УДК 517.9

А. А. МАКАРОВ

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СИМВОЛАМИ

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = A(t,\ D_x)\,u(x,\ t) + \lambda R(x,\ t,\ D_x)\,u(x,\ t) + f(x,\ t); \quad (1)$$

$$\int_0^T dM(t)\,B(t,\ D_x)\,u(x,\ t) = 0;\ x \in R^n,\ t \in [0;\ T]. \quad (2)$$

Здесь псевдодифференциальные операторы $A(t,\ D_x)$ и $B(t,\ D_x)$ при каждом фиксированном t имеют символы из пространства $C^{\infty}_{-\infty}$, причем непрерывно зависящие от t, а символ оператора $R(x,\ t,\ D_x)$ либо принадлежит $\forall t \in [0;\ T]$ пространству бесконечно дифференцируемых функций со степенной оценкой по ζ и стабилизирующихся при $x \to \infty$, либо принадлежит классу S^m (см. [1]), т. е. удовлетворяет оценкам

$$\forall \alpha,\ \beta\colon\ |D^{\alpha}_{\zeta} D^{\beta}_{x} R_{ij}(x,\ t,\ \zeta)| < C_{\alpha\beta}(1 + |\zeta|)^{m-|\alpha|}.$$

Координаты вектор-функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$ принадлежат пространствам

$$C^r([0; T], H^s) = \{u(x, t) \in H^s;\ \forall t \in [0; T]:$$

$$|||u||| = \sup_{t \in [0; T],\, \nu < r} \| u_t^{(\nu)}(x, t) \|^{(s)} < \infty\}.$$

Задача (1) — (2) называется корректно разрешимой из пространства $C^{r_1}([0; T]; H^{s_1})$ в пространство $C^{r_2}([0; T]; H^{s_2})$, если $\forall f(x, t) \in C^{r^1}([0; T]; H^{s_1})$ $\exists!$ $u(x, t) \in C^{r_2}([0; T]; H^{s_2})$, являющаяся решением данной задачи, причем $|||u(x, t)|||_{(2)} \leqslant C|||f(x, t)|||_{(1)}$.

Важную роль играет матрица-функция $G(\zeta, t, \tau)$, являющаяся функцией Грина следующей задачи:

$$\frac{\partial v(\zeta, t)}{\partial t} = A(t, \zeta) v(\zeta, t) + g(\zeta, t); \int_0^T dM(t) B(t, \zeta) v(\zeta, t) = 0,$$

где $A(t, \zeta)$ и $B(t, \zeta)$ — символы соответствующих операторов.

Если матрица $A(t, \zeta)$ не зависит от t, то для $G(\zeta, t, \tau)$ существует явная формула:

$$G(\zeta, t, \tau) = \begin{cases} \exp tA(\zeta) \cdot G^{-1}(\zeta) \int_T^\tau dM(\eta) B(\eta, \zeta) \exp(\eta - t) A(\zeta) \\ \hfill 0 < t < \tau \\ \exp tA(\zeta) \cdot G^{-1}(\zeta) \int_0^\tau dM(\eta) B(\eta, \zeta) \exp(\eta - t) A(\zeta) \\ \hfill \tau < t < T, \end{cases}$$

где $G(\zeta) = \int_0^T dM(t) B(t, \zeta) \exp tA(\zeta)$. Из этой формулы видно, что функция $G(\zeta, t, \tau)$ определена при всех значениях ζ, где $\Delta(\zeta) \equiv \det G(\zeta) \neq 0$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть символы ПДО удовлетворяют приведенным выше условиям, а $G(\zeta, t, \tau) \in C_{-\infty}^{\infty}$ $\forall t, \tau \in [0; T]$ и, кроме того, выполнено условие* (α):

$$\int_0^T \sup_{\xi} [(1 + |\zeta|^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t, \tau)|] d\tau \leqslant C \quad (|G| = \max_{i, j} |G_{ij}|).$$

Тогда при $|R(x, t, \zeta)| < C_1(1 + |\zeta|)^m$ задача (1) — (2) *корректно разрешима из $C^0([0; T]; H^s)$ в $C^1([0; T]; H^{s-q})$ при всех s, некотором q и достаточно малых λ.*

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1, а также следующее условие* (β):

$$\int_0^T \sup_\zeta (1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t_1, \tau) - G(\zeta, t_2, \tau)|\, d\tau < \varepsilon$$

при $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$, *то при* $|R(x, t, \zeta)| < C(1+|\zeta|)^{m-\delta}$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} |R(x, t, \zeta)| = 0$

задача (1) — (2) корректно разрешима в указанных пространствах при всех λ, *за исключением не более чем счетного множества* $\{\lambda_i\}$, *не имеющего конечных предельных точек.*

Доказательство теоремы 1. Покажем разрешимость данной задачи. Решение будем искать в виде

$$u(x, t) = \int_0^T G(D_x, t, \tau)\, v(x, \tau)\, d\tau \quad (v(x, t) \in C^0([0; T], H^{s_1})).$$

Подставив это выражение в (1), получим

$$v(x, t) = \int_0^T \left[\frac{dG}{dt} - A\cdot G\right] v\, d\tau =$$

$$= \lambda R(x, t, D_x) \int_0^T G(D_x, t, \tau)\, v(x, \tau)\, d\tau + f(x, t).$$

Или в операторном виде

$$v = \lambda \cdot Tv + f, \tag{3}$$

где $Tv \equiv R(x, t, D_x) \int_0^T G(D_x, t, \tau)\, v(x, \tau)\, d\tau$.

