ЗАПИСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ и ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1950 Том XXII

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ (III)

В. А. Марченко

(Харьков)

В различных вопросах гармонического анализа и теории приближения функций большую роль играют интегральные операторы K_λ вида:

$$K_\lambda[F(x)] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\,K(\lambda t)\,dt \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где ядро $K(x)$ есть суммируемая на вещественной оси функция, удовлетворяющая условиям:

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1,$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-i\lambda x}\,dx = 0 \text{ при } |\lambda| \geqslant 1.$$

Если $E_k(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $K(x)$:

$$E_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-i\lambda x}\,dx,$$

то эти условия запишутся так:

$$\text{а)}\ E_k(0) = 1;$$

$$\text{б)}\ E_k(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| \geqslant 1.$$

Для того чтобы оператор K_λ был определен на возможно более широких классах функций $F(x)$, а также для некоторых оценок, нужны ядра $K(x)$, быстро убывающие при $|x| \to \infty$. Так, хорошо известное ядро Фейера:

$$K_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

и его обобщения

$$K_n(x)=\frac{1}{K_n}\left(\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\right)^{2n},\qquad K_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\right)^{2n}dx$$

убывают соответственно как $|x|^{-2}$ и $|x|^{-2n}$.

Целью настоящей заметки является построение и некоторые приложения быстро убывающих ядер $K(x)$, удовлетворяющих условиям а), б).[1]

§ 1. Пусть положительная и непрерывная функция $\alpha(x)$ удовлетворяет естественному во многих вопросах условию

$$\text{I.}\quad \alpha(x+y)\leqslant\alpha(x)\cdot\alpha(y)$$

и, кроме того, условию

$$\text{II.}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln\alpha(x)|}{1+x^2}dx<\infty .$$

В этом параграфе мы займемся построением ядра $K(x)$, удовлетворяющего условиям а), б), и такого, что при любом фиксированном λ $|K(\lambda x)|$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{\alpha(x)}$, т. е. $|K(\lambda x)|=0\left(\frac{1}{\alpha(x)}\right)$ при $|x|\to\infty$.[2]

Не умаляя общности, мы будем считать, что функция $\alpha(x)$ — четная, монотонно и бесконечно растущая вместе с $|x|$ и что $\alpha(x)>1$ для всех x. В этом случае конечность интеграла II равносильна конечности интеграла

$$\text{II}'.\quad \int\limits_{1}^{\infty}\frac{\beta(x)}{x^2}dx<\infty\qquad \big(\beta(x)=\ln\alpha(x)\big).$$

Из условия I вытекает существование конечного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\beta(x)}{|x|}$, который должен быть равен нулю, ибо в противном случае интеграл II′ был бы расходящимся. Далее, легко показать, что сходимость интеграла II′ равносильна сходимости ряда:

$$\text{II}''.\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta(k)}{k^2}<\infty ,$$

все члены которого положительны.

[1] Результаты настоящей статьи имеют точки соприкосновения с некоторыми недавно полученными результатами акад. С. Н. Бернштейна.

[2] Из одной теоремы Палей-Винера следует, что условие II необходимо для существования таких ядер.

Из сходимости этого ряда следует, что существует последовательность положительных чисел C_n, таких, что $C_n > 1$, $C_n \to \infty$ при $n \to \infty$, но:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(k)}{k^2} c_k = S < \infty .$$

Положим, $a_k = \frac{\beta(k) C_k}{S k^2}$ и построим последовательность функций $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin \frac{a_k x}{2}}{\frac{a_k x}{2}} \right)^2 .$$

Очевидно, что $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$, откуда следует существование предельной функции $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{a_k x}{2}}{\frac{a_k x}{2}} \right)^2 . \tag{1}$$

Функция $f_n(z)$ есть целая трансцендентная функция экспоненциального типа (ц. т. ф. э. т.) с показателем $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < 1$, и её преобразование Фурье $E_{f_n}(\lambda)$ равно нулю при $|\lambda| \geqslant \sigma_n$. Значит, $f(z)$ — тоже ц. т. ф. э. т. с показателем 1, и её преобразование Фурье $E_f(\lambda) = \lim_{n \to \infty} E_{f_n}(\lambda)$ обращается в нуль при $|\lambda| \geqslant 1$. Так как $f(0) = 1$ и $f(x) \geqslant 0$, то

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx > 0$$

и функция

$$K(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$$

удовлетворяет условиям а) и б).

