Семиугольники Шрётера.

К. А. Андреева.

1. Теорема Паскаля о вписанномъ въ коническое сѣченіе шестиугольникѣ представляетъ, какъ извѣстно, очень важное дескриптивное свойство, изъ котораго, какъ изъ основного предложенія, можетъ быть развита вся проективная теорія этихъ кривыхъ, разсматриваемыхъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ. Такое же значеніе имѣетъ теорема Бріаншона объ описанномъ около коническаго сѣченія шестиугольникѣ при воззрѣніи на эти кривыя, какъ огибаемыя прямыми линіями.

Дальнѣйшее развитие ученія о коническихъ сѣченіяхъ при помощи какъ аналитическаго, такъ и чисто геометрическаго метода, приводитъ между прочимъ ко многимъ предложеніямъ, представляющимъ аналогію съ теоремами Паскаля и Бріаншона и относящимся ко вписаннымъ и описаннымъ многоугольникамъ высшихъ порядковъ. Такъ о восьмиугольникахъ существуютъ слѣдующія теоремы.

Если въ коническое сѣченіе вписанъ восьмиугольникъ, то точки пересѣченія каждой стороны съ двумя сторонами, смежными съ противоположной, лежатъ также на нѣкоторомъ коническомъ сѣченіи.

Точки пересѣченія, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, могутъ быть точнѣе опредѣлены при указаніи порядка, въ которомъ слѣдуютъ стороны даннаго восьмиугольника. Именно, при обозначеніи сторонъ даннаго восьмиугольника нумерами 1, 2, 3...8, будемъ имѣть, что въ теоремѣ говорится о восьми точкахъ встрѣчи сторонъ 1-й съ 4 й, 2-й съ 5-й, 3-й съ 6-й, 4-й съ 7-й, 5-й съ 8-й, 6-й съ 1-й, 7-й со 2-й и 8-й съ 3-й. Короче сказать, это суть точки пересѣченія каждой стороны со слѣдующей, при установленномъ порядкѣ, послѣ двухъ пропущенныхъ.

Теорема, взаимная съ предыдущей и относящаяся къ восьмиугольнику описанному, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если около коническаго сѣченія описанъ восьмиугольникъ, то прямыя, соединяющія каждую его вершину съ вершинами, смежными съ противоположной, суть касательныя къ нѣкоторому другому коническому сѣченію.

Здѣсь, при обозначеніи порядка, въ которомъ слѣдуютъ одна за другой вершины даннаго восьмиугольника, прямыя, о которыхъ идетъ рѣчь, могутъ быть опредѣлены также, какъ соединяющія каждую вершину съ слѣдующею за ней послѣ двухъ пропущенныхъ.

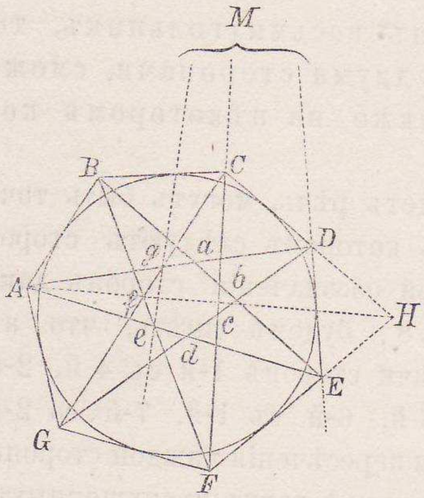
Мы не будемъ приводить доказательствъ этихъ теоремъ, какъ уже давно извѣстныхъ. Замѣтимъ только, что если желаемъ, чтобы оно было строго геометрическое и элементарное *), то должны основывать его только на теоремахъ Паскаля и Бріаншона, какъ дающихъ дескриптивныя опредѣленія коническихъ сѣченій, и на основныхъ предложеніяхъ проективной геометріи.

2. До послѣдняго времени не было, кажется, извѣстно такихъ теоремъ, аналогичныхъ съ теоремами Паскаля и Бріаншона, которыя относились бы къ многоугольникамъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ и вершинъ.

Генрихъ Шрётеръ, профессоръ въ Бреславлѣ, извѣстный издатель и послѣдователь знаменитаго Штейнера, указалъ недавно на теорему о семиугольникѣ, не давши, однако, ея доказательства **).

Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ:

Если около коническаго сѣченія описанъ семиугольникъ, то, соединяя прямыми линіями по порядку каждую вершину съ слѣдующей за нею послѣ двухъ пропущенныхъ, будемъ имѣть, что точки пересѣченія каждой изъ этихъ прямыхъ съ слѣдующей въ томъ же круговомъ порядкѣ лежатъ на нѣкоторомъ другомъ коническомъ сѣченіи.



На прилагаемомъ чертежѣ вершины даннаго описаннаго семиугольника суть по порядку A, B, C, D, E, F, G; точки пересѣченія послѣдовательныхъ діагоналей, о которыхъ говорится въ теоремѣ, будутъ, слѣдовательно, a, b, c, d, e, f, g.

