\ \lambda < t_0 \\ E_{t_0-0};\ \lambda = t_0 \\ E_\lambda + E_{t_0-0} - E_{t_0+0};\ \lambda > t_0 \end{cases}.$$

Обозначим

$$I := \| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} d\widehat{E}_\lambda x_0 \|^2 = \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \left| \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} \right|^2 d < \widehat{E}_\lambda x_0, x_0 >,$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$I \leq \max_{\lambda\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \left| \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} \right|^2 \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} d < \widehat{E}_\lambda x_0, x_0 > \leq \frac{1}{M^2_{n,t_0}} *$$

$$* \max_{\lambda\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} |F_n(\lambda,t_0)|^2 < (\widehat{E}_{t_0+\varepsilon} - \widehat{E}_{t_0-\varepsilon}).x_0, x_0 >. \quad (55)$$

С помощью формулы Лагранжа для конечных приращений функции (для функции $f(\cdot) = \widehat{p}_{n+1}(\cdot)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\cdot)\widehat{p}_{n+1}(t_0)$ на $[\lambda, t_0]$) мы получаем

$$F_n(\lambda,t_0) = \frac{\widehat{p}_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(t_0)}{\lambda - t_0} =$$

$$= \frac{(\widehat{p}'_{n+1}(\xi)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\xi)\widehat{p}_{n+1}(t_0))(\lambda - t_0)}{\lambda - t_0} = \widehat{p}'_{n+1}(\xi)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\xi)\widehat{p}_{n+1}(t_0),$$

где $\xi \in [\lambda, t_0]$. Значит

$$\frac{1}{M^2_{n,t_0}} \max_{\lambda\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} |F_n(\lambda,t_0)|^2 \leq \frac{1}{M^2_{n,t_0}} *$$

$$* \max_{\xi\in[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} |\widehat{p}'_{n+1}(\xi)\widehat{p}_n(t_0) - \widehat{p}'_n(\xi)\widehat{p}_{n+1}(t_0)|^2 \leq C^2,$$

что следует из условия 2) леммы, если полагать $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Используя (55) мы получаем

$$I \leq C^2 < (\widehat{E}_{t_0+\varepsilon} - \widehat{E}_{t_0-\varepsilon})x_0, x_0 >, \quad (56)$$

где $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Следовательно, мы имеем

$$\sqrt{I} = \| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} d\widehat{E}_\lambda x_0 \| \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Используя определение $\widehat{E}_\lambda$ записываем

$$\| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda,t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \quad (57)$$

Для произвольного $\widetilde{\varepsilon} > 0$ выбираем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы

$$\| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}.$$

Используя условие 1) леммы выбираем $N_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{M}{\varepsilon}\gamma_{n,t_0} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}, \qquad n > N_0.$$

Тогда

$$\| \int_a^b \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| = \| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 +$$

$$+ \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| \leq \| \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} *$$

$$* dE_\lambda x_0 \| + \| \int_{[a,b]\cap U_\varepsilon(t_0)} \frac{F_n(\lambda, t_0)}{M_{n,t_0}} dE_\lambda x_0 - (E_{t_0+0} - E_{t_0-0})x_0 \| \leq \frac{M}{\varepsilon}\gamma_{n,t_0} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} = \widetilde{\varepsilon}, \qquad n > N_0,$$

где мы использовали (54). Приняв во внимание (52), мы получаем (49). □

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2 *Пусть дана полиномиальная последовательность Чебышева 2-го рода $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с разложением единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и выполнены условия (44),(45). Тогда справедливы следующие соотношения:*

1. $\frac{x_0+2x_1+3x_2+\ldots+(n+1)x_n}{n^3} \to \frac{1}{3}(E_{1+0} - E_{1-0})x_0$, *при* $n \to \infty$;
2. $\frac{x_0-2x_1+3x_2+\ldots+(-1)^n(n+1)x_n}{n^3} \to \frac{1}{3}(E_{-1+0} - E_{-1-0})x_0$, *при* $n \to \infty$;
3. $\frac{x_0-x_2+x_4+\ldots+(-1)^n x_{2n}}{n} \to (E_{+0} - E_{-0})x_0$, *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность из условия теоремы. Мы воспользуемся леммой 1 для точек $t_0 = -1, 0, 1$. Для многочленов Чебышева 2-го рода справедливо (см. [21, с.105,107]):

$$p_n(1) = n+1,\ p_n(-1) = (-1)^n(n+1),\ p_{2k}(0) = (-1)^k,\ p_{2k+1}(0) = 0, \quad n, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{58}$$

а также $\|p_n\|_{L_2([a,b],h)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Непосредственным дифференцированием получаем соотношение

$$p_n'(\lambda) = \frac{-(n+1)T_{n+1}(\lambda) + \lambda p_n(\lambda)}{1-\lambda^2}, \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1]) \tag{59}$$

где T_n являются многочленами Чебышева 1-го рода. Используя теперь правило Лопиталя вычисляем

$$p_n'(1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \quad p_n'(-1) = (-1)^{n+1}\frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{60}$$

$$p'_{2k}(0) = 0, \quad p'_{2k+1}(0) = (-1)^k(2k+2), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{61}$$

Мы вычисляем

$$M_{n,1} = M_{n,-1} = \frac{2}{3\pi}(n+1)(n+2)(2n+3), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$M_{2k,0} = M_{2k+1,0} = \frac{4}{\pi}(k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{62}$$

Далее, вычисляем

$$\gamma_{n,1} = \gamma_{n,-1} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_{2k+2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{k+2}}, \quad \gamma_{2k+1,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно,

$$\gamma_{n,1} \to 0,\ \gamma_{n,-1} \to 0,\ \gamma_{n,0} \to 0, \quad n \to \infty,$$

и условие 1) леммы 1 выполнено для $t_0 = -1, 0, 1$.

Положим

$$I_1(n,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(1) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(1)|}{M_{n,1}} = \frac{3|p'_{n+1}(\lambda)(n+1) - p'_n(\lambda)(n+2)|}{(n+1)(n+2)(2n+3)},$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in [-1,1]$. Тогда

$$I_1(n,\lambda) = \frac{3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(1-\lambda^2)}\,|-(n+1)(n+2)T_{n+2}+$$

$$+(n+1)\lambda p_{n+1} + (n+1)(n+2)T_{n+1} - (n+2)\lambda p_n| \le I_{1,1}(n,\lambda) + I_{1,2}(n,\lambda),$$

где $I_{1,1}(n,\lambda) := \frac{3}{(2n+3)(1-\lambda^2)}\,|T_{n+2} - T_{n+1}|$, $\quad I_{1,2}(n,\lambda) :=$ $\frac{3|\lambda|}{(n+1)(n+2)(2n+3)(1-\lambda^2)}\,|(n+1)p_{n+1} - (n+2)p_n|$, $\quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in [-1,1]$.

С помощью (48) мы можем записать

$$(n+1)p_{n+1}(\lambda) - (n+2)p_n(\lambda) = \frac{\pi}{2}(\widehat{p}_n(1)\widehat{p}_{n+1}(\lambda) - \widehat{p}_{n+1}(1)\widehat{p}_n(\lambda)) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(\lambda - 1)\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\widehat{p}_k(\lambda)\widehat{p}_k(1).$$

Поскольку $\lambda_n = \frac{1}{2}$, $|p_n(\lambda)| \le n+1$, $\lambda \in [-1,1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [21]), можно записать

$$|(n+1)p_{n+1}(\lambda) - (n+2)p_n(\lambda)| \le \pi|\lambda - 1|\sum_{k=0}^{n}|\widehat{p}_k(\lambda)||\widehat{p}_k(1)| = 2|\lambda - 1| *$$

$$* \sum_{k=0}^{n} (k+1)|\widehat{p}_k(\lambda)| \leq 2|\lambda - 1| \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \leq 2|\lambda - 1|(n+1)^3.$$

Значит

$$|I_{1,2}(n,\lambda)| \leq \frac{6(n+1)^2|\lambda|}{(n+2)(2n+3)|1+\lambda|} \leq \frac{6|\lambda|}{|1+\lambda|} \leq 6, \qquad \lambda \in [0,1], \ n \in \mathbb{Z}_+. \quad (63)$$

С другой стороны, легко получаем

$$|I_{1,1}(n,\lambda)| \leq \frac{3|\arccos^2 \lambda|}{2(1-\lambda^2)} \leq \frac{3}{2}\left|\frac{\arccos^2 \lambda}{1-\lambda}\right| \leq M, \quad M > 0, \ \lambda \in [0,1], \ n \in \mathbb{Z}_+. \quad (64)$$

Из (63),(64) следует, что

$$I_1(n,\lambda) \leq M_1, \qquad \lambda \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}, \ M_1 > 0. \quad (65)$$

Аналогичным образом получаем

$$I_{-1}(n,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(-1) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(-1)|}{M_{n,-1}} \leq M_2, \quad (66)$$

где $\lambda \in [-1,0]$, $n \in \mathbb{N}$, $M_2 > 0$. Положим

$$I_0(2k,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{2k+1}(\lambda)\widehat{p}_{2k}(0) - \widehat{p}'_{2k}(\lambda)\widehat{p}_{2k+1}(0)|}{M_{2k,0}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \ \lambda \in [-1,1].$$

Если $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, то

$$I_0(2k,\lambda) = \frac{|p'_{2k+1}(\lambda)|}{2(k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(1-\lambda^2)}|-(2k+2)T_{2k+2}(\lambda) + \lambda p_{2k+1}(\lambda)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(k+1)(1-\lambda^2)}(2k+2+|\lambda|(2k+2)) = \frac{1}{1-|\lambda|} \leq 2, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Обозначим

$$I_0(2k+1,\lambda) := \frac{|\widehat{p}'_{2k+2}(\lambda)\widehat{p}_{2k+1}(0) - \widehat{p}'_{2k+1}(\lambda)\widehat{p}_{2k+2}(0)|}{M_{2k+1,0}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \ \lambda \in [-1,1].$$

Используя последние соотношения мы получаем

$$I_0(2k+1,\lambda) = \frac{|p'_{2k+1}(\lambda)|}{2(k+1)} \leq 2, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{2}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, условие 2) леммы 1 выполняется для точек $t_0 = -1, 0, 1$. Применяя теперь лемму 1 мы получаем утверждение теоремы. □

Имеет место следующая теорема:

Теорема 3 *Пусть задана полиномиальная последовательность Лежандра $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с разложением единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ и выполнены условия (44),(45). Тогда справедливы следующие соотношения:*

1. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)x_k \to (E_{1+0}-E_{1-0})x_0$, *при* $n\to\infty$;
2. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)x_k \to (E_{-1+0}-E_{-1-0})x_0$, *при* $n\to\infty$;
3. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(4k+1)\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x_{2k} \to \frac{\pi}{4}(E_{+0}-E_{-0})x_0$, *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность, удовлетворяющая условию теоремы. Мы, как и в доказательстве предыдущей теоремы, воспользуемся леммой 1 для точек $t_0=-1,0,1$. Для многочленов Лежандра имеет место (см. [21, с.118,120,125]):

$$\|p_n\|_{L_2([-1,1],h(\lambda))}=\sqrt{\frac{2}{2n+1}},\quad \widehat{p}_n(\lambda)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}p_n(\lambda);$$

$$p_n(1)=1,\quad p_n(-1)=(-1)^n,\quad p_{2k}(0)=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},\quad p_{2k+1}(0)=0,$$

$$p'_{2k}(0)=0,\quad p'_{2k+1}(0)=(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!},\qquad k,n\in\mathbb{Z}_+. \tag{67}$$

Используя соотношение (см. [21, с.124])

$$p'_n(\lambda)-\lambda p'_{n-1}(\lambda)=np_{n-1}(\lambda),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{68}$$

мы вычисляем

$$p'_n(1)=p'_{n-1}(1)+n=p'_0(\lambda)+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{69}$$

В силу четности функции $h(\lambda)$ и того, что $[a,b]=[-1,1]$, мы заключаем, что (см. [21, Теорема 1.3])

$$p'_n(-1)=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{70}$$

Используя (67),(69),(70) мы вычисляем

$$M_{n-1,1}=M_{n-1,-1}=\frac{1}{2}\sqrt{4n^2-1}n,\qquad n=2,3,...,$$

$$M_{2k,0}=\frac{1}{2}\sqrt{(4k+3)(4k+1)}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2(2k+1),\qquad k\in\mathbb{N},$$

$$M_{2k+1,0}=\frac{1}{2}\sqrt{(4k+5)(4k+3)}\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\right)^2\frac{1}{2k+2},\qquad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\gamma_{n,1}=\gamma_{n,-1}=\frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}+\sqrt{\frac{2n+3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{4(n+1)^2-1}(n+1)},\qquad n\in\mathbb{N},$$

$$\gamma_{2k,0} = \frac{\sqrt{2}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}}{\sqrt{(4k+3)(2k+1)}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_{2k+1,0} = \frac{\sqrt{2}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}}{\sqrt{(4k+3)}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \tag{71}$$

мы получаем

$$\gamma_{2k,0} \sim \frac{\sqrt{2\pi k}}{\sqrt{4k+3}(2k+1)}, \ \gamma_{2k+1,0} \sim \frac{\sqrt{2\pi k}}{\sqrt{4k+3}(2k+1)}, \qquad k \to \infty.$$

Следовательно, $\gamma_{n,1} \to 0$, $\gamma_{n,-1} \to 0$, $\gamma_{n,0} \to 0$, $\quad n \to \infty$, и выполнено условие 1) леммы 1 для точек $t_0 = -1, 0, 1$.

Полагаем

$$I_1 := \frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(1) - \widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(1)|}{M_{n,1}} = \frac{|p'_{n+1}(\lambda) - p'_n(\lambda)|}{n+1}, \quad \lambda \in [-1,1], \ n \in \mathbb{N}.$$

С помощью (68) мы получаем

$$I_1 = \frac{|\lambda p'_n(\lambda) + (n+1)p_n(\lambda) - p'_n(\lambda)|}{n+1} \le |p_n(\lambda)| + \frac{|(\lambda-1)p'_n(\lambda)|}{n+1}.$$

Для многочленов Лежандра имеет место оценка [21, с.128]:

$$|p_n(\lambda)| \le 1, \qquad \lambda \in [-1,1], \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{72}$$

Значит

$$I_1 \le 1 + \frac{|(\lambda-1)p'_n(\lambda)|}{n+1}.$$

Заметим, что $p_n(\lambda) = p_n(\lambda;0,0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $p_n(\lambda;\alpha,\beta)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ являются стандартизованными многочленами Якоби [21, с.268]. Для $p_n(\lambda;\alpha,\beta)$ справедлива формула дифференцирования [21, с.282]:

$$p'_n(\lambda;\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)p_{n-1}(\lambda;\alpha+1,\beta+1), \qquad \lambda \in [-1,1], \ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, можно записать

$$p'_n(\lambda) = \frac{1}{2}(n+1)p_{n-1}(\lambda;1,1), \qquad \lambda \in [-1,1], \ n \in \mathbb{N}. \tag{73}$$

Из оценки [21, с.299]

$$(1-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+\lambda)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}|p_n(\lambda;\alpha.\beta)| \le \frac{c_{11}}{\sqrt{n}}, \qquad \lambda \in [-1,1], \ c_{11} > 0, \ n \in \mathbb{N}, \tag{74}$$

мы получаем

$$|(1-\lambda)p_n'(\lambda)| = \frac{1}{2}(n+1)|(1-\lambda)p_{n-1}(\lambda;1,1)| = \frac{1}{2}(n+1)(1-\lambda)^{\frac{1}{4}}(1+\lambda)^{-\frac{3}{4}}*$$

$$*(1-\lambda)^{\frac{3}{4}}(1+\lambda)^{\frac{3}{4}}|p_{n-1}(\lambda;1,1)| \le \frac{1}{2}(n+1)(1-\lambda)^{\frac{1}{4}}(1+\lambda)^{-\frac{3}{4}}\frac{c_{11}}{\sqrt{n}},$$

$$|(1-\lambda)p_n'(\lambda)| \le \frac{1}{2}c_{11}\frac{(n+1)}{\sqrt{n}}, \qquad \lambda\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