Покажем, что оператор T непрерывно действует в $C^0([0; T], H^s)$. Запишем этот оператор в таком виде:

$$Tv = R\cdot(1+D_x^2)^{-\frac{m}{2}} \int_0^T (1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} G\cdot v\, d\tau = R_1 \int_0^T G_1\cdot v\, d\tau$$

и покажем, что он непрерывен в $C^0([0; T]; L_2)$.

Зафиксируем t и рассмотрим норму образа оператора в L_2:

$$\left\| \int_0^T (1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} G(D_x, t, \tau)\, v(x, \tau)\, d\tau \right\|_{L_2} = \left\| \int_0^T (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times G(\zeta, t, \tau)\, \tilde v(\zeta, \tau)\, d\tau \right\|_{L_2} \leqslant \int_0^T \| (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} G(\zeta, t, \tau)\, \tilde v(\zeta, \tau) \|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \sup_\zeta (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t, \tau)| \cdot \|\tilde v(\zeta, \tau)\|\, d\tau \leqslant \sup_\tau \|\tilde v(\zeta, \tau)\| \times$$

$$\times \int_0^T \sup_\zeta (1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}} |G(\zeta, t, \tau)|\, d\tau \leqslant M \||v\||.$$

Здесь мы использовали равенство Парсеваля и то, что норма оператора умножения в L_2 равна $\sup\limits_{\zeta}(1+\zeta^2)^{\frac{m}{2}}|G(\zeta, t, \tau)|$. Взяв слева sup по t, получим $|||T_1 v||| \leqslant C_0 |||v|||$ при $s=0$. Но учитывая коммутацию оператора $T_1 = \int\limits_0^T (1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} G\, d\tau$ с $(1+D_x^2)^{\frac{s}{2}}$, получим непрерывность этого оператора в пространстве $C^0([0; T], H^s)$.

Так как оператор $R \cdot (1+D_x^2)^{-\frac{m}{2}} = R_1(x, t, D_x)$ имеет символ, ограниченный по ζ и стабилизирующийся по x (или принадлежащий классу S^0), то при фиксированном t он непрерывен в H^s (см. [2] или [1]), а значит, и в $C^0([0; T]; H^s)$.

Таким образом, оператор T непрерывен в $C^0([0; T[; H^s)$ и при достаточно малых λ решение уравнения (3) дается рядом Неймана

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda T)^k f.$$

Тогда $u(x, t) = \int\limits_0^T G(D_x, t, \tau)\, v(x, \tau)\, d\tau$ является решением задачи (1) — (2) и принадлежит пространству $C^1([0; T], H^{s-q})$.

Докажем единственность решения. Пусть $u_0(x, t)$ — решение однородной краевой задачи. Тогда из результатов диссертации автора следует, что эта функция удовлетворяет такому уравнению:

$$u_0(x, t) = \lambda \int\limits_0^T G(D_x, t, \tau)\, R(x, \tau, D_x)\, u_0(x, \tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Но оператор, стоящий в правой части уравнения, является суперпозицией операторов $T_1 = \int\limits_0^T G(D_x, t, \tau)(1+D_x^2)^{\frac{m}{2}} d\tau$ и $(1 + D^2)^{-\frac{m}{2}} R$. Непрерывность оператора T_1 мы уже доказали раньше, а непрерывность второго оператора следует из [2] и [1], так как символ этого оператора ограничен. Так как спектр ограниченного оператора ограничен, то при достаточно малых λ $u_0(x, t) \equiv 0$.

Непрерывная зависимость следует из вида разрешающего оператора.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что оператор T компактен в $C^0([0; T]; H^s)$. Для этого докажем равностепенную непрерывность семейства $\{Tu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ при условии $|||u_\alpha||| \leqslant M$

$$\|Tu_\alpha(x, t_1) - Tu_\alpha(x, t_2)\|^{(s)} = \|R_1(t_1, x, D_x) \int\limits_0^T G_1(D_x, t_1, \tau) \times$$

$$\times u_\alpha(x,\tau)\,d\tau - R_1(t_2,x,D_x)\int_0^T G_1(D_x,t_2,\tau)\,u_\alpha(x,\tau)\,d\tau\,\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| R_1(t_1,x,D_x)\int_0^T \Delta G\cdot u_\alpha\,d\tau \right\| + \left\| \Delta R_1 \int_0^T G_1(D_x,t_2,\tau)\times\right.$$

$$\times u_\alpha(x,\tau)\,d\tau\,\| \leqslant \varepsilon\cdot C_2M + \varepsilon\cdot C_1M = \varepsilon C_3 \text{ при } |t_1-t_2| < \delta_\varepsilon.$$

Здесь мы использовали условие (β) и непрерывную зависимость $R(t,x,D_x)$ от t.