Предлагаемъ въ слѣдующемъ очень простое доказательство этой теоремы, удовлетворяющее всѣмъ упомянутымъ выше требованіямъ.

3. Прежде всего замѣтимъ, что достаточно показать, что какія-нибудь шесть

*) Элементарное въ смыслѣ не пользующагося тѣмъ, что могло бы быть заимствовано изъ теоріи поверхностей второго порядка или линій высшихъ порядковъ.

**) Schröter (H) – „Ein Satz über das dem Kegelschnitt umschriebene Siebeneck". Zeitschrift für Math. und Phys. T. XXXIII, 1888, p. 374—375.

изъ семи точекъ $a, b, c \ldots f, g$ лежатъ на одномъ коническомъ сѣченіи. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ все, сказанное объ одной какой-нибудь группѣ шести точекъ изъ этихъ семи, должно имѣть мѣсто и для всякой другой такой группы, и такъ какъ двѣ такія группы имѣютъ пять общихъ точекъ, которыми коническое сѣченіе опредѣляется вполнѣ, то и убѣдимся, что на этомъ же коническомъ сѣченіи должны лежать и двѣ остальныя точки.

Соединимъ теперь прямою линіею точки e и g и обозначимъ буквою H точку пересѣченія прямыхъ CD и EF. Такъ какъ по условію шестиугольникъ $ABCHFG$ есть описанный, то по теоремѣ Бріаншона прямыя BF, CG и AH должны проходить черезъ одну точку f. Это показываетъ, что треугольники DCg и EFe гомологическіе, ибо ихъ стороны Dg и Ee, Cg и Fe, DC и EF пересѣкаются въ трехъ точкахъ A, f, H, лежащихъ на одной прямой. Слѣдовательно, прямыя ge, CF и DE, соединяющія соотвѣтственныя вершины этихъ треугольниковъ, сходятся въ одной точкѣ M.

Но точки D, E и M, лежащія, такимъ образомъ, на одной прямой, могутъ быть разсматриваемы, какъ точки пересѣченія прямыхъ ga и cd, ab и de, bc и eg, которыя суть противоположныя стороны шестиугольника $abcdeg$. Слѣдовательно, этотъ шестиугольникъ, по теоремѣ Паскаля, есть вписанный въ коническое сѣченіе, что и требовалось доказать.

4. Въ предыдущемъ доказательствѣ мы дѣлаемъ, собственно говоря, два послѣдовательныя заключенія. Прежде всего изъ того, что шестиугольникъ $ABCHFG$ описанный, мы заключаемъ, по теоремѣ Бріаншона, что треугольники DCg и EFe гомологическіе. Отсюда же, на основаніи теоремы Паскаля, заключаемъ, что шестиугольникъ $abcdeg$ вписанный.

Понятно, что, исходя изъ этого послѣдняго условія и дѣлая тѣ же заключенія въ обратномъ порядкѣ, мы будемъ имѣть доказательство обратной и въ то же время взаимной съ предыдущею теоремы. Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ:

Если въ коническое сѣченіе вписанъ семиугольникъ и мы возьмемъ точки пересѣченія каждой его стороны съ слѣдующей послѣ двухъ пропущенныхъ, то прямыя, соединяющія эти точки въ томъ же круговомъ порядкѣ, составятъ семиугольникъ, описанный около нѣкотораго другого коническаго сѣченія.

5. Семь касательныхъ, составляющихъ данный описанный многоугольникъ въ первой изъ двухъ предыдущихъ теоремъ, предполагаются данными въ извѣстномъ порядкѣ.

При измѣненіи этого порядка измѣнятся, вообще говоря, вершины этого семиугольника, а съ тѣмъ вмѣстѣ измѣнится и коническое сѣченіе, въ которое вписанъ другой семиугольникъ, упоминаемый въ заключеніи теоремы. Такихъ коническихъ сѣченій будетъ, слѣдовательно, столько, сколько можно составить изъ семи данныхъ касательныхъ различныхъ описанныхъ семиугольниковъ. Это число есть, очевидно, $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$. Между всѣми этими коническими сѣченіями должна существовать геометрическая связь, подобная той, которая существуетъ между 60 паскалевыми прямыми для шестиугольниковъ, имѣющихъ вершины въ даннныхъ шести точкахъ на коническомъ сѣченіи, или между 60 бріаншоновыми точками для шестиугольниковъ, имѣющихъ сторонами шесть данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію. Изслѣдованіе этой связи можетъ повести ко многимъ любопытнымъ геометрическимъ результатамъ, если судить по аналогіи съ тѣми результатами, къ которымъ привели въ теоріи Паскалева мистическаго шестиугольника труды Штейнера, Киркмана, Кэле, Салмона, Кремоны и Веронезе. Мы ограничимся, впрочемъ, лишь указаніемъ на этотъ интересный путь изслѣдованій, такъ какъ цѣлью настоящей замѣтки мы полагали только приведенное выше доказательство теоремы Шрётера о семиугольникахъ.