ОСНОВНОЙ КУРСЪ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ

СОСТАВИЛЪ

К. А. АНДРЕЕВЪ,

ординарный профессоръ ИМПЕРАТОРСКАГО Харьковскаго Университета, членъ-корреспондентъ ИМПЕРАТОРСКОЙ Академіи Наукъ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Геометрія на плоскости.

ХАРЬКОВЪ.
ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА Д. Н. ПОЛУЕХТОВА.
1887.

Типогр. М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул. д. № 25-й.

ОСНОВНОЙ КУРСЪ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

СОСТАВИЛЪ
К. А. АНДРЕЕВЪ,
ординарный профессоръ ИМПЕРАТОРСКАГО Харьковскаго Университета, членъ-корреспондентъ ИМПЕРАТОРСКОЙ Академіи Наукъ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.
Геометрія на плоскости.

ХАРЬКОВЪ.
ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА Д. Н. ПОЛУЕХТОВА.
1887.

Дозволено цензурою. Кіевъ. 3-го Іюня 1887 года.

Харьковъ. Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.

Содержаніе первой части.

Глава седьмая. Эллипсъ.

Глава восьмая. Гипербола.

Глава девятая. Парабола.

Глава десятая. Коническія сѣченія и ихъ относительное расположеніе на плоскости.

Глава одинадцатая. Сокращенный способъ въ примѣненіи къ линіямъ второго порядка.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Тому, кто знакомъ съ наиболѣе выдающимися курсами и руководствами Аналитической Геометріи, существующими въ настоящее время въ иностранной литературѣ, должно быть извѣстно, какое разнообразіе возможно въ содержаніи и формахъ изложенія сочиненій этого рода. Разнообразіе это обусловливается главнымъ образомъ различіемъ цѣлей, избираемыхъ авторами, и потребностей изучающихъ, для которыхъ эти сочиненія издаются.

Издавая настоящій курсъ для руководства и пособія русской учащейся молодежи изъ среды студентовъ университетовъ и высшихъ учебныхъ институтовъ, считаю необходимымъ объяснить слѣдующимъ образомъ свои цѣли.

Я имѣлъ въ виду дать точное и систематическое изложеніе того научнаго матеріала, знаніе котораго составляетъ основаніе изученія какъ высшаго Математическаго Анализа, такъ и наукъ, именуемыхъ прикладными. Въ этомъ намѣреніи я старался выполнить, по возможности равномѣрно, двѣ слѣдующія главныя задачи. Во первыхъ, соединить въ достаточной полнотѣ необходимыя фактическія свѣдѣнія и притомъ такъ, чтобы они усваивались изъ книги съ возможно большею легкостью. во вторыхъ, дать достаточно полное разъясненіе силы и значенія методовъ, какъ собственно аналитическаго или метода координатъ, такъ и находящагося съ нимъ въ тѣсной связи метода проективнаго.

Этими цѣлями обусловливается самое наименованіе курса основнымъ.

Изъ иностранныхъ курсовъ я отдаю предпочтеніе, какъ наиболѣе удовлетворяющимъ этимъ цѣлямъ, извѣстнымъ англійскимъ и французскимъ руководствамъ Салмона, Тодтгöнтера и Карнуа, которымъ въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ и старался подражать. Это подражаніе не идетъ, однако, далѣе частностей.

Въ нашихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ Аналитическая Геометрія составляетъ первую ступень въ изученіи наукъ математическихъ. Поэтому я не могъ предполагать въ пользующихся моимъ курсомъ какихъ-либо предварительныхъ свѣдѣній изъ этихъ наукъ, кромѣ знанія элементарной Геометріи, элементарной Алгебры и началъ прямолинейной Тригонометріи. Понятно, что при этихъ условіяхъ я не долженъ былъ вести изложеніе Геометріи на плоскости за предѣлы линій второго порядка.

По той же причинѣ, т. е. изъ желанія основываться лишь на начальной Математикѣ, я не пользовался основными понятіями Дифференціальнаго Исчисленія, почти неизбѣжными въ высшихъ отдѣлахъ Аналитической Геометріи.

Единственное добавленіе къ элементарной Алгебрѣ, которое я счелъ необходимымъ въ видахъ болѣе изящной формулировки нѣкоторыхъ выводовъ и доказательствъ и большей легкости ихъ запоминанія, составляютъ основанія теоріи опредѣлителей. Эти основанія, сами по себѣ элементарныя, изложены въ сжатомъ видѣ во второй главѣ моего курса.

Во время составленія настоящаго курса существовали у насъ слѣдующія однородныя съ нимъ оригинальныя сочиненія:

Сомова „Аналитическая Геометрія", 3-е изд. С.П.Б., 1880 г. *Алексѣева* „Аналитическая Геометрія на плоскости", Москва, 1885 г. *Стрекалова* „Курсъ Аналитической Геометріи", С.П.Б., 1884 г. *Ващенко-Захарченко* „Аналитическая Геометрія двухъ и трехъ измѣреній", Кіевъ, 1887 г.

Изъ нихъ только руководство покойнаго академика Сомова подходитъ подъ типъ основного курса, но представляетъ нѣкоторыя неудобства для изученія по своей сжатости и тяжеловатости изложенія. Сочиненія Алексѣева и Стрекалова не докончены. Сочиненіе же профессора Ващенко-Захарченко, отличаясь полнотою содержанія преимущественно въ смыслѣ примѣненія теоріи однородныхъ координатъ и алгебраическихъ формъ, направлено главнымъ образомъ въ сторону научнаго развитія самой Аналитической Геометріи.

Многіе курсы Аналитической Геометріи содержатъ задачи и примѣры для упражненія учащихся. Такія добавленія, конечно, очень полезны и даже необходимы. Тѣмъ не менѣе я счелъ для себя болѣе удобнымъ не включать ихъ въ самый курсъ, а соединить въ особый сборникъ упражненій, который предполагаю издать вслѣдъ за отпечатаніемъ второй части курса.

Нѣсколько предложеній, собранныхъ у меня въ видѣ задачъ въ главѣ о прямой линіи, предлагаются, какъ имѣющія теоретическое значеніе, но не какъ упражненія.

На составленіе настоящаго курса была мною удѣлена часть времени, посвященнаго многимъ другимъ неотложнымъ занятіямъ научнымъ и педагогическимъ. Желая при этомъ поторопиться изданіемъ книги, которая, по моему мнѣнію, можетъ послужить полезнымъ подспорьемъ моимъ слушателямъ въ университетѣ и технологическомъ институтѣ, я легко могъ впасть въ нѣкоторые промахи и недосмотры. Благосклонныя указанія на нихъ были бы для меня очень цѣнны въ видахъ второго изданія книги, если бы въ таковомъ представилась надобность.

К. Андреевъ.

Харьковъ.
21 Мая 1887 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

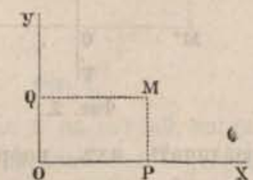
КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНІЯ.

§ 1. Прямолинейныя координаты.

1. Аналитическая Геометрія, будучи наукою о протяженіи въ самомъ широкомъ смыслѣ, характеризуется особеннымъ способомъ изслѣдованія, состоящимъ въ однообразномъ и методическомъ примѣненіи алгебраическаго анализа къ изученію формъ пространства. Основаніемъ этого способа служитъ понятіе о координатахъ, которое въ первоначальномъ, простѣйшемъ его видѣ и въ примѣненіи къ изученію формъ плоскихъ или фигуръ, помѣщающихся на плоскости, можетъ быть составлено слѣдующимъ образомъ.

2. Положимъ, что мы имѣемъ на плоскости прямой уголъ XOY (фиг. 1), одну изъ сторонъ котораго, именно OX, будемъ предполагать горизонтальною.

Всякая точка M, имѣющая опредѣленное положеніе внутри этого угла, находится на опредѣленныхъ разстояніяхъ MP и MQ отъ его сторонъ. Всякое измѣненіе положенія точки M влечетъ за собою измѣненіе одного или обоихъ этихъ разстояній. Эти-то разстоянія и называются *координатами* точки M по отношенію къ сторонамъ угла XOY. Они могутъ быть измѣрены какою-нибудь единицею и, слѣдовательно, выражены опредѣленными числами. Пусть эти числа будутъ a и b.



Фиг. 1.

Если положеніе точки M неизвѣстно, то по даннымъ числовымъ величинамъ координатъ a и b оно можетъ быть найдено построеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, для этого нужно только на сторонѣ OX отложить длину OP, равную a единицъ, а на сторонѣ OY длину OQ, равную b единицъ, и затѣмъ чрезъ точки P и Q провести прямыя, параллельныя сторонамъ угла. Точка пересѣченія этихъ прямыхъ и будетъ M.

И такъ, числовыми величинами a и b положеніе точки M внутри угла XOY опредѣляется вполнѣ.

3. Чтобы различать двѣ координаты точки M, имъ усваиваются особыя названія. Координату a, которая представляетъ разстояніе точки M отъ стороны OY и, для построенія этой точки, отмѣривается по сторонѣ OX, называютъ *абсциссою;* а координату b, представляющую разстояніе точки M отъ горизонтальной стороны OX и отмѣриваемую по сторонѣ OY, называютъ *ординатою* [1]).

Неопредѣленную абсциссу принято обозначать буквою x, а неопредѣленную ординату буквою y. Вслѣдствіе этого, вмѣсто того, чтобы говорить, что абсцисса точки есть a, а ордината b, можно писать:

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b\,.$$

Прямыя OX и OY называются *осями координатъ*, при чемъ первая именуется *осью абсциссъ* или *осью иксовъ*, а вторая *осью ординатъ* или *осью игрековъ*. Точка ихъ пересѣченія называется *началомъ координатъ*.

Обѣ оси въ совокупности составляютъ *систему координатъ*.

При опредѣленіи положенія точки посредствомъ координатъ всегда предполагается, что положеніе самихъ осей координатъ дано или считается извѣстнымъ.

4. Оси координатъ, будучи продолжены неопредѣленно, образуютъ четыре угла: XOY, XOY', $X'OY$ и $X'OY'$ (фиг. 2). Сказанное выше объ опредѣленіи положенія точки внутри угла XOY примѣнимо и къ тремъ остальнымъ угламъ. Вслѣдствіе этого одними и тѣми-же числовыми величинами координатъ

Фиг. 2.

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b$$

опредѣляются на плоскости четыре точки M, M', M'', M''', по одной въ каждомъ углѣ. Всѣ эти точки находятся на разстояніи a единицъ отъ оси ординатъ и b единицъ отъ оси абсциссъ. Чтобы различать ихъ, координатамъ придаютъ вообще не числовое только, а алгебраическое значеніе, т. е. признаютъ ихъ величинами, могущими быть положительными или отрицательными, смотря по направленію измѣренія.

При этомъ принято абсциссы, отсчитываемыя по оси x-овъ вправо, считать положительными, отсчитываемыя же влѣво—отрицательными. Подобнымъ же образомъ ординаты, отсчитываемыя по оси y-овъ кверху, считаются положительными, а внизъ—отрицательными.

---

[1]) Нужно замѣтить, однако, что условіе, чтобы одна изъ сторонъ угла была горизонтальною, не существенно необходимо и не всегда соблюдается, а потому и присвоеніе этихъ наименованій той или другой изъ сторонъ до нѣкоторой степени произвольно.

При такомъ условіи всѣ четыре точки M, M', M'', M''' будутъ имѣть разныя координаты, а именно:

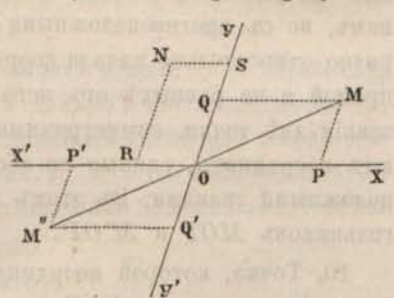
для точки M $\quad x=+a \;,\; y=+b$
для точки M' $\quad x=+a \;,\; y=-b$
для точки M'' $\quad x=-a \;,\; y=+b$
для точки M''' $\quad x=-a \;,\; y=-b$.

Слѣдовательно, при такомъ условіи каждая точка плоскости характеризуется особыми, ей только принадлежащими, координатами; такъ что двумя координатами, данными алгебраически, т. е. со знаками $+$ или $-$, положеніе точки на плоскости опредѣляется вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Уголъ XOY, внутри котораго всѣ точки имѣютъ положительныя абсциссы и положительныя ординаты, называется *нормальнымъ*.

5. Указанное условіе считать разстоянія между точками за положительныя или отрицательныя, смотря по направленію ихъ измѣренія, имѣетъ въ Аналитической Геометріи всеобщее распространеніе и прилагается не только къ осямъ координатъ, но и ко всѣмъ другимъ прямолинейнымъ направленіямъ. Оно извѣстно подъ названіемъ *правила знаковъ*.

6. Мы предполагали до сихъ поръ, что оси координатъ OX и OY взаимно перпендикулярны и, слѣдовательно, всѣ четыре образуемые ими угла прямые. Но это предположеніе не есть существенно необходимое. Мы видѣли, что абсцисса точки M (фиг. 2) есть величина отрѣзка OP, отсѣкаемаго на оси x-овъ прямою, проведенною чрезъ M параллельно оси y-овъ, а ордината — величина отрѣзка OQ, отсѣкаемаго на оси y-овъ прямою, проведенною чрезъ M параллельно оси x-овъ. Такое воззрѣніе на координаты распространяется безъ всякаго измѣненія и на случай, когда оси не перпендикулярны между собою. Такъ на прилагаемомъ чертежѣ (фиг. 3), гдѣ нормальный уголъ XOY острый, координаты точки M суть:



Фиг. 3.

$$x = OP = MQ \quad \text{и} \quad y = OQ = MP\,,$$

а координаты точки N суть:

$$x = OR = NS \quad \text{и} \quad y = OS = NR\,.$$

7. Разсмотрѣнный способъ опредѣлять положеніе точки на плоскости посредствомъ величинъ прямолинейныхъ отрѣзковъ называется способомъ прямолинейныхъ координатъ; при этомъ и самая система координатъ называется *прямолинейною*. Сверхъ того, если оси взаимно перпендикулярны, то система координатъ называется *прямоугольною*. Въ противномъ случаѣ она именуется *косоугольною*.

Прямолинейная система координатъ извѣстна также подъ названіемъ *Декартовой*, такъ какъ Декартъ первый далъ правила методическаго примѣненія этой системы къ изученію Геометріи и тѣмъ положилъ начало Аналитической Геометріи (въ 1637 г.).

8. При всякой прямолинейной системѣ координатъ всѣ точки, имѣющія равныя абсциссы, находятся на прямой, параллельной оси ординатъ, а всѣ точки, имѣющія равныя ординаты, на прямой, параллельной оси абсциссъ.

Слѣдовательно, условіе $x=a$, взятое въ отдѣльности, хотя и недостаточно для опредѣленія положенія точки на плоскости, тѣмъ не менѣе выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости тѣ, которыя лежатъ на прямой MP. Точно также условіе $y=b$ выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости тѣ, которыя лежатъ на прямой MQ. Понятно, что оба эти условія въ совокупности опредѣляютъ точку, принадлежащую обѣимъ прямымъ одновременно, т. е. единственную ихъ точку пересѣченія M.

Въ частности условіе $x=0$ опредѣляетъ ось y-овъ, а условіе $y=0$ ось x-овъ.

Координаты начала координатъ суть: $x=0$, $y=0$.

9. Если двѣ точки (какъ напримѣръ M и M'' въ фиг. 3) имѣютъ координаты, соотвѣтственно равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками, то онѣ расположены симметрично относительно начала координатъ, т. е. лежатъ на одной съ нимъ прямой и на равныхъ отъ него разстояніяхъ. Точно также и обратно, всякія двѣ точки, симметричныя относительно начала координатъ, имѣютъ координаты, равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками. Въ этомъ легко убѣдиться изъ равенства треугольниковъ MOP и $M''OP'$.

10. Точка, которой координаты суть $x=a$ и $y=b$, называется сокращенно *точкою* (a, b). Она считается извѣстною или данною, какъ скоро извѣстны или даны величины a и b. Найти неизвѣстную точку (x, y) значитъ въ Аналитической Геометріи вычислить координаты x и y или, по крайней мѣрѣ, дать формулы, выражающія ихъ чрезъ величины извѣстныя.

Въ слѣдующихъ задачахъ координаты точекъ служатъ данными или искомыми.

11. *Даны двѣ точки* (x_1, y_1) и (x_2, y_2); *требуется найти разстояніе между ними.*

Предположимъ, что оси координатъ косоугольныя, и назовемъ чрезъ ω уголъ между ними. Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки (фиг. 4). Проведя прямыя M_1P_1 и M_2P_2 параллельно оси ординатъ и прямую M_1N параллельно оси абсциссъ, будемъ имѣть:

$$OP_1 = x_1, \quad OP_2 = x_2, \quad M_1P_1 = y_1, \quad M_2P_2 = y_2.$$

Изъ треугольника M_1NM_2 имѣемъ:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1N}^2 + \overline{M_2N}^2 - 2M_1N.\,M_2N.\cos M_1NM_2,$$

но $$M_1N = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$$

и $$M_2N = M_2P_2 - NP_2 = M_2P_2 - M_1P_1 = y_2 - y_1;$$

кромѣ того, $$\cos M_1NM_2 = -\cos\omega.$$

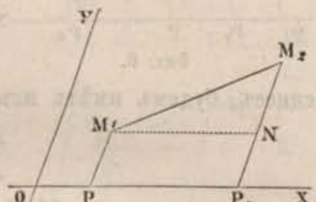
Поэтому, называя чрезъ d искомое разстояніе M_1M_2, будемъ имѣть:

$$d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega,$$

откуда

$$d = \pm\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega} \quad \ldots \quad (1)$$

Это равенство и рѣшаетъ задачу, потому что во второй части находятся только данныя величины, по которымъ искомая длина d и можетъ быть вычислена. Двойной знакъ во второй части соотвѣтствуетъ двумъ различнымъ направленіямъ, которымъ можно слѣдовать при измѣреніи длины M_1M_2. Если по смыслу задачи нужно найти только абсолютную величину отрѣзка M_1M_2, то ясно, что знакъ — не долженъ имѣть мѣста.