Докажем теперь существование конечной ε-сети для множества $\{Tu_\alpha\}_{\alpha\in A}$. По $\varepsilon>0$ выберем $\delta>0$ так, чтобы $\|Tu_\alpha(x,t_1) - Tu_\alpha(x,t_2)\|^{(s)} < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|t_1-t_2|<\delta$ и возьмем $\{t_k\}_{k=1}^N$ так, чтобы расстояние между соседними не превосходило δ. Так как $\{Tu_\alpha(x,t_k)\}_{\alpha\in A}$ компактно в H^s (R_1 — компактен, а $\int_0^T G_1\,d\tau$ — непрерывен в H^s), то существует конечная ε-сеть в пространстве $H^s\otimes\ldots\otimes H^s$ такая, что $\forall\alpha,\ \exists\alpha_j: \|Tu_\alpha(x,t_k) - Tu_{\alpha_j}(x,t_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}$: Тогда $\forall\alpha,\ \forall t,\ \exists\alpha_j,\ t_k$: $\|Tu_\alpha(x,t) - Tu_{\alpha_j}(x,t)\|^s \leqslant \|Tu_\alpha\times(x,t) - Tu_\alpha(x,t_k)\| + \|Tu_\alpha(x,t_k) - Tu_{\alpha_j}(x,t_k)\| + \|Tu_{\alpha_j}(x,t_k) - Tu_{\alpha_j}(x,t)\| < \varepsilon$, т. е. оператор T компактен в $C^0([0;T];H^s)$. Отсюда следует разрешимость уравнения (3) при почти всех λ.

Аналогично доказывается компактность оператора, стоящего в правой части уравнения (4), и так как спектр его также счетный, то при почти всех λ уравнение (4) имеет только тривиальное решение, что и доказывает единственность решения исходной задачи. Теорема доказана.

Приведем примеры корректных задач.

$$1.\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial x^{2k}} + \lambda R(t,x,D_x)\,u(x,t) + f(x,t),$$

$$cu(x,0) + bu(x,T) = 0 \quad (x\in R;\ a\in R;\ c,\ b>0).$$

Здесь

$$G(\zeta,t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{-b\exp a(T-\tau+t)(-\zeta^2)^k}{c+b\exp aT(-\zeta^2)^k} & t<\tau,\\[2ex] \dfrac{c\exp a(t-\tau)(-\zeta^2)^k}{c+b\exp aT(-\zeta^2)^k} & t>\tau.\end{cases}$$

Так как $\int_0^T \sup_\zeta |G|(1+\zeta^2)^{k_1} < C\ \forall k_1<k$, то согласно теореме 1 при $|R(t,x,\zeta)| < M(1+\zeta^2)^{k_1}$ и достаточно малых λ эта задача корректно разрешима из $C^0([0;T];H^s)$ в $C_1([0;T];H^{s-k})$.

Можно также показать, что выполнено условие (β), а значит, можно применить и теорему 2.

$$2.\ \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} + \lambda R(t,\ x,\ D_x) + f(x,\ t),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,\ t)\,dt = 0.$$

Здесь

$$G(\zeta,\ t,\ \tau) = \begin{cases} \dfrac{T - T\exp(\tau - T)\zeta^2}{\exp T\zeta^2 - 1} e^{(T-t)\zeta^2} & t < \tau, \\ \dfrac{T\exp T\zeta^2 - T\exp(T+\tau)\zeta^2}{\exp T\zeta^2 - 1} e^{-t\zeta^2} & t > \tau \end{cases}$$

и $\int_0^T \sup|G|\,d\tau < C$. Поэтому данная задача корректно разрешима при $|R(t,\ x,\ \zeta)| < C_1$ при достаточно малых λ из пространства $C^0([0;\ T];\ H^s)$ в $C^0([0;\ T];\ H^{s-2})$. Здесь также можно применить теорему 2.

3. Задача Коши для параболических уравнений удовлетворяет условиям теоремы 1, если порядок $R(t,\ x,\ \zeta)$ меньше порядка главной части, так как $G(\zeta,\ t,\ \tau) = e^{(\tau-t)\zeta^{2k}}$ и $\int_0^T \sup_\zeta |G|(1 + \zeta^2)^{k-\varepsilon}\,d\tau < C$.

Аналогичные результаты можно получить в пространствах экспоненциально растущих функций $H^s_{[\gamma',\ \gamma'']}$, если потребовать выполнения аналогичных оценок в слое $\gamma' < \operatorname{Im}\zeta < \gamma''$.

Список литературы: 1. *Грушин В. В.* Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами.— Функцион. анализ и его прил., 1970, вып. 3, с. 37—50. 2. *Хермандер Л.* Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения.— В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, с. 297—367.

Поступила в редколлегию 24.12.84.