УДК 517.5

О. В. ЕПИФАНОВ, Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

О СОХРАНЕНИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

1. Пусть $a(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} \frac{d^k}{dz^k}$ — дифференциальный оператор бесконечного порядка с характеристической функцией $a(z)$, $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, сопряженную диаграмму

которой обозначим символом $I(f)$ (используемые в работе определения и характеристики целых функций берутся из [1]). Вершинами сопряженной диаграммы назовем точки, являющиеся общими концами смежных отрезков, лежащих на границе выпуклого компакта $I(f)$. В частности, если $I(f)$ отрезок, то вершинами считаются его концы. В работе [2] И. В. Островский выдвинул гипотезу, согласно которой, если $f(z)$ имеет вполне регулярный рост (в. р. р.), а характеристическая функция дифференциального оператора целая экспоненциального типа и не обращается в ноль в вершинах $I(f)$, то $a(D)f(z)$ также имеет в. р. р. Справедливость этой гипотезы следует из «достаточной» части теоремы, доказанной в настоящей работе.

Пусть $0 \leqslant \sigma < \infty$, $K_\sigma = \{z: |z| \leqslant \sigma\}$, $[1, \sigma]$ — класс всех целых функций роста не выше, чем первого порядка и типа σ, $H(K_\sigma)$ — множество всех аналитических на компакте K_σ функций.

Все рассматриваемые в статье дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$a(D)\,y(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k(z) \tag{1}$$

удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} /a_k/^{1/k} < 1/\sigma. \tag{2}$$

Иначе говоря, предполагается, что характеристические функции $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ принадлежат $H(K_\sigma)$.

Напомним некоторые известные свойства операторов вида (1).

1. Для того, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k(z)$ сходился для всех $z \in \boldsymbol{C}$ и $y \in [1, \sigma]$, а также для того, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \max_{|z| \leqslant R} |y^{(k)}(z)|$ сходился для всех $R < \infty$ и $y \in [1, \sigma]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2) (см. [3, 4]).

2. Оператор (1) при выполнении условия (2) действует из $[1, \sigma]$ в $[1, \sigma]$, причем $I(a(D)\,y) \subset I(y)$ (см. [3]).

3. Если выполнено условие (2), то уравнение $a(D)\,y = f$ для любой функции f из $[1, \sigma]$ имеет частное решение y из $[1, \sigma]$ такое, что $I(y) = I(f)$ (см. [3]).

4. Совокупность операторов (1), удовлетворяющих (2), образует коммутативную алгебру операторов на $[1, \sigma]$.

Свойство 4 известно и неоднократно использовалось при исследовании операторов (1); но так как здесь трудно указать первоисточник, то мы приведем краткое его доказательство.

Пусть $a(z)$, $b(z) \in H(K_\sigma)$ и $c(z) = a(z) \cdot b(z)$, тогда $c(z) \in H(K_\sigma)$. Применяя последовательно операторы $a(D)$ и $b(D)$ к произвольной функции y из $[1, \sigma]$, представленной в виде

$y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\sigma+\varepsilon} Y(t)e^{zt}dt$, где $Y(t)$ ассоциирована с y по Борелю, а $\varepsilon>0$ достаточно мало, получим $a(D)y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int a(t)Y(t)e^{zt}dt$, $b(D)a(D)y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int b(t)a(t)Y(t)e^{zt}dt=a(D)b(D)y(z)=c(D)y(z)$.

2. Покажем сначала, что гипотеза И. В. Островского справедлива для дифференциального оператора конечного порядка. Пусть $f(z)$ имеет экспоненциальный тип и вполне регулярный рост. Из результатов работы [5] фактически следует, что гипотеза справедлива для $a(D)=\frac{d}{dz}$. Поэтому, если $z=0$ не вершина $I(f)$, то $f'(z)$ — в. р. р. Пусть $\lambda\in\mathbf{C}$, λ — не вершина $I(f)$; тогда $z=0$ — не вершина сопряженной диаграммы $I(f_1)=I(f)-\lambda$ функции $f_1(z)=e^{-\lambda z}f(z)$, имеющей, как и $f(z)$, в. р. р. В силу [5] $f_1'(z)$ имеет вполне регулярный рост. Из представления $f_1'(z)=$ $=e^{-\lambda z}(f'(z)-\lambda f(z))$ заключаем, что $f'-\lambda f$ имеет в. р. р. Таким образом, $\frac{d}{dz}-\lambda I$ сохраняет вполне регулярный рост. Кроме того, оператор $\frac{d}{dz}-\lambda I$ не меняет сопряженной диаграммы: $I(f'-\lambda f)=I(f)$. Действительно, включение $I(f'-\lambda f)\subset I(f)$ всегда выполняется [3]. Допустим от противного что сопряженная диаграмма функции $y(z)=f'(z)-\lambda f(z)$ не совпадает с $I(f)$, то есть является собственным подмножеством $I(f)$. Согласно свойству 3 найдется решение $x(z)$ уравнения $x'-\lambda x=y$ такое, что $I(x)=$ $=I(y)$. Отсюда получим, что $f(z)=e^{\lambda z}c+x(z)$.