Фиг. 4.

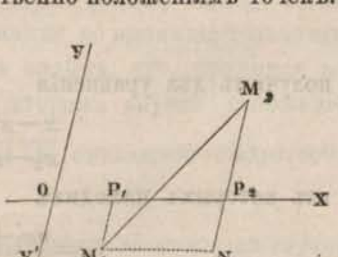
12. Замѣтимъ, что формула (1) есть вполнѣ общая, т. е. справедливая при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ данныхъ точекъ на плоскости, если только подъ x_1, y_1, x_2, y_2 будемъ понимать (какъ это всегда дѣлается) алгебраическія значенія координатъ, т. е. со включеніемъ въ это обозначеніе и знака + или — соотвѣтственно положеніямъ точекъ.

Такъ напримѣръ, если положимъ, что точка M_2 находится внутри нормальнаго угла XOY, а точка M_1 внутри угла XOY' (фиг. 5), то будемъ имѣть:

$$M_2N = M_2P_2 + M_1P_1.$$

Но, замѣчая, что алгебраическія значенія ординатъ y_1 и y_2 суть:

$$y_2 = +M_2P_2 \quad \text{и} \quad y_1 = -M_1P_1,$$



Фиг. 5.

будемъ имѣть, что и въ этомъ случаѣ, какъ въ предыдущемъ:

$$M_2N = y_2 - y_1.$$

13. Если оси координатъ прямоугольныя, то формула (1) принимаетъ слѣдующій болѣе простой видъ:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

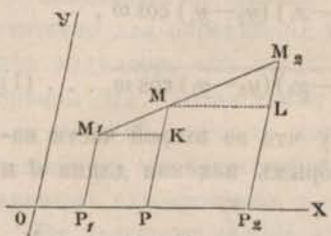
ибо въ этомъ случаѣ $\cos\omega = \cos 90^0 = 0$.

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $x_2=0$, $y_2=0$ и $x_1=x$, $y_1=y$, получимъ

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Это есть выраженіе разстоянія какой нибудь точки (x, y) отъ начала координатъ.

14. *Даны двѣ точки* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2); *требуется найти на прямой, ихъ соединяющей, точку* (x, y), *которой разстоянія отъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи* $m:n$.



Фиг. 6.

Другими словами эта задача можетъ быть выражена такъ: *раздѣлить отрѣзокъ между двумя данными точками въ данномъ отношеніи*.

Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки и M искомая (фиг. 6). Проведя прямыя M_1P_1, M_2P_2 и MP параллельно оси ординатъ и прямыя M_1K и ML параллельно оси абсциссъ, будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ M_1KM и MLM_2:

$$\frac{M_1K}{ML}=\frac{MK}{M_2L}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

Но

$$M_1K=P_1P=OP-OP_1=x-x_1,$$
$$ML=PP_2=OP_2-OP=x_2-x,$$
$$MK=MP-KP=MP-M_1P_1=y-y_1,$$
$$M_2L=M_2P_2-LP_2=M_2P_2-MP=y_2-y.$$

Поэтому, замѣчая, что по условію задачи должно быть

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{m}{n},$$

получимъ два уравненія

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}, \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n},$$

изъ которыхъ находимъ

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \qquad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу, потому что онѣ представляютъ выраженія искомыхъ координатъ чрезъ данныя координаты x_1, y_1, x_2, y_2 и данныя числа m и n. Онѣ одинаковы какъ для косоугольной, такъ и для прямоугольной системы координатъ, потому что въ нихъ вовсе не входитъ уголъ ω между осями координатъ.

15. Мы предполагали, что искомая точка M находится внутри отрѣзка M_1M_2, но смыслу задачи не противорѣчитъ и допущеніе, что точка M находится на продолженіи этого отрѣзка въ ту или другую

сторону. Дѣлая это допущеніе и повторяя предыдущія разсужденія примѣнительно къ фиг. 7-й, найдемъ:

$$\frac{M_1K}{LM}=\frac{MK}{LM_2}=\frac{M_1M}{M_2M}$$

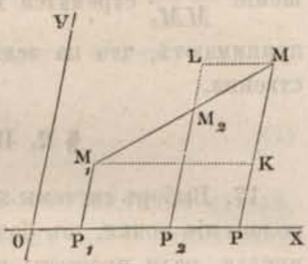
или

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{m}{n},$$

откуда

$$x=\frac{nx_1-mx_2}{n-m},\quad y=\frac{ny_1-my_2}{n-m}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что двумъ различнымъ предположеніямъ о положеніи искомой точки относительно данныхъ (внутри и внѣ отрѣзка M_1M_2) соотвѣтствуютъ различныя формулы, рѣшающія задачу. Легко показать, однако, что это различіе устраняется, если принять во вниманіе *правило знаковъ*.



Фиг. 7.

Въ самомъ дѣлѣ, когда точка M находится внутри отрѣзка M_1M_2, то отношеніе разстояній M_1M и MM_2, имѣющихъ одинаковое направленіе (отъ M_1 къ M и отъ M къ M_2), должно считаться положительнымъ, когда же точка M находится внѣ отрѣзка M_1M_2, то эти разстоянія имѣютъ разныя направленія и, слѣдовательно, отношеніе ихъ должно считаться отрицательнымъ. Отсюда видимъ, что въ двухъ этихъ случаяхъ данное отношеніе должно имѣть разные знаки, тогда какъ, выводя формулы (4) и (5), мы принимали во вниманіе только его ариѳметическое значеніе. Такимъ образомъ видимъ, что, принимая во вниманіе правило знаковъ, мы должны во второмъ случаѣ отношеніе $\frac{m}{n}$ замѣнить чрезъ $-\frac{m}{n}$. Отъ этого формулы (5) сдѣлаются тождественными съ (4).

И такъ, формулы (4) рѣшаютъ задачу во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, если только подъ обозначеніями m и n разумѣются величины алгебраическія со включеніемъ ихъ знаковъ.

16. Изъ сказаннаго видимъ также, что всякой величинѣ отношенія $\frac{m}{n}$ соотвѣтствуетъ единственное и опредѣленное положеніе точки M на прямой M_1M_2 внутри или внѣ отрѣзка M_1M_2, смотря по знаку этого отношенія, и обратно, всякому положенію точки M на этой прямой соотвѣтствуетъ особое алгебраическое значеніе отношенія $\frac{m}{n}$.

Если положимъ $\frac{m}{n}=1$ или $m=n$, то будемъ имѣть $M_1M=MM_2$, т. е. M будетъ срединою отрѣзка M_1M_2. Въ этомъ случаѣ формулы (4) обращаются въ

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Координаты средины отрѣзка суть, слѣдовательно, ариѳметическія средины координатъ концовъ его.

Если $\frac{m}{n}=-1$, то формулы (4) даютъ $x=\infty$, $y=\infty$. Точка, которой одна или обѣ координаты имѣютъ безконечныя величины, называется *точкою безконечно удаленною*. По какую бы сторону отъ отрѣзка M_1M_2 ни находилась точка M, при безпредѣльномъ ея удаленіи отношеніе $\frac{M_1M}{MM_2}$ стремится къ одному и тому же предѣлу (-1). Поэтому принимаютъ, что на всякой прямой безконечно удаленная точка единственна.

§ 2. Преобразованіе координатъ.

17. Выборъ системы координатъ, относительно которой опредѣляется положеніе точки, въ большинствѣ случаевъ бываетъ произволенъ, но иногда, ради простоты изслѣдованій или другихъ цѣлей, бываетъ полезно одну систему координатъ, первоначально взятую, замѣнить другою, опредѣленнымъ образомъ выбранною. При этомъ является вопросъ: *какъ по координатамъ точки относительно одной системы найти координаты той же точки относительно другой?*

Чтобы не смѣшивать двухъ системъ координатъ, о которыхъ при этомъ идетъ рѣчь, будемъ ту изъ нихъ, которая дана первоначально, называть *прежней*, а ту, къ которой требуется перейти,—*новой*. При этомъ координаты какой нибудь точки M относительно прежней системы условимся обозначать чрезъ x и y, а координаты той же точки относительно новой системы чрезъ x' и y'.

Рѣшеніе названнаго вопроса должно, очевидно, состоять въ отысканіи формулъ, выражающихъ величины x и y чрезъ x' и y' или обратно.

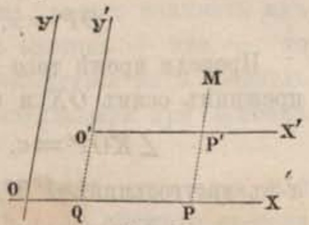
Замѣтимъ, что данными для опредѣленія однихъ координатъ по другимъ должны служить, кромѣ этихъ послѣднихъ координатъ, еще величины, опредѣляющія расположеніе одной системы координатъ по отношенію къ другой. Какія могутъ быть эти величины, мы сейчасъ увидимъ.

18. Разсмотримъ сперва два частные случая предложеннаго вопроса.

1-й случай.—*Обѣ системы имѣютъ одинаковое направленіе осей, но разныя начала.*

Пусть будетъ XOY (фиг. 8) прежняя система координатъ и $X'O'Y'$ — новая. По предположенію ось $O'X'$ параллельна OX и $O'Y'$ параллельна OY. Расположеніе новой системы относительно прежней будетъ, очевидно, вполнѣ опредѣлено, если даны координаты новаго начала относительно прежней системы. Пусть эти координаты будутъ

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b.$$



Фиг. 8.

Проведя прямую $MP'P$ параллельно оси OY и обозначивъ чрезъ Q точку пересѣченія осей OX и $O'Y'$, будемъ имѣть:

$$OP = OQ + QP = OQ + O'P',$$
$$MP = P'P + MP' = O'Q + MP',$$

и такъ какъ

$$OP = x,\ MP = y,\ O'P' = x',\ MP' = y,\ OQ = a,\ O'Q = b,$$

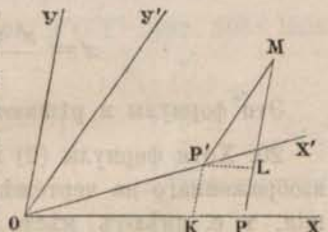
то получимъ

$$\left.\begin{array}{l} x = a + x' \\ y = b + y' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Эти формулы и рѣшають вопросъ въ настоящемъ частномъ случаѣ. Онѣ, очевидно, вполнѣ общія, т. е. имѣютъ мѣсто при всякихъ положеніяхъ какъ начала новой системы координатъ, такъ и данной точки M, если только подъ буквенными обозначеніями разумѣются алгебраическія значенія координатъ со включеніемъ знака $+$ или $-$. Кромѣ того эти формулы одинаковы какъ для косоугольныхъ, такъ и для прямоугольныхъ системъ координатъ.

19. 2-й случай.—*Обѣ системы координатъ имѣютъ общее начало, но разныя направленія осей.*

Пусть XOY будетъ прежняя система координатъ, а $X'OY'$—новая. Расположеніе новой системы относительно прежней опредѣлится вполнѣ, если будутъ извѣстны углы, составляемые новыми осями съ прежними. Очевидно, что достаточно для этого дать только два угла, составляемые новыми осями съ одной изъ прежнихъ, напр. съ OX; кромѣ того должно предполагать извѣстнымъ уголъ XOY между прежними осями.



Фиг. 9.

И такъ, пусть даны (фиг. 9):

$$\angle X'OX = \alpha,\ \angle Y'OX = \beta,\ \angle XOY = \omega.$$

Въ такомъ случаѣ, какъ видно изъ чертежа, будемъ имѣть:

$$\angle YOX' = \omega - \alpha,\ \angle YOY' = \omega - \beta.$$

Проведя чрезъ точку M прямыя MP и MP' параллельно осямъ OY и OY', будемъ имѣть:

$$OP=x,\ MP=y,\ OP'=x',\ MP'=y'.$$

Проведя кромѣ того чрезъ точку P' прямыя $P'L$ и $P'K$ параллельно прежнимъ осямъ OX и OY, будемъ имѣть, что въ треугольникѣ $OP'K$

$$\angle KOP'=\alpha,\ \angle OKP'=\pi-\omega,\ \angle OP'K=\omega-\alpha,$$

а въ треугольникѣ $P'ML$

$$\angle MP'L=\beta,\ \angle P'LM=\pi-\omega,\ \angle P'ML=\omega-\beta.$$

Вслѣдствіе этого изъ перваго треугольника получимъ:

$$\frac{P'K}{OP'}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\omega)} \quad \text{и} \quad \frac{OK}{OP'}=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(\pi-\omega)},$$

откуда

$$P'K=x'\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} \quad \text{и} \quad OK=x'\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}.$$

Изъ второго же треугольника найдемъ:

$$\frac{ML}{MP'}=\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\omega)} \quad \text{и} \quad \frac{P'L}{MP'}=\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(\pi-\omega)},$$

откуда

$$ML=y'\frac{\sin\beta}{\sin\omega} \quad \text{и} \quad P'L=y'\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}.$$

Но изъ чертежа видно, что

$$y=MP=P'K+ML,$$
$$x=OP=OK+P'L.$$

Подставивъ сюда найденныя выраженія для $P'K$, OK, ML и $P'L$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\omega} \\ x&=\frac{x'\sin(\omega-\alpha)+y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Эти формулы и рѣшаютъ вопросъ въ настоящемъ частномъ случаѣ.

20. Хотя формулы (2) выведены для частнаго расположенія осей, изображеннаго на чертежѣ, но не трудно видѣть, что онѣ вполнѣ общія, т. е. имѣютъ мѣсто и при всякомъ другомъ расположеніи осей. Для этого замѣтимъ, что въ Аналитической Геометріи для угловыхъ величинъ соблюдается то же правило знаковъ, какъ и для прямолинейныхъ разстояній, при чемъ за положительное направленіе, которому слѣдуютъ при измѣреніи или отсчитываніи угла, принимается въ большинствѣ случаевъ направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки, а за отрицательное—совпадающее съ направленіемъ этого

движенія. Въ силу такого правила въ формулахъ (2) углы α и β могутъ имѣть различные знаки при различныхъ направленіяхъ осей. Но если условимся подъ буквеннымъ обозначеніемъ угловъ понимать ихъ алгебраическія значенія, т. е. со включеніемъ знаковъ $+$ или $-$, то отъ измѣненія направленія осей не будетъ измѣняться видъ формулъ (2). Эти формулы будутъ, слѣдовательно, справедливыми при всякомъ расположеніи осей.

21. Формулы (2) принимаютъ болѣе простой видъ, если одна или обѣ системы координатъ прямоугольныя. Такъ, если прежняя система координатъ прямоугольная, то $\sin\omega = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(\omega-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\omega-\beta) = \cos\beta$, и формулы (2) обращаются въ

$$\left.\begin{aligned} y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta \\ x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Если новая система прямоугольная, то $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ и, слѣдовательно, $\sin\beta = \cos\alpha$, $\sin(\omega-\beta) = -\cos(\omega-\alpha)$, такъ что формулы (2) обращаются въ

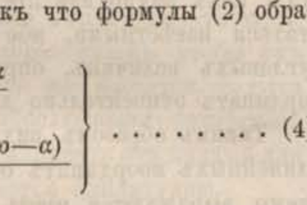
$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\omega} \\ x &= \frac{x'\sin(\omega-\alpha) - y'\cos(\omega-\alpha)}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Наконецъ, если обѣ системы прямоугольныя, то изъ послѣднихъ формулъ, полагая $\omega = \frac{\pi}{2}$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

22. Обратимся теперь къ самому общему случаю въ расположеніи системъ координатъ, т. е. къ тому случаю, когда *обѣ системы имѣютъ различныя начала координатъ и различныя направленія осей.*

Пусть прежнія оси будутъ XOY, а новыя $X'O'Y'$ (фиг. 10). Возьмемъ еще третью вспомогательную систему, которой начало совпадаетъ съ новымъ началомъ O' и которой оси $O'X''$, $O'Y''$ послѣдовательно параллельны осямъ OX и OY. Если назовемъ координаты точки M относительно этой системы чрезъ x'' и y'', то будемъ имѣть на основаніи формулъ (1)



Фиг. 10.

$$x = a + x'',$$
$$y = b + y''.$$

Для перехода же отъ вспомогательной системы $X''O'Y''$ къ новой $X'OY'$ будемъ имѣть по формуламъ (2) равенства:

$$x'' = \frac{x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega},$$

$$y'' = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \omega}.$$

Подставляя эти выраженія для x'' и y'' въ предыдущія равенства, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} + a \\ y' &= \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \omega} + b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (6)$$

Это и будутъ такъ называемыя общія формулы преобразованія координатъ. Сокращенно мы можемъ ихъ представить въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} x &= mx' + ny' + a \\ y &= px' + qy' + b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

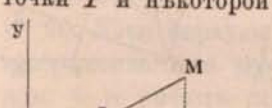
гдѣ, какъ видно изъ предыдущаго, величины m, n, p, q должны считаться извѣстными, ибо онѣ зависятъ опредѣленнымъ образомъ отъ угловыхъ величинъ, опредѣляющихъ расположеніе одной системы координатъ относительно другой.