Значит

$$I_1 \le 1+\frac{c_{11}}{2\sqrt{n}} \le 1+\frac{c_{11}}{2}, \qquad \lambda\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}. \tag{75}$$

Полагаем

$$I_{-1} := \frac{|\widehat{p}_{n+1}'(\lambda)\widehat{p}_n(-1)-\widehat{p}_n'(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(-1)|}{M_{n,-1}}, \qquad \lambda\in[-1,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

Используя (68),(72),(73),(74) мы записываем

$$I_{-1} = \frac{|p_{n+1}'(\lambda)+p_n'(\lambda)|}{n+1} = \frac{|\lambda p_n'(\lambda)+(n+1)p_n(\lambda)+p_n'(\lambda)|}{n+1} \le$$

$$\le |p_n(\lambda)| + \frac{|(\lambda+1)p_n'(\lambda)|}{n+1} \le 1+\frac{|(\lambda+1)p_n'(\lambda)|}{n+1} =$$

$$= 1+\frac{1}{2}|(\lambda+1)p_{n-1}(\lambda;1,1)| = 1+\frac{1}{2}(1+\lambda)^{\frac{1}{4}}(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}(1+\lambda)^{\frac{3}{4}}(1-\lambda)^{\frac{3}{4}}*$$

$$*|p_{n-1}(\lambda;1,1)| \le 1+\frac{1}{2}(1+\lambda)^{\frac{1}{4}}(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}\frac{c_{11}}{\sqrt{n}} \le 1+\frac{c_{11}}{2\sqrt{n}};$$

$$I_{-1} \le 1+\frac{c_{11}}{2}, \qquad \lambda\in[-1,0],\ n\in\mathbb{N}. \tag{76}$$

Пусть

$$I_0^n := \frac{|\widehat{p}_{n+1}'(\lambda)\widehat{p}_n(0)-\widehat{p}_n'(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(0)|}{M_{n,0}}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda\in[-1,1].$$

Тогда

$$I_0^{2k} = I_0^{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}|p_{2k+1}'(\lambda)|, \qquad k\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda\in[-1,1].$$

С помощью соотношений (73),(74) записываем

$$I_0^{2k} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\frac{1}{2}(2k+2)|p_{2k}(\lambda;1,1)| \le \frac{(2k)!!(2k+2)}{2(2k+1)!!}(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}(1+\lambda)^{-\frac{3}{4}}*$$

$$*\frac{c_{11}}{\sqrt{2k}} \le \frac{(2k+2)!!\sqrt[4]{8}c_{11}}{2(2k+1)!!\sqrt{2k}}, \qquad \lambda\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}],\ k\in\mathbb{N}.$$

Поскольку $\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!\sqrt{2k}} \sim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, выражение $\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!\sqrt{2k}}$ ограничено и мы получаем

$$I_0^{2k} = I_0^{2k+1} \leq \widetilde{M_0}, \quad \lambda \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}], \ k \in \mathbb{N}, \ \widetilde{M_0} > 0.$$

Из последнего неравенства и (75),(76) мы заключаем, что условие 2) леммы 1 выполняется для точек $t_0 = -1, 1, 0$, при $C = 1 + \frac{c_{11}}{2}, 1 + \frac{c_{11}}{2}, \widetilde{M_0}$ и $\varepsilon_0 = 1, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$, соответственно. Заметим, что для многочленов Лежандра имеет место соотношение [21, с.121]:

$$\lambda_n = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя это соотношение и лемму 1 мы получаем предельные соотношения из условия теоремы. □

Для полиномиальных последовательностей Эрмита имеет место теорема:

Теорема 4 *Пусть задана полиномиальная последовательность Эрмита* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *с разложением единицы* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *и выполняется условие (45). Тогда имеет место следующее соотношение:*
$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!4^k} x_{2k} \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} (E_{+0} - E_{-0}) x_0$, *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - полиномиальная последовательность Эрмита, которая удовлетворяет условиям теоремы. Используем лемму 1 для точки $t_0 = 0$. Заметим, что для многочленов Эрмита выполнены соотношения [21, с.175]

$$\widehat{p_n}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} p_n(\lambda), \quad p_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} = (-1)^k 2^k (2k-1)!!,$$

$$p_{2k+1}(0) = 0, \quad p'_{2k}(0) = 0, \quad p'_{2k+1}(0) = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!} 2, \qquad n, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{77}$$

С помощью (77) мы вычисляем

$$M_{2k,0} = \widehat{p}'_{2k+1}(0)\widehat{p}_{2k}(0) - \widehat{p}'_{2k}(0)\widehat{p}_{2k+1}(0) = \frac{(2k+1)!(2k-1)!!}{k!\sqrt{\pi(2k+1)!(2k)!2^{2k-1}}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$M_{2k+1,0} = \widehat{p}'_{2k+2}(0)\widehat{p}_{2k+1}(0) - \widehat{p}'_{2k+1}(0)\widehat{p}_{2k+2}(0) =$$

$$= \frac{(2k+1)!(2k+1)!!}{k!\sqrt{\pi(2k+2)!(2k+1)!2^{2k-1}}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя (77),(71) мы записываем

$$\gamma_{2k,0} = \frac{|\widehat{p}_{2k}(0)| + |\widehat{p}_{2k+1}(0)|}{M_{2k,0}} = \frac{\sqrt[4]{\pi} k! \sqrt{2^{2k-1}}}{\sqrt{(2k+1)!}} = \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)}} *$$

$$*\sqrt{\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}}\sim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{(2k+1)}}\sqrt[4]{\pi k}\sim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-\frac{1}{4}};$$

$$\gamma_{2k+1,0}=\frac{|\widehat{p}_{2k+1}(0)|+|\widehat{p}_{2k+2}(0)|}{M_{2k+1,0}}=\frac{\sqrt[4]{\pi}k!\sqrt{2^{2k-1}}}{\sqrt{(2k+1)!}}\sim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-\frac{1}{4}}.$$

Значит $\gamma_{n,0}\to 0,\ n\to\infty$ и выполнено условие 1) леммы 1 для точки $t_0=0$. Положим

$$I_n:=\frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(0)-\widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(0)|}{M_{n,0}},\qquad n\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Отсюда

$$I_{2k}=I_{2k+1}=\frac{k!}{2(2k+1)!}|p'_{2k+1}(\lambda)|,\qquad k\in\mathbb{Z}_+,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Для многочленов Эрмита справедливо [21, с.178]

$$p'_n(\lambda)=2np_{n-1}(\lambda),\qquad n\in\mathbb{N},\tag{78}$$

а также [21, Теорема 5.2]

$$p_n(\lambda)=\widetilde{\lambda}_n e^{\frac{\lambda^2}{2}}[\cos(\sqrt{2n+1}\lambda-\frac{n\pi}{2})+R_n(\lambda)],$$

где $R_n(\lambda)$ является остаточным членом, допускающим оценку:

$$|R_n(\lambda)|\le c_3 n^{-\frac{1}{4}}|\lambda|^{\frac{5}{2}},\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

$$\widetilde{\lambda}_n=\begin{cases}\frac{(2m)!}{m!}, & \text{если } n=2m\\ \frac{2(2m+1)!}{m!\sqrt{4m+3}}, & \text{если } n=2m+1\end{cases},\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

и константа c_3 не зависит от n и λ. $n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$|p_{2k}(\lambda)|\le\frac{(2k)!}{k!}e^{\frac{\lambda^2}{2}}(1+c_3(2k)^{-\frac{1}{4}}|\lambda|^{\frac{5}{2}}),\qquad \lambda\in\mathbb{R},\ k\in N.$$

Следовательно, используя (78) мы получаем

$$I_{2k}=\frac{k!}{2(2k+1)!}|p'_{2k+1}(\lambda)|=\frac{k!}{(2k)!}|p_{2k}(\lambda)|\le e^{\frac{\lambda^2}{2}}(1+c_3(2k)^{-\frac{1}{4}}|\lambda|^{\frac{5}{2}})\le\sqrt{e}*$$

$$*(1+c_3(2k)^{-\frac{1}{4}})\le\sqrt{e}(1+c_3),\qquad \text{если } \lambda\in[-1,1],\ k\in\mathbb{N}.$$

Значит

$$\max_{\lambda\in[-1,1]}I_{2k}=\max_{\lambda\in[-1,1]}I_{2k+1}\le\sqrt{e}(1+c_3),\qquad k\in\mathbb{Z}_+.$$

$$\max_{\lambda\in[-1,1]}\frac{|\widehat{p}'_{n+1}(\lambda)\widehat{p}_n(0)-\widehat{p}'_n(\lambda)\widehat{p}_{n+1}(0)|}{M_{n,0}}\le\sqrt{e}(1+c_3),\qquad n\in\mathbb{Z}_+.\tag{79}$$

Таким образом, условие 2) леммы 1 выполнено для точки $t_0 = 0$ при $\varepsilon_0 = 1$, $C = \sqrt{e}(1 + c_3)$. Применяя лемму 1 мы получаем

$$\frac{1}{\lambda_{2k} M_{2k,0}} \sum_{j=0}^{2k} \widehat{p}_j'(0) \frac{1}{\sqrt{j! 2^j \sqrt{\pi}}} x_j \to (E_{+0} - E_{-0}) x_0, \quad k \to \infty.$$

Для многочленов Эрмита имеет место [21, с.172]: $\lambda_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Используя это, а также соотношения (77),(71), мы получаем предельное соотношение из условия теоремы. □

3. P-стационарные последовательности

3.1. Определение P-стационарной последовательности. Разностное соотношение для корреляционной функции

Следующее определение является основным в этом параграфе:

Определение 2 *Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H называется* **P-стационарной**, *если она допускает представление*

$$x_n = p_n(U) x_0 = \int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) dF_\theta x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{80}$$

где $\{p_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является системой ортогональных многочленов на единичной окружности $\mathbb{T}$, U является некоторым унитарным оператором в H и $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ есть его ортогональное разложение единицы (не обязательно непрерывное слева или справа).

Напомним, что набор многочленов $\{p_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ($\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент) является системой ортогональных многочленов на единичной окружности, если выполнено соотношение

$$\int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) \overline{p_m(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = A_n \delta_{n,m}, \quad A_n > 0, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{81}$$

где $\sigma(\theta)$ - неубывающая функция на $[0, 2\pi]$, нормированная условием $\int_0^{2\pi} d\sigma = 1$.

В том случае, когда функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, мы обозначаем $p(\theta) = \sigma'(\theta)$ п.в. на $[0, 2\pi]$ и называем функцию $p(\theta)$ весом. Также мы обозначаем $\varphi_n(\lambda) := \frac{p_n(\lambda)}{\|p_n\|_{L_2([0,2\pi],d\sigma)}}$ и $\phi_n(\lambda) := \frac{\varphi_n(\lambda)}{\kappa_n}$, где κ_n является старшим коэффициентом φ_n. Напомним, что многочлены φ_n называются ортонормированными, а многочлены ϕ_n - многочленами с единичным старшим коэффициентом.

Отметим, что в случае $\sigma(\theta) = \frac{1}{2\pi}\theta$ и $p_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ мы получаем часть стационарной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с неотрицательными индексами n. Это будет использовано в следующем пункте.

Напомним необходимые нам сведения из теории ортогональных многочленов на $\mathbb{T}$. Числа $a_n := \phi_n(0)$ известны, как параметры Шура. Известно, что $|a_n| < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ортонормированные многочлены φ_n удовлетворяют рекуррентному соотношению [27]

$$z\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j}\varphi_j(z), \tag{82}$$

где $d_{n,n+1} = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}$, $d_{n,j} = -\frac{\kappa_j}{\kappa_n}\overline{a_j}a_{n+1}$, а κ_j является старшим коэффициентом φ_j.

Известно, что [27, Proposition 2.2]

$$\kappa_n = \frac{\kappa_{n-1}}{\sqrt{1-|a_n|^2}}, \ \kappa_0 = 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{83}$$

Обратно, любой набор чисел $a_0 = 1$, $a_n \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$, задает систему ортонормированных многочленов на $\mathbb{T}$ с помощью соотношений (82),(83), где мы полагаем $\varphi_0 = 1$. Такое соответствие между наборами чисел и ортонормированными многочленами на $\mathbb{T}$ является взаимно-однозначным.

Имеет место следующая теорема

Теорема 5 *Пусть дана P-стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с ортонормированными многочленами $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Тогда ее корреляционная функция $K_{n,m}$ удовлетворяет следующему разностному соотношению:*

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m+1} d_{n,j}\overline{d_{m,k}}K_{j,k} = K_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \tag{84}$$

где $d_{n,j}$ из (82),(83).

Доказательство. Из соотношений (82),(80) следует, что

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m+1} d_{n,j}\overline{d_{m,k}}K_{j,k} = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m+1} d_{n,j}\overline{d_{m,k}}\int_0^{2\pi} \varphi_j(e^{i\theta})\overline{\varphi_k(e^{i\theta})}d < F_\theta x_0, x_0 >=$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\varphi_n(e^{i\theta})\overline{e^{i\theta}\varphi_m(e^{i\theta})}d < F_\theta x_0, x_0 >= K_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+.$$

□

В том случае, когда последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ состоит из линейно независимых элементов, справедливо обратное утверждение:

Теорема 6 *Пусть дана последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H, *состоящая из линейно независимых элементов. Если корреляционная функция последовательности* $K_{n,m}$ *удовлетворяет разностному соотношению (84), то последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является P-стационарной с ортонормированной системой многочленов в некотором гильбертовом пространстве* $\widetilde{H} \supseteq H$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является последовательностью, удовлетворяющей условию теоремы. Обозначим $M := \mathrm{Lin}\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ и $D := \mathrm{span}\{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Определим оператор V следующим образом:

$$Vx_n = \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j} x_j, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{85}$$

где $d_{n,j}$ из (84), и продолжим это определение по линейности на M.

Для произвольных элементов $x^1, x^2 \in M$, $x^1 = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k x_k$, $x^2 = \sum_{j=0}^{r} \beta_j x_j$, $\alpha_k, \beta_j \in \mathbb{C}$, $l, r \in \mathbb{Z}_+$, мы можем записать

$$< Vx^1, Vx^2 >_H = \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=0}^{r} \alpha_k \overline{\beta_j} < Vx_k, Vx_j >_H =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=0}^{r} \alpha_k \overline{\beta_j} < \sum_{s=0}^{k+1} d_{k,s} x_s, \sum_{m=0}^{j+1} d_{j,m} x_m >_H =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=0}^{r} \alpha_k \overline{\beta_j} (\sum_{s=0}^{k+1} \sum_{m=0}^{j+1} d_{k,s} \overline{d_{j,m}} K_{s,m}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=0}^{r} \alpha_k \overline{\beta_j} K_{k,j} = < \sum_{k=0}^{l} \alpha_k x_k, \sum_{j=0}^{r} \beta_j x_j >_H = < x^1, x^2 >_H;$$

Следовательно, оператор V является изометрическим. Продолжим его по непрерывности на D. Если $D \neq H$, то для $x \in H$, $x = x_D + x_{H\ominus D}$, $x_D \in D$, $x_{H\ominus D} \in H \ominus D$, мы полагаем $Vx = Vx_D + x_{H\ominus D}$. Таким образом мы получаем изометрический оператор, определенный на всем H. Существует унитарный оператор U в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$ такой, что

$$Ux = Vx, \qquad x \in H, \tag{86}$$

см. [28, с.367-368]. Покажем по индукции, что

$$x_n = \varphi_n(U) x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{87}$$

где $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ являются многочленами, определенными рекурсивно формулой (82) с коэффициентами $d_{n,j}$ из (84), $\varphi_0 := 1$. Как было замечено выше, такие многочлены ортонормированы на $\mathbb{T}$.