Покажем теперь, *что при любом* $\lambda \neq 0$:

$$|K(\lambda x)| < \frac{M_\lambda}{\alpha(x)(1 + x^2)} \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

где M_λ — константа, зависящая только от λ.

Действительно, так как

$$\left|\sin\frac{a_k\lambda x}{2}\right|\leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right|\leqslant 1,$$

то:

$$\alpha(x)\,|K(\lambda x)|=\alpha(x)\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right|\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right|\frac{1}{\|f\|}\leqslant$$

$$\leqslant\alpha(x)\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right|\frac{4}{a_1a_2\lambda^2\|f\|}\left|\frac{\sin\frac{a_1\lambda x}{2}\sin\frac{a_2\lambda x}{2}}{x^2}\right|,$$

и

$$\alpha(x)\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right|\leqslant\frac{\alpha(x)\ \ 2^n}{a_1a_2\dots a_n\,|\lambda|^n\,|x|^n},$$

каково бы ни было целое число n.

Положим $n=[\beta(x)]$. Тогда

$$\frac{\alpha(x)\,2^n}{a_1a_2\dots a_n\,|\lambda|^n\,|x|^n}\leqslant\frac{l^{n+1}\,2^n\,n\,!}{\frac{\beta(1)}{1}\,\frac{\beta(2)}{2}\dots\frac{\beta(n)}{n}\left|\frac{\lambda}{s}\right|^n c_1c_2\dots c_n}.$$

Из условия I следует, что

$$\beta(x+y)\leqslant\beta(x)+\beta(y).$$

Поэтому, если $x>y>0$, то

$$\beta(x)\leqslant\beta\left(\left\{\left[\frac{x}{y}\right]+1\right\}y\right)\leqslant\left\{\left[\frac{x}{y}\right]+1\right\}\beta(y)\leqslant\left(\frac{x}{y}+1\right)\beta(y),$$

и

$$\frac{\beta(x)}{x}\leqslant\frac{\beta(y)}{y}\left(1+\frac{y}{x}\right)\leqslant 2\frac{\beta(y)}{y},$$

то есть

$$\frac{\beta(y)}{y}\geqslant\frac{\beta(x)}{2x}\qquad (x>y>0).$$

Так как $\frac{\beta(x)}{|x|} \to 0$ при $|x| \to \infty$, то $\beta(x) < |x|$ при $|x| > x_0$ и, согласно предыдущему неравенству:

$$\frac{\beta(k)}{k} \geqslant \frac{\beta(x)}{2|x|};\ k = 1,\ 2,\ \ldots [\beta(x)]; \qquad |x| > x_0,$$

то есть

$$\frac{\beta(1)\beta(2)\ldots\beta(n)}{1 \quad 2 \ldots \quad n} \geqslant \left(\frac{\beta(x)}{2|x|}\right)^n; \qquad |x| > x_0,$$

и неравенство (5) примет вид:

$$\frac{\alpha(x)2^n}{a_1 a_2 \ldots a_n |\lambda|^n |x|^n} \leqslant \frac{e^{n+1} 2^n n!}{\left(\frac{\beta(x)}{2|x|}\right)^n \left|\frac{\lambda}{s}\right|^n |x|^n c_1 c_2 \ldots c_n} =$$

$$= \frac{e\left(\frac{4es}{\lambda}\right)^n n!}{c_1 c_2 \ldots c_n (\beta(x))^n}; \qquad |x| > x_0.$$

Но $n = [\beta(x)]$, поэтому:

$$\frac{n!}{(\beta(x))^n} \leqslant \frac{n!}{n^n} < 1,$$

и

$$\frac{\alpha(x)2^n}{a_1 a_2 \ldots a_n |\lambda|^n |x|^n} \leqslant e\frac{\left(\frac{4es}{\lambda}\right)^n}{c_1 c_2 \ldots c_n}; \qquad |x| > x_0.$$

Далее $c_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Значит $c_n > \frac{8es}{\lambda}$, начиная с некоторого номера $n(\lambda)$ и, так как $c_n \geqslant 1$, то:

$$c_1 c_2 \ldots c_n \geqslant \left(\frac{8es}{\lambda}\right)^{n-n(\lambda)}.$$