Такимъ образомъ видимъ, что при всякомъ преобразованіи прямолинейныхъ координатъ обѣ координаты точки относительно одной системы выражаются чрезъ координаты точки относительно другой *линейно*, т. е. многочленами первой степени.

§ 3. Полярныя координаты.

23. Способъ опредѣлять положеніе точки посредствомъ прямолинейныхъ координатъ не есть единственный, служащій для этой цѣли. Основываясь на одной и той же основной мысли, можно предложить безконечное множество подобныхъ способовъ. Наиболѣе употребительный, кромѣ изложеннаго, есть способъ координатъ полярныхъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Допустимъ, что намъ извѣстно положеніе на плоскости нѣкоторой точки P и нѣкоторой прямой PL, исходящей изъ этой точки въ опредѣленномъ направленіи (фиг. 11). Въ такомъ случаѣ положеніе всякой другой точки M будетъ опредѣляться вполнѣ посредствомъ разстоянія MP и угла MPL, ибо, какъ скоро извѣстны эти величины, точка M можетъ быть найдена построеніемъ. Слѣдовательно, эти двѣ величины можно считать координатами точки M въ такомъ же точно смыслѣ, какъ и координаты прямолинейныя. Ихъ-то и называютъ *полярными координатами*.



Фиг. 11.

Точка P и прямая PL, положеніе которыхъ предполагается извѣстнымъ напередъ, составляютъ *полярную систему координатъ;* изъ нихъ первая называется *полюсомъ* системы, а послѣдняя *полярною осью.*

Самымъ координатамъ усваиваются особыя наименованія, а именно, разстояніе MP точки M отъ полюса называется *радіусомъ векторомъ*, а уголъ радіуса вектора съ полярной осью—*амплитудою.* Условившись обозначать радіусъ векторъ буквою r, а амплитуду буквою φ, будемъ имѣть, что для точки M

$$r = MP, \quad \varphi = \angle MPL.$$

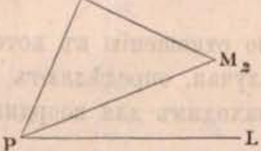
24. По отношенію къ амплитудамъ различныхъ точекъ соблюдается упомянутое выше правило знаковъ, т. е. амплитуды, отсчитываемыя отъ полярной оси къ радіусу вектору въ направленіи обратномъ направленію движенія часовой стрѣлки, считаются положительными, а въ направленіи согласномъ этому движенію—отрицательными. При этомъ можно ограничиться только положительными амплитудами, если условимся ихъ абсолютныя величины считать измѣняющимися отъ 0^0 до 360^0. Если же допускаются и отрицательныя амплитуды, то необходимо (во избѣжаніе неопредѣленности и недоразумѣній), чтобы ихъ абсолютныя величины не превышали 180^0. Что же касается радіуса вектора, то онъ дается обыкновенно только абсолютными размѣрами, ибо направленіе, въ которомъ его слѣдуетъ отмѣривать отъ полюса для построенія точки M, уже достаточно опредѣляется амплитудою.

Изъ сказаннаго видимъ, что всѣ точки, имѣющія одинаковые радіусы векторы, лежатъ на окружности, которой центръ находится въ полюсѣ. Всѣ точки, имѣющія одинаковыя амплитуды, лежатъ на прямой (или лучѣ), исходящей изъ полюса въ опредѣленномъ направленіи. Полюсъ есть единственная точка, которая опредѣляется только однимъ условіемъ $r=0$.

Точка, которой полярныя координаты суть r и φ, называется сокращенно *точкою* (r, φ).

25. Рѣшимъ одну изъ задачъ, разсмотрѣнныхъ уже нами при употребленіи прямоугольныхъ координатъ.

Даны двѣ точки (r_1, φ_1) *и* (r_2, φ_2); *требуется найти разстояніе между ними.*



Фиг. 12.

Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки (фиг. 12). Изъ треугольника M_1PM_2 имѣемъ:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{PM_1}^2 + \overline{PM_2}^2 - 2 . PM_1 . PM_2 . \cos M_1PM_2 .$$

Но $PM_1 = r_1, \ PM_2 = r_2$

и $\angle M_1PM_2 = \varphi_1 - \varphi_2 .$

Поэтому, обозначая искомое разстояніе M_1M_2 чрезъ d, будемъ имѣть:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

откуда

$$d = \pm \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad . . . . . \quad (1)$$

26. Зная полярныя координаты какой нибудь точки, не трудно найти ея прямолинейныя координаты, или обратно. При этомъ расположенiе одной системы координатъ относительно другой должно считаться извѣстнымъ. Такъ какъ формулы для перехода отъ одной прямолинейной системы координатъ къ другой также прямолинейной нами уже найдены, то въ настоящемъ случаѣ достаточно найти формулы, связывающiя полярныя координаты точки съ ея прямолинейными координатами относительно какой нибудь произвольно взятой прямолинейной системы. Пусть эта послѣдняя система будетъ прямоугольная и притомъ такая, что положительное направленiе оси абсциссъ совпадаетъ съ полярною осью, а начало координатъ—съ полюсомъ.

Въ такомъ случаѣ изъ треугольника PMN (фиг. 11) получимъ:

$$PN = PM.\cos MPL \text{ и } MN = PM.\sin MPL,$$

или $$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Эти формулы выражаютъ прямолинейныя координаты чрезъ полярныя. Изъ нихъ же, или непосредственно изъ треугольника PMN, находимъ:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \text{arc tg}\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots \quad (3)$$

Эти формулы опредѣляютъ полярныя координаты чрезъ прямолинейныя.

На основанiи сказаннаго, формулами (2) и (3) рѣшается вполнѣ вопросъ о преобразованiи прямолинейныхъ координатъ въ полярныя или обратно.

§ 4. Линiи и уравненiя.

27. Мы видѣли, что условiя

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b,$$

взятыя въ совокупности, опредѣляютъ, по отношенiю къ какой либо прямолинейной системѣ координатъ, точку, и что каждое изъ нихъ въ отдѣльности выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости цѣлый непрерывный рядъ, т. е. опредѣляетъ нѣкоторую линiю. Подобнымъ же образомъ два условiя

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

по отношенiю къ которымъ предыдущiя условiя суть только частные случаи, опредѣляютъ на плоскости нѣкоторую точку, ибо изъ нихъ мы находимъ для координатъ x и y значенiя

$$x = \frac{BC'-CB'}{AB'-BA'},\; y = \frac{CA'-AC'}{AB'-BA'},$$

которымъ и соотвѣтствуетъ опредѣленное положенiе точки.

Если же одно изъ условiй (1) будетъ взято въ отдѣльности отъ другого, то изъ него, какъ неопредѣленнаго уравненiя, не опредѣлятся координаты x и y. Тѣмъ не менѣе посредствомъ его устанавливается между этими координатами опредѣленная связь, въ силу которой всякому произвольному значенію одной изъ величинъ x и y будетъ соотвѣтствовать опредѣленное значеніе другой. И если одну изъ этихъ величинъ, напр. x, будемъ измѣнять непрерывно, то, въ силу той же связи, другая будетъ измѣняться также непрерывно. Отсюда слѣдуетъ, что и каждое изъ условій (1), въ отдѣльности взятое, выдѣляетъ на плоскости непрерывный рядъ точекъ или линію.

28. Это заключеніе справедливо не только для уравненій первой степени, каковы условія (1), но и для всякихъ другихъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Чтобы нагляднѣе убѣдиться въ этомъ, положимъ, что мы имѣемъ одно такое уравненіе:

$$f\,(x,\,y)=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(2)$$

гдѣ знакъ f служитъ символическимъ обозначеніемъ какой угодно аналитической зависимости, т. е. совокупности какихъ бы то ни было дѣйствій надъ неизвѣстными x и y и надъ другими величинами, принимаемыми за извѣстныя. Разсмотримъ сперва, какое значеніе имѣетъ совокупность двухъ условій:

$$f\,(x,\,y)=0 \quad \text{и} \quad x=a\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(3)$$

Вторымъ изъ этихъ условій дается непосредственно значеніе неизвѣстнаго x; другое же неизвѣстное y опредѣлится послѣ исключенія x изъ обоихъ условій. Результатъ этого исключенія будетъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$f\,(a,\,y)=0\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(4)$$

Такъ какъ изъ Алгебры извѣстно, что уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ, вообще говоря, нѣсколько рѣшеній (корней), то должно существовать нѣсколько значеній для y, удовлетворяющихъ уравненію (4). Пусть эти значенія будутъ:

$$y=b_1\,,\; y=b_2\,,\; y=b_3\,.\;\;.\;.\;.\;.\;.$$

Принимая во вниманіе, что каждому изъ этихъ значеній y соотвѣтствуетъ одно и то же значеніе x, именно $x=a$, заключаемъ, что совокупностью условій (3) опредѣляется нѣсколько точекъ, лежащихъ на прямой PM_1, параллельной оси OY (фиг. 13), и имѣющихъ ординатами $M_1P=b_1$, $M_2P=b_2$, $M_3P=b_3$ и т. д.

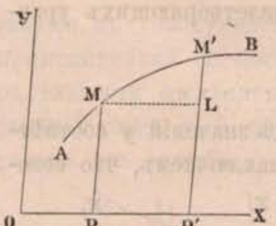
Фиг. 13.

Если теперь вообразимъ, что величина a непрерывно измѣняется, то условіе $x=a$ будетъ представлять непрерывный рядъ прямыхъ, параллельныхъ оси OY, или, другими словами, непрерывное измѣненіе величины a въ уравненіи $x=a$ обусловливаетъ непрерывное перемѣщеніе прямой PM_1, выражаемой этимъ уравненіемъ. Но, въ силу уравненія (4), такому измѣненію величины a будетъ соотвѣтствовать непрерывное же измѣненіе и всѣхъ опредѣляемыхъ изъ него значеній величины y. Это значитъ, что при перемѣщеніи прямой PM_1 каждая изъ точекъ M_1, M_2, M_3 .... будетъ также перемѣщаться, образуя непрерывный рядъ или описывая линію. Каждая изъ точекъ этихъ рядовъ будетъ имѣть координатами величины, удовлетворяющія первому изъ условій (3) или уравненію (2). Что же касается другого условія (3), т. е. уравненія $x=a$, то при допущеніи, что a есть величина измѣняющаяся, оно перестаетъ имѣть значеніе, т. е. оно не можетъ служить какъ условіе для выдѣленія какихъ либо точекъ плоскости. Слѣдовательно, всѣ точки рядовъ, описываемыхъ точками M_1, M_2, M_3..., выдѣляются посредствомъ только уравненія (2) или, другими словами, одно это уравненіе опредѣляетъ вполнѣ эти ряды.

Ряды, образуемые точками M_1, M_2, M_3.., могутъ быть или совершенно отдѣльными одинъ отъ другого, какъ напр. на чертежѣ (фиг. 13) ряды M_2N_2 и M_3N_3, или непрерывно переходящими одинъ въ другой, какъ M_1N_1 и M_2N_2. Въ послѣднемъ случаѣ они являются только частями или вѣтвями одной и той же линіи. Впрочемъ и въ первомъ случаѣ болѣе подробное изученіе свойствъ линій обнаруживаетъ тѣсную связь между названными отдѣльными рядами точекъ, связь, въ силу которой ихъ также признаютъ вѣтвями одной и той же линіи. Принимая все это во вниманіе, мы убѣждаемся, что *всякое уравненіе съ двумя неизвѣстными опредѣляетъ на плоскости нѣкоторую линію.*

29. Постараемся теперь убѣдиться въ обратномъ.

Пусть дана на плоскости нѣкоторая непрерывная линія AB (фиг.14). Возьмемъ на ней какую-нибудь точку M, координаты которой будутъ $OP=x$ и $MP=y$. Если одну изъ этихъ координатъ, напр. абсциссу, измѣнимъ на произвольную величину PP', то такому измѣненію будетъ соотвѣтствовать измѣненіе ординаты на величину вполнѣ опредѣленную LM'. Слѣдовательно, посредствомъ линіи AB устанавливается между величинами x и y такая зависимость, что произвольное измѣненіе одной изъ этихъ величинъ влечетъ за собою опредѣленное измѣненіе другой, и, при непрерывности линіи AB, эта зависимость будетъ также обладать свойствомъ непрерывности [1]). Такого рода зависимость называется аналитическою и можетъ быть выражена такъ:



Фиг. 14.

$$y=F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

[1]) Свойство это состоитъ въ томъ, что, при достаточно маломъ измѣненіи одной изъ двухъ зависящихъ другъ отъ друга величинъ, измѣненіе другой можетъ быть сколь угодно малымъ.

гдѣ знакъ F означаетъ совокупность дѣйствій надъ x и другими величинами, принимаемыми за извѣстныя.

Послѣднее равенство равнозначуще съ равенствомъ

$$f(x, y) = 0,$$

къ которому оно приводится посредствомъ простыхъ алгебраическихъ дѣйствій, и такъ какъ это есть общій видъ уравненія съ двумя неизвѣстными, то и заключаемъ, что *всякая линія на плоскости выражается однимъ уравненіемъ съ двумя неизвѣстными.*

30. Во всякомъ уравненіи, выражающемъ какую-либо линію, величины x и y суть перемѣнныя, а потому ихъ называютъ измѣняющимися или текущими координатами линіи, въ отличіе отъ координатъ опредѣленныхъ точекъ, которыя суть величины постоянныя.

Если двѣ перемѣнныя величины связаны между собою такъ, что одну мы можемъ измѣнять произвольно, а другая измѣняется при этомъ лишь въ зависимости отъ измѣненій первой, то первую принято въ математикѣ называть *независимою перемѣнною*, а вторую ея *функціею.* Употребляя это наименованіе, можно сказать, что изъ двухъ перемѣнныхъ координатъ какой-либо линіи одна есть функція другой. Это именно и выражено символически уравненіемъ (5).

Хотя во всемъ сказанномъ выше мы имѣли въ виду только прямолинейныя координаты, но легко понять, что тѣ же разсужденія примѣнимы и ко всякой другой системѣ координатъ. Такъ, очевидно, что всякое уравненіе

$$f(r, \varphi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

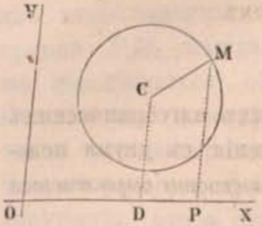
въ которомъ r и φ суть полярныя координаты, выражаетъ линію, и обратно, всякая линія выражается по отношенію къ какой-либо полярной системѣ координатъ уравненіемъ вида (6).

31. Возможность выражать всякую линію уравненіемъ даетъ средство къ самому широкому примѣненію алгебраическаго анализа къ изученію какъ самихъ линій, такъ и всякихъ ихъ сочетаній или фигуръ.

Въ самомъ дѣлѣ, между линіей и выражающимъ ее уравненіемъ, очевидно, должна существовать тѣсная связь, такъ что всякая особенность уравненія должна имѣть свое истолкованіе въ свойствахъ линіи, и обратно. Вслѣдствіе этого изученіе линій и, слѣдовательно, фигуръ, а съ тѣмъ вмѣстѣ и Геометріи вообще, сводится на изученіе уравненій въ связи съ установленіемъ общихъ правилъ для такого истолкованія.

Если линія опредѣляется геометрически, то первымъ шагомъ для ея изученія должно быть нахожденіе, на основаніи этого геометрическаго опредѣленія, ея опредѣленія аналитическаго, т. е. уравненія.

Возьмемъ для примѣра кругъ. Эта линія опредѣляется геометрически какъ такая, всѣ точки которой находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ одной и той же точки, называемой центромъ. Обозначимъ чрезъ r абсолютную величину радіуса, чрезъ α и β координаты центра C, а чрезъ x и y координаты какой-нибудь точки M на окружности относительно нѣкоторой прямолинейной системы (фиг. 15). Въ силу геометрическаго опредѣленія круга, между величинами этими должно имѣть мѣсто соотношеніе:



Фиг. 15.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega}=r\,,$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2\,.\quad.\quad.\quad.\quad(7)$$

гдѣ ω есть уголъ между осями координатъ. Такъ какъ этому соотношенію удовлетворяютъ координаты всякой точки окружности и не удовлетворяютъ координаты точекъ, лежащихъ внутри или внѣ круга, то оно и будетъ уравненіемъ круга.

Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ уравненіе круга будетъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\,,$$

и оно обращается въ

$$x^2+y^2=r^2\,,$$

когда начало координатъ находится въ центрѣ круга.

32. Наиболѣе общую задачу Аналитической Геометріи составляетъ такое изученіе линій, въ которомъ за исходный пунктъ принимается не геометрическое ихъ опредѣленіе, а самый общій видъ выражающихъ ихъ уравненій. Чтобы это изученіе было систематическое, линіи подраздѣляются или классифицируются на основаніи признаковъ, характеризующихъ самыя уравненія. Такъ, прежде всего линіи раздѣляются на *алгебраическія* и *трансцендентныя*.