Для $n = 0$ равенство (87) выполнено. Предположим, что это равенство выполняется для $n = 0, 1, ..., k;\ k \in \mathbb{Z}_+$. Используя (85),(86),(82) и спектральное разложение оператора U: $U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF_\theta$, где $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ есть ортогональное разложение единицы, мы записываем

$$x_{k+1} = \frac{1}{d_{k,k+1}}(Ux_k - \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}x_j) = \frac{1}{d_{k,k+1}}(U\varphi_k(U)x_0 - \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}\varphi_j(U)x_0) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{d_{k,k+1}}(e^{i\theta}\varphi_k(e^{i\theta}) - \sum_{j=0}^{k} d_{k,j}\varphi_j(e^{i\theta}))dF_\theta x_0 = \int_0^{2\pi} \varphi_{k+1}(e^{i\theta})dF_\theta x_0;$$

$$x_{k+1} = \varphi_{k+1}(U)x_0.$$

Следовательно, соотношение (87) выполнено. Пользуясь определением P-стационарной последовательности мы заключаем, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является P-стационарной последовательностью с ортонормированной системой многочленов в пространстве $\widetilde{H}$. □

3.2 Разложение спектральной функции P-стационарной последовательности в ряд. Определение спектральной функции стационарной последовательности по части последовательности

Рассмотрим P-стационарную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированной системой многочленов относительно функции $\sigma(\theta)$ в представлении (80). Посредством $\widetilde{p}(\theta)$ обозначим производную абсолютно непрерывной части $\sigma(\theta)$, которая существует п.в. на $[0, 2\pi]$. Хорошо известно, что условие Сегё

$$\int_0^{2\pi} \ln \widetilde{p}(\theta)d\theta > -\infty$$

является необходимым и достаточным условием неплотности многочленов в пространстве $L_2([0, 2\pi], d\sigma)$. Обозначим

$$\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ 0, & \theta \in [0, 2\pi]\backslash[\theta_1, \theta_2] \end{cases}. \tag{88}$$

Имеет место следующее предложение:

Предложение 2 *Пусть дана P-стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированными многочленами $\{p_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, весом $p(\theta)$ и разложением единицы $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ в представлении (80). Предположим, что*

(i) функция $< F_\theta x_0, x_0 >$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, существует п.в. на $[0, 2\pi]$ производная $(< F_\theta x_0, x_0 >)' =: f(\theta)$;

(ii) $f(\theta) \leq Cp(\theta)$, $C \geq 0$ *на* $[0, 2\pi]$;

(iii) $\int_0^{2\pi} \ln p(\theta) d\theta = -\infty$.

Тогда

$$(F_{\theta_2} - F_{\theta_1})x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k, \tag{89}$$

где ряд сходится в метрике H, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ *и*

$$a_k = \int_0^{2\pi} \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)\overline{p_k(e^{i\theta})}p(\theta)d\theta. \tag{90}$$

Доказательство. Рассмотрим P-стационарную последовательность, удовлетворяющую условиям предложения. Для определенной выше функции $\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)$ можно записать

$$\int_0^{2\pi} |\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)|^2 d < F_\theta x_0, x_0 > \leq \int_0^{2\pi} d < F_\theta x_0, x_0 > = \|x_0\|^2 < \infty;$$

$$\int_0^{2\pi} |\mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta)|^2 p(\theta) d\theta \leq \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta < \infty.$$

Определим коэффициенты a_k посредством равенства (90). Для произвольных $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ мы можем записать

$$\|(F_{\theta_2} - F_{\theta_1})x_0 - \sum_{k=0}^{N} a_k x_k\|^2 = \| \int_0^{2\pi} \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) dF_\theta x_0 -$$

$$- \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) dF_\theta x_0\|^2 = \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) \right|^2 *$$

$$* d < F_\theta x_0, x_0 > = \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) \right|^2 f(\theta) d\theta \leq$$

$$\leq C \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) - \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(e^{i\theta}) \right|^2 p(\theta) d\theta \to 0, \quad N \to \infty,$$

поскольку многочлены плотны в $L_2([0, 2\pi], p)$. □

Заметим, что последнее предложение, как и предложение 1, можно сформулировать и без требования абсолютной непрерывности $< F_\theta x_0, x_0 >$. Но тогда условия (ii) примут сложный, трудно проверяемый вид.

Обратимся теперь к вопросу об определении спектральной функции стационарной последовательности по части последовательности. Для этого нам понадобится специальная система ортонормированных многочленов, для которой условие Сегё не выполнено. Именно, рассмотрим число $\varepsilon_0 : \ 0 < \varepsilon_0 < 2\pi$ и функцию

$$p(\theta) := \begin{cases} 0, & \theta \in [0, \varepsilon_0) \\ \frac{1}{2\pi - \varepsilon_0}, & \theta \in [\varepsilon_0, 2\pi] \end{cases}. \tag{91}$$

Пусть $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является системой ортонормированных многочленов относительно веса $p(\theta)$ на $[0,2\pi]$. Предположим, что многочлен p_k имеет вид

$$p_k(z) = \sum_{j=0}^{k} b_{k,j} z^j, \qquad b_{k,j} \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{92}$$

Заметим, что ортогональные многочлены на $\mathbb{T}$ с весом из (91) описаны в [29, с.54]. Имеет место следующая теорема:

Теорема 7 *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является стационарной последовательностью в гильбертовом пространстве H. Предположим, что разложение единицы $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ из представления последовательности (1) обладает свойствами:*

(i) функция $< F_\theta x_0, x_0 >$ абсолютно непрерывна на $[0,2\pi]$ и, следовательно, п.в. на $[0,2\pi]$ существует производная $(< F_\theta x_0, x_0 >)' =: f(\theta)$;

(ii) $f(\theta) \le C,\ C \ge 0$ на $[0,2\pi]$;

(iii) $f(\theta) = 0,\ \theta \in [0,\varepsilon_0],\ 0 < \varepsilon_0 < 2\pi$.

Положим

$$\widehat{x}_k := \sum_{j=0}^{k} b_{k,j} x_j, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{93}$$

где $b_{k,j}$ из (92).

Тогда

$$(F_{\theta_2} - F_{\theta_1}) x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \widehat{x}_k, \tag{94}$$

где ряд сходится в метрике H, $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi]$ и

$$a_k = \int_0^{2\pi} \mathbf{X}_{\theta_1,\theta_2}(\theta) \overline{p_k(e^{i\theta})} p(\theta) d\theta, \tag{95}$$

с p_k из (92).

Доказательство. Пусть задана стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющая условиям теоремы. Определим последовательность $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с помощью (93). Последовательность $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является P-стационарной с многочленами $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ из (92), весовой функцией $p(\theta)$ из (91) и разложением единицы $\{F_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ в представлении (80). Из условий (i)-(iii) теоремы следует, что для последовательности $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнены условия предложения 2. Применяя предложение 2 мы получаем, что имеет место соотношение (94). □

Пусть задана стационарная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве H со спектральным разложением (1). Полагаем

$$\widehat{F}_\theta := \begin{cases} F_{\theta+2\pi} - F_\pi, & \theta \in [-\pi, 0] \\ F_\theta + F_{2\pi} - F_\pi, & \theta \in (0, \pi] \end{cases} \tag{96}$$

Тогда $\{\widehat{F}_\theta\}_{\theta\in[-\pi,\pi]}$ является ортогональным разложением единицы, для которого справедливы соотношения (1),(2), в которых интегралы берутся в пределах $[-\pi,\pi]$. И наоборот, зная $\{\widehat{F}_\theta\}_{\theta\in[-\pi,\pi]}$ можно вычислить $\widehat{F}_\pi = F_{2\pi}$, $\widehat{F}_0 = F_{2\pi} - F_\pi$, чтобы получить $F_\pi, F_{2\pi}$, а затем используя (96) определить F_θ для всех $\theta \in [0,2\pi]$. Хорошо известно [26, Теорема 6.3, с.38], что функцию $(\widehat{F}_{\theta_2} - \widehat{F}_{\theta_1})x_0$, где $\theta_1,\theta_2 \in [-\pi,\pi]$ не являются точками с концентрированной массой для меры F, можно разложить в ряд:

$$(\widehat{F}_{\theta_2} - \widehat{F}_{\theta_1})x_0 = \frac{1}{2\pi}(\theta_2-\theta_1)x_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}:\ n\neq 0} \frac{e^{-i\theta_2 n} - e^{-i\theta_1 n}}{-in} x_n, \tag{97}$$

сходящийся в среднем квадратичном. Заметим, что этот ряд использует элементы x_n при $n<0$. Действительно, коэффициент при x_n при фиксированном θ_1 является тригонометрическим многочленом от θ_2, а значит обращается в нуль лишь при конечном числе значений из отрезка $[-\pi,\pi]$.

Предположим, что для $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ выполнены условия предыдущей теоремы. Мы можем вычислить

$$a_n := \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d < F_\theta x_0, x_0 > = < \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF_\theta x_0, x_0 > =$$

$$= < x_n, x_0 >, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Числа a_n являются коэффициентами Фурье функции $f(\theta)$. Функция $f(\theta)$ не принадлежит классу Харди H^2 на $\mathbb{D}$, поскольку условие (iii) последней теоремы невозможно для функций из H^2. Следовательно, найдутся ненулевые a_n, а значит и x_n при $n<0$. Таким образом, ряд (97) нельзя использовать для последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, если не знать всех элементов последовательности.

В перспективе можно рассматривать различные интерполяционные задачи для полиномиальных последовательностей, аналогичные интерполяционным задачам для стационарных последовательностей (см. [26],[30] и [31] для операторнозначных процессов). Также открыты вопросы о существовании разложения во временной области, аналогичного разложению Вольда для стационарных последовательностей, об аналоге разложения на регулярную и сингулярную части стационарной последовательности (см. [26],[32],[33]).

Помимо этого, другие классы систем ортогональных многочленов могут быть использованы при изучении случайных последовательностей, например, ортогональные многочлены на лучах [34].

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. // Бюлл. МГУ, - 1941. - 6. - С. 1-40.

2. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений. // ДАН СССР, - 1940. - 26. - С. 6-9.

3. Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. // ДАН СССР, - 1940. - 26. - С. 115-118.

4. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем. // УМН, - 1958. - 2(80). - С. 93-142.

5. Крейн М.Г. О проблеме продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве. // ДАН СССР, - 1944. - 4. - С. 4-9.

6. Крейн М.Г. Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений и лоренцовы преобразования. // УМН, - 1948. - 3(25). - С. 40-51.

7. Яглом А.М. Спектральные представления для различных классов случайных функций. // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда, - 1963. - 1. - С. 250-273.

8. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. Phys., - 1947. - 37. - P. 3-79.

9. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: Гос. издат. тех.-теор. лит., - 1957.

10. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. - Харьков: Изд. Харьк. ун-та, - 1971.

11. Kirchev K., Zolotarev V. Nonstationary curves in Hilbert spaces and their correlation functions I. // Integr.Equat.Oper.Th., - 1994. - 19. - P. 270-289.

12. Kirchev K., Zolotarev V. Nonstationary curves in Hilbert spaces and their correlation functions II. // Integr.Equat.Oper.Th., - 1994. - 19. - P. 447-457.

13. Бендука Б., Железнякова Э.Ю. Корреляционная теория нестационарных последовательностей в гильбертовом пространстве. // Вестник ХГПУ, - 1997. - 7. - С. 14-20.

14. Загороднюк С.М. О свойствах последовательностей, имеющих спектральное разложение по системам полиномов. // Доповіді НАН Украіни, - 1998. - 8. - С. 30-33.

15. Загороднюк С.М. О полиномиальных последовательностях в гильбертовом пространстве. // Вісник Харківськ. університету, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка - 1999. - 458. - 62-78.

16. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. - М.: Изд. иностр. лит., - 1956.

17. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, - 1972.

18. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. - Москва Ленинград: Гос.тех.-теор.издат., - 1934.

19. Талдыкин А.Т. Элементы прикладного функционального анализа. - М.: Высшая школа, - 1982. - 384 с.

20. Loéve M. Etude asymptotique de sommes de variables aléatoires liées. // J. Math. Pures Appl., - 1945. - 9. - P. 249-318.

21. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Наука, - 1979. - 416 с.

22. Сеге Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, - 1962. - 500 с.

23. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, - 1968.

24. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - Киев: Наукова думка, - 1965. - 800 с.

25. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. - М.: Наука, - 1969.

26. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. - М.: Наука, - 1990. - 272 с.

27. Cantero M.J., Ferrer P., Moral L., Velázquez L. Functional analysis methods to study zeros and measures of orthogonal polynomials on the unit circle. // manuscript, - 2001.

28. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - Москва Ленинград: гос.издат.тех.-теор.лит., - 1950. - 484 с.

29. Геронимус Я.Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. - М.: гос.издат.физ.-мат.лит., - 1958. - 240 с.

30. Klotz L. An interpolation problem for multivariate stationary sequences. // Kybernetika, - 2000. - 3. - P. 321-327.

31. Klotz L. An interpolation problem for Hilbert-Schmidt operator-valued stationary processes. // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, - 2001. - 2. - P. 525-535.

32. Klotz L. The maximal J-regular part of a q-variate weakly stationary process. // Probability and math. statistics, - 2002. - 1. - P. 155-165.

33. Klotz L., Schmidt F. Some remarks on J_0-regularity and J_0-singularity of q-variate stationary processes. // Probability and math. statistics, - 1998. - 2. - P. 351-357.

34. Zagorodnyuk S.M. On generalized Jacobi matrices and orthogonal polynomials. // New York J. Math., - 2003. - 9. - P. 117-135.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 826, 2008, с.38–51

Проблеми керованості для рівняння струни та тригонометрична проблема моментів Маркова

К.С. Халіна

ФТІНТ ім. Б. І. Веркіна НАНУ, Харків, Україна

У цій роботі досліджується проблема керованості для хвильового рівняння на відрізку, керованого крайовими умовами. Релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості цього рівняння, побудовано за допомогою розв'язків тригонометричної проблеми моментів Маркова. Крім цього, дана оцінка похибки обчислення та точності влучення для кінцевого стану керованої системи.

2000 Mathematics Subject Classification 93B05, 35B37, 35L05.

Вступ

Як відомо, проблеми керованості для гіперболічних рівнянь розглядаються зараз в роботах багатьох математиків (див, напр., бібліографію в [1]).

У цій роботі досліджується крайова L^∞-керованість хвильового рівняння на скінченому відрізку за просторовою змінною. В більшості робіт, в яких вивчалося таке рівняння, досліджується L^p-керованість $(2 \le p \le \infty)$ [2]–[7], але лише L^∞-керування можуть бути практично реалізовані. Відмінність цієї роботи полягає у тому, що керування обмежені наперед заданою константою. Таке обмеження виправдовується практичними міркуваннями. Крайова L^∞-керованість хвильового рівняння на відрізку з обмеженими наперед заданою константою керуваннями розглянута у [8]. Дана робота продовжує розпочаті дослідження.

У [8] одержані формули для керувань, які розв'язують проблему 0-керованості хвильового рівняння на відрізку, і вони є досить складними для практичної реалізації. Також у [8] показано, що розв'язки тригонометричних проблем моментів Маркова, які побудовані за даними керованої системи, є розв'язками проблеми ε-керованості для цієї системи. Як відомо, серед розв'язків тригонометричних проблем моментів Маркова є релейні керування (див. [9]), які з практичної точки зору є найкращими для реалізації. Тому в даній роботі для розв'язання побудованих тригонометричних проблем моментів Маркова використовуються результати, одержані в [9], які дають алгоритм пошуку цих керувань. Таким чином одержуються релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості для хвильового рівняння на відрізку.

При застосуванні на практиці наведеного алгоритму точки перемикання релейних керувань, як правило, обчислюються з деякою похибкою, що призводить до неточного визначення кінцевого стану керованої системи. Тому в роботі дається оцінка цієї похибки визначення кінцевого стану системи.