Поэтому:

$$\frac{\alpha(x)2^n}{a_1 a_2 \ldots a_n |\lambda|^n |x|^n} \leqslant \frac{e\left(\frac{4es}{\lambda}\right)^n}{\left(\frac{8es}{\lambda}\right)^{n-n(\lambda)}} = \frac{e\left(\frac{8es}{\lambda}\right)^{n(\lambda)}}{2^n}; \qquad |x| > x_0, \tag{6}$$

и, так как $2^n = 2^{[\beta(x)]} \geqslant 1$, то:

$$\frac{\alpha(x)2^n}{a_1 a_2 \ldots a_n |\lambda x|^n} \leqslant e\left(\frac{8es}{\lambda}\right)^{n(\lambda)}; \qquad |x| > x_0,$$

откуда, согласно неравенству (4), получим:

$$\alpha(x)\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right| \leqslant e^{\left(\frac{8es}{\lambda}\right)^{n(\lambda)}}; \qquad |x|>x_0,$$

то есть функция $\alpha(x)\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right|$ ограничена вне интервала $(-x_0, x_0)$, а так как она непрерывна, то, следовательно, ограничена и в сегменте $[-x_0, x_0]$, то есть

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\alpha(x)\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{a_k\lambda x}{2}}{\frac{a_k\lambda x}{2}}\right| = C_\lambda<\infty,$$

и, согласно (3):

$$\alpha(x)\,|K(\lambda, x)| \leqslant \frac{4c_\lambda}{a_1 a_2\lambda^2}\left|\frac{\sin\frac{a_1\lambda x}{2}\sin\frac{a_2\lambda x}{2}}{x^2}\right|; \qquad -\infty<x<\infty.$$

Поэтому:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}(1+x^2)\,\alpha(x)\,|K(\lambda x)| = M_\lambda < \frac{8c_\lambda}{a_1 a_2\lambda^2}<\infty,$$

и

$$|K(\lambda x)| \leqslant \frac{M_\lambda}{\alpha(x)(1+x^2)}; \qquad (-\infty<x<\infty),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Часто от ядра $K(x)$ требуют несколько более жесткое чем а) условие

$$\text{a})'\ E_k(\lambda)=1 \qquad |\lambda|\leqslant\Theta<1.$$

Важность таких ядер (1) обусловлена тем, что операторы K_λ, порожденные ими, оставляют без изменения часть спектра функции $F(x)$, лежащую в $(-\Theta\lambda, \Theta\lambda)$. Такие ядра легко можно построить, исходя из функции $f(x)$ (1).

Они имеют следующий вид:

$$K'(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\frac{1+\Theta}{2}x}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{1-\Theta}{4}a_k x}{\frac{1-\Theta}{4}a_k x}\right)^2.$$

Используя формулы обращения для преобразований Фурье и теорему о свертках, легко доказать, что

$$E_{k'}(\lambda) \begin{cases} = 1 & |\lambda| \leqslant \Theta \\ < 1 & \Theta < |\lambda| < 1. \\ = 0 & 1 \leqslant |\lambda| \end{cases}$$

Очевидно, что и в этом случае при всех $\lambda \neq 0$

$$|K'(\lambda x)| \leqslant \frac{M'_\lambda}{\alpha(x)(1+x^2)} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где константа M'_λ зависит только от λ.

Замечание 2. Полученные выше оценки позволяют доказать, что функции $\alpha(x)$, удовлетворяющие условиям I и II, допускают мажорирование абсолютными значениями (на вещественной оси) целых функций нулевого рода с корнями в верхней полуплоскости. Действительно, пусть

$$A(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + i a_k z),$$

где $a_k = \frac{\beta(k) C_k}{k^2 S}$. Очевидно, что при любом целом n и вещественном x

$$|A(x)| > a_1 a_2 \ldots a_n |x|^n,$$

а из (6) при $\lambda = 1$ и $|x| > x_0$ следует:

$$|A(x)| > a_1 a_2 \ldots a_n |x|^n \geqslant \alpha(x) 4^n \frac{(8\,es)}{e}^{-n(1)} \geqslant C\alpha(x),$$

где C — некоторая константа. Поэтому при достаточно большом N будем иметь

$$|A(x) N| > \alpha(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

равномерно для всех x, что мы и утверждали.