Алгебраическою называется всякая линія, которая относительно прямолинейныхъ системъ координатъ выражается алгебраическимъ уравненіемъ. Другими словами, алгебраическая линія есть такая, для которой общая зависимость между прямолинейными координатами любой ея точки выражается совокупностью однихъ только алгебраическихъ дѣйствій надъ ними. Если же эта зависимость не можетъ быть выражена одними только алгебраическими дѣйствіями, повторенными въ конечномъ числѣ, то какъ уравненіе, выражающее линію, такъ и самая линія называются трансцендентными.

Къ числу зависимостей, не выражающихся алгебраическими дѣйствіями, принадлежатъ, напримѣръ, зависимости между угломъ и его синусомъ, между степенью и ея показателемъ и т. д. Вслѣдствіе этого линіи, выражаемыя уравненіями:

$$y = \sin x \qquad \text{или} \qquad y = a^x,$$

суть трансцендентныя.

Во всякомъ алгебраическомъ уравненіи, при помощи алгебраическихъ же дѣйствій надъ его обѣими частями, могутъ быть уничтожены дѣлители и радикалы, вслѣдствіе чего уравненіе это приводится къ такому виду

$$f(x, y) = 0,$$

въ которомъ первая часть есть такъ называемая цѣлая функція, т. е. алгебраическій многочленъ съ двумя неизвѣстными. Смотря по степени или измѣренію этого многочлена, линіи раздѣляются на порядки. Такъ, алгебраическая линія будетъ 1-го, 2-го и т. д. порядка, когда въ выражающемъ ее уравненіи $f(x, y) = 0$ первая часть будетъ многочленъ 1-й, 2-й и т. д, степени.

Обративъ вниманіе на уравненіе (7), убѣждаемся, что кругъ есть алгебраическая линія второго порядка.

33. Одна и та же линія выражается, вообще говоря, различными уравненіями, смотря по тому, относительно какой системы координатъ мы ее разсматриваемъ. Поэтому является вопросъ: какъ, зная уравненіе линіи относительно одной системы координатъ, найти ея уравненіе относительно другой?

Такъ какъ искомое или новое уравненіе есть аналитическое выраженіе зависимости, которая существуетъ между новыми координатами каждой точки линіи, то, для нахожденія этого новаго уравненія, нужно только въ прежнее уравненіе $f(x, y) = 0$ подставить на мѣсто перемѣнныхъ x и y ихъ выраженія изъ формулъ для преобразованія координатъ.

Если какъ прежняя, такъ и новая системы координатъ—прямолинейныя, то эти выраженія суть линейныя. Вслѣдствіе этого отъ внесенія ихъ на мѣсто x и y въ многочленъ $f(x, y)$ послѣдній преобразуется въ новый многочленъ $F(x, y)$, степень котораго не можетъ быть выше степени прежняго. Слѣдовательно, отъ преобразованія прямолинейныхъ координатъ степень уравненія линіи не можетъ повыситься. Отсюда слѣдуетъ также, что она не можетъ и понизиться, ибо въ противномъ случаѣ обратное преобразованіе координатъ, т. е. переходъ отъ новой системы къ прежней, приводило бы къ повышенію степени.

Линія, разсматриваемая по отношенію къ какой нибудь системѣ координатъ, называется *отнесенною* къ этой системѣ. Употребляя для краткости этотъ терминъ, можно сказать на основаніи предыдущаго, что *степень уравненія всякой алгебраической линіи остается одна и та же, къ какой бы прямолинейной системѣ координатъ эта линія ни была отнесена.*

Порядокъ линіи представляетъ, слѣдовательно, такую ея особенность, которая не зависитъ отъ выбора осей координатъ и лежитъ, такъ сказать, въ самой природѣ линіи.

34. Если въ алгебраическомъ уравненіи $f(x, y) = 0$ многочленъ, составляющій первую часть, есть произведеніе двухъ многочленовъ низшихъ степеней, то уравненіе это выражаетъ совокупность двухъ линій.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \, . \, \psi(x, y) \, ,$$

будемъ имѣть, что уравненіе $f(x, y) = 0$ удовлетворяется всѣми тѣми точками, которыя удовлетворяютъ каждому изъ уравненій $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ въ отдѣльности. Слѣдовательно, первое уравненіе выражаетъ не что иное, какъ совмѣстно взятыя двѣ линіи, выражаемыя двумя послѣдними уравненіями.

Сказанное распространяется, очевидно, и на тотъ случай, когда первая часть уравненія разлагается на большее число множителей, изъ которыхъ каждый есть цѣлый многочленъ.

Если же одинъ изъ множителей многочлена $f(x, y)$ есть постоянный, т. е. вовсе не зависящій отъ перемѣнныхъ координатъ x и y, то его можно откинуть, не измѣняя значенія уравненія. Дѣйствительно, при условіи

$$f(x, y) = M \, . \, f'(x, y)$$

всѣ значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одному изъ уравненій

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{и} \qquad f'(x, y) = 0 \, ,$$

должны удовлетворять и другому. Оба эти уравненія выражаютъ, слѣдовательно, одну и ту же линію.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что обѣ части всякаго уравненія можно умножать или дѣлить на постоянныя количества, не измѣняя этимъ геометрическаго значенія уравненія.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ОПРЕДѢЛИТЕЛИ.

§ 1. Основныя свойства опредѣлителей.

35. Положимъ, что мы имѣемъ n^2 какихъ-нибудь количествъ, расположенныхъ въ таблицу, состоящую изъ n строкъ и n столбцовъ. Чтобы изъ самаго обозначенія этихъ количествъ видно было, какое мѣсто каждое изъ нихъ занимаетъ въ таблицѣ, будемъ означать количества, находящіяся въ одномъ столбцѣ, одною и тою же буквою съ присоединеніемъ только различныхъ указателей, послѣдовательность которыхъ соотвѣтствуетъ послѣдовательности строкъ. Разсматриваемая таблица количествъ будетъ, слѣдовательно, имѣть такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,,\ b_1\,,\ c_1\,,\ \ldots\ldots\ u_1 \\ a_2\,,\ b_2\,,\ c_2\,,\ \ldots\ldots\ u_2 \\ a_3\,,\ b_3\,,\ c_3\,,\ \ldots\ldots\ u_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\,,\ b_n\,,\ c_n\,,\ \ldots\ldots\ u_n \end{array}\right\}.$$

Выберемъ изъ всѣхъ этихъ количествъ группу n такихъ, между которыми не было бы принадлежащихъ одной и той же строкѣ или одному и тому же столбцу. Такихъ группъ можетъ быть, очевидно, нѣсколько. Одну изъ нихъ, именно группу

$$a_1\,,\ b_2\,,\ c_3\,,\ \ldots\ldots\ u_n\,,$$

состоящую изъ количествъ, расположенныхъ по діагонали таблицы, мы будемъ называть *главною*. Всѣ остальныя группы получатся изъ главной, если, сохраняя въ ней порядокъ буквъ, произведемъ всѣ возможныя перемѣщенія указателей, или, сохраняя порядокъ указателей, подвергнемъ всевозможнымъ перемѣщеніямъ буквы. Число группъ будетъ, слѣдовательно,

$$1\,.\,2\,.\,3\ \ldots\ldots\ n\,.$$

36. Перемножая количества, составляющія каждую такую группу, составимъ изъ произведеній алгебраическую сумму такъ, чтобы главный членъ ея

$$a_1 b_2 c_3 \ldots u_n,$$

равно какъ всѣ тѣ, которые получаются изъ него посредствомъ четнаго числа взаимныхъ перестановокъ указателей, были взяты со знакомъ $+$, а тѣ члены, которые получаются изъ главнаго чрезъ нечетное число такихъ перестановокъ, со знакомъ $-$.

Составленное такимъ образомъ алгебраическое выраженіе разсматриваемыхъ количествъ называется *опредѣлителемъ* или *детерминантомъ*, самыя же количества его *элементами*. Произведенія элементовъ, составляющія слагаемыя опредѣлителя, суть его *члены*. Число n называется *порядкомъ* опредѣлителя.

37. Въ тѣхъ случаяхъ, когда должны быть указаны всѣ элементы, опредѣлитель принято обозначать такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots & u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & u_n \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Сокращенно же можно употреблять слѣдующее обозначеніе

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots u_n.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что опредѣлитель второго порядка есть разность двухъ произведеній:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Опредѣлитель 3-го порядка есть алгебраическая сумма шести произведеній:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 =$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

Въ частности:

$$\begin{vmatrix} 3, & -7 \\ 1, & 5 \end{vmatrix} = 3.5 + 1.7 = 22;$$

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3 \\ -5, & 4, & 0 \\ 0, & -7, & 1 \end{vmatrix} = 8 + 105 - 5 = 108.$$

38. Прямыми слѣдствіями даннаго способа составленія опредѣлителей изъ элементовъ являются слѣдующія ихъ свойства.

1) Величина опредѣлителя не мѣняется, если строки будутъ замѣнены столбцами и обратно, при сохраненіи послѣдовательности тѣхъ и другихъ, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \dots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots & u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \dots & u_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots & u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots & a_n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \dots & b_n \\ c_1, & c_2, & c_3, & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1, & u_2, & u_3, & \dots & u_n \end{vmatrix}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, группы элементовъ, изъ которыхъ составляются слагаемыя для обоихъ опредѣлителей, очевидно, однѣ и тѣ же, а потому члены этихъ опредѣлителей соотвѣтственно равны по абсолютнымъ величинамъ. Замѣчая же, что оба опредѣлителя имѣютъ одинъ и тотъ же главный членъ

$$a_1 b_2 c_3 \dots u_n,$$

заключаемъ, что и знаки у равныхъ членовъ должны быть одинаковые.

2) Опредѣлитель измѣняетъ знакъ, сохраняя абсолютную величину, если два какіе нибудь столбца будутъ перемѣщены одинъ на мѣсто другого. Такъ напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \dots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots & u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \dots & u_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots & u_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1, & a_1, & c_1, & \dots & u_1 \\ b_2, & a_2, & c_2 & \dots & u_2 \\ b_3, & a_3, & c_3, & \dots & u_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n, & a_n, & c_n, & \dots & u_n \end{vmatrix}.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что слагаемыя новаго опредѣлителя, по абсолютнымъ величинамъ, суть тѣ же самыя произведенія, какъ и въ данномъ опредѣлителѣ, но тотъ членъ, который въ новомъ опредѣлителѣ есть главный и, слѣдовательно, берется со знакомъ $+$, получается изъ главнаго члена даннаго опредѣлителя только одной перестановкой двухъ буквъ, вслѣдствіе чего равный ему членъ даннаго опредѣлителя имѣетъ знакъ обратный. Отсюда же слѣдуетъ, что и остальные члены обоихъ опредѣлителей, какъ получающіеся изъ главныхъ однимъ и тѣмъ же способомъ, должны, при равныхъ абсолютныхъ величинахъ, различаться знаками.

3) Опредѣлитель равняется нулю, если въ немъ элементы двухъ какихъ-нибудь столбцовъ послѣдовательно равны между собою. Такъ напр.:

$$\begin{vmatrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_2 \\ a_3\,, & b_3\,, & c_3\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n\,, & b_n\,, & c_n\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_n \end{vmatrix} = 0\,,$$

если

$$a_1 = c_1\,, \quad a_2 = c_2\,, \quad a_3 = c_3\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_n = c_n\,.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что при такомъ условіи отъ перемѣщенія одинаковыхъ столбцовъ одного на мѣсто другого опредѣлитель вовсе не долженъ мѣняться и въ то же время, на основаніи предыдущаго свойства, онъ долженъ мѣнять свой знакъ.

39. Изъ способа составленія опредѣлителей видно, что во всякомъ опредѣлителѣ существуетъ по нѣскольку членовъ, содержащихъ множителемъ одинъ изъ элементовъ перваго столбца, и не можетъ быть членовъ, въ которые не входилъ бы множителемъ ни одинъ изъ элементовъ этого столбца. Отсюда слѣдуетъ, что опредѣлитель (1) можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \;.\;.\;.\;.\; + a_nA_n \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Здѣсь произведеніе a_1A_1 есть алгебраическая сумма всѣхъ тѣхъ членовъ даннаго опредѣлителя, которые содержатъ множителемъ a_1. Такъ какъ всѣ эти члены получаются изъ главнаго

$$a_1b_2c_3 \;.\;.\;.\; u_n$$

посредствомъ всевозможныхъ перемѣщеній всѣхъ буквъ, кромѣ a, то ясно, что A_1 составляется, по общему правилу для составленія опредѣлителей, изъ элементовъ даннаго опредѣлителя, за исключеніемъ расположенныхъ въ первомъ столбцѣ и въ первой строкѣ. Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2\,, & c_2\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_2 \\ b_3\,, & c_3\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n\,, & c_n\,, & \cdot & \cdot & \cdot & u_n \end{vmatrix}\,.$$

Точно также убѣждаемся, что вообще A_k есть по абсолютной величинѣ опредѣлитель $(n—1)$-го порядка, получающійся изъ даннаго опредѣлителя (1), если въ немъ исключить первый столбецъ и k-ую строку. Всѣ такіе опредѣлители низшаго на единицу порядка сравнительно съ даннымъ называются его *подчиненными* или *опредѣлителями минорами*.

Каждому элементу даннаго опредѣлителя соотвѣтствуетъ свой опредѣлитель миноръ, получающійся изъ даннаго устраненіемъ той строки и того столбца, которымъ принадлежитъ этотъ элементъ.

Принимая во вниманіе сказанное, а также и приведенныя выше основныя свойства опредѣлителей, мы можемъ формулу (2) истолковать слѣдующимъ образомъ.

Всякій опредѣлитель равняется алгебраической суммѣ произведеній послѣдовательныхъ элементовъ какого-либо изъ его столбцовъ или какой-либо изъ его строкъ на соотвѣтствующіе этимъ элементамъ опредѣлители миноры.

40. Отсюда обнаруживаются еще слѣдующія свойства опредѣлителей:

1) Если всѣ элементы одного изъ столбцовъ или одной изъ строкъ суть нули, то и самый опредѣлитель равенъ нулю.

2) Если всѣ элементы одного изъ столбцовъ или одной изъ строкъ будутъ помножены на какую-нибудь величину, то чрезъ это и опредѣлитель помножится на эту величину.

3) Величина опредѣлителя не мѣняется, если къ элементамъ какого-нибудь столбца будутъ прибавлены количества пропорціональныя соотвѣтствующимъ элементамъ другого столбца. То же самое и относительно строкъ.

§ 2. Рѣшеніе системъ линейныхъ уравненій.

41. Приложимъ сказанное къ выводу общихъ формулъ для рѣшенія совмѣстныхъ уравненій первой степени со многими неизвѣстными.

Пусть мы имѣемъ слѣдующую систему n такихъ уравненій съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots\dots + u_1 t = v_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots\dots + u_2 t = v_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots\dots + u_3 t = v_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_n x + b_n y + c_n z + \dots\dots + u_n t = v_n
\end{array}\right\} \dots\dots (1)$$

Обозначимъ чрезъ $\triangle$ опредѣлитель, составленный изъ n^2 коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, т. е. положимъ:

$$\begin{vmatrix}
a_1, & b_1, & c_1, & \dots & u_1 \\
a_2, & b_2, & c_2, & \dots & u_2 \\
a_3, & b_3, & c_3, & \dots & u_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n, & b_n, & c_n, & \dots & u_n
\end{vmatrix} = \triangle .$$

Называя, какъ и выше, опредѣлители миноры, соотвѣтствующіе элементамъ перваго столбца въ этомъ опредѣлителѣ, послѣдовательно чрезъ $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, будемъ имѣть:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \ldots + a_n A_n = \Delta.$$

Кромѣ того,

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + \ldots + b_n A_n = 0 ,$$
$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + \ldots + c_n A_n = 0 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1 A_1 + u_2 A_2 + u_3 A_3 + \ldots + u_n A_n = 0 ,$$

такъ какъ здѣсь первыя части суть такіе опредѣлители, въ которыхъ два столбца имѣютъ одинаковые элементы.

На этомъ основаніи, помножая данныя уравненія послѣдовательно на $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ и складывая ихъ почленно, получимъ:

$$\Delta x = v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 + \ldots + v_n A_n ,$$

откуда

$$x = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 + \ldots + v_n A_n}{\Delta} = \frac{M_x}{\Delta} .$$

Здѣсь M_x есть, очевидно, такой опредѣлитель, который получимъ, замѣнивъ въ опредѣлителѣ Δ элементы перваго столбца соотвѣтственными постоянными членами данныхъ уравненій.

42. Такимъ же точно образомъ, называя послѣдовательные опредѣлители миноры, соотвѣтствующіе элементамъ 2-го столбца опредѣлителя Δ, буквами $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$, будемъ имѣть:

$$b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + \ldots + b_n B_n = \Delta.$$
$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + \ldots + a_n B_n = 0 ,$$
$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 + \ldots + c_n B_n = 0 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1 B_1 + u_2 B_2 + u_3 B_3 + \ldots + u_n B_n = 0 ,$$

и потому, сложивши почленно данныя уравненія, помноженныя послѣдовательно на эти опредѣлители миноры, получимъ:

$$\Delta y = v_1 B_1 + v_2 B_2 + v_3 B_3 + \ldots + v_n B_n$$

и, слѣдовательно,

$$y = \frac{v_1 B_1 + v_2 B_2 + v_3 B_3 + \ldots + v_n B_n}{\Delta} = \frac{M_y}{\Delta} ,$$

гдѣ M_y есть результатъ замѣны въ опредѣлителѣ Δ элементовъ второго столбца вторыми частями данныхъ уравненій.