1. Умови керованості для рівняння струни

Розглянемо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,\pi),\, t \in (0,T),\, T > 0, \tag{1.1}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} w(x,0) & = & w_0^0(x) \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} & = & w_1^0(x) \end{cases}, \qquad x \in (0,\pi), \tag{1.2}$$

крайовими умовами

$$w(0,t) = u_0(t),\, w(\pi,t) = u_\pi(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1.3}$$

та умовами влучення

$$\begin{cases} w(x,T) & = & w_0^T(x) \\ \frac{\partial w(x,T)}{\partial t} & = & w_1^T(x) \end{cases}, \qquad x \in (0,\pi). \tag{1.4}$$

Керування u_0, u_π задовольняють умову

$$u_j \in \mathcal{B}(0,T) = \{v \in L^\infty(0,T) \mid |v(t)| \le 1 \text{ майже скрізь на } (0,T)\}, \quad j = 0,\pi.$$

Усі функції, що розглядаються в (1.1)—(1.4), визначені на скінченому відрізку. Ми будемо вважати, що такі функції визначені на $\mathbb{R}$ та набувають значення 0 на доповненні в $\mathbb{R}$ своєї області визначення.

У роботі використовуються наступні функціональні простори. $\mathcal{S}$ — це простір Шварца [10]: $\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall m \in \{\mathbb{N} \cup 0\}\ \forall l \in \{\mathbb{N} \cup 0\}\ \exists C_{ml} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left|\varphi^{(m)}(x)\left(1+|x|^2\right)^l\right| \le C_{ml}\}$, та $\mathcal{S}'$ – простір узагальнених функцій над $\mathcal{S}$. Послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ називається збіжною в $\mathcal{S}$, якщо $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall l \in \mathbb{N}$ $\{\exists C_{ml}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x^l \varphi^{(m)}(x)| \le C_{ml}$ та $x^l\varphi^{(m)}(x) \rightrightarrows 0$ коли $n \to \infty$ в $\mathbb{R}\}$. Під збіжністю в $\mathcal{S}'$ розуміється слабка збіжність.

Як і в [8],позначимо через H_l^s наступні простори Соболева [11, гл. 1]:

$$H_l^s = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}' : \left(1+|x|^2\right)^{l/2} \left(1+|D|^2\right)^{s/2} \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

$$H_l^s[a,b] = \{\varphi \in H_l^s : \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]\},$$

$$\|\varphi\|_l^s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(1+|x|^2\right)^{l/2} \left(1+|D|^2\right)^{s/2} \varphi(x) \right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

$$\widetilde{H}_l^s = \left\{\varphi \in H_l^s \times H_l^{s-1} : \varphi - \text{непарна, } 2\pi\text{-періодична} \right\}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{H}_l^s[a,b] = H_l^s[a,b] \times H_l^{s-1}[a,b],$$

$$|||\varphi|||_l^s = \left((\|\varphi_0\|_l^s)^2 + \left(\|\varphi_1\|_l^{s-1}\right)^2 \right)^{1/2};$$

де $D = -id/dx$.

Вважається, що завжди $l < -1/2$, $s \le 0$, якщо явно не вказано інше.

Позначимо $w^0 = \begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix} \in \widetilde{H}_0^s[0,\pi]$, $w^T = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix} \in \widetilde{H}_0^s[0,\pi]$ — дійсні функції. Розв'язки системи (1.1)—(1.4) дійсні і належать простору H_0^s.

Наведемо основні результати, що були доведені у [8], на які буде спиратися дана робота. Введемо два оператора: $\Omega : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$— оператор непарного продовження, тобто $(\Omega f)(x) = f(x) - f(-x)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \subset [0,+\infty)$ та $\Xi : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ — оператор парного продовження: $(\Xi f)(x) = f(x) + f(-x)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \subset [0,+\infty)$. Розглянемо непарні 2π-періодичні продовження (за x) функцій, що входять до керованої системи (1.1) -(1.4).

$$\mathrm{w}(\cdot,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega \begin{pmatrix} w(\cdot,t) \\ \frac{\partial w(\cdot,t)}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad t \in (0,T),$$

$$\mathrm{w}^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^0, \qquad \mathrm{w}^T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^T,$$

де $\mathcal{T}_h$ – оператор зсуву: $(\mathcal{T}_h\varphi)(x) = \varphi(x+h)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, та $(\mathcal{T}_h f, \varphi) = (f, \mathcal{T}_{-h}\varphi)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

У роботі [8] показано, що $\mathrm{w}^0, \mathrm{w}^T \in \widetilde{H}_l^s$, $\mathrm{w}(\cdot,t) \in \widetilde{H}_l^s$ $(t \in (0,T))$.

Як легко бачити, задача (1.1) — (1.3) з умовами влучення (1.4) може бути зведена до задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\partial/\partial x)^2 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{w} - 2u_0(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta'(x+2\pi k) \end{pmatrix} \\ &+ 2u_\pi(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta'(x-\pi+2\pi k) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T), \qquad (1.5) \\ \mathrm{w}(x,0) &= \mathrm{w}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1.6) \end{aligned}$$

з умовами влучення

$$\mathrm{w}(x,T) = \mathrm{w}^T(x), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (1.7)$$

де δ — функція Дірака.

У [8] одержано явну формулу, що пов'язує керування, початковий та кінцевий стани системи (1.5)–(1.7):

$$\mathrm{w}^T(x) = \mathcal{E}(x,T) * \left[\mathrm{w}^0(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \begin{pmatrix} (\Omega u_0)(x) - (\Omega u_\pi)(x-\pi) \\ (\Omega(u_0'))(x) - (\Omega(u_\pi'))(x-\pi) \end{pmatrix} \right], \quad (1.8)$$

де $*$ означає згортку за x,

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(x+t) + \delta(x-t) & \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(x+t) - \mathrm{sign}(x-t)) \\ -\delta'(x+t) + \delta'(x-t) & \delta(x+t) + \delta(x-t) \end{pmatrix}.$$

Ця формула дозволяє дослідити не тільки проблему 0-керованості, але й проблему ε-керованості.

Позначимо $\mathcal{R}_T(w^0)$ множину станів $w^T \in \widetilde{H}^s_0[0,\pi]$, для яких існують керування $u_j \in \mathcal{B}(0,T)$, $j = 0, \pi$ такі, що задача (1.5)–(1.7) з $\mathrm{w}^\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^\beta$, $\beta = 0, T$ має єдиний розв'язок в H^s_l.

Означення 1. Стан $w^0 \in \widetilde{H}^s_0[0,\pi]$ називається 0-керованим за час T, якщо 0 належить $\mathcal{R}_T(w^0)$, та ε-керованим за час T, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}_T(w^0)$ в $\widetilde{H}^s_0[0,\pi]$.

Згідно з [8], позначимо $\overline{H}^s_0[-\pi,\pi] = \{\varphi \in H^s_0 : \mathrm{supp}\,\varphi \in [-\pi,\pi]\}$. Введемо також оператор диференціювання $\partial : \overline{H}^s_0[-\pi,\pi] \longrightarrow \overline{H}^{s-1}_0[-\pi,\pi]$ з областю визначення $D(\partial) = \{\varphi \in \overline{H}^s_0[-\pi,\pi] : \varphi - \text{парна}\}$. Тоді $Im(\partial) = \{\varphi \in \overline{H}^{s-1}_0[-\pi,\pi] : \varphi - \text{непарна}\}$. В [8] доведено, що він є лінійним неперервним оператором, та має обернений: $\partial^{-1} : \overline{H}^{s-1}_0[-\pi,\pi] \longrightarrow \overline{H}^s_0[-\pi,\pi]$, $D(\partial^{-1}) = Im(\partial)$, $Im(\partial^{-1}) = D(\partial)$.

У [8] доведено, що якщо $g \in \overline{H}^{s-1}_0[-\pi,\pi]$ — непарна, то існує $\widetilde{g} \in \overline{H}^s_0[-\pi,\pi]$ — парна і така, що $\widetilde{g}' = g$.

Це дозволяє ввести функцію: $\widetilde{w}^0_1(x) = \partial^{-1}\Omega w^0_1(x) \cdot H(x)$, де H – функція Хевісайда: $H(t) = 1$, якщо $t > 0$ та $H(t) = 0$, якщо $t \leq 0$.

Також в [8] доведено наступний критерій 0- та ε-керованості системи (1.1)–(1.4):

Твердження 1.1. *Нехай $T > 0$, $w^0 \in \widetilde{H}^s_0(0,\pi)$ та нехай $K \in \mathbb{N}$ таке число, що $\pi(K-1) < T \leq \pi K$. Тоді наступні твердження рівносильні*

(i) Стан w^0 є 0-керованим за час T;

(ii) Стан w^0 є ε-керованим за час T;

(iii) Виконано наступні три умови
$|\partial^{-1}\Omega w^0_1(x) \pm \Omega w^0_0(x) + \mu\left[\frac{T}{\pi K}\right]| \leq 2K$ *м. с. на* $[-\pi,\pi]$, *для деякого* $\mu \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w^0_1(x) + w^0_0\} \subset [0, T-\pi(K-1)]$,
$\mathrm{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w^0_1(x) - w^0_0\} \subset [\pi K - T, \pi]$.

Як вже було відмічено у вступі, системи вигляду (1.5)—(1.7) було розглянуто в багатьох роботах, зокрема в [2]—[8]. Серед них найближчою за результатами до роботи [8], продовженням якої є дана стаття, є робота [6]. Тому порівняємо результати цих робіт.

У [6] було розглянуто в просторах $W^{0,p}(0,L) \times W^{-1,p}(0,L)$ систему (1.5)—(1.7) при $\mathrm{w}^T = 0$ з керуванням з L^p, $(p \in [2, +\infty)$, якщо $p = \infty$, то розв'язки системи розглядаються в $W^{0,2}(0,L) \times W^{-1,2}(0,L)$. Тут L — це довжина струни, у [8] $L = \pi$, що не є суттєвим обмеженням. У [6] розглянуто проблему оптимізації, а саме мінімізації L^p-норми керувань. Розв'язок цієї проблеми дає теорема 2.3 роботи [6], зокрема, наведено в явному вигляді керування, що розв'язують проблему оптимізації. Для розв'язання проблеми використано подання функцій, що входять в систему (1.5)—(1.7), тригонометричними рядами відносно тригонометричної системи $\left\{\sin \frac{\pi k}{L} t, \cos \frac{\pi k}{L} t\right\}$. Зв'язок між керуванням, початковим та кінцевим станом системи (1.5)—(1.7) задаються в [6] моментними рівностями відносно цієї тригонометричної системи. Таким чином, проблема оптимізації зводиться до тригонометричної проблеми моментів, після розв'язання якої одержують шукані керування.

На відміну від цього в роботі [8] досліджено проблеми 0- та ε-керованості системи (1.5)—(1.7) в $\widetilde{H}_l^s \times \widetilde{H}_l^{s-1}$, де $l < -1/2$, $s \le 0$, з керуваннями, обмеженими наперед заданою константою. Відмітимо, що простори $\widetilde{H}_l^s$ $(l < -1/2)$ та $W^{s,2}$ збігаються за запасом функцій та мають еквівалентні норми. В роботі [8] для одержання формули (1.8), що пов'язує керування, початковий та кінцевий стани системи (1.5)—(1.7), та дослідження 0- та ε-керованості використано метод перетворення Фур'є (для функціоналів з $\mathcal{S}'$). Окрім того, суттєвим тут є використання теореми Пелі-Вінера (про перетворення Фур'є фінітної функції) та її узагальнення на фінітні функціонали. Оскільки оператор згортки за x з $\mathcal{E}(x,t)$ є обмеженим в H_l^s та має обмежений обернений, формула (1.8) є зручним інструментом дослідження не тільки 0-керованості, а й ε-керованості системи (1.5)—(1.7), оскільки явно описує вплив керування та початкового стану на кінцевий стан.

Слід відмітити, шо якщо відмовитися від умов оптимальності в теоремі 2.3 роботи [6] та від обмежень на керування в теоремі 1.1 роботи [8], то на "перерізі"просторів, які розглядаються в цих роботах (тобто в $W^{0,2} \times W^{-1,2}$ для [6] та в $\widetilde{H}_l^0 \times \widetilde{H}_l^{-1}$ для [8]), керування, що розв'язують проблему 0-керованості, одержані в цих роботах, фактично збігаються між собою.

Далі скрізь будемо позначати $\widetilde{w}_1^0(x) = H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) + \mu\left[\frac{T}{\pi K}\right](H(x) - H(x-T))$. Розглянемо наступні 2π-періодичні функції: $\mathrm{w}_0^0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w_0^0(x)$, $\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Xi\widetilde{w}_1^0(x)$.

Визначимо число $K \in \mathbb{N}$ таке, що $\pi(K-1) < T \le \pi K$. Позначимо

$$\begin{aligned}
\widehat{w}_0(x) &= \frac{1}{2K}(\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x) + \mathrm{w}_0^0(x))(H(x) - H(x-\pi K)),\\
\widehat{w}_\pi(x) &= \frac{1}{2K}(\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(\pi - x) - \mathrm{w}_0^0(\pi - x))(H(x) - H(x-\pi K)).
\end{aligned}$$

Введемо послідовність $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=-\infty}^{\infty}$ наступним чином:

$$\widehat{\omega}_\gamma^m = \int_0^{\pi K} \widehat{w}_\gamma(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx, \qquad m\in\mathbb{Z},\ \gamma=0,\pi. \tag{1.9}$$

Розглянемо тепер для фіксованого $\gamma=0,\pi$, та $N\in\mathbb{N}$ проблему пошуку $u_\gamma\in\mathcal{B}(0,T)$ такого, що

$$\int_0^T u_\gamma(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx = \widehat{\omega}_\gamma^m, \qquad m=\overline{-N,N}. \tag{1.10}$$

Така проблема називається тригонометричною проблемою моментів Маркова для скінченної послідовності $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=-N}^{N}$.

У [8] доведено наступну теорему:

Теорема 1.1. *Нехай $T>0$, $s<-1/2$, для $w^0\in\widetilde{H}_0^s(0,\pi)$ виконано умову (iii) твердження1.1, $K\in\mathbb{N}$ таке, що $\pi(K-1)<T\le\pi K$. Нехай також $\left\{\widehat{\omega}_\gamma^m\right\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ визначено за (1.9). Тоді для кожного $N\in\mathbb{N}$ існують $u_\gamma^N\in\mathcal{B}(0,T)$, $\gamma=0,\pi$, — розв'язки тригонометричних проблем моментів Маркова (1.10) для цього N, та для кожного $\varepsilon>0$ існує $N\in\mathbb{N}$ таке, що кінцевий стан w^T керованої системи (1.1)–(1.4) задовольняє умову $\left\|w^T\right\|_0^s\le\varepsilon$, причому N визначається умовою $\frac{2^{s+6}P_sC_l^{2K}C_l^KN^{s+1/2}}{c_l^2c_l^KK^{s-1}\sqrt{-2s-1}}<\varepsilon$.*

У цій теоремі використовуються наступні позначення: $c_l^M=(\pi M)^l\sqrt{2S_l-1}$, $C_l^M=\sqrt{3+2(\pi M)^{2l}S_l}$, $S_l=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2l}$, $P_s>0$ — стала, для якої виконується нерівність: $\left\|\Omega^{-1}g\right\|_0^s\le P_s\left\|g\right\|_0^s$, $g\in H_0^s$ — непарна. У роботі [8] показано, що така стала існує для $s\le 0$.

Дана робота присвячена пошуку розв'язків тригонометричної проблеми моментів Маркова (1.10) які, за теоремою 1.1, будуть розв'язками задачі ε-керованості системи (1.1)–(1.4).

Спростимо формули (1.9). Позначимо

$$\int_0^{\pi} w_0^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx = \breve{\omega}_0^m, \quad \int_0^{\pi} \widetilde{w}_1^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx = \breve{\omega}_1^m, \qquad m\in\mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Виразимо $\widehat{\omega}_\gamma^m$ через $\breve{\omega}_0^m$ та $\breve{\omega}_1^m$, $\gamma=0,\pi$.