§ 2. Основные приложения построенных ядер (к гармоническому анализу и теоремам тауберова типа) будут рассмотрены отдельно. Здесь мы ограничимся рассмотрением двух вопросов, связанных с полиномами Б. М. Левитана, и суммированием некоторых расходящихся интерполяционных рядов.

Обобщенные полиномы Б. М. Левитана.

Рассмотрим множество B_σ^α ц. т. ф. э. т. $F(z)$ с показателем $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих на вещественной оси неравенству

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{F(x)}{\alpha(x)} \right| < \infty. \tag{7}$$

Б. М. Левитан (2) доказал следующее предложение:
пусть $F(z) \in B_\sigma^\alpha$ и $\alpha(x) \equiv 1$; тогда существует последовательность тригонометрических полиномов $S_h(x)$:

$$S_h(x) = \sum_{k=1}^{m_h} a_k(h) e^{i\lambda_k(h)x}, \tag{8}$$

таких, что $S_h(x) \to F(x)$ при $h \to 0$ равномерно в каждом конечном интервале, показатели $\lambda_k(h)$ — вещественны и $\max\limits_k |\lambda_k(h)| \leqslant \sigma$, наконец: $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} |S_h(x)| \leqslant \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |F(x)|$ для всех h.

Н. И. Ахиезер (3) обобщил эту теорему на тот случай, когда $\alpha(x)$ растет как некоторая степень $|x|$.

Здесь мы докажем, что если $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям I, II и монотонно растет к ∞ вместе с $|x|$, то для любой функции $F(z) \in B_\sigma^\alpha$ существует последовательность тригонометрических полиномов $S_h(x)$ вида (8), таких, что

1. $S_h(x) \to F(x)$ *при* $h \to 0$ *равномерно в каждом конечном интервале*;

2. Показатели $\lambda_k(h)$ *вещественны и* $\max\limits_k |\lambda_k(h)| \leqslant \sigma + h$

3. $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} \left|\dfrac{S_h(x)}{\alpha(x)}\right| \leqslant \sup\limits_{-\infty < x < \infty} \left|\dfrac{F(x)}{\alpha(x)}\right|$ *для всех* h.

Действительно, так как $f(x)$ (1) есть ц. т. ф. э. т. с показателем σ, то $\Phi_h(z) = F(z) f(hz)$ есть ц. т. ф. э. т. с показателем $\leqslant \sigma + h$ и, согласно (2) и (7),

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\Phi_h(x)| = C_h < \infty.$$

Далее, так как $\alpha(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, то $\dfrac{C_h}{\alpha(x)} < h$ при $|x| > N_h$.

Построим теперь для функции $\Phi_h(x)$ полином Левитана $S'_h(x)$, такой, что:

$$\sup_{|x| < N_h} |\Phi_h(x) - S'_h(x)| < h.$$

Тогда $|S'_h(x)| < C_h$, а показатели $\lambda'_k(h)$ этого полинома действительны и по абсолютной величине $\leqslant \sigma + h$.

Значит:

$$\left|\frac{S'_h(x)}{\alpha(x)}\right| \leqslant \left|\frac{\Phi_h(x)}{\alpha(x)}\right| + h \leqslant \left|\frac{F(x)}{\alpha(x)}\right| + h, \qquad \text{если } |x| < N_h,$$

и

$$\left|\frac{S'_h(x)}{\alpha(x)}\right| \leqslant \frac{C_h}{\alpha(x)} < h, \qquad \text{если} \quad |x| \geqslant N_h,$$

то есть

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{S_h'(x)}{\alpha(x)}\right| \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{F(x)}{\alpha(x)}\right| + h = M + h,$$

где

$$M = \sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{F(x)}{\alpha(x)}\right|.$$

Положим:

$$S_h(x) = \frac{M}{M+h} S_h'(x).$$

Тогда полиномы $S_h(x)$, очевидно, удовлетворяют требованиям 2) и 3). Ввиду того, что $f(hx)\to 1$ при $h\to 0$ равномерно в каждом конечном интервале, то $\Phi_h(x)\to F(x)$ и $S_h'(x)\to F(x)$, а значит и $S_h(x)\to F(x)$ при $h\to 0$ тоже равномерно в каждом конечном интервале, что и доказывает наше утверждение.