Точно также получатся выраженія и для остальныхъ неизвѣстныхъ.

Мы видимъ такимъ образомъ, что каждое неизвѣстное въ системѣ n уравненій первой степени съ n неизвѣстными выражается отношеніемъ, въ которомъ послѣдующій членъ есть опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій, а предыдущій получается какъ результатъ замѣны въ этомъ опредѣлителѣ коэффиціентовъ при опредѣляемомъ неизвѣстномъ соотвѣтствующими постоянными членами.

43. Полагая въ уравненіяхъ (1)

$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots\ldots = v_n = 0\,,$$

будемъ имѣть систему n однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + u_1 t = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots + u_2 t = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots\ldots + u_3 t = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots + u_n t = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ опредѣлители M_x, M_y, ... M_t должны также равняться нулю, то изъ предыдущихъ выраженій неизвѣстныхъ x, y, ... будемъ имѣть:

$$\triangle\, x = \triangle\, y = \triangle\, z = \ldots\ldots = \triangle\, t = 0\,.$$

Это показываетъ, что разсматриваемая система уравненій (2) только тогда удовлетворяется значеніями неизвѣстныхъ, не равными одновременно нулю, когда опредѣлитель $\triangle$ равняется нулю. Равенство

$$\triangle = 0$$

есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ уравненія (2) совмѣстимы, т. е. удовлетворяются всѣ одними и тѣми же величинами неизвѣстныхъ.

Ясно, однако, что, какими бы значеніями неизвѣстныхъ ни удовлетворялось какое-нибудь изъ этихъ уравненій, оно будетъ удовлетворяться и произведеніями этихъ значеній на одну и ту же произвольную величину.

Изъ однородныхъ уравненій не опредѣляются, слѣдовательно, самыя неизвѣстныя, и могутъ быть найдены только отношенія ихъ или величины имъ пропорціональныя.

44. Для нахожденія n величинъ пропорціональныхъ неизвѣстнымъ въ уравненіяхъ (2) достаточно имѣть $(n-1)$ изъ этихъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, если назовемъ опредѣлители миноры, соотвѣтствующіе элементамъ первой строки въ опредѣлителѣ $\triangle$, послѣдовательно чрезъ A_1, B_1, C_1, ... U_1, то будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 + \ldots + u_2 U_1 = 0\,, \\ a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 + \ldots + u_3 U_1 = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n A_1 + b_n B_1 + c_n C_1 + \ldots + u_n U_1 = 0\,, \end{array}$$

ибо первая часть каждаго изъ этихъ равенствъ есть опредѣлитель, въ которомъ элементы двухъ строкъ одинаковы. Эти равенства показываютъ, что величины A_1, B_1, C_1, ... U_1, которыя вовсе не зависятъ отъ коэффиціентовъ перваго изъ уравненій (2), удовлетворяютъ остальнымъ $(n-1)$ изъ нихъ. Слѣдовательно, рѣшенія этихъ $(n-1)$ однородныхъ уравненій будутъ:

$$x = kA_1\,,\ y = kB_1\,, \ldots\ldots\ldots t = kU_1\,,$$

гдѣ k произвольный множитель.

45. Уравненія (1) принимаютъ видъ однородныхъ, если вторыя части ихъ v_1, v_2, ... v_n замѣнимъ чрезъ $-v_1\omega$, $-v_2\omega$, ... $-v_n\omega$ и будемъ разсматривать ω какъ неизвѣстное. Полагая же $\omega = -1$, возвратимся снова къ неоднороднымъ уравненіямъ (1).

Отсюда слѣдуетъ, что условіе совмѣстимости $(n+1)$ неоднородныхъ уравненій съ n неизвѣстными, каковы уравненія

$$\left.\begin{array}{l} a_0x + b_0y + c_0z + \ldots\ldots + u_0t = v_0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots + u_1t = v_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots + u_2t = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots\ldots + u_nt = v_n \end{array}\right\}, \ldots \quad (3)$$

есть то же, какъ и для однородныхъ уравненій съ тѣми же коэффиціентами. Это условіе есть, слѣдовательно, равенство нулю опредѣлителя $(n+1)$-го порядка, составленнаго изъ всѣхъ этихъ коэффиціентовъ, включая и постоянные члены, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_0\,, & b_0\,, & c_0\,, & \ldots & v_0 \\ a_1\,, & b_1\,, & c_1\,, & \ldots & v_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2\,, & \ldots & v_2 \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ a_n\,, & b_n\,, & c_n\,, & \ldots & v_n \end{vmatrix} = 0\,.$$

§ 3. Перемноженіе опредѣлителей.

46. Возьмемъ систему уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = r \\ a_2x + b_2y + c_2z = s \\ a_3x + b_3y + c_3z = t \end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и пусть ихъ постоянные члены r, s, t сами опредѣляются изъ такой же системы уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1r + \beta_1s + \gamma_1t = \delta_1 \\ \alpha_2r + \beta_2s + \gamma_2t = \delta_2 \\ \alpha_3r + \beta_3s + \gamma_3t = \delta_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Подставляя въ эти послѣднія вмѣсто r, s и t ихъ выраженія изъ (1), получимъ систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z = \delta_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = \delta_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z = \delta_3 \end{array}\right\} , \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

гдѣ
$$\begin{array}{l|} A_1 = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 \\ A_2 = a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 \\ A_3 = a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \end{array} \; , \quad \begin{array}{l|} B_1 = a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ B_2 = a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \\ B_3 = a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \end{array} \; ,$$

$$\begin{array}{l|} C_1 = a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ C_2 = a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ C_3 = a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{array} \; .$$

Если положимъ

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = \triangle, \quad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = P, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, \end{vmatrix} = Q,$$

то будемъ имѣть изъ системъ (3) и (2):

$$x = \frac{M_x}{\triangle}, \quad y = \frac{M_y}{\triangle}, \quad z = \frac{M_z}{\triangle} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

и
$$r = \frac{N_r}{Q}, \quad s = \frac{N_s}{Q}, \quad t = \frac{N_t}{Q} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Система же (1), по внесеніи въ нее послѣднихъ выраженій для r, s и t, обратится въ

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = \dfrac{N_r}{Q} \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \dfrac{N_s}{Q} \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = \dfrac{N_t}{Q} \end{array}\right\} .$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ для x, y и z выраженія, въ которыхъ общій знаменатель будетъ, очевидно,

$$P \, . \, Q \, .$$

Такъ какъ эти значенія неизвѣстныхъ суть тѣ же самыя выраженія ихъ чрезъ коэффиціенты уравненій (1) и (2), какъ и представляемыя равенствами (4), то общіе знаменатели въ тѣхъ и другихъ выраженіяхъ должны быть равны, т. е.

$$P \, . \, Q = \triangle$$

или
$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} .$$

Это заключеніе имѣетъ, очевидно, мѣсто при какомъ угодно числѣ неизвѣстныхъ и уравненій системъ (1) и (2). Оно представляетъ правило для перемноженія опредѣлителей, состоящее въ слѣдующемъ.

Произведеніе двухъ опредѣлителей одного и того же порядка есть опредѣлитель того же порядка, элементы котораго суть суммы произведеній элементовъ множителей. Именно, элементъ m-го столбца и n-й строки равенъ суммѣ произведеній элементовъ m-й строки одного множителя на соотвѣтствующіе элементы n-й строки другого.

Примѣръ:

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m, & n \\ p, & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am+bn, & cm+dn \\ ap+bq, & cp+dq \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ въ множителяхъ строки могутъ быть принимаемы за столбцы и обратно, то произведеніе тѣхъ же опредѣлителей равно опредѣлителямъ.

$$\begin{vmatrix} am+cp, & bm+dp \\ an+cq, & bn+dq \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} am+bp, & cm+dp \\ an+bq, & cn+dq \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} am+cn, & bm+dn \\ ap+cq, & bp+dq \end{vmatrix}.$$

47. Если въ какомъ нибудь данномъ опредѣлителѣ замѣнимъ каждый элементъ соотвѣтствующимъ ему опредѣлителемъ миноромъ, то получимъ новый опредѣлитель, который называется *производнымъ* даннаго. Этотъ же послѣдній называется *начальнымъ* по отношенію къ своему производному.

Между двумя такими опредѣлителями существуетъ простая зависимость, которую, на основаніи сказаннаго, легко обнаружить.

Возьмемъ опредѣлитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & u_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & u_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots & u_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & u_n \end{vmatrix} = \triangle .$$

При томъ же обозначенiи его опредѣлителей миноровъ, которое мы употребляли выше, производный опредѣлитель будетъ

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & . & . & . & U_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & . & . & . & U_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & . & . & . & U_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ A_n, & B_n, & C_n, & . & . & . & U_n \end{vmatrix} = \triangle' .$$

Перемножая эти опредѣлители по указанному сейчасъ правилу и замѣчая, что вообще

$$a_k A_k + b_k B_k + c_k C_k + \; . \; . \; . \; . \; + u_k U_k = \triangle$$

и

$$a_k A_l + b_k B_l + c_k C_l + \; . \; . \; . \; . \; + u_k U_l = 0 ,$$

гдѣ указатели k и l какiе угодно, будемъ имѣть:

$$\triangle \cdot \triangle' = \begin{vmatrix} \triangle, & 0, & 0, & . & . & . & . & 0 \\ 0, & \triangle, & 0, & . & . & . & . & 0 \\ 0, & 0, & \triangle, & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & . & . & . & . & \triangle \end{vmatrix}$$

или

$$\triangle \cdot \triangle' = \triangle^n ,$$

или

$$\triangle' = \triangle^{n-1} .$$

И такъ, производный опредѣлитель равняется начальному, возвышенному въ степень единицею низшую его порядка.

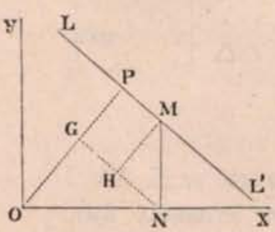
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

§ 1. Уравненіе прямой.

48. Уравненіе всякой линіи представляетъ, какъ сказано выше, зависимость, связывающую координаты какой угодно точки этой линіи съ постоянными величинами, значеніями которыхъ опредѣляется ея видъ и расположеніе относительно системы координатъ. Эти постоянныя, какого бы рода они ни были, называются *параметрами* линіи.

Постараемся найти уравненіе какой нибудь прямой линіи LL' относительно прямоугольной системы XOY (фиг. 16). Для этого опустимъ перпендикуляръ изъ начала координатъ на разсматриваемую прямую и назовемъ длину его чрезъ p, а уголъ, составляемый имъ съ осью OX, чрезъ α. Величинами p и α опредѣляетя положеніе прямой; онѣ суть, слѣдовательно, параметры прямой, и искомое уравненіе должно представлять зависимость между этими величинами и координатами точекъ, лежащихъ на прямой.



Фиг. 16.

Путь M будетъ какая-нибудь точка прямой LL'. Построимъ ея координаты $ON = x$ и $MN = y$ и проведемъ двѣ прямыя NG и MH, изъ которыхъ первая параллельна LL', а вторая перпендикулярна къ ней. Очевидно, что при всякомъ положеніи точки M на прямой LL' должно имѣть мѣсто равенство

$$OG + HM = OP.$$

Но $OP = p$, и кромѣ того изъ треугольниковъ OGN и HMN имѣемъ:

$$OG = ON \cos NOG = x \cos \alpha$$

и

$$HM = MN \sin MNH = y \sin \alpha.$$

Вслѣдствіе этого предыдущее равенство принимаетъ видъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

или

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Такъ какъ это равенство справедливо при всякомъ положенiи точки M на прямой LL' и не можетъ имѣть мѣста при всякомъ другомъ положенiи этой точки, то оно и будетъ искомое уравненiе прямой LL'.

49. Относительно перемѣнныхъ x и y уравненiе (1) есть алгебраическое первой степени. Поэтому, принимая во вниманiе неизмѣняемость степени уравненiя отъ преобразованiя прямолинейныхъ координатъ и замѣчая, что разсматриваемая прямая LL' была взята совершенно произвольно, мы можемъ сдѣлать общее заключенiе: *прямая линiя есть линiя алгебраическая перваго порядка.*

50. Чтобы убѣдиться въ справедливости обратнаго предложенiя, достаточно также ограничиться случаемъ прямоугольной системы координатъ.

Возьмемъ общее уравненiе первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ A, B и C суть какiя угодно дѣйствительныя величины, и постараемся обнаружить, какую линiю оно выражаетъ относительно прямоугольной системы координатъ XOY. Раздѣливъ обѣ части этого уравненiя на $\sqrt{A^2+B^2}$, мы, не измѣняя его геометрическаго значенiя, дадимъ ему видъ

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Такъ какъ теперь коэффицiенты при x и y удовлетворяютъ условiю

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1,$$

то долженъ существовать такой уголъ α, чтобы было

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Кромѣ того должна, очевидно, существовать такая длина p, выраженная въ опредѣленныхъ единицахъ, чтобы было

$$-p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Въ силу этихъ послѣднихъ равенствъ уравненiе (3) является тождественнымъ съ уравненiемъ (1), а потому должно имѣть одинаковое съ нимъ значенiе. Слѣдовательно, какъ это уравненiе, такъ и данное (2) выражаетъ прямую.

И такъ, убѣждаемся, что *всякая линiя перваго порядка есть прямая.*

Всѣ остальныя алгебраическiя линiи, а также и линiи трансцендентныя, вошло въ обычай называть общимъ именемъ *кривыхъ*.

51. Уравненіе (2) называется *общимъ уравненіемъ прямой линіи*. Уравненіе (1) именуется ея *уравненіемъ въ нормальной формѣ*.

Для того, чтобы общее уравненіе прямой, отнесенной къ прямоугольной системѣ координатъ, привести къ нормальной формѣ, нужно только, какъ видно изъ сказаннаго, раздѣлить обѣ его части на квадратный корень изъ суммы квадратовъ двухъ первыхъ коэффиціентовъ.

Въ уравненіи (1) величину p можно всегда считать положительною, т. е. понимать подъ этимъ обозначеніемъ только абсолютное разстояніе прямой отъ начала координатъ. Въ такомъ случаѣ, при различныхъ положеніяхъ прямой, уголъ α долженъ получать различныя значенія отъ 0^0 до 360^0. Если же допустимъ, что p можетъ имѣть оба знака, то достаточно углу α придавать значенія, не превосходящія 180^0. При этомъ величину перпендикуляра OP нужно считать положительною, когда основаніе его P выше оси OX, и отрицательною въ противномъ случаѣ.

52. Въ случаѣ косоугольной системы координатъ общее уравненіе (2) можетъ быть приведено къ виду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

гдѣ p имѣетъ то же значеніе, какъ и въ уравненіи (1), а α и β суть углы, составляемые перпендикуляромъ къ прямой съ осями OX и OY, такъ что, означая уголъ между осями чрезъ ω, будемъ имѣть

$$\alpha + \beta = \omega\,.$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, помножимъ обѣ части уравненія (2) на неопредѣленный множитель M и постараемся выбрать для него такое значеніе, чтобы это уравненіе сдѣлалось тождественнымъ съ уравненіемъ (4), т. е. чтобы было

$$\cos\alpha = MA\,, \qquad \cos\beta = MB\,, \qquad -p = MC\,.$$

Для этого замѣтимъ, что

$$\sin\omega = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

или, возвысивъ въ квадратъ,

$$\sin^2\omega = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\,.$$

Замѣняя же въ двухъ первыхъ членахъ второй части $\sin^2\alpha$ чрезъ $1-\cos^2\alpha$ и $\sin^2\beta$ чрезъ $1-\cos^2\beta$, получимъ

$$\sin^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

или $$\sin^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega\,.$$

Подставивъ сюда на мѣсто $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ ихъ предыдущія выраженія, получимъ

$$\sin^2\omega = M^2(A^2+B^2-2AB\cos\omega)\,,$$

откуда $$M = \frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}\,.$$

И такъ, чтобы общее уравненіе (2), выражающее прямую относительно косоугольной системы координатъ, привести къ виду (4), нужно обѣ его части помножить на

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}.$$

Уравненіе (4), обращающееся въ (1) при $\omega=\frac{\pi}{2}$, называется также *уравненіемъ прямой въ нормальной формѣ*.

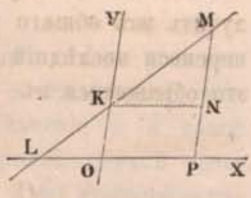
53. Кромѣ разсмотрѣнныхъ видовъ уравненія прямой линіи употребительны еще другіе виды, которые получаются также изъ общаго уравненія (2) посредствомъ простыхъ преобразованій. Такъ, рѣшая уравненіе (2) относительно перемѣннаго y, дадимъ ему видъ:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

или, означая $-\frac{A}{B}$ чрезъ a, а $-\frac{C}{B}$ чрезъ b,

$$y=ax+b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Послѣднее уравненіе равнозначуще съ (2), ибо получается изъ него посредствомъ раздѣленія обѣихъ частей на постоянное B и перенесенія членовъ. Слѣдовательно, оно также выражаетъ какую угодно прямую.



Фиг. 17.