Перепишемо рівності (1.9) у вигляді

$$\widehat{\omega}_0^m = \int_0^{\pi K} \widehat{w}_0(x) e^{i\frac{2mx}{K}} = \frac{1}{2K}\int_0^{\pi K} (\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x)+\mathrm{w}_0^0(x)) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx, \qquad m\in\mathbb{Z},$$

$$\widehat{\omega}_\pi^m = \int_0^{\pi K} \widehat{w}_\pi(x) e^{i\frac{2mx}{K}} = \frac{1}{2K}\int_0^{\pi K} (\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(\pi-x)-\mathrm{w}_0^0(\pi-x)) e^{i\frac{2mx}{K}}\,dx,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Маємо для $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$:

$$\int_0^{\pi K} \mathrm{w}_0^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx = \sum_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} \int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} w_0^0(x-2j\pi) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx -$$

$$- \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \int_{(2j-1)\pi}^{2j\pi} w_0^0(-x+2j\pi) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx = \breve{\omega}_0^m \sum_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi} - \breve{\omega}_0^{-m} \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi}.$$

Для $m = 0$ одержуємо

$$\int_0^{\pi K} \mathrm{w}_0^0(x)\, dx = \sum_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} \int_0^{\pi} w_0^0(x)\, dx - \sum_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} \int_0^{\pi} w_0^0(x)\, dx = \begin{cases} 0, & K\text{—парне} \\ \breve{\omega}_0^0, & K\text{—непарне} \end{cases}.$$

Аналогічно обчислюємо відповідні інтеграли від $\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}$.

Позначивши $s_K^1(m) = \sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{K-1}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi}$ та $s_K^2(m) = \sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} e^{i\frac{4m}{K}j\pi}$ одержуємо:

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_0^m &= \tfrac{1}{2K}\left[(\breve{\omega}_1^m + \breve{\omega}_0^m)\, s_K^1(m) + (\breve{\omega}_1^{-m} - \breve{\omega}_0^{-m})\, s_K^2(m)\right], \ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0, \\ \widehat{\omega}_0^0 &= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\breve{\omega}_1^0, & K\text{— парне} \\ \tfrac{1}{2K}\left(\breve{\omega}_0^0 + K\breve{\omega}_1^0\right), & K\text{—непарне} \end{cases}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Розглядаючи $\mathrm{w}_0^0(\pi - x)$ та $\widetilde{\mathrm{w}}_1^0(\pi - x)$ як нові функції $g_0^0(x)$ та $\widetilde{g}_1^0(x)$ та проводячи аналогічні міркування, для $m \in \mathbb{Z}$ одержуємо

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_\pi^m &= \tfrac{1}{2K}\left[e^{i\frac{2m\pi}{K}} \left(\breve{\omega}_1^{-m} - \breve{\omega}_0^{-m}\right) s_K^1(m) + e^{-i\frac{2m\pi}{K}} \left(\breve{\omega}_1^m + \breve{\omega}_0^m\right) s_K^2(m)\right], \quad m \neq 0. \\ \widehat{\omega}_\pi^0 &= \widehat{\omega}_0^0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Для $s_K^1(m)$ та $s_K^2(m)$ одержуємо:

$$s_K^1(m) = \begin{cases} \left[\frac{K-1}{2}\right] + 1, & m = \frac{lK}{2} \\ 0, & m \neq \frac{lK}{2},\ K\text{— парне} \\ -\frac{1}{1+e^{i\frac{2m\pi}{K}}}, & m \neq \frac{lK}{2},\ K\text{— непарне} \end{cases}, \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{1.14}$$

$$s_K^2(m) = \begin{cases} \left[\frac{K}{2}\right], & m = \frac{lK}{2} \\ -s_K^1(m), & m \neq \frac{lK}{2} \end{cases}, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{1.15}$$

Таким чином, $\widehat{\omega}_\gamma^m$ $(\gamma = 0, \pi)$ можна обчислювати за формулами (1.11)—(1.15) замість (1.9).

2. Тригонометрична проблема моментів Маркова та ε-керованість для рівняння струни

Далі будемо вважати, що умови критерію керованості (твердження 1.1) виконано. Зафіксуємо $\gamma = 0, \pi$, та визначимо послідовність $\left\{\widehat{\omega}^m_\gamma\right\}_{m=0}^N$, за формулами (1.11)—(1.15). Далі індекс γ будемо опускати.

Нехай $\breve{u}(x)$— це розв'язок проблеми (1.10) для послідовності $\{\widehat{\omega}^m\}_{m=0}^N$. Завдяки тому, що функції $\widehat{w}(x)$ та $\breve{u}(x)$ є дійсними, для $m = -N, -1$ маємо: $\overline{\widehat{\omega}^m} = \widehat{\omega}^{-m}$. Звідси одержуємо, що якщо для функції $\breve{u}(x)$ рівності (1.10) виконано для $m = \overline{0, N}$, то для цієї ж функції їх виконано і для $m = \overline{-N, -1}$. Тому далі будемо розглядати проблему моментів для послідовності $\{\widehat{\omega}^m\}_{m=0}^N$:

$$\int_0^T u(t)e^{i\frac{2mt}{K}}\,dt = \widehat{\omega}^m, \quad m = \overline{0, N}. \tag{2.1}$$

З [12, гл. 7] відомо, що серед розв'язків системи (2.1) є функції виду

$$u(t) = \rho\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j+1}\left[H(t-t_j) - H(t-t_{j+1})\right], \tag{2.2}$$

так звані релейні керування, де $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T \le \pi K$ — точки перемикання, константа $\rho = \pm 1$. Таким чином, задача пошуку керувань, що розв'язують проблему ε-керованості системи (1.1)—(1.4) за час T, зводиться до пошуку точок перемикання та визначення константи ρ. Для розв'язання проблеми моментів (2.1) використовуються результати, одержані в [9]. Керування (2.2) з $\rho = +1$ у [9] називається керуванням I-го роду, а з $\rho = -1$ — керуванням II-го роду.

Розглянемо рівності (2.1) для $m = \overline{1, N}$, та підставимо в них керування (2.2):

$$\int_0^T u(t)e^{i\frac{2mt}{K}}\,dt = \rho\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j+1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{i\frac{2mt}{K}}\,dt =$$

$$= \rho\frac{K}{2im}\left((-1)^n - e^{i\frac{2m}{K}T} + 2\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}e^{i\frac{2m}{K}t_j}\right).$$

Тому система (2.1) для $m = \overline{1, N}$, еквівалентна системі

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j+1}e^{i\frac{2m}{K}t_j} = \frac{1}{2}\left((-1)^n - e^{i\frac{2m}{K}T} - i\frac{2m}{\rho K}\widehat{\omega}^m\right), \quad m = \overline{1, N},$$

яка в свою чергу еквівалентна такій системі

$$\sum_{j=\frac{(-1)^n+1}{2}}^{n}(-1)^{n-j+1}e^{i\frac{2m}{K}t_j} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\frac{2m}{K}T} - \rho i\frac{2m}{K}\widehat{\omega}^m\right), \quad m = \overline{1, N}.$$

Розглянувши тепер рівняння системи (2.1) для $m = 0$, одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}t_j = \frac{1}{2}\left(T + \frac{\widehat{\omega}^0}{\rho}\right).$$

Таким чином система (2.1) еквівалентна наступній

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=\frac{(-1)^n+1}{2}}^{n}(-1)^{n-j+1}e^{i\frac{2m}{K}t_j} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\frac{2m}{K}T} - i\rho\frac{2m}{K}\widehat{\omega}^m\right), \quad m = \overline{1,N}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}t_j = \frac{1}{2}\left(T + \rho\widehat{\omega}^0\right). \end{cases}$$

Система такого вигляду досліджена В. І. Коробовим та Г. М. Скляром [9]. Для неї в цій роботі одержано метод визначення точок перемикання та константи ρ для оптимального керування, що переводить систему із однієї точки в іншу. Скористаємося їх методом з невеликою зміною: будемо визначати не мінімальний (як в [9]), а максимальний на відрізку $[0, T]$ час, так як в заданій задачі потрібно дослідити ε-керованість системи (1.1)–(1.4) за заданий час T.

Позначимо $\widehat{\omega} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega}^0 \\ \vdots \\ \widehat{\omega}^N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}$ і, згідно з [9], введемо позначення:

$$c_m(\widehat{\omega}, T, \rho) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\frac{2m}{K}T} - i\rho\frac{2m}{K}\widehat{\omega}^m\right), \qquad m = \overline{1,N},$$

$$\alpha(\widehat{\omega}, T, \rho) = \frac{1}{2}\left(T + \rho\widehat{\omega}^0\right), \qquad \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) = ie^{-\frac{i}{K}\alpha(\widehat{\omega}, T, \rho)}$$

Введемо послідовності функцій $\{\alpha_j(\widehat{\omega}, T, \rho)\}_{j=1}^{N}$, для яких у [9] одержана рекуррентна формула:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) & 2\alpha_2(\widehat{\omega}, T, \rho) & \cdots & m\alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho) \\ \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho) & \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) & \cdots & \alpha_{m-1}(\widehat{\omega}, T, \rho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_1(\widehat{\omega}, T, \rho) \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^{m-1}\left(\alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho)\right)^m c_m(\widehat{\omega}, T, \rho), \quad m = \overline{1,N}. \tag{2.3}$$

Покажемо, що члени цих послідовностей можуть бути підраховані за іншою формулою.

Лема 2.1. *Члени послідовностей $\{\alpha_j(\widehat{\omega}, T, \rho)\}_{j=1}^{N}$ можна обчислити за формулою*

$$\alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho) = \alpha_0(\widehat{\omega}, T, \rho)\frac{\lambda_m}{m}, \qquad m = \overline{1,N}, \tag{2.4}$$

де

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = c_1(\widehat{\omega}, T, \rho),\ \lambda_m = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_{m-j}(\widehat{\omega}, T, \rho)}{j} \lambda_j + c_m(\widehat{\omega}, T, \rho)\lambda_0, \quad m = \overline{2, N}. \tag{2.5}$$

Доведення. В доведенні будемо писати α_m замість $\alpha_m(\widehat{\omega}, T, \rho)$ та c_m замість $c_m(\widehat{\omega}, T, \rho)$.

Легко перевірити, що для $m = 1$ та $m = 2$ формули правильні. Нехай формула вірна для α_m. Доведемо, що вона вірна для α_{m+1}. Розглянемо

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \cdots & (m-1)\alpha_{m-1} & m\alpha_m & (m+1)\alpha_{m+1} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix},$$

Розкладаючи цей визначник на доданки за останнім рядком одержуємо лінійну комбінацію визначників на одиницю меншого порядку:

$$\Delta_{m+1} = \alpha_1 \Delta_m - \alpha_0 Q_m^1,$$

де Q_m^1 — визначник, одержаний викреслюванням з визначника Δ_{m+1} останнього рядка і передостаннього стовпця. Знову розкладаючи визначник Q_m^1 за останнім рядком, одержуємо:

$$\Delta_{m+1} = \alpha_1 \Delta_m - \alpha_0 \alpha_2 \Delta_{m-1} + (\alpha_0)^2 Q_{m-1}^2,$$

де Q_{m-1}^2 — визначник, одержаний викреслюванням з визначника Q_m^1 останнього рядка і передостаннього стовпця. І так далі. На m-му кроці одержуємо наступну формулу:

$$\Delta_{m+1} = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\alpha_0)^j \alpha_{j+1} \Delta_{m-j} + (-1)^m (\alpha_0)^m (m+1)\alpha_{m+1}.$$

За (2.3) маємо $\Delta_{m+1} = (-1)^m (\alpha_0)^{m+1} c_{m+1}$. Таким чином

$$(-1)^m (\alpha_0)^m (m+1)\alpha_{m+1} = (-1)^m (\alpha_0)^{m+1} c_{m+1} - \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\alpha_0)^j \alpha_{j+1} \Delta_{m-j}.$$

Підставляючи вирази (2.4) замість α_{j+1} та (2.3) замість Δ_{m-j}, одержуємо

$$\begin{aligned} (-1)^m (\alpha_0)^m (m+1)\alpha_{m+1} &= (-1)^m (\alpha_0)^{m+1} c_{m+1} + \\ &+ (-1)^m (\alpha_0)^{m+1} \sum_{j=1}^{m} c_{m-j+1} \frac{\lambda_j}{j}, \end{aligned}$$

або $\alpha_{m+1} = \frac{\alpha_0}{m+1}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} c_{m+1-j}\frac{\lambda_j}{j} + c_{m+1}\lambda_0\right).$

Порівнявши з формулами (2.4) та (2.5), можна стверджувати, що ці формули вірні для α_{m+1}. Лему доведено.

Отже, для розв'язання задачі знаходження точок перемикання та константи ρ застосовується наступний алгоритм, наведений у [9]:

Складемо матриці для $m=\overline{1,N}$:

$$A_m(\widehat{\omega},T,\rho)=\begin{pmatrix} \alpha_0(\widehat{\omega},T,\rho) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_1(\widehat{\omega},T,\rho) & \alpha_0(\widehat{\omega},T,\rho) & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_2(\widehat{\omega},T,\rho) & \alpha_1(\widehat{\omega},T,\rho) & \alpha_0(\widehat{\omega},T,\rho) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_m(\widehat{\omega},T,\rho) & \alpha_{m-1}(\widehat{\omega},T,\rho) & \alpha_{m-2}(\widehat{\omega},T,\rho) & \cdots & \alpha_0(\widehat{\omega},T,\rho)\end{pmatrix}.$$

Позначимо $\widetilde{A}_m(\widehat{\omega},T,\rho)=A_m+(A_m)^*$, де $*$ позначає спряжену матрицю.

(i) За умови (iii) твердження 1.1 проблема моментів (2.1) має розв'язок. Тому за [9] маємо: $\exists$ час T^* такий, який є найбільшим коренем рівняння $det\widetilde{A}_N(\widehat{\omega},T^*,+1)\cdot det\widetilde{A}_N(\widehat{\omega},T^*,-1)=0$, на інтервалі $(0,T)$, і при цьому задовольняє умови: $0\le\alpha(\widehat{\omega},T^*,\mu)<\pi K$, $\widetilde{A}_N(\widehat{\omega},T^*,\mu)\ge 0$, $\mu=\pm1$.

(ii) Кількість точок перемикання та константа ρ визначаються наступним чином:

Нехай $L(\mu)=min\left\{0\le k\le N+1 : det\widetilde{A}_k(\widehat{\omega},T^*,\mu)=0,\ \mu=\pm1\right\}$;

(за означенням покладемо $det\widetilde{A}_{N+1}(\widehat{\omega},T^*,\mu)=0,\ \mu=\pm1$.)

Тоді

а) якщо $L(+1)\ne L(-1)$, то кількість точок перемикання дорівнює $n=2\cdot min\{L(+1),L(-1)\}$. При цьому, якщо $n=2L(+1)$ то $\rho=1$; якщо $n=2L(-1)$ то $\rho=-1$;

б) якщо $L(+1)=L(-1)$, то $n=2L(+1)-1$. При цьому, якщо із $\widetilde{A}_{L(+1)}(\widehat{\omega},T^*,+1)\cdot\varphi=0$ для вектора φ виконується $\sum\limits_{k=0}^{L(+1)}\varphi_k=0$, то $\rho=1$, інакше $\rho=-1$.

(iii) Точки перемикання для знайденого $\rho=\pm1$ та $n=2q$ або $n=2q-1$:

Визначаємо координати векторів φ та ψ за формулами:

$\widetilde{A}_q(\widehat{\omega},T^*,\rho)\ \varphi=0,\quad \psi=A_q(\widehat{\omega},T^*,\rho)\ \varphi.$

Записуємо поліноми: $\widehat{\varphi}(z)=\sum\limits_{j=0}^{q}\varphi_j z^{q-j}$, $\widehat{\psi}(z)=\sum\limits_{j=0}^{q}\psi_j z^{q-j}$ і складаємо функцію $R(z)=\frac{\widehat{\psi}(z)}{\widehat{\varphi}(z)}$.

Знаходимо корені та полюси функції $R(z)$ — це точки $e^{i\frac{2}{K}t_j}$, $j=\overline{1,n}$.