Заметим еще, что, если функция $\alpha(x)$ конкретизирована, то можно дать более конструктивные способы построения полиномов $S_h(x)$, а также вычислить их коэфициенты через дискретные значения функции $F(x)$, подобно тому, как это сделано в (4) для случая, когда $\alpha(x)$ растет как некоторая степень (x).

Суммирование интерполяционных рядов

Пусть ц. т. ф. э. т. $\varphi(x)$ с показателем $\leqslant\sigma$ принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Согласно известной теореме Палей-Винера, преобразование Фурье $E_\varphi(\lambda)$ функции $\varphi(x)$ равно нулю вне интервала $(-\sigma, \sigma)$. Поэтому формула обращения для интегралов Фурье в этом случае дает:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} E_\varphi(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{9}$$

Разложим функцию $E_\varphi(\lambda)$ в интервале $(-\sigma, \sigma)$ в ряд Фурье:

$$E_\varphi(\lambda) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{n\pi}{\sigma}\lambda},$$

где, согласно (9), имеем:

$$a_n = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} E_\varphi(\lambda) e^{-i\frac{n\pi}{\sigma}\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{\sigma}\varphi\left(-\frac{n\pi}{\sigma}\right),$$

то есть

$$E_\varphi(\lambda) \sim \frac{\pi}{\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi\left(-\frac{n\pi}{\sigma}\right) e^{i\frac{n\pi}{\sigma}\lambda}. \tag{10}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(-\frac{n\pi}{\sigma}\right)\right|$ сходится, то в (10) можно поставить знак равенства, и в этом случае почленное интегрирование дает:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}E_\varphi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi\left(-\frac{n\pi}{\sigma}\right)\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{i\left(\frac{n\pi}{\sigma}+x\right)\lambda}\,d\lambda,$$

то есть:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi\left(-\frac{n\pi}{\sigma}\right)\frac{2\sin(n\pi+\sigma x)}{\left(\frac{n\pi}{\sigma}+x\right)},$$

или

$$\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)\frac{(-1)^n\sin\sigma x}{-n\pi+\sigma x}. \tag{11}$$

Итак, если ц. т. ф. э. т. $\varphi(x)$ с показателем $\leqslant\sigma$ принадлежит $L^2(-\infty,\infty)$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)\right|<\infty$ (для этого достаточно предположить, что $|\varphi(x)|=0(x^{-2})$ при $|x|\to\infty$), то функцию $\varphi(x)$ можно разложить в интерполяционный ряд (11). Эта интерполяционная формула и её различные обобщения известны давно. Здесь мы дадим обобщение этой формулы для функций класса $B^{\alpha}_{\sigma-h}$, где h — произвольно малое фиксированное положительное число.

Итак, пусть $F(x)\in B^{\alpha}_{\sigma-h}$. Построим, вообще говоря, расходящийся, интерполяционный ряд:

$$F(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)\frac{(-1)^n\sin\sigma x}{-n\pi+\sigma x}.$$

Построенная в § 1 (1) функция $f(x)$ дает возможность просуммировать этот ряд к функции $F(x)$.

Действительно, если $\varepsilon<h$, то функция $F(x)f(\varepsilon x)$ есть ц. т. ф. э. т. с показателем $<\sigma$, и, согласно (2) и (7), $|F(x)f(\varepsilon x)|=0(x^{-2})$. Значит, по предыдущему,

$$F(x)f(\varepsilon x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)f\left(\varepsilon\frac{n\pi}{\sigma}\right)\frac{(-1)^n\sin\sigma x}{-n\pi+\sigma x},$$

и, так как $f(\varepsilon x)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$, то

$$F(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)f\left(\varepsilon\frac{n\pi}{\sigma}\right)\frac{(-1)^n\sin\sigma x}{-n\pi+\sigma x},$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. 1947, стр. 216.
2. Левитан Б. М. Докл. Акад. наук СССР, 15, № 4, 1937.
3. Ахиезер Н. И. Докл. Акад. наук СССР, 54, № 1, 1946.
4. Ахиезер Н. И., Марченко В. А. Записки научно-исследовательского института математики и механики и Харьковского математического общества. Серия 4, т. XXI, 1949, стр. 5—9.