Это есть одинъ изъ наиболѣе употребительныхъ видовъ уравненія прямой. Въ немъ a и b суть ея параметры. Посмотримъ, какое они имѣютъ геометрическое значеніе.

Такъ какъ, положивъ въ уравненіи (5) $x=0$, получимъ $y=b$, то заключаемъ, что b есть ордината той точки прямой, выражаемой уравненіемъ, въ которой она пересѣкается съ осью OY, т. е. $b=OK$ (фиг. 17). Это постоянное называется поэтому *ординатою въ началѣ*.

Что касается другого постояннаго a, то значеніе его обнаруживается слѣдующимъ образомъ. Изъ уравненія (5) имѣемъ

$$a=\frac{y-b}{x}.$$

Но для какой-нибудь точки M, взятой произвольно на прямой,

$$x=OP \quad \text{и} \quad y=MP.$$

Слѣдовательно, для этой точки

$$a=\frac{MP-OK}{OP}=\frac{MP-NP}{KN}=\frac{MN}{KN}.$$

*

Если же обозначимъ углы, которые прямая составляетъ съ осями OX и OY, послѣдовательно чрезъ α и β, то будемъ имѣть изъ треугольника KMN

$$\frac{MN}{KN} = \frac{\sin MKN}{\sin KMN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} .$$

Слѣдовательно,

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\omega - \alpha)} .$$

Такимъ образомъ видимъ, что постоянный коэффиціентъ a есть отношеніе синусовъ угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ. Онъ есть, слѣдовательно, величина угловая, опредѣляющая направленіе прямой, и называется поэтому ея *угловымъ коэффиціентомъ*.

Если система координатъ прямоугольная, то $\sin(\omega - \alpha) = \cos \alpha$ и

$$a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Для того, чтобы коэффиціентъ a имѣлъ какое угодно значеніе и, слѣдовательно, уравненіе (5) представляло какую угодно прямую, углу α могутъ быть приписываемы только положительныя величины, не превышающія 180^0, при чемъ этотъ уголъ измѣряется между положительнымъ направленіемъ оси OX и тою частью прямой, которая выше этой оси.

54. Еще одинъ употребительный видъ уравненія прямой можно получить изъ общаго уравненія (2), раздѣливъ обѣ его части на $-C$ и перенеся послѣдній членъ во вторую часть. Въ такомъ случаѣ уравненіе это обращается въ

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

и, обозначая $-\frac{C}{A}$ чрезъ m, а $-\frac{C}{B}$ чрезъ n, дадимъ ему видъ:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Положимъ, что L и L' суть точки, въ которыхъ прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ, пересѣкаетъ оси OY и OX (фиг. 16). Такъ какъ при $y = 0$ уравненіе (6) обращается въ $\frac{x}{m} = 1$, откуда $x = m$, то заключаемъ, что постоянная величина m есть абсцисса точки L', т. е. отрѣзокъ оси OX между началомъ координатъ и точкою пересѣченія съ прямою. Подобнымъ же образомъ, полагая $x = 0$, получимъ $y = n$, изъ чего убѣждаемся, что постояное n есть ордината точки L, т. е. отрѣзокъ OL. И такъ, постоянные параметры m и n въ уравненіи (6) суть отрѣзки, отсѣкаемые на осяхъ координатъ выражаемою этимъ уравненіемъ прямою. Смотря по расположенію прямой, величины эти могутъ быть какъ положительныя, такъ и отрицательныя.

Уравненіе (6) выведено нами изъ общаго (2) въ предположеніи, что оси координатъ какія угодно. Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ какъ видъ этого уравненія, такъ и значеніе его коэффиціентовъ остаются тѣ же самыя.

55. Уравненіе (6) можетъ быть выведено также изъ уравненія (4) въ нормальной формѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольниковъ OPL' и OPL (фиг. 16) имѣемъ

$$OP = OL' \cos POL' = OL \cos POL\,,$$

откуда, полагая $OL' = m$ и $OL = n$, получимъ

$$\cos POL' = \cos\alpha = \frac{p}{m} \quad \text{и} \quad \cos POL = \cos\beta = \frac{p}{n}\,.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (4) принимаетъ видъ

$$x\frac{p}{m} + y\frac{p}{n} - p = 0\,.$$

Раздѣливъ здѣсь всѣ коэффиціенты на p и перенеся постоянный членъ во вторую часть, мы и получимъ уравненіе (6).

56. Обратимъ вниманіе на случаи, когда одинъ или два изъ коэффиціентовъ общаго уравненія прямой

$$Ax + By + C = 0$$

равняются нулю.

Если $A = 0$, то уравненіе удовлетворяется однимъ только постояннымъ значеніемъ y при неопредѣленномъ значеніи x. Если же $B = 0$, то уравненію удовлетворяетъ одно постоянное значеніе x и какое угодно значеніе y. Это показываетъ, что въ первомъ случаѣ уравненіе выражаетъ прямую, параллельную оси x-овъ, а во второмъ — параллельную оси y-овъ.

Если $C = 0$, то уравненіе обращается въ

$$Ax + By = 0$$

и удовлетворяется при $x = 0$, $y = 0$. Это значитъ, что прямая проходитъ чрезъ начало координатъ.

Если $A = C = 0$, то уравненіе обращается въ $y = 0$ и представляетъ ось x-въ, а при $B = C = 0$ оно обращается въ $x = 0$ и представляетъ ось y-овъ.

Наконецъ, если $A = B = 0$, но C не равняется нулю, то уравненіе становится невозможнымъ при конечныхъ величинахъ x и y. Это показываетъ, что оно не представляетъ никакой прямой, точки которой не безконечно удаленныя (см. стр. 8). Легко видѣть, дѣйствительно, что такое значеніе коэффиціентовъ соотвѣтствуетъ случаю, когда прямая всѣми точками удалена въ безконечность.

Мы положили выше

$$-\frac{C}{A}=m \quad \text{и} \quad -\frac{C}{B}=n,$$

гдѣ m и n суть отрѣзки, отсѣкаемые прямою на осяхъ координатъ. Отсюда видно, что, при данномъ конечномъ значеніи C, отрѣзки эти увеличиваются съ уменьшеніемъ A и B, и дѣлаются безконечно большими, когда $A=B=0$. Въ этомъ случаѣ прямая принимаетъ, слѣдовательно, такое положеніе, въ которомъ она обѣ оси координатъ пересѣкаетъ въ безконечно удаленныхъ точкахъ, а потому и всѣ другія ея точки должны быть также безконечно удаленными. На этомъ основаніи говорятъ, что при $A=B=0$ общее уравненіе представляетъ безконечно удаленную прямую.

§ 2. Задачи на прямыя линіи.

57. Въ предыдущемъ мы показали, что уравненіе всякой прямой можетъ быть представлено въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ

$$\left.\begin{array}{c} Ax+By+C=0 \\ x\cos\alpha+y\cos(\omega-\alpha)-p=0 \\ y=ax+b \\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Въ какомъ бы изъ этихъ видовъ уравненіе ни разсматривалось, прямая, имъ выражаемая, будетъ извѣстною и вполнѣ опредѣленною только тогда, когда имѣютъ извѣстныя и опредѣленныя значенія входящія въ это уравненіе постоянныя. Найти какія-нибудь величины, опредѣляемыя положеніемъ данной прямой, значитъ дать ихъ аналитическія выраженія чрезъ постоянныя, входящія въ уравненіе прямой.

Если же, напротивъ, прямая неизвѣстна и отыскивается по какимъ нибудь условіямъ, то, для опредѣленія ея, мы должны прежде всего выбрать одинъ изъ видовъ (1) представляющаго ее уравненія и затѣмъ найти выраженія его постоянныхъ чрезъ данныя величины, входящія въ условія.

Уравненіе прямой въ каждомъ изъ трехъ послѣднихъ видовъ (1) содержитъ въ себѣ два постоянныхъ или параметра. Это указываетъ на опредѣляемость прямой линіи по двумъ условіямъ.

Что же касается перваго изъ видовъ (1), т. е. общаго уравненія первой степени, то по даннымъ условіямъ, опредѣляющимъ прямую, отыскиваются въ немъ не сами постоянныя A, B, C, а только отношенія двухъ изъ нихъ къ какому нибудь третьему. Это потому, что отъ умноженія уравненія на постоянную величину его значеніе не измѣняется, вслѣдствіе чего прямая опредѣляется не одною какою нибудь системою значеній для коэффиціентовъ A, B, C, но всякою системою величинъ имъ пропорціональныхъ.

Разсмотримъ нѣсколько задачъ, въ которыхъ прямыя линіи представляются данными или искомыми.

58. *Найти уголъ между двумя прямыми, отнесенными къ прямоугольной системѣ координатъ.*

По смыслу задачи должны быть извѣстны уравненія двухъ прямыхъ. Положимъ, что они даны въ нормальной формѣ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$
$$x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p' = 0.$$

Такъ какъ уголъ между двумя прямыми долженъ равняться углу между перпендикулярами, опущенными на нихъ изъ начала координатъ, то, обозначая искомый уголъ буквою φ, будемъ имѣть

$$\varphi = \alpha' - \alpha$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha' \cos \alpha + \sin \alpha' \sin \alpha, \\ \sin \varphi &= \sin \alpha' \cos \alpha - \cos \alpha' \sin \alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу.

59. Если уравненія прямыхъ даны въ общемъ видѣ

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

то, приведя ихъ къ нормальной формѣ посредствомъ раздѣленія послѣдовательно на $\sqrt{A^2+B^2}$ и $\sqrt{A'^2+B'^2}$, будемъ имѣть, какъ видѣли выше (см. стр. 33):

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

и

$$\cos \alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}, \qquad \sin \alpha' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

Подставляя эти величины въ формулы (2), получимъ:

$$\cos \varphi = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{A'^2+B'^2}}, \qquad \sin \varphi = \frac{AB' - BA'}{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{A'^2+B'^2}}, \quad (3)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB' - BA'}{AA' + AB'}.$$

Когда прямыя линіи параллельны между собою, то должно быть $\sin \varphi = 0$ и $\operatorname{tg} \varphi = 0$; когда же онѣ перпендикулярны, то должно быть $\cos \varphi = 0$ и $\operatorname{tg} \varphi = \infty$. Принимая во вниманіе, что величины A, B, A', B', какъ коэффиціенты данныхъ уравненій, не могутъ быть безконечно большими, убѣждаемся, что условіе параллельности двухъ прямыхъ, выраженныхъ общими уравненіями, есть

$$AB' - BA' = 0\,,$$

а условіе перпендикулярности ихъ

$$AA' + BB' = 0\,.$$

Первое изъ этихъ условій даетъ

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}\,.$$

Слѣдовательно, двѣ прямыя параллельны, когда коэффиціенты при соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ въ ихъ уравненіяхъ пропорціональны.

60. Если уравненія прямыхъ даны въ видѣ

$$y = ax + b \qquad \text{и} \qquad y = a'x + b'\,,$$

то уголъ между ними долженъ опредѣляться угловыми коэффиціентами a и a'. Дѣйствительно, обозначая чрезъ λ и λ' углы, образуемые прямыми съ осью OX, будемъ имѣть, какъ извѣстно:

$$\operatorname{tg}\lambda = a \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg}\lambda' = a'\,;$$

и такъ какъ $\varphi = \lambda' - \lambda$, то и получаемъ

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\lambda' - \lambda) = \frac{\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda' \operatorname{tg}\lambda} = \frac{a' - a}{1 + aa'}\,.$$

Слѣдовательно, условіе параллельности прямыхъ въ этомъ случаѣ будетъ

$$a = a'\,,$$

а условіе перпендикулярности

$$1 + aa' = 0 \qquad \text{или} \qquad aa' = -1\,.$$

61. *Найти уголъ между двумя прямыми, отнесенными къ косоугольной системѣ координатъ.*

Если уравненія прямыхъ даны въ формѣ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

и

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p' = 0\,,$$

гдѣ, какъ мы знаемъ, $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega$, то искомый уголъ φ опредѣляется, какъ и въ предыдущей задачѣ, по формуламъ (2). Если же эти уравненія даны въ общемъ видѣ, то приведеніе ихъ къ предыдущему виду достигается, какъ мы видѣли (см. стр. 35), помноженіемъ ихъ послѣдовательно на

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}\,,$$

вслѣдствіе чего будемъ имѣть:

$$\cos\alpha = \frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha' = \frac{A'\sin\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}\,,$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{B - A\cos\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \quad \text{и} \quad \sin\alpha' = \frac{B' - A'\cos\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}},$$

Подставляя эти выраженія въ формулы (2), получимъ:

$$\cos\varphi = \frac{(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}\,.\,\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}$$

и $$\sin\varphi = \frac{(AB' - BA')\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}\,.\,\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}},$$

откуда $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(AB' - BA')\sin\omega}{(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega},$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу. При $\omega = \frac{\pi}{2}$ онѣ обращаются въ формулы (3).

Изъ послѣднихъ формулъ видимъ, что условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ, отнесенныхъ къ косоугольной системѣ координатъ, есть

$$(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega = 0\,;$$

оно можетъ быть представлено такъ:

$$\begin{vmatrix} 1\,, & \cos\omega\,, & A \\ \cos\omega\,, & 1\,, & B \\ A'\,, & B'\,, & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Условіе же параллельности есть то же самое, какъ и въ предыдущемъ случаѣ:

$$AB' - BA' = 0\,;$$

оно не зависитъ, слѣдовательно, отъ угла между осями координатъ.

62. *Найти точку пересѣченія двухъ прямыхъ, данныхъ общими уравненіями.*

Координаты искомой точки, принадлежащей обѣимъ прямымъ, должны удовлетворять одновременно обоимъ даннымъ уравненіямъ

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A'x + B'y + C' = 0\,.$$

Слѣдовательно, вопросъ сводится къ совмѣстному рѣшенію этихъ двухъ уравненій, что, какъ извѣстно, даетъ

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}\,, \qquad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу.

Если данныя прямыя параллельны между собою, то общій знаменатель въ выраженіяхъ для x и y есть нуль, и потому получимъ $x = \infty$ и $y = \infty$.

Такъ какъ точку, координаты которой суть безконечно большія величины, называютъ безконечно удаленною, то можно сказать, что двѣ параллельныя прямыя пересѣкаются въ безконечно удаленной точкѣ.

Если формулы (4) даютъ для x и y неопредѣленныя выраженія, то данныя прямыя совпадаютъ. Дѣйствительно, для того, чтобы было $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$, нужно имѣть:

$$AB'-BA'=0\,,\quad BC'-CB'=0\,,\quad CA'-AC'=0\,.$$

Послѣднее изъ этихъ равенствъ есть необходимое слѣдствіе двухъ первыхъ, ибо изъ нихъ находимъ

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}\,.$$

Отсюда видимъ, что второе изъ данныхъ уравненій получается изъ перваго умноженіемъ всѣхъ его коэффиціентовъ на постоянную величину $M=\frac{A'}{A}$, а это и значитъ, что оба уравненія выражаютъ одну и ту же прямую.

63. *Найти условіе, при которомъ три прямыя, данныя общими уравненіями, проходятъ чрезъ одну точку.*

Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} Ax+By+C&=0\,,\\ A'x+B'y+C'&=0\,,\\ A''x+B''y+C''&=0\,. \end{aligned}$$

Если существуетъ точка, принадлежащая всѣмъ тремъ прямымъ, то координаты ея должны удовлетворять всѣмъ тремъ уравненіямъ. Выраженія (4) представляютъ рѣшенія двухъ первыхъ уравненій; подставляя ихъ въ третье, мы и получимъ искомое условіе:

$$A''\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}+B''\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}+C''=0$$

или, по умноженіи обѣихъ частей на $AB'-BA'$,

$$A''(BC'-CB')+B''(CA'-AC')+C''(AB'-BA')=0\,,$$

что можно представить еще такъ:

$$\begin{vmatrix} A\,, & B\,, & C \\ A'\,, & B'\,, & C' \\ A''\,, & B''\,, & C'' \end{vmatrix}=0\,.$$

Искомое условіе есть, такимъ образомъ, результатъ исключенія перемѣнныхъ x и y изъ трехъ данныхъ уравненій.

64. *Найти уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.*

Пусть данныя точки будутъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Возьмемъ уравненіе прямой въ формѣ

$$y = ax + b.$$

При неопредѣленныхъ a и b оно представляетъ какую угодно прямую на плоскости, но если эта прямая проходитъ чрезъ первую изъ данныхъ точекъ, то должно имѣть мѣсто тождество

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Вычитая почленно это тождество изъ уравненія прямой, дадимъ ему видъ

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Каково бы ни было значеніе углового коэффиціента a, это послѣднее уравненіе удовлетворяется координатами x_1, y_1 и, слѣдовательно, при неопредѣленномъ a, оно выражаетъ какую угодно прямую, проходящую чрезъ первую изъ данныхъ точекъ. Если же эта прямая проходитъ и чрезъ вторую данную точку, то оно должно удовлетворяться и координатами x_2, y_2, т. е. должно имѣть мѣсто тождество

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Раздѣливъ почленно послѣднее уравненіе на это тождество, получимъ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

уравненіе, которое кромѣ перемѣнныхъ x и y содержитъ только координаты данныхъ точекъ, и такъ какъ оно удовлетворяется этими координатами, то и есть искомое.