Тоді $0<t_1<\ldots<t_n<T^*$ — це точки перемикання керування.

За цим алгоритмом знаходимо окремо керування $u_0(t)$ та $u_\pi(t)$. На відрізку $[T^*, T]$ кожному з керувань надаємо значення 0. Знайдені керування за теоремою 1.1 будуть розв'язками проблеми ε-керованості системи (1.1)—(1.4).

Зауваження 2.1. Під час застосування наведеного алгоритму, точки перемикання обчислюються з деякою похибкою. Наступна теорема дає оцінку похибки визначення кінцевого стану керованої системи (1.1)—(1.4), яка пов'язана з похибкою підрахування точок перемикання.

Теорема 2.2. *Нехай $\{t_j\}_{j=1}^n$ точні значення точок перемикання, $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ — значення, підраховані з похибкою. Нехай число $\varepsilon_N > 0$, яке залежить від N, таке, що $|\, t_j - \tau_j \,| \le \varepsilon_N$ для всіх $j = \overline{1,n}$. Нехай також $u_\gamma(t)$ та $\acute{u}_\gamma(\tau)$, $\gamma = 0, \pi$ — точне та наближене керування відповідно, підраховані за формулою (2.2), а w^T та $\acute{w}^T$ — точний та наближений кінцевий стан системи (1.1)—(1.4) відповідно.*

Тоді $\left\| w^T - \acute{w}^T \right\|_0^s \le 40\pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K} C_l^K}{c_l^2 c_l^K}(2N+3)\sqrt{1 + \frac{2^{2s+1}}{K^{2s}}\frac{N^{2s+1}+2s}{2s+1}} \cdot \varepsilon_N$.

Доведення. Скористаємося формулою, доведеною у [8], яка еквівалентна до формули (1.8):

$$\begin{aligned} \mathrm{w}^T(x) &= \mathcal{E}(x,T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_0(x) - u_0(x)) + \right. \\ &\left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\}, \\ \acute{\mathrm{w}}^T(x) &= \mathcal{E}(x,T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_0(x) - \acute{u}_0(x)) + \right. \\ &\left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\widehat{w}_\pi(x+\pi) - \acute{u}_\pi(x+\pi)) \right\}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \mathrm{w}^T - \acute{\mathrm{w}}^T \right\|_l^s &= \mathcal{E}(x,T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\acute{u}_0(x) - u_0(x)) + \right. \\ &\left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\acute{u}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\}. \end{aligned}$$

Скориставшись наступною оцінкою, доведеною в [8]:

$$\begin{aligned} \left\| w^T \right\|_0^s \le \frac{P_s}{c_l^2} \left\| \mathrm{w}^T \right\|_l^s &\le 10\pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K}}{c_l^2 c_l^K} \left\{ \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\widehat{w}_0(x) - u_0(x)) \right\|_l^s + \right. \\ &\left. + \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k}(\widehat{w}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\|_l^s \right\}, \end{aligned}$$

можемо записати:

$$\|\!|w^T - \acute{w}^T|\!\|_0^s \le 10\pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K}}{c_l^2 c_l^K} \left\{ \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{I}_{\pi K k}(\acute{u}_0(x) - u_0(x)) \right\|_l^s + \right.$$

$$\left. + \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{I}_{\pi K k}(\acute{u}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) \right\|_l^s \right\}.$$

Розкладемо функції $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{I}_{\pi K k}(\acute{u}_\gamma(x) - u_\gamma(x))$, $\gamma = 0, \pi$ в ряди Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{I}_{\pi K k}(\acute{u}_0(x) - u_0(x)) = \frac{1}{\pi K} \sum_{m=-N}^{N} (\acute{\nu}_0^m - \nu_0^m) e^{-i\frac{2mx}{K}},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{I}_{\pi K k}(\acute{u}_\pi(x+\pi) - u_\pi(x+\pi)) = \frac{1}{\pi K} \sum_{m=-N}^{N} (\acute{\nu}_\pi^m - \nu_\pi^m) e^{-i\frac{2mx}{K}},$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються за формулами:

$$\nu_0^m = \int_0^{\pi K} u_0(x) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx, \quad \nu_\pi^m = \int_0^{\pi K} u_\pi(x+\pi) e^{i\frac{2mx}{K}}\, dx, \qquad m = \overline{-N, N},$$

$\acute{\nu}_\gamma^m$ утворюються заміною в цих формулах u_γ на $\acute{u}_\gamma$, $\gamma = 0, \pi$.

Проводячи аналогічні міркування як в [8], прийдемо до наступного

$$\|\!|w^T - \acute{w}^T|\!\|_0^s \le 10 K P_s \frac{C_l^{2K} C_l^K}{c_l^2 c_l^K} \left\{ \sqrt{\sum_{m=-N}^{N} \left(1 + \left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s |\acute{\nu}_0^m - \nu_0^m|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{m=-N}^{N} \left(1 + \left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s |\acute{\nu}_\pi^m - \nu_\pi^m|^2} \right\}. \tag{2.6}$$

Так як $\acute{u}_0(x)$ та $u_0(x)$ – релейні керування, то $|\acute{\nu}_0^m - \nu_0^m| \le \int\limits_0^{\pi K} |\acute{u}_0(x) - u_0(x)|\, dx \le 2(n+1)\cdot \varepsilon_N \cdot \pi K$, де n – кількість точок перемикання. Аналогічно, $|\acute{\nu}_\pi^m - \nu_\pi^m| \le 2(n+1)\cdot \varepsilon_N \cdot \pi K$.

Враховуючи алгоритм пошуку точок перемикання, можемо записати, що $n \le 2(N+1)$. Таким чином, $|\acute{\nu}_\gamma^m - \nu_\gamma^m| \le 2(2N+3)\cdot \varepsilon_N \cdot \pi K$, $\quad \gamma = 0, \pi$.

Оцінивши $\sum\limits_{m=2}^{N} m^{2s}$ через $\int\limits_1^N x^{2s}\, dx$, маємо:

$$\sum_{m=-N}^{N} \left(1 + \left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s \le 1 + 2\left(\frac{2}{K}\right)^{2s} \sum_{m=1}^{N} m^{2s} \le 1 + \frac{2^{2s+1}}{K^{2s}} \cdot \frac{N^{2s+1} + 2s}{2s+1}.$$

Продовжуючи оцінку (2.6), одержемо твердження теореми. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lasiecka I. and Triggiani R. Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories. 2: Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. Cambridge University Press, 2000.

2. Krabs W. and Leugering G. On boundary controllability of one-dimension vibrating systems by $W_0^{1,p}$-controls for $p \in [0, \infty)$. Math. Methods Appl. Sci., **17** (1994), 77–93.

3. Gugat M. and Leugering G. Solutions of L^p-norm-minimal control problems for the wave equation. Comput. Appl. Math., **21** (2002), No. 1. 227–244.

4. Negreanu M. and Zuazua E. Convergence of multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **338** (2004), No. 5, 413-418.

5. Gugat M. Analytic solution of L^∞-optimal control problems for the wave equation. J. Optim. Theor. Appl., **114** (2002), 151–192.

6. Gugat M., Leugering and Sklyar G. L^p-optimal boundary control for the wave equation. SIAM J. Control Optim., **44** (2005), No. 1, 49–74.

7. Fattorini H. O. Infinite dimensional optimization and control Theory. Cambridge University Press, 1999.

8. Фардигола Л.В., Халіна К.С. Проблеми керованості для рівняння струни, УМЖ, 59 (2007), № 7, стр. 939-952

9. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов.– Серия математическая. Том 53, № 4, 1989.

10. Schwartz L. Théorie des distributions, I, II, Hermann, Paris, 1950–1951.

11. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщённые функции и уравнения в свётрках.– М.: Физматлит, 1994. — 336 с.

12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.– М.: Наука, 1973. — 552 с.

13. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3, М.: Физматгиз, 1958. — 308 с.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 826, 2008, с.52–66

Об одном свойстве дискретных множеств в $\mathbb{R}^k$

Е.Ю. Колбасина

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

Мы вводим класс S-множеств в $\mathbb{R}^k$. Это специальный класс дискретных множеств, обобщающий класс дискретных периодических множеств. Мы изучаем свойства S-множеств. В частности, мы доказываем, что класс S-множеств совпадает с классом равномерно протяженных дискретных множеств в смысле Лашковича.
2000 Mathematics Subject Classification 28E99, 03E99.

Введение

В работе рассматриваются дискретные множества в $\mathbb{R}^k$, обладающие одним специальным свойством (которое мы называем S-свойством): для каждого вектора в $\mathbb{R}^k$ существует такая перенумерация точек множества, что расстояние между соответствующими точками исходного и сдвинутого на этот вектор перенумерованного множества не превосходит некоторой константы, не зависящей от вектора сдвига. Такие множества возникают, например, в связи с изучением распределения значений почти периодических функций [1] и почти эллиптических функций [2].

В работе вводится некоторый аналог расстояния между множествами, приспособленный для изучения множеств с S-свойством. Мы доказываем полноту и замкнутость пространства множеств, обладающих S-свойством, относительно этого расстояния, а также другие свойства таких множеств, в частности, существование инвариантной относительно сдвигов средней плотности в $\mathbb{R}^k$. Кроме того, мы показываем, что класс множеств, обладающих S-свойством, совпадает с классом равномерно протяженных множеств М.Лашковича [3], введенных им в связи с проблемой Тарского о равноразложимости круга и квадрата [4].

В работе использованы следующие обозначения: через x^i обозначим i-тую координату точки $x \in \mathbb{R}^k$, через $B(x,R)$ — открытый k-мерный шар радиуса R с центром в точке $x \in \mathbb{R}^k$, а через $Q(x,L)$ — k-мерный куб $\{y \in \mathbb{R}^k \mid x^i - L/2 \le y^i < x^i + L/2, i = \overline{1,k}\}$. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^k$ и $r > 0$ положим $r \cdot A = \{r \cdot x \mid x \in A\}$, для любого $\rho > 0$ обозначим $A_\rho = \bigcup\limits_{x \in A} B(x,\rho)$ и

$A_{-\rho} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid B(x,\rho) \subset A\}$. Для любого конечного множества E обозначим через $\#E$ количество элементов в этом множестве. Через $m_k(A)$ обозначим k-мерную меру Лебега множества A, через $|x|$ обычную евклидову норму, а через $\|x\|$ l^∞-норму вектора $x \in \mathbb{R}^k$.

I. Пространство дискретных мультимножеств

Определение 1. Множество значений последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ будем называть *дискретным мультимножеством* (д.м.м.) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если эта последовательность не имеет конечных точек сгущения.

Мы употребляем термин "дискретное мультимножество", поскольку точка из $\mathbb{R}^k$ может встречаться в последовательности конечное число раз.

Будем говорить, что два д.м.м. в $\mathbb{R}^k$ *равны*, если все их элементы, с точностью до нумерации, совпадают.

В качестве индексов точек д.м.м. можно брать произвольное счетное множество, например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество k-мерных наборов целых чисел $\mathbb{Z}^k$.

Определение 2. *Расстоянием* между двумя д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ назовем величину

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \inf_{\sigma} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\,a_n - b_{\sigma(n)}|,$$

где инфимум берется по всем биекциям $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Заметим, что определенная выше величина не обязана быть конечной. Например, $dist(\mathbb{Z}^k, 2\mathbb{Z}^k) = \infty$.

Теорема 1. Для любых д.м.м.$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ величина

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})$$

удовлетворяет следующим аксиомам расстояния:

a) Неотрицательность: $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \geq 0$.

b) Невырожденность: $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равно $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Симметричность: $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = dist(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

d) Неравенство треугольника: для любого д.м.м. $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}) + dist(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Доказательство. Аксиомы a) и c) очевидны.

Докажем b). Пусть $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$. Предположим, что точка $x \in \mathbb{R}^k$ встречается в д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ p раз, а в д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $p' < p$ раз (возможно, $p' = 0$), т.е. для любой биекции $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ найдется такое n^*, что $(a_{n^*} = x) \bigwedge (b_{\sigma(n^*)} \neq x)$. Так как x не является предельной точкой для д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n - b_{\sigma(n)}| \geq |a_{n^*} - b_{\sigma(n^*)}| \geq \delta > 0,$$

поэтому $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) > 0$. Аналогично, p' не может быть больше p, значит, $p = p'$, и это верно для любой точки x из $\mathbb{R}^k$. Аксиома b) проверена.

Докажем d). Возьмем $\varepsilon > 0$. Выберем биекции σ_1 и σ_2 так, что выполняются неравенства

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - c_{\sigma_1(n)}| < \inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - c_{\sigma(n)}| + \varepsilon,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\, c_n - b_{\sigma_2(n)}| < \inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, c_n - b_{\sigma(n)}| + \varepsilon.$$

Выбирая $\sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2$, получим:

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - b_{\sigma_3(n)}| &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - c_{\sigma_1(n)}| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, c_{\sigma_1(n)} - b_{\sigma_3(n)}| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - c_{\sigma_1(n)}| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, c_n - b_{\sigma_2(n)}| \\ &< \inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n - c_{\sigma(n)}| + \inf_{bij\ \sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\, c_n - b_{\sigma(n)}| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε, отсюда следует d). Теорема доказана.

Заметим, что если расстояния от д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ до дискретных мультимножеств $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конечны, то расстояние между д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и д.м.м. $\{b'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ также конечно. Поэтому любое семейство всех д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, таких, что $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$, образует метрическое пространство $(X, dist)$.

Теорема 2. $(X, dist)$ – полное метрическое пространство.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность д.м.м. $D^p = \{a_n^p\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (X, dist)$.

Выберем номер M_1 так, что для любых $p, m > M_1$ $dist(D^p, D^m) < 1/2$ и положим $\nu_1 = M_1 + 1$. Выберем номер M_2 так, что для любых $p, m > M_2$ $dist(D^p, D^m) < 1/2^2$ и положим $\nu_2 = M_2 + 1$. Вообще, номер M_s определяется так, что для любых $p, m > M_s$ $dist(D^p, D^m) < 1/2^s$. Положив $\nu_s = M_s + 1$, получим, что из последовательности $\{D^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ мы выделили подпоследовательность $\{D^{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ такую, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $s \in \mathbb{N}$, которому соответствует такая биекция $\sigma_s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^{\nu_{s+1}} - a_{\sigma_s(n)}^{\nu_s}| < 1/2^s < \varepsilon$.

Переобозначим $a_n^{\nu_1}$ через $\widetilde{a}_n^{\nu_1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $\widetilde{a}_n^{\nu_2} := a_{\sigma_2(n)}^{\nu_2}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $\widetilde{a}_n^{\nu_3} := a_{\sigma_3\circ\sigma_2(n)}^{\nu_3}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Вообще, положим $\widetilde{a}_n^{\nu_p} := a_{\sigma_p\circ\,\sigma_{p-1}\circ\ldots\circ\sigma_2(n)}^{\nu_p}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\widetilde{a}_n^{\nu_p} - \widetilde{a}_n^{\nu_m}| < 1/2^{s-1} \qquad \text{для любых } p, m > s. \tag{1}$$

Поскольку для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ $(\widetilde{a}_n^{\nu_p})_{p=1}^{\infty}$ — последовательность векторов из $\mathbb{R}^k$, фундаментальная ввиду (1), то существует $a_n = \lim_{p\to\infty} \widetilde{a}_n^{\nu_p}$. Значит, переходя в (1) к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\widetilde{a}_n^{\nu_p} - a_n| \le 1/2^{s-1} \qquad \text{для любого } p > s.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при подходящем s и $p > s$ имеем

$$dist(\{a_n^{\nu_p}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \varepsilon.$$

Осталось показать, что исходная последовательность также будет сходиться к $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По нему найдем число N так, чтобы для любых $p, m > N \quad dist(D^p, D^m) < \varepsilon/2$, и число M так, чтобы для любого $\nu_j > M \quad dist(D^{\nu_j}, D) < \varepsilon/2$. Возьмем $\nu_j > \max\{N, M\}$. Тогда для любого $p > N$

$$dist(D^p, D) \le dist(D^p, D^{\nu_j}) + dist(D^{\nu_j}, D) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Определение 3. Будем говорить, что д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ обладает S-свойством (или, иначе, является S-множеством), если существует такое $L < \infty$, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ найдется биекция $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(a_n + \tau) - a_{\sigma(n)}| \le L. \tag{2}$$

Другими словами, д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ обладает *S-свойством*, если существует такое $L < \infty$, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k \;\; dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \le L$.