Следовательно, $I(f)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $I(x)\cup\{\lambda\}$: $I(f)=\operatorname{conv}(I(x)\cup\{\lambda\})$. Учитывая, что $I(x)$ — собственное подмножество $I(f)$, получим из последнего равенства, что $\lambda\notin I(x)$ (иначе бы $I(x)=I(f)$), но тогда из того же равенства находим, что λ — вершина $I(f)$, и мы пришли к противоречию. Далее, оператор $a(D)$ конечного порядка представим в виде суперпозиции $a(D)=\prod\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{d}{dz}-\lambda_k I\right)$, где λ_k, $k=1,2,3,\ldots,$ — все нули характеристической функции. Применяя последовательно операторы $\frac{d}{dz}-\lambda_k I$ и учитывая, что λ_k — не вершины $I(f)$, получим, что $a(D)f$ — в. р. р.

Следующая теорема является основной в данной работе.

Теорема. *Пусть для дифференциального оператора* $a(D)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\frac{d^k}{dz^k}$ *выполнено условие (1); T — произвольный выпуклый компакт в круге $|z|\leqslant\sigma$ и $P(T)$ — класс всех целых функций экспоненциального типа с сопряженной диаграммой T. Для того, чтобы оператор $a(D)$ сохранял в. р. р. для любой функции из $P(T)$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $a(z)$ не являлся вершиной T.*

Доказательство. Установим сначала один вспомогательный результат. В работе [6] для более общих операторов, чем $a(D)$, доказано утверждение, из которого вытекает, в частности, что при выполнении условия (1) оператор $a(D)$ сохраняет нерегулярность роста любой функции из $[1, \sigma]$ по каждому фиксированному лучу. Применим этот результат в доказательстве следующей леммы

Лемма. *Если $b(D)$ удовлетворяет (1) и $b(z) \neq 0$, $z \in K_\sigma$, то $b(D)y(z)$ в. р. р для любой функции $y(z)$ в. р. р. из класса* $[1, \sigma]$.

Действительно, если найдется функция $y_0(z) \in [1, \sigma]$ в. р. р. такая, что $f = b(D)y_0$ не имеет в. р. р. по некоторому лучу $\arg z = \theta_0$, то применив к f дифференциальный оператор $c(D)$ с характеристической функцией $c(z) = 1/b(z)$ из $H(K_\sigma)$ и учитывая, что $c(D)b(D) = I$, получим $c(D)f = c(D)b(D)y_0 = y_0$. Но тогда, согласно [6], $y_0(z)$ должна быть нерегулярного роста на луче arg, $z = \theta_0$, что невозможно.

Возвращаясь к доказательству теоремы, установим сначала достаточность ее условий. Пусть $Q(z)$ — полином, все нули которого совпадают с нулями $a(z)$, лежащими в круге K_σ. Тогда $a(z)$ можно представить в виде: $a(z) = Q(z)b(z)$, где $b(z) \in H(K_\sigma)$ и $b(z) \neq 0$, $z \in K_\sigma$. Но тогда $\forall f \in P(T)$ $a(D)f = b(D)Q(D)f$. Если f имеет в. р. р., то как установлено выше, в предположениях теоремы $Q(D)f$ сохраняет в. р. р. Используя лемму, устанавливаем, что $a(D)f$ также имеет в. р. р.

Необходимость. Пусть $a(\lambda_0) = 0$ и λ_0 — вершина T. Из простых геометрических соображений ясно, что опорная прямая к T, соответствующая некоторому направлению θ_0, опирается лишь на одну точку λ_0 из T, причем T представимо в виде выпуклой области $\operatorname{conv}(T_1 \cup \{\lambda_0\})$, где T_1 — выпуклый компакт, содержащийся в T и такой, что $\sup\{\operatorname{Re} ze^{-i\theta} : z \in T_1\} < \operatorname{Re} \lambda_0 e^{-i\theta}$ для всех θ из некоторой окрестности $U = (-\varepsilon + \theta_0, \varepsilon + \theta_0)$ направления θ_0. Выберем функцию g из $P(T_1)$ так, чтобы она не имела в. р. р. на каждом луче $\arg z = \theta$, θ из U, и была в. р. р. на остальных лучах (существование такой функции доказано в [7]). Функция $f(z) = e^{\lambda_0 z} + g(z)$ принадлежит $P(T)$ и, очевидно, имеет в. р. р. при всех θ, кроме, быть может, $\theta = \theta_0 - \varepsilon$ и $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. Но множество лучей в. р. р. замкнуто (см. [1, с. 186], и потому f имеет в. р. р. В то же время функция $a(D)f(z) = a(D)g(z)$ не имеет в. р. р. на луче $\arg z = \theta_0$ в силу указанного выше результата из [6].

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1956. — 632 с. 2. *Островский И. В.* Операторы, сохраняющие вполне регулярный рост. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1978, **78**, с. 271—273. 3. *Muggli H.* Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. — Comment. Mathem. Helvetici, 1938, № 1, p. 151—179. 4. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых характеристических свойствах дифференциальных операторов бесконечного порядка. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, **30**, № 5, с. 933—1016. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.*

О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1973, вып. 18, с. 70—81. 6. *Епифанов О. В.* О сохранении оператором свертки не вполне регулярного роста функций. — Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 2, с. 420—422. 7. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции. — Мат. сб., 1969, 79, № 4, с. 463—476.

Поступила в редколлегию 27.05.85.