Уничтожая въ немъ знаменателя, дадимъ ему видъ

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

65. Можно получить тотъ же результатъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ общее уравненіе первой степени

$$Ax + By + C = 0.$$

Если оно представляетъ искомую прямую, то должны имѣть мѣсто два тождества:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

откуда, какъ изъ двухъ однородныхъ уравненій съ тремя неизвѣстными A, B, C (см. стр. 27 и 28), находимъ:

$$\frac{A}{y_1 - y_2} = \frac{B}{x_2 - x_1} = \frac{C}{x_1y_2 - y_1x_2},$$

вслѣдствіе чего общее уравненіе и принимаетъ видъ (6).

Искомое уравненіе получается, слѣдовательно, посредствомъ исключенія коэффиціентовъ A, B, C изъ общаго уравненія прямой и результатовъ подстановки въ него на мѣсто перемѣнныхъ x и y координатъ данныхъ точекъ. Его можно представить еще такимъ образомъ

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & 1 \\ x_1\,, & y_1\,, & 1 \\ x_2\,, & y_2\,, & 1 \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

66. *Найти условіе, при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой.*

Пусть данныя точки будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Прямая, проходящая чрезъ двѣ первыя изъ нихъ, выражается уравненіемъ (6) или (7). Координаты третьей точки, какъ лежащей на той же прямой, должны удовлетворять этому уравненію, т. е. должно быть:

$$(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + x_1y_2 - y_1x_2 = 0\,,$$

или

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0\,,$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1\,, & y_1\,, & 1 \\ x_2\,, & y_2\,, & 1 \\ x_3\,, & y_3\,, & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Это и есть искомое условіе.

67. *Найти прямую, проходящую чрезъ данную точку и параллельную данной прямой.*

Пусть данная точка есть (x_1, y_1) и уравненіе прямой дано въ видѣ

$$y = ax + b\,.$$

Всѣ прямыя линіи, проходящія чрезъ точку (x_1, y_1), выражаются, какъ мы видѣли, уравненіемъ

$$y - y_1 = m(x - x_1)\,,$$

гдѣ m есть неопредѣленный угловой коэффиціентъ. Вслѣдствіе же параллельности искомой прямой съ данной должно быть

$$m = a\,,$$

откуда и заключаемъ, что уравненіе искомой прямой есть

$$y - y_1 = a\,(x - x_1).$$

Если уравненіе данной прямой разсматривается въ общемъ видѣ

$$Ax + By + C = 0\,,$$

то допускаемъ, что и искомая прямая выражается такимъ же уравненіемъ

$$A'x + B'y + C' = 0\,.$$

Такъ какъ эта прямая проходитъ, по условію, чрезъ точку (x_1, y_1), то имѣемъ тождество

$$A'x_1 + B'y_1 + C' = 0\,,$$

вслѣдствіе котораго уравненіе искомой прямой принимаетъ видъ

$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) = 0\,.$$

При неопредѣленныхъ A' и B' это есть уравненіе какой угодно прямой, проходящей чрезъ точку (x_1, y_1). Изъ условія же параллельности

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = k$$

имѣемъ:

$$A' = Ak \quad \text{и} \quad B' = Bk.$$

Внеся эти величины въ предыдущее уравненіе и раздѣливъ всѣ его члены на постоянное k, мы и получимъ для искомой прямой уравненіе:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

68. *Найти прямую, проходящую черезъ данную точку и перпендикулярную къ данной прямой.*

Всякая прямая, проходящая черезъ данную точку (x_1, y_1), выражается, какъ мы сейчасъ видѣли, уравненіемъ

$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) = 0.$$

Условіе же перпендикулярности этой прямой съ прямой, данной общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0,$$

есть

$$AA' + BB' - (AB' + BA') \cos\omega = 0,$$

или

$$A'(A - B\cos\omega) + B'(B - A\cos\omega) = 0,$$

или

$$\frac{A'}{B - A\cos\omega} = \frac{B'}{B\cos\omega - A} = k,$$

откуда $\quad A' = k(B - A\cos\omega) \quad$ и $\quad B' = k(B\cos\omega - A).$

Вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе, по раздѣленіи обѣихъ его частей на k, принимаетъ видъ

$$(B - A\cos\omega)(x - x_1) + (B\cos\omega - A)(y - y_1) = 0,$$

въ которомъ оно и выражаетъ искомую прямую.

Если система координатъ прямоугольная, то $\cos\omega = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, и потому уравненіе искомой прямой будетъ

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0,$$

или

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}.$$

69. Двѣ послѣднія задачи представляютъ частные случаи слѣдующей. *Найти прямую, проходящую чрезъ данную точку и составляющую съ данной прямой данный уголъ.*

Если уравненіе данной прямой есть

$$Ax + By + C = 0,$$

а искомой $$A'x + B'y + C' = 0,$$

то, называя данный уголъ буквою φ, будемъ имѣть (см. стр. 41):

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(AB' - BA')\sin\omega}{(AA' + BB') - (AB' + BA')\cos\omega}.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{A'}{A\sin(\omega + \varphi) - B\sin\varphi} = \frac{B'}{A\sin\varphi + B\sin(\omega - \varphi)}.$$

Вслѣдствіе того, что искомая прямая проходитъ чрезъ данную точку (x_1, y_1), уравненіе ея должно быть

$$A'(x - x_1) + B'(y - y_1) = 0;$$

на основаніи же послѣдняго равенства оно обращается въ

$$[A\sin(\omega + \varphi) - B\sin\varphi](x - x_1) + [A\sin\varphi + B\sin(\omega - \varphi)](y - y_1) = 0.$$

Полагая здѣсь $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получимъ рѣшенія двухъ предыдущихъ задачъ.

70. *Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.*

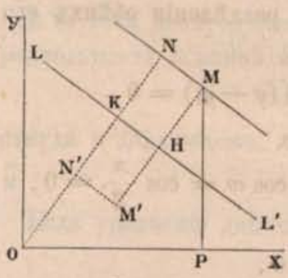
Положимъ, что данная прямая LL' отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ (фиг. 18) и уравненіе ея въ нормальной формѣ есть

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Пусть кромѣ того координаты данной точки M будутъ x_1, y_1. Проведя чрезъ нее прямую MN параллельную данной, будемъ имѣть, что уравненіе ея, долженствующее отличаться отъ уравненія данной только постояннымъ членомъ, есть

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p' = 0,$$

гдѣ p' есть длина перпендикуляра ON на эту прямую изъ начала координатъ.



Фиг. 18.

Если данная точка M находится по другую сторону отъ данной прямой, нежели начало координатъ, то, называя искомую длину перпендикуляра изъ M на LL' буквою l, будемъ имѣть

$$l = MH = NK = ON - OK = (p' - p).$$

Если же данная точка находится по ту же сторону отъ данной прямой, какъ и начало координатъ, какова, напр., точка M', то искомая длина будетъ

$$l = M'H - N'K = OK - ON' = (p - p') = -(p' - p).$$

Слѣдовательно, имѣемъ вообще

$$l=\pm(p'-p).$$

Здѣсь величина p' неизвѣстна. Чтобы найти ее, замѣтимъ, что координаты точки M должны удовлетворять уравненію прямой MN, чрезъ нее проходящей, т. е. должно быть:

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p' = 0,$$

откуда

$$p' = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha.$$

Подставивъ эту величину въ предыдущее выраженіе для l, получимъ

$$l=\pm(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

что и представляетъ рѣшеніе задачи.

71. Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ случаѣ, когда уравненіе прямой дается въ нормальной формѣ, длина перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на эту прямую, опредѣляется какъ величина, которую получаетъ первая часть даннаго уравненія при подстановкѣ въ него на мѣсто перемѣнныхъ x и y координатъ данной точки. При этомъ величина эта должна быть взята съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, смотря по тому, будетъ ли данная точка лежать по другую сторону отъ данной прямой, нежели начало координатъ, или по ту же самую.

Очевидно, что это заключеніе справедливо и тогда, когда система координатъ косоугольная, только въ этомъ случаѣ формула (8) измѣняется въ слѣдующую:

$$l=\pm(x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p)$$

или

$$l=\pm[x_1 \cos\alpha + y_1 \cos(\omega-\alpha) - p] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Если уравненіе прямой дано въ общемъ видѣ, то, чтобы рѣшить вопросъ, нужно только привести это уравненіе къ нормальной формѣ и затѣмъ уже приложить къ нему указанное сейчасъ правило. Слѣдовательно, предполагая, что уравненіе прямой есть

$$Ax + By + C = 0,$$

будемъ имѣть, что искомая длина перпендикуляра въ случаѣ прямоугольной системы координатъ будетъ

$$l=\pm\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

а въ случаѣ косоугольной системы координатъ

$$l=\pm\frac{(Ax_1 + By_1 + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

72. *Найти уравненіе прямой, дѣлящей пополамъ уголъ между двумя данными прямыми.*

Каждая точка искомой прямой находится на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ обѣихъ данныхъ прямыхъ; поэтому, полагая, что эти послѣднія выражены уравненіями въ нормальной формѣ

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$$

и

$$x \cos\alpha' + y \cos\beta' - p' = 0\,,$$

будемъ имѣть, что зависимость между координатами любой точки искомой прямой есть

$$(x \cos\alpha + y \cos\beta - p) = \pm (x \cos\alpha' + y \cos\beta' - p')\,,$$

что и будетъ ея уравненіемъ.

Двойной знакъ второй части соотвѣтствуетъ двумъ смежнымъ угламъ, образуемымъ данными прямыми.

Когда данныя прямыя выражены общими уравненіями

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A'x + B'y + C' = 0\,,$$

то, согласно сказанному въ предыдущемъ, уравненіе искомой прямой будетъ

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}\,.$$

Въ частности уравненія $x - y = 0$ и $x + y = 0$ представляютъ прямыя, дѣлящія пополамъ углы между осями координатъ.

73. *Найти площадь треугольника по координатамъ его вершинъ.*

Пусть вершины треугольника будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Принимая сторону, соединяющую двѣ первыя, за основаніе и называя длину ея черезъ b, будемъ имѣть, что уравненіе этой прямой есть (см. стр. 43)

$$(y_1 - y_2)\,x - (x_1 - x_2)\,y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0\,,$$

а длина

$$b = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2\,(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2)\cos\omega}\,.$$

Слѣдовательно, высота h этого треугольника, т. е. длина перпендикуляра изъ вершины (x_3, y_3) на противоположную сторону, опредѣлится формулой

$$h = \frac{[(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)]\sin\omega}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2)\cos\omega}}\,.$$

Поэтому, если обозначимъ искомую площадь треугольника чрезъ $\triangle$, то будемъ имѣть:

$$2\triangle = b.h = [(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)]\sin\omega\,.$$

Въ случаѣ же прямоугольной системы координатъ

$$2\triangle = [(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1y_2 - y_1x_2)],$$

откуда $$\triangle = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

или $$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что условіе, при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой, выражаетъ, что площадь треугольника, для котораго эти три точки суть вершины, равняется нулю.

74. *Найти площадь треугольника по уравненіямъ его сторонъ.*

Пусть уравненія данныхъ сторонъ будутъ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Если назовемъ координаты вершинъ, противолежащихъ этимъ сторонамъ, послѣдовательно чрезъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то будемъ имѣть, рѣшая совмѣстно каждыя два уравненія:

$$x_1 = \frac{B_2C_3 - C_2B_3}{A_2B_3 - B_2A_3}, \quad x_2 = \frac{B_3C_1 - C_3B_1}{A_3B_1 - B_3A_1}, \quad x_3 = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - B_1A_2},$$

$$y_1 = \frac{C_2A_3 - A_2C_3}{A_2B_3 - B_2A_3}, \quad y_2 = \frac{C_3A_1 - A_3C_1}{A_3B_1 - B_3A_1}, \quad y_3 = \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2},$$

Внеся эти выраженія въ формулу (12), рѣшающую предыдущую задачу, мы и получимъ слѣдующее рѣшеніе настоящей:

$$2\triangle = \begin{cases} \dfrac{B_2C_3 - C_2B_3}{A_2B_3 - B_2A_3}\left(\dfrac{C_3A_1 - A_3C_1}{A_3B_1 - B_3A_1} - \dfrac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}\right) + \\ + \dfrac{B_3C_1 - C_3B_1}{A_3B_1 - B_3A_1}\left(\dfrac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2} - \dfrac{C_2A_3 - A_2C_3}{A_2B_3 - B_2A_3}\right) + \\ + \dfrac{B_1C_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - B_1A_2}\left(\dfrac{C_2A_3 - A_2C_3}{A_2B_3 - B_2A_3} - \dfrac{C_3A_1 - A_3C_1}{A_3B_1 - B_3A_1}\right). \end{cases}$$

75. Это рѣшеніе можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ чрезъ R опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ трехъ данныхъ уравненій, т. е. положимъ

$$R = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, \\ A_3, & B_3, & C_3, \end{vmatrix}.$$

Числители и знаменатели въ предыдущихъ выраженіяхъ для координатъ вершинъ треугольника суть опредѣлители миноры по отношенію къ опредѣлителю R. Называя ихъ соотвѣтственнымъ образомъ чрезъ α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, будемъ имѣть изъ предыдущаго

$$2\triangle = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2} - \frac{\beta_3}{\gamma_3}\right) + \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) + \frac{\alpha_3}{\gamma_3}\left(\frac{\beta_1}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\gamma_2}\right)$$

или, по приведеніи къ одному знаменателю,

$$2\triangle = \frac{\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}.$$

Числитель этой послѣдней дроби есть опредѣлитель производный относительно R, а потому, какъ мы знаемъ (см. стр. 31), равняется его квадрату. Слѣдовательно,

$$2\triangle = \frac{R^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}$$

или

$$2\triangle = \frac{[A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_2) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)]^2}{(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_1 - A_1B_3)}.$$

76. *Найти отношеніе, въ которомъ разстояніе между двумя данными точками дѣлится данною прямою.*

Пусть координаты данныхъ точекъ будутъ

$$x_1,\ y_1 \quad \text{и} \quad x_2,\ y_2$$

и уравненіе данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Искомое отношеніе равняется, очевидно, отношенію перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данныхъ точекъ на данную прямую. Но въ томъ случаѣ, когда данныя точки находятся по разныя стороны отъ данной прямой, эти перпендикуляры имѣютъ различныя направленія, между тѣмъ какъ въ этомъ именно случаѣ искомое отношеніе должно быть положительнымъ (см. стр. 7). Въ противномъ же случаѣ это отношеніе есть величина отрицательная, а перпендикуляры имѣютъ одинаковыя направленія. Слѣдовательно, полагая, что искомое отношеніе есть $\frac{m}{n}$, и называя длины перпендикуляровъ изъ данныхъ точекъ на данную прямую чрезъ d_1 и d_2, будемъ имѣть вообще

$$\frac{m}{n} = -\frac{d_1}{d_2},$$

но $$d_1 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} \quad \text{и} \quad d_1 = \frac{(Ax_2 + By_2 + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}$$

и потому находимъ

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

77. Тотъ же результатъ можно получить слѣдующимъ образомъ.

Называя чрезъ x и y координаты точки пересѣченія данной прямой съ прямой, соединяющей данныя точки, и полагая, что искомое отношеніе есть $\frac{m}{n}$, будемъ, какъ извѣстно, имѣть

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \quad \text{и} \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}.$$

Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію данной прямой, то

$$A\frac{nx_1 + mx_2}{m+n} + B\frac{ny_1 + my_2}{m+n} + C = 0,$$

откуда $\quad (Ax_1 + By_1 + C)\,n + (Ax_2 + By_2 + C)\,m = 0$

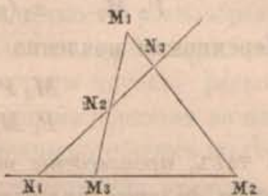
и слѣдовательно

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

78. Положимъ, что мы имѣемъ треугольникъ $M_1 M_2 M_3$, вершины котораго опредѣляются координатами: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), и пусть нѣкоторая прямая, выражаемая уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0,$$

пересѣкаетъ стороны этого треугольника въ точкахъ N_1, N_2, N_3 (фиг. 19). На основаніи предыдущаго будемъ имѣть:



Фиг. 19.

$$\frac{M_1 N_3}{N_3 M_2} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$$

$$\frac{M_2 N_1}{N_1 M_3} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_3 + By_3 + C}$$

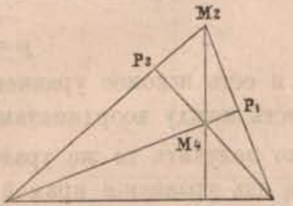
$$\frac{M_3 N_2}{N_2 M_1} = -\frac{Ax_3 + By_3 + C}{Ax_1 + By_1 + C}.$$

Перемноживъ почленно эти три равенства, получимъ

$$\frac{M_1 N_3}{N_3 M_2} \cdot \frac{M_2 N_1}{N_1 M_3} \cdot \frac{M_3 N_2}{N_2 M_1} = -1.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *произведеніе трехъ отношеній, въ которыхъ произвольная прямая дѣлитъ стороны треугольника, равняется отрицательной единицѣ* [1]).

79. Соединимъ прямыми линіями вершины треугольника $M_1 M_2 M_3$ съ какою нибудь точкою M_4 и назовемъ послѣдовательно чрезъ P_1, P_2, P_3 точки, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаютъ стороны треугольника (Фиг. 20). Полагая, что координаты точки M_4 суть x_4 и y_4, будемъ имѣть, что прямая $M_1 P_1$ выражается уравненіемъ: $(y_1 - y_4)\,x - (x_1 - x_4)\,y + (x_1 y_4 - y_1 x_4) = 0$.



Фиг. 20.

[1]) Это предложеніе было извѣстно еще въ древности; его называютъ теоремой Менелая (I в. по Р. Х.).

Поэтому находимъ, что

$$\frac{M_2 P_1}{P_1 M_3} = -\frac{(y_1 - y_4) x_2 - (x_1 - x_4) y_2 + (x_1 y_4 - y_1 x_4)}{(y_1 - y_4) x_3 - (x_1 - x_4) y_3 + (x_1 y_4 - y_1 x_4)}$$

или

$$\frac{M_2 P_1}{P_1 M_3} = \frac{x_1 (y_2 - y_4) + x_2 (y_4 - y_1) + x_4 (y_1 - y_2)}{x_1 (y_4 - y_3) + x_4 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_4)}.$$

Точно такъ же, составивши уравненія прямыхъ $M_2 P_2$ и $M_3 P_3$, получимъ равенства:

$$\frac{M_3 P_2}{P_2 M_1} = \frac{x_2 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_2 - y_3)}{x_1 (y_2 - y_4) + x_2 (y_4 - y_1) + x_4 (y_1 - y_2)}$$

и

$$\frac{M_1 P_3}{P_3 M_2} = \frac{x_1 (y_4 - y_3) + x_4 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_4)}{x_2 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_2 - y_3)}.$$

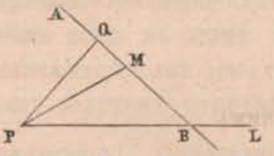
Перемножая почленно послѣднія три равенства, получимъ

$$\frac{M_2 P_1}{P_1 M_3} \cdot \frac{M_3 P_2}{P_2 M_1} \cdot \frac{M_1 P_3}{P_3 M_2} = 1 .$$

И такъ, *произведеніе трехъ отношеній, въ которыхъ стороны треугольника дѣлятся прямыми, соединяющими его вершины съ произвольною точкою, равняется положительной единицѣ* [1]).

80. *Найти уравненіе прямой линіи въ полярныхъ координатахъ.*

Пусть разсматриваемая прямая есть AB (фиг. 21). Назовемъ черезъ p длину перпендикуляра PQ, опущеннаго на эту прямую изъ полюса, и черезъ α уголъ QPL, составляемый имъ съ полярною осью PL. Величинами α и p положеніе прямой AB опредѣляется вполнѣ, и потому ихъ можно принять за постоянные параметры, входящіе въ искомое уравненіе.



Фиг. 21.

Называя чрезъ r и φ координаты какой-нибудь точки M, принадлежащей прямой AB, будемъ имѣть изъ треугольника PMQ

$$PQ = PM \cos MPQ = PM \cos (LPQ - LPM)$$

или

$$p = r \cos (\alpha - \varphi) .$$

Это и есть искомое уравненіе, потому что оно выражаетъ общую зависимость между координатами любой точки прямой.

Легко получить то же уравненіе посредствомъ преобразованія координатъ изъ уравненія прямой въ нормальной формѣ относительно прямоугольной системы. Въ самомъ дѣлѣ, пользуясь формулами для преобразованія координатъ (см. стр. 14)

$$x = r \cos \varphi , \; y = r \sin \varphi ,$$

1) Это предложеніе извѣстно подъ названіемъ теоремы Чевы (1678).

будемъ имѣть, что уравненіе въ нормальной формѣ

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

обратится въ

$$r\cos\alpha\cos\varphi + r\sin\alpha\sin\varphi - p = 0\,,$$

откуда

$$p = r(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) = r\cos(\alpha - \varphi)\,.$$

§ 3. Прямая линія, какъ геометрическое мѣсто.

81. Относительное расположеніе точекъ на плоскости опредѣляется обыкновенно такъ называемыми *геометрическими условіями.* Координаты и уравненія представляютъ только средство выражать эти условія аналитически.

Геометрическія условія могутъ быть до безконечности разнообразны. Въ тѣхъ случаяхъ, когда они не достаточны для полнаго опредѣленія точки, ими могутъ быть выдѣляемы цѣлыя системы точекъ, расположенныхъ въ безконечномъ множествѣ опредѣленнымъ образомъ на плоскости. Совокупность положеній точекъ, подчиненныхъ общимъ выдѣляющимъ ихъ условіямъ, принято называть *геометрическимъ мѣстомъ.*

Если геометрическое мѣсто представляетъ непрерывный рядъ точекъ или линію, то оно должно выражаться уравненіемъ. Найти такое геометрическое мѣсто по даннымъ условіямъ значитъ въ Аналитической Геометріи составить уравненіе, которому удовлетворяютъ всѣ точки этого геометрическаго мѣста, т. е. уравненіе этой линіи.

Вслѣдствіе разнообразія геометрическихъ условій одна и та же линія можетъ быть геометрическимъ мѣстомъ, опредѣляемымъ различными условіями. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ геометрическое мѣсто, опредѣляемое данными условіями, есть прямая линія.

82. *Дано основаніе треугольника по величинѣ и положенію и разность квадратовъ двухъ другихъ сторонъ; найти геометрическое мѣсто вершины, противолежащей основанію.*

Примемъ основаніе PQ (фиг. 22) за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ его средины, за ось ординатъ, и назовемъ чрезъ x и y координаты вершины M относительно этихъ осей, а чрезъ $2a$ абсолютную величину основанія. Обозначая кромѣ того чрезъ k^2 данную разность квадратовъ сторонъ, будемъ имѣть по условію

Фиг. 22.

$$MP^2 - MQ^2 = k^2\,.$$

Но, какъ извѣстно (стр. 5),

$$MP^2 = (x+a)^2 + y^2$$

и

$$MQ^2 = (x-a)^2 + y^2\,.$$

Слѣдовательно,

$$(x+a)^2-(x-a)^2=k^2$$

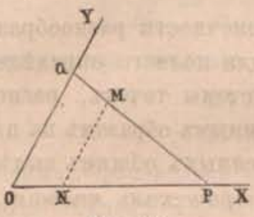
или, по раскрытіи скобокъ и приведеніи,

$$4ax-k^2=0\,.$$

Отсюда видимъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая, перпендикулярная къ основанію треугольника.

83. *Данъ уголъ треугольника по величинѣ и положенію и сумма двухъ прилежащихъ ему сторонъ; найти геометрическое мѣсто точки, дѣлящей третью сторону въ данномъ отношеніи.*

Пусть данное отношеніе есть $\frac{m}{n}$. Принимая стороны даннаго угла OP и OQ (фиг. 23) за оси координатъ и обозначая чрезъ x и y координаты точки M искомаго геометрическаго мѣста, будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ OPQ и NPM:



Фиг. 23.

$$\frac{OP}{x}=\frac{PQ}{MQ} \quad \text{и} \quad \frac{OQ}{y}=\frac{PQ}{PM}.$$

Но по условію

$$\frac{PM}{MQ}=\frac{m}{n},$$

откуда

$$\frac{PQ}{MQ}=\frac{m+n}{n} \quad \text{и} \quad \frac{PQ}{PM}=\frac{m+n}{m}$$

и слѣдовательно,

$$OP=(m+n)\frac{x}{n} \quad \text{и} \quad OQ=(m+n)\frac{y}{m}.$$

Называя же данную сумму сторонъ OP и OQ буквою s, найдемъ по сложеніи послѣднихъ равенствъ:

$$s=(m+n)\left(\frac{x}{n}+\frac{y}{m}\right)$$

или

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=\frac{s}{m+n}.$$

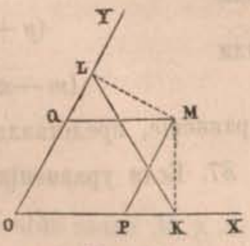
Это и есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

84. *Даны двѣ прямыя, образующія извѣстный уголъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія перпендикуляровъ къ нимъ при условіи, что сумма или разность разстояній этихъ перпендикуляровъ отъ вершины даннаго угла имѣетъ данную величину.*

По условію должно быть (фиг. 24)

$$OK\pm OL=a\,,$$

гдѣ a есть данное постоянное количество. Если двѣ данныя прямыя примемъ за оси координатъ и назовемъ уголъ между ними буквою ω, то, обозначая чрезъ x и y координаты точки M искомаго геометрическаго мѣста, будемъ имѣть



Фиг. 24.

$$OK = OP + PK = x + y\cos\omega$$

и

$$OL = OQ + QL = y + x\cos\omega\,.$$

Слѣдовательно,

$$(x + y\cos\omega) \pm (y + x\cos\omega) = a$$

или

$$(1 \pm \cos\omega)\,x + y\,(\cos\omega \pm 1) = a\,.$$

Это уравненіе включаетъ въ себѣ два слѣдующія:

$$(1 + \cos\omega)(x + y) = a \quad \text{и} \quad (1 - \cos\omega)(x - y) = a\,.$$

Искомое геометрическое мѣсто есть, слѣдовательно, прямая, параллельная одному изъ биссектровъ даннаго угла.

85. *Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ при условіи, что прямая, соединяющая ихъ основанія, имѣетъ данное направленіе.*

Направленіе прямой KL (фиг. 24) опредѣляется ея угловымъ коэффиціентомъ, который, какъ извѣстно, равняется отношенію разстояній OL и OK. Принимая эту величину за извѣстную и обозначая буквою m, будемъ имѣть:

$$OL = m\,OK,$$

или

$$(y + x\cos\omega) = m\,(x + y\cos\omega)\,,$$

или

$$(\cos\omega - m)\,x + (1 - m\cos\omega)\,y = 0\,,$$

откуда видимъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая, проходящая чрезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ.

86. *Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ въ предположеніи, что средина разстоянія между ихъ основаніями находится на данной прямой.*

Пусть уравненіе данной прямой есть

$$y = mx + n.$$

Координаты средины разстоянія KL суть

$$x = \frac{OK}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{OL}{2}\,.$$

Такъ какъ, по условію, онѣ должны удовлетворять данному уравненію, то будемъ имѣть, умноживъ обѣ его части на 2,

$$OL = m \cdot OK + 2n,$$

или

$$(y + x\cos\omega) = m(x + y\cos\omega) + 2n,$$

или

$$(m - \cos\omega)x + (m\cos\omega - 1)y + 2n = 0,$$

уравненіе, представляющее также прямую.

87. Если уравненія двухъ какихъ-нибудь линій

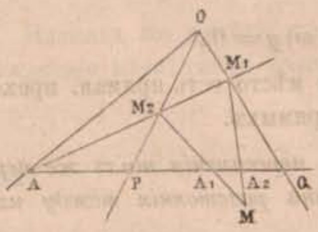
$$f(x, y, a) = 0 \quad \text{и} \quad F(x, y, a) = 0$$

содержатъ одинъ и тотъ же неопредѣленный параметръ a, то точки пересѣченія ихъ, имѣющія опредѣленное положеніе при всякомъ частномъ значеніи этого параметра, будутъ перемѣщаться при его измѣненіи. Найти геометрическое мѣсто этихъ точекъ значитъ составить уравненіе, которому удовлетворяли бы всѣ тѣ значенія x и y, которыми удовлетворяются совмѣстно уравненія обѣихъ линій при какомъ угодно значеніи параметра a. Очевидно, что этимъ свойствомъ обладаетъ уравненіе, получающееся посредствомъ исключенія параметра a изъ уравненій обѣихъ линій.

Это замѣчаніе весьма часто примѣняется съ пользою къ отысканію геометрическихъ мѣстъ. Въ слѣдующихъ примѣрахъ мы приложимъ его къ нахожденію геометрическихъ мѣстъ пересѣченія перемѣнныхъ прямыхъ линій.

88. *Стороны треугольника проходятъ чрезъ три точки, лежащія на одной прямой, и двѣ вершины его находятся на двухъ данныхъ прямыхъ; требуется найти геометрическое мѣсто третьей вершины.*

Пусть MM_1M_2 будетъ разсматриваемый треугольникъ (фиг. 25). Стороны его проходятъ чрезъ данныя точки A, A_1, A_2, а двѣ вершины M_1 и M_2 лежатъ на данныхъ прямыхъ OQ и OP. Примемъ прямыя AQ и AO за оси координатъ и положимъ:



Фиг. 25.

$$AO = a,\ AA_1 = a_1,\ AA_2 = a_2,$$

$$AP = p,\ AQ = q.$$

При такомъ обозначеніи уравненія прямыхъ OQ и OP будутъ

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{a} = 1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ сторона M_1M_2, какъ проходящая чрезъ начало координатъ, выразится уравненіемъ

$$y = mx,$$

гдѣ m есть неопредѣленный угловой коэффиціентъ.

Изъ этихъ уравненій находимъ координаты вершинъ M_1 и M_2, а именно: для точки M_1

$$x = \frac{aq}{a+mq}\,, \qquad y = \frac{amq}{a+mq}$$

и для точки M_2

$$x = \frac{ap}{a+mp}\,, \qquad y = \frac{amp}{a+mp}\,.$$

Уравненіе прямой $M_2 M$, какъ проходящей чрезъ двѣ точки M_2 и A_1, координаты которыхъ извѣстны, получится въ видѣ (см. стр. 43):

$$\frac{amp}{a+mp}x - \left(\frac{ap}{a+mp} - a_1\right)y - \frac{aa_1mp}{a+mp} = 0$$

или, по уничтоженіи знаменателей,

$$ampx + (aa_1 + a_1mp - ap)\,y - aa_1mp = 0$$

или, наконецъ, по отдѣленіи членовъ, содержащихъ множителя m,

$$mp\,(ax + a_1y - aa_1) + a\,(a_1 - p)\,y = 0\,.$$

Точно также найдемъ, что прямая $M_1 M$ выражается уравненіемъ

$$mq\,(ax + a_2y - aa_2) + a\,(a_2 - q)\,y = 0\,.$$

Точка M искомаго геометрическаго мѣста опредѣляется пересѣченіемъ прямыхъ, выражаемыхъ послѣдними двумя уравненіями, и такъ какъ эти уравненія содержатъ неопредѣленную величину m, то, исключая изъ нихъ эту величину, мы и получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста въ видѣ:

$$p\,(a_2 - q)\,(ax + a_1y - aa_1) - q\,(a_1 - p)\,(ax + a_2\,y - aa_2) = 0\,.$$

Это уравненіе можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$a\,(a_2p - a_1q)\,x + (y - a)\,[a_1a_2\,(p - q) - pq\,(a_1 - a_2)] = 0$$

или

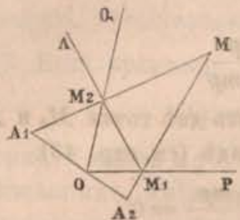
$$\frac{(a_2p - a_1q)\,x}{a_1a_2\,(p - q) - pq\,(a_1 - a_2)} + \frac{y}{a} = 1\,.$$

Оно выражаетъ прямую, проходящую чрезъ точку O.

89. Иногда уравненія перемѣнныхъ линій, пересѣченіемъ которыхъ опредѣляется точка геометрическаго мѣста, могутъ содержать не одну, а нѣсколько неопредѣленныхъ величинъ. Въ такомъ случаѣ нужно по условіямъ задачи составить еще дополнительныя уравненія, связывающія эти величины съ перемѣнными координатами точки геометрическаго мѣста, и именно въ такомъ числѣ, чтобы всѣ неопредѣленныя величины могли быть исключены. Результатъ этого исключенія и будетъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

Положимъ, что три данныя точки A, A_1, A_2, чрезъ которыя въ предыдущемъ примѣрѣ проходятъ стороны перемѣннаго треугольника $M\,M_1\,M_2$, не лежатъ на одной прямой. Но вмѣсто того точка O пересѣченія прямыхъ OP и OQ, на которыхъ должны лежать двѣ вершины M_1 и M_2 этого треугольника, находится на прямой, соединяющей двѣ изъ данныхъ точекъ A_1 и A_2 (фиг. 26).

Чтобы найти въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто третьей вершины M, примемъ за оси координатъ прямыя OP и OQ и положимъ, что координаты данныхъ точекъ A, A_1, A_2 суть послѣдовательно (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2). Называя чрезъ m_1 и m_2 неопредѣленныя разстоянія точекъ M_1 и M_2 отъ O, будемъ имѣть, что прямая $M_2 M$, какъ проходящая чрезъ двѣ точки, координаты которыхъ извѣстны, выразится уравненіемъ



Фиг. 26.

$$(b_1 - m_2)x - a_1 y + a_1 m_2 = 0.$$

Точно также уравненіе прямой $M_1 M$ будетъ

$$b_2 x - (a_2 - m_1)y - b_2 m_1 = 0.$$

Чтобы исключить изъ этихъ уравненій два неопредѣленные параметра m_1 и m_2, замѣтимъ, что точки A, M_1 и M_2 находятся на одной прямой, и потому должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$\frac{a}{m_1} + \frac{b}{m_2} = 1.$$

Изъ предыдущихъ уравненій находимъ для m_1 и m_2 слѣдующія выраженія:

$$m_1 = \frac{b_2 x - a_2 y}{b_2 - y} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{b_1 x - a_1 y}{x - a_1}.$$

Внеся ихъ въ послѣднее соотношеніе, мы и получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$\frac{a(b_2 - y)}{b_2 x - a_2 y} - \frac{b(a_1 - x)}{b_1 x - a_1 y} = 1.$$

До сихъ поръ мы не принимали во вниманіе условія