Примеры:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k} = \mathbb{Z}^k \backslash \{\mathbf{0}\}$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ $\{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\}$. Поскольку для любого $\tau \in \mathbb{R}^k \;\; dist((\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\}, \mathbb{Z}^k) \le 1$, то, воспользовавшись неравенством треугольника, получим, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\mathbb{Z}^k\backslash\{\mathbf{0}\}, (\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\})$$
$$\le dist(\mathbb{Z}^k\backslash\{\mathbf{0}\}, \mathbb{Z}^k) + dist(\mathbb{Z}^k, (\mathbb{Z}^k + \tau)\backslash\{\tau\}) \le 2.$$

2. Равномерно протяженные д.м.м.

Определение 4. (М.Лашкович, [4]) Д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ называется *равномерно протяженным*, если существует такое число $\alpha > 0$, что

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k) = F < \infty. \tag{3}$$

Число α называется *плотностью* д.м.м. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Пусть для д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ выполнено (3). Покажем, что это д.м.м. обладает S-свойством. Пользуясь дважды неравенством треугольника, получим, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}})$$
$$\le dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k) + dist(\alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k + \tau)$$
$$+ dist(\alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k + \tau, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \le 2F + \alpha^{-1/2k}.$$

В разделе III мы покажем, что верно и обратное, то есть множество д.м.м., обладающих S-свойством, совпадает со множеством равномерно протяженных д.м.м.

3. Почти-периодические д.м.м. (для множеств на плоскости см. [1], а также [2]).

Определение 5. Вектор $t \in \mathbb{R}^k$ назовем *ε-почти-периодом* д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$, если $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n+t\}_{n\in\mathbb{N}}) < \varepsilon$.

Определение 6. Д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ назовем *почти-периодическим*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество его ε-почти-периодов, т.е. существует такое $G < \infty$, что в каждом k-мерном шаре радиуса G найдется хотя бы один ε-почти-период д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Покажем, что любое почти-периодическое д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством. Выберем такое $G < \infty$ из определения 6, что в каждом шаре радиуса G найдется хотя бы один 1-почти-период д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ в шаре $B(\tau, G)$ найдется 1-почти-период t д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Поэтому для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n+\tau\}_{n\in\mathbb{N}})$$
$$< dist(\{a_n+\tau\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n+t\}_{n\in\mathbb{N}}) + dist(\{a_n+t\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < G+1.$$

II. Свойства S-множеств

Теорема 3. Предел S-множеств есть S-множество.

Доказательство. Пусть $\left(\{a_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right)_{p=1}^{\infty}$ — последовательность S-множеств. Пусть $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — такое д.м.м., что $dist\left(\{a_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда для некоторого p_0

$$dist\left(\{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < 1.$$

Кроме того, существует такое L, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist\left(\{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n^{(p_0)}+\tau\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < L < \infty.$$

Имеем:

$$dist(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n+\tau\}_{n\in\mathbb{N}})$$
$$\leq dist\left(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + dist\left(\{a_n^{(p_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n^{(p_0)}+\tau\}_{n\in\mathbb{N}}\right) +$$
$$+dist\left(\{a_n^{(p_0)}+\tau\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n+\tau\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < L+2.$$

Теорема доказана.

Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^k$ под $\mathrm{card}\{a_n \in A\}$ будем понимать количество точек в пересечении множества A с д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 4. Пусть д.м.м. $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством. Тогда существует такое $M < \infty$, что

$$\operatorname{card}\{a_n \in B(c,1)\} < M \quad \text{для любого } c \in \mathbb{R}^k. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть для любого M найдется шар $B(b,1)$, в котором более, чем M точек д.м.м. D. Существует такая биекция $\sigma(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b - a_{\sigma(n)}| < L < \infty. \tag{5}$$

Пусть $a_{p_i}, i = \overline{1,N}$ $(M < N < \infty)$ — те элементы D, которые лежат в $B(b,1)$. Из неравенства (5) следует, что для любого $i = \overline{1,N}$ $a_{\sigma(p_i)} \in \overline{B(\mathbf{0}, L+1)}$, т.е. замкнутый шар $\overline{B(\mathbf{0}, L+1)}$ содержит более, чем M точек д.м.м. D. Ввиду произвольности M это противоречит дискретности д.м.м. D. Теорема доказана.

Следствие. Пусть д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством, а число M удовлетворяет (4). Тогда для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^k$ и любого $t \in \mathbb{R}^k$

$$\operatorname{card}\{a_n \in E + t\} < (\operatorname{diam} E)^k M.$$

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что $0 \in E$. Тогда по теореме 4 для любого $t \in \mathbb{R}^k$ имеем

$$\operatorname{card}\{a_n \in E + t\} \le \operatorname{card}\{a_n \in B(t, \operatorname{diam} E)\} < (\operatorname{diam} E)^k M,$$

где M удовлетворяет (4). Следствие доказано.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное выпуклое ограниченное множество. Известно [2], что для любого $x \in \mathbb{R}^k \setminus A$ существует единственная точка $y_0 \in A$ такая, что

$$|x - y_0| = \inf_{y\in A} |x - y|.$$

Поэтому можно корректно определить отображение $\varphi : \mathbb{R}^k \setminus A \to \partial A$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in \mathbb{R}^k \setminus A$ точку $\varphi(x) \in \partial A$ так, что

$$|x - \varphi(x)| = \inf_{y\in\partial A} |x - y|.$$

Лемма 1. a) Для любой точки $v \in \partial A$ имеем $\varphi(\partial Q(v, 2\mathrm{diam}A)) = \partial A$;

b) Отображение φ является не строго сжимающим, т.е. $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |x_1 - x_2|$.

Доказательство. Возьмем точку $y_0 \in \partial A$ и проведем через нее гиперплоскость так, чтобы множество A лежало по одну сторону от этой гиперплоскости. Восстановим перпендикуляр из точки y_0 и обозначим через x_0 точку его пересечения с $\partial Q(v, 2\mathrm{diam}A)$. Тогда $\varphi(x_0) = y_0$, т.к. $|x_0 - y_0| \le |x_0 - \widetilde{y}|$ для любого $\widetilde{y} \in \partial A$ по построению. Пункт a) доказан. Доказательство пункта b) см., например [6]. Лемма доказана.

Утверждение 1. Пусть д.м.м. $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством. Тогда существует такое C, что для любого выпуклого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^k$ и для любого $t \in \mathbb{R}^k$

$$|\mathrm{card}\{a_n \in E\} - \mathrm{card}\{a_n \in E + t\}| < C\left((\mathrm{diam}\, E)^{k-1} + 1\right).$$

Доказательство. Пусть M удовлетворяет (4), а целое $L > 1$ таково, что для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \le L. \tag{6}$$

Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}^k$. При $L \ge \mathrm{diam}\, E$ по следствию из теоремы 4

$$|\mathrm{card}\{a_n \in E\} - \mathrm{card}\{a_n \in E + t\}| \le 2M(\mathrm{diam}\, E)^k < 2ML^k.$$

Пусть теперь $L < \mathrm{diam}\, E$. Ввиду (6), для вектора t существует такая биекция $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что

$$|(a_n + t) - a_{\sigma(n)}| \le L \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в $E + t$ находятся все точки д.м.м. D вида $a_{\sigma(n)}$, где $a_n \in E_{-L}$, а также часть точек д.м.м. D вида $a_{\sigma(n)}$, где $a_n \in E_L \setminus E_{-L}$. Значит, для любого t количества точек в E и $E + t$ могут отличаться не более, чем на $\mathrm{card}\{a_n \in E_L \setminus E_{-L}\}$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное выпуклое ограниченное множество, $v \in \partial A$. Покроем $\partial Q(v, 2\mathrm{diam} A)$ k-мерными кубами с ребром 1 с центрами на $\partial Q(v, 2\mathrm{diam} A)$. Количество таких кубов равно $2k(2\mathrm{diam} A)^{k-1}$. Так как по лемме 1 сужение построенного выше отображения φ на $\partial Q(v, 2\mathrm{diam} A)$ — сжимающее отображение, то тем же числом кубов с ребром 1 можно покрыть и ∂A.

Таким образом, количество k-мерных кубов с ребром 1, покрывающих ∂E_L, не превосходит $2k(2\mathrm{diam} E_L)^{k-1}$. Значит, количество k-мерных кубов с ребром 1, покрывающих $E_L \setminus E_{-L}$, не превосходит $2L \cdot 2k(2\mathrm{diam} E_L)^{k-1}$. Поскольку $\mathrm{diam} E_L = \mathrm{diam} E + 2L < 3\mathrm{diam} E$, имеем

$$\mathrm{card}\{a_n \in E_L \setminus E_{-L}\} \le 4MLk(2\mathrm{diam} E_L)^{k-1} < 4 \cdot 6^{k-1} MLk(\mathrm{diam} E)^{k-1}.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение.

Утверждение 2. Пусть S-множество $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяет неравенству $dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n + \tau\}_{n\in\mathbb{N}}) \le L < \infty$. Тогда в любом k-мерном кубе с ребром R найдется не менее $\left[\dfrac{R}{2L}\right]^k$ точек этого S-множества, где $[\cdot]$ означает целую часть.

Доказательство. Для любого сдвига $\tau \in \mathbb{R}^k$ найдется биекция σ_τ такая, что

$$|(a_1 + \tau) - a_{\sigma_\tau(1)}| < L,$$

следовательно, $a_{\sigma_\tau(1)} \in B(a_1+\tau, L)$, т.е. для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ в шаре $B(a_1+\tau, L)$ найдется хотя бы одна точка д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Значит, для любого $\tau \in \mathbb{R}^k$ в кубе $Q(a_1+\tau, 2L)$ найдется хотя бы одна точка д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Из того, что каждый куб с ребром R содержит $\left[\frac{R}{2L}\right]^k$ непересекающихся кубов с ребром $2L$, получаем требуемое. Утверждение доказано.

Определение 7. *Плотностью* д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ назовем величину

$$\Delta = \lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{a_n \in Q(\mathbf{0}, T)\}}{T^k}. \tag{7}$$

Теорема 5. У любого S-множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует конечная ненулевая инвариантная относительно сдвигов плотность, т.е.

$$\Delta = \lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\}}{T^k} \text{ равномерно по } \alpha \in \mathbb{R}^k.$$

Доказательство. Оценим для произвольных $T > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $q \in \mathbb{N}$ разность

$$\left|\frac{1}{T^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \frac{1}{(qT)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, qT)\}\right|$$

$$= \frac{1}{(qT)^k}\left|q^k \operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - S_0\right|, \tag{8}$$

где

$$S_0 = \sum_{\substack{p_i=-[\frac{q}{2}]+1 \\ i=\overline{1,k}}}^{[\frac{q}{2}]} \operatorname{card}\left\{a_n \in Q\left(\left(\alpha^1 + p_1 T, \ldots, \alpha^k + p_k T\right), T\right)\right\}$$

при нечетных q и

$$S_0 = \sum_{\substack{p_i=-\frac{q}{2}+1 \\ i=\overline{1,k}}}^{\frac{q}{2}} \operatorname{card}\left\{a_n \in Q\left(\left(\alpha^1 + \left(p_k - \frac{1}{2}\right)T, \ldots, \alpha^k + \left(p_k - \frac{1}{2}\right)T\right), T\right)\right\}$$

при четных q. Выражение, стоящее под знаком модуля в (8), есть сумма q^k разностей вида $\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha+t, T)\}$, $t \in \mathbb{R}^k$. По утверждению 1 найдется такая константа C', не зависящая от t и α, что $|\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha+t, T)\}| < C'T^{k-1}$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{T^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T)\} - \frac{1}{(qT)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, qT)\}\right| < q^k \frac{1}{(qT)^k} C'T^{k-1} = \frac{C'}{T}.$$

Рассмотим произвольные $T_1 > 1, T_2 > 1, \varepsilon > 0$. Предположим вначале, что $T_1 l = T_2 q$, $l, q \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T_1)\} - \frac{1}{(lT_1)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, lT_1)\}\right| < \frac{C'}{T_1}$$

$$\left|\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, T_2)\} - \frac{1}{(qT_2)^k}\operatorname{card}\{a_n \in Q(\alpha, qT_2)\}\right| < \frac{C'}{T_2}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|$$

$$< C'\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) \text{ для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k. \tag{9}$$

Пусть теперь T_1, T_2 — произвольные положительные числа. Возьмем такую последовательность $\{T^{(p)}\}_{p=1}^{\infty}$, что $T^{(p)}\downarrow T_1$ и при этом для любого p отношение $\dfrac{T^{(p)}}{T_2}$ рационально. Тогда (9) верно при любом $T^{(p)}$ вместо T_1:

$$\left|\frac{1}{(T^{(p)})^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T^{(p)})\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|$$

$$< C'\left(\frac{1}{T^{(p)}}+\frac{1}{T_2}\right) \text{ для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k. \tag{10}$$

Выберем ε так, что $\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1+\varepsilon)\setminus Q(\alpha,T_1)\}=\operatorname{card}\{a_n\in\overline{Q(\alpha,T_1)}\setminus Q(\alpha,T_1)\}$ (это возможно ввиду дискретности S-множества $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). Поскольку $\partial Q(\alpha,T_1)$ можно покрыть $2kT_1^{k-1}$ кубами с ребром 1, для $p>N(\varepsilon)$ имеем

$$\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T^{(p)})\}-\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}=\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T^{(p)})\setminus Q(\alpha,T_1)\}$$

$$=\operatorname{card}\{a_n\in\overline{Q(\alpha,T_1)}\setminus Q(\alpha,T_1)\}\le\operatorname{card}\{a_n\in\partial Q(\alpha,T_1)\}\le 2MkT_1^{k-1},$$

где M удовлетворяет (4) и зависит только от $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Теперь, перейдя в (10) к пределу при $p\to\infty$, получим, что

$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|$$

$$< C'\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)+2Mk\frac{1}{T_1}< C''\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) \text{ для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k. \tag{11}$$

Таким образом, для любых $T_1, T_2>\dfrac{2C''}{\varepsilon}$

$$\left|\frac{1}{T_1^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_1)\}-\frac{1}{T_2^k}\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T_2)\}\right|<\varepsilon \text{ для любого } \alpha\in\mathbb{R}^k.$$

По критерию Коши это эквивалентно существованию конечного предела

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{card}\{a_n\in Q(\alpha,T)\}}{T^k}=:\Delta$$

равномерно по $\alpha\in\mathbb{R}^k$.

Осталось показать, что $\Delta\neq 0$. Пусть L то же, что и в (2). По утверждению 2, в кубе $Q(\mathbf{0},R)$ содержится не менее $\left[\dfrac{R}{2L}\right]^k$ точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим, что плотность этого д.м.м. не менее $(2L)^{-k}>0$. Теорема доказана.

III. Связь с равномерно протяженными множествами М.Лашковича

Напомним, что д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ называется *равномерно протяженным* с плотностью α, если существует такое число $\alpha > 0$, что

$$dist(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \alpha^{-1/k}\mathbb{Z}^k) < \infty.$$

Для равномерно протяженных множеств справедлива следующая

Теорема [М.Лашкович [3]]. Для любого д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ и для любой константы α следующие условия эквивалентны:

1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — равномерно протяженное д.м.м. с плотностью α.

2) существует положительная константа C такая, что неравенство

$$|\mathrm{card}\{a_n \in H\} - \alpha m_k(H)| \le C m_{k-1}(\partial H) \tag{12}$$

выполнено для любого множества H в $\mathbb{R}^k$, являющегося конечным объединением единичных кубов.

3) существует положительная константа C такая, что неравенство

$$|\mathrm{card}\{a_n \in H\} - \alpha m_k(H)| \le C p(H),$$

где $p(H) = m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid dist(x, \partial H) \le 1\})$, выполнено для любого ограниченного измеримого множества $H \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 6. a) Д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством тогда и только тогда, когда оно является равномерно протяженным.

b) Плотность α равномерно протяженного д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ совпадает с величиной Δ из (7).

Доказательство. Как было показано в разделе I, равномерно протяженные множества обладают S-свойством. Покажем, что верно и обратное. Отметим, что утверждение 2) теоремы Лашковича в случае, когда H — произвольный куб в $\mathbb{R}^k$, доказано, по существу, в утверждении 1.

Пусть д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством и имеет плотность α. Обозначим $a_n = \sqrt[k]{\alpha} b_n$. Тогда $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает S-свойством и имеет плотность 1. Покажем, что $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является равномерно протяженным с плотностью 1. Отсюда, очевидно, следует, что д.м.м. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — равномерно протяженное с плотностью α, т.е. пункт b) теоремы.

Выберем такое целое $L < \infty$, что для любого $v \in \mathbb{R}^k$ и некоторой биекции $\sigma_v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(a_n + v) - a_{\sigma_v(n)}| \le L. \tag{13}$$

По теореме 4 существует такое $M < \infty$, что число точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в любом кубе с ребром 1 не превосходит M. Зафиксируем кратное L целое число R, $R > 2\cdot 6^k M L^{k+1}$. Представим $\mathbb{R}^k$ как объединение непересекающихся кубов $Q(iR, R)$, $i \in \mathbb{Z}^k$:

$$\mathbb{R}^k = \bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}^k} Q(iR, R). \tag{14}$$

Рассмотрим произвольное $v \in \mathbb{Z}^k$ и соответствующую ему по (13) биекцию σ_v. Заметим, что, т.к. $R > L$, то ввиду (13) включение $a_{\sigma_v(n)} \in Q(iR, R)$, где $a_n \in Q((j+v)R, R)$, может иметь место только для таких j, что $\|j - i\| \le 1$. Для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ таких, что $\|j-i\| = 1$, обозначим через $C^v_{i,j}$ количество точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q(iR, R)$, которым при биекции σ_v соответствуют точки д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q((j+v)R, R)$. Тогда $C^v_{j,i}$ — количество точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q(jR, R)$, которым при биекции σ_v соответствуют точки д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $Q((i+v)R, R)$. Для любого i справедливо равенство

$$\operatorname{card}\{a_n \in Q((i+v)R, R)\} = \operatorname{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} C^v_{i,j} + \sum_{j:\|j-i\|=1} C^v_{j,i}. \tag{15}$$

Просуммируем обе части равенства по $v \in [0,T)^k \bigcap \mathbb{Z}^k$ и разделим на T^k. Ввиду (13), для любых $i, j, v \in \mathbb{Z}^k$ $C^v_{i,j}$ не превосходит максимального количества точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в параллелепипеде, одно ребро которого равно L, а остальные R, т.е. $C^v_{i,j} \le MLR^{k-1}$. Следовательно, усреднения $C_{i,j}$ также ограничены:

$$C_{i,j} \le MLR^{k-1} \quad \text{для любых } \ i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{16}$$

Поэтому из каждой последовательности усредненных значений можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. существует подпоследовательность $T_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ такая, что выражение

$$\operatorname{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \frac{1}{(T_p)^k} \sum_{\substack{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k \\ j:\|j-i\|=1}} C^v_{i,j} + \frac{1}{(T_p)^k} \sum_{\substack{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k \\ j:\|j-i\|=1}} C^v_{j,i}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}^k$ сходится при $p \to \infty$ к величине

$$\operatorname{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{i,j} + \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{j,i},$$

где $C_{i,j} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{(T_p)^k} \sum\limits_{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k} C^v_{i,j}$. В левой части (15) по теореме 5 получим

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{v\in[0,T_p)^k \bigcap \mathbb{Z}^k} \frac{\operatorname{card}\{a_n \in Q(vR, R)\}}{(T_p)^k} = 1 \ R^k.$$

Имеем:

$$R^k = \operatorname{card}\{a_n \in Q(iR, R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{i,j} + \sum_{j:\|j-i\|=1} C_{j,i}.$$

Положим $D_{i,j} := C_{i,j} - C_{j,i}$. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ выполнены равенства:

$$D_{i,j} = -D_{j,i}, \tag{17}$$

$$R^k = \text{card}\{a_n \in Q(iR,R)\} - \sum_{j:\|j-i\|=1} D_{i,j}. \tag{18}$$

Предположим, что для любых i, j можно найти такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, что

$$\widetilde{D}_{i,j} = -\widetilde{D}_{j,i}, \tag{19}$$

$$\sum_{j:\|j-i\|=1} D_{i,j} = \sum_{j:\|j-i\|=1} \widetilde{D}_{i,j}, \tag{20}$$

$$|\widetilde{D}_{i,j}| \le |[D_{i,j}]| + 1. \tag{21}$$

Ввиду (16) и (21), $|\widetilde{D}_{i,j}| \le MLR^{k-1} + 1$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$, поэтому

$$\sum_{j:\|j-i\|=1,\, j\ne i} |\widetilde{D}_{i,j}| \le (3^k - 1)(MLR^{k-1} + 1).$$

По утверждению 2 в кубе с ребром R содержится не менее $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^k$ точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. По выбору R имеем $R^k > 2\cdot 6^k ML^{k+1} R^{k-1}$, следовательно,

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^k > 2\cdot 3^k MLR^{k-1} > (3^k-1)(MLR^{k-1}+1) \ge \sum_{j:\|j-i\|=1} |\widetilde{D}_{i,j}|. \tag{22}$$

Для каждой пары индексов (i, j), для которых $\widetilde{D}_{i,j} > 0$, поставим во взаимооднозначное соответствие $\widetilde{D}_{i,j}$ точкам д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcap Q(iR,R)$ столько же точек д.м.м. $\mathbb{Z}^k \bigcap Q(jR,R)$. Ввиду (22) это можно сделать так, что для любых пар (i,j) и (i,j') при $j \ne j'$, $\widetilde{D}_{i,j} > 0$, $\widetilde{D}_{i,j'} > 0$, соответствие устанавливается для различных точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а для любых пар (i,j) и (i',j) при $i \ne i'$, $\widetilde{D}_{i,j} > 0$, $\widetilde{D}_{i',j} > 0$, соответствие устанавливается для различных точек д.м.м. $\mathbb{Z}^k$. Наконец, ввиду (18), (19) и (20), для каждого i число "незадействованных" точек д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcap Q(iR,R)$ совпадает с числом "незадействованных" точек д.м.м. $\mathbb{Z}^k \bigcap Q(iR,R)$, поэтому между ними также можно установить взаимооднозначное соответствие. Таким образом, построена такая биекция σ между д.м.м. $\mathbb{Z}^k$ и д.м.м. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^k} |i - a_{\sigma(i)}| < 2\sqrt{k}R.$$

Осталось показать, что для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ можно найти такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, для которых выполнены условия (19), (20) и (21).

Введем следующие обозначения: последовательность пар $\ldots(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_4), \ldots$ (конечную или бесконечную в одну или обе стороны) назовем *цепью*, если число $D_{i_k,i_{k+1}}$ не целое для любой пары из последовательности. Конечную цепь $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{p-1}, i_p)$ назовем *циклом*, если $i_0 = i_p$. Заметим, что если в цикле заменить все $D_{i_k,i_{k+1}}$ на $D'_{i_k,i_{k+1}} = D_{i_k,i_{k+1}} - \theta$, где

$\theta \in \mathbb{R}$ (и, соответственно, D_{i_{k+1},i_k} на $D'_{i_{k+1},i_k} = D_{i_{k+1},i_k} + \theta$), то условия (17) и (18) сохраняются. Докажем, что это можно сделать таким образом, что $[D_{i,j}] \le D'_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ и при этом в наборе $\{D'_{i,j}\}$ не будет ни одного цикла. Для этого перенумеруем все циклы: $c_1, c_2, \ldots$. Пусть $c_1 = \{(i_0, i_1), \ldots, (i_{p-1}, i_p)\}$. Положим δ равным минимуму дробных частей чисел D_{i_{l-1},i_l}, $l = \overline{1,p}$. Теперь, проводя указанную выше замену, приходим к набору $\{D'_{i,j}\}$, в котором для одной из пар (i_{l-1}, i_l), $l = \overline{1,p}$, число D_{i_{l-1},i_l} целое, поэтому цикла c_1 уже нет. При этом $[D_{i,j}] \le D'_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1$ для всех пар (i, j). Если циклов конечное число, то за конечное число шагов придем к набору $\{\widehat{D}_{i,j}\}$, не содержащему циклов и удовлетворяющему (19)-(21). Если же циклов бесконечное число, то мы построим последовательность наборов $\left(D^{(p)}_{i,j}\right)_{p=1}^{\infty}$, для которых

$$[D_{i,j}] \le D^{(p)}_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1 \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{23}$$

Значит, для каждой пары (i, j) существует подпоследовательность p_s, для которой

$$D^{(p_s)}_{i,j} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{D}_{i,j}. \tag{24}$$

Применяя диагональный процесс, получим подпоследовательность, для которой (24) выполнено для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$, следовательно, предельный набор $\{\widehat{D}_{i,j}\}$ удовлетворяет (19)-(21), неравенству

$$[D_{i,j}] \le \widehat{D}_{i,j} \le [D_{i,j}] + 1 \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{25}$$

и не имеет циклов. При этом из (25) следует, что

$$[\widehat{D}_{i,j}] = [D_{i,j}] \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}^k. \tag{26}$$

Для удобства вновь переобозначим $\widehat{D}_{i,j}$ через $D_{i,j}$. Ввиду (26) по-прежнему требуется для любых $i, j \in \mathbb{Z}^k$ найти такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, для которых выполнены условия (19), (20) и (21).

Рассмотрим граф с вершинами $i \in \mathbb{Z}^k$ и ребрами (i, j) такими, что $D_{i,j}$ — дробное число. Пусть Γ — произвольная связная компонента этого графа. По доказанному, Γ есть дерево, т.е. не содержит циклов.

Рассмотрим некоторую вершину j_1 дерева Γ. Для любого $j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1$, положим $D'_{j_1,j} = [D_{j_1,j}]$. Пусть сумма дробных частей чисел $D_{j_1,j}$ равна N_1. Из (18) следует, что N_1 — целое число. Так как $\#\{j \in \Gamma : \|j_1 - j\| = 1\} > N_1$, то можно добавить по единице к произвольным N_1 числам $D'_{j_1,j}$, $j \in \Gamma : \|j_1 - j\| = 1$. Получившиеся в результате числа обозначим через $\widetilde{D}_{j_1,j}$. Тогда

$$\sum_{j\in\Gamma:\|j-j_1\|=1} \widetilde{D}_{j_1,j} = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_1\|=1} [D_{j_1,j}] + N_1 = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_1\|=1} D_{j_1,j}.$$

Каждое из чисел $D_{j_1,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1$, было изменено не более, чем на единицу. Поэтому

$$|\widetilde{D}_{j_1,j}| \leq |[D_{j_1,j}]| + 1 \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1.$$

Положим

$$\widetilde{D}_{j,j_1} := -\widetilde{D}_{j_1,j} \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1.$$

При этом, очевидно,

$$|\widetilde{D}_{j,j_1}| \leq |[D_{j,j_1}]| + 1 \quad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_1\| = 1.$$

В качестве j_2 возьмем любую вершину j дерева Γ со свойством $\|j - j_1\| = 1$. Вообще, в качестве j_r возьмем любую незанумерованную еще вершину j дерева Γ, для которой выполнено $\|j_s - j\| = 1$ для некоторого $s < r$.

Заметим, что в случае $\widetilde{D}_{j_1,j} = [D_{j_1,j}]$ мы имеем $\widetilde{D}_{j,j_1} = [D_{j,j_1}] + 1$, а в случае $\widetilde{D}_{j_1,j} = [D_{j_1,j}] + 1$ мы имеем $\widetilde{D}_{j,j_1} = [D_{j,j_1}]$.

Пусть $\widetilde{D}_{j_2,j_1} = [D_{j_2,j_1}]$. Для любого $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$, $j \neq j_1$, положим $D'_{j_2,j} = [D_{j_2,j}]$. Пусть сумма дробных частей чисел $D_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$, равна N_2. Из (18) следует, что N_2 — целое число. Так как $\#\{j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1\} > N_2$, то можно добавить по единице к произвольным N_2 числам $D'_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \neq j_1$. Получившиеся в результате числа обозначим через $\widetilde{D}_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \neq j_1$. Тогда

$$\sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} \widetilde{D}_{j_2,j} = \widetilde{D}_{j_2,j_1} + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\neq j_1}} \widetilde{D}_{j_2,j}$$

$$= [D_{j_2,j_1}] + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\neq j_1}} [D_{j_2,j}] + N_2 = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} D_{j_2,j}.$$

Пусть $\widetilde{D}_{j_2,j_1} = [D_{j_2,j_1}] + 1$. Для любого $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$, $j \neq j_1$, положим $D'_{j_2,j} = [D_{j_2,j}]$. Пусть по-прежнему N_2 есть сумма дробных частей чисел $D_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1$. Как и ранее, N_2 — целое число. Очевидно, что $N_2 \geq 1$ и $\#\{j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1\} > N_2$, поэтому можно добавить по единице к произвольным $N_2 - 1$ числам $D'_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \neq j_1$. Получившиеся в результате числа обозначим через $\widetilde{D}_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j_2 - j\| = 1$, $j \neq j_1$. Тогда

$$\sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} \widetilde{D}_{j_2,j} = \widetilde{D}_{j_2,j_1} + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\neq j_1}} \widetilde{D}_{j_2,j}$$

$$= [D_{j_2,j_1}] + 1 + \sum_{\substack{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1,\\ j\neq j_1}} [D_{j_2,j}] + N_2 - 1 = \sum_{j\in\Gamma:\|j-j_2\|=1} D_{j_2,j}.$$

Каждое из чисел $D_{j_2,j}$, $j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1, j \neq j_1$, было изменено не более, чем на единицу. Поэтому

$$|\widetilde{D}_{j_2,j}| \leq |[D_{j_2,j}]| + 1 \qquad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1.$$

Положим

$$\widetilde{D}_{j,j_2} := -\widetilde{D}_{j_2,j} \qquad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1.$$

При этом, очевидно,

$$|\widetilde{D}_{j,j_2}| \leq |[D_{j,j_2}]| + 1 \qquad \text{для любого } j \in \Gamma : \|j - j_2\| = 1.$$

Проведем аналогичную процедуру для каждой вершины каждой связной компоненты Γ графа. Заметим, что, ввиду отсутствия циклов, числа $D_{i,j}$ мы изменяем только один раз — при рассмотрении вершины $\min\{i,j\}$. Таким образом, для любых i, j существуют такие целые числа $\widetilde{D}_{i,j}$, для которых выполнены условия (19), (20) и (21). Теорема доказана.

Следствие. Если два д.м.м. имеют одинаковую плотность, то расстояние между ними конечно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашковский А.Ю., Ронкин Л.И. и Фаворов С.Ю. О почти-периодических множествах в комплексной плоскости.// Доповiдi Нацiональної академiї Наук України. - 1998. - Н.12. - С.37-39.

2. Favorov S.Yu. Sunyer-i-Balaguer's Almost Elliptic Functions and Yosida's Normal Functions J. Anal. Math. 104 (2008), 307-340.

3. Laczkovich M. Uniformly spread discrete sets in $\mathbb{R}^d$. J.London Math.Soc. (2) 46 (1992), p.39-57.

4. Laczkovich M. Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem. J. reine Angew. Math. 404 (1990), 77-117.

5. Кадец В.М. Курс функционального анализа, ХНУ имени В.Н.Каразина, 2006. -600с., с.294.

6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М., Мир, 1975, с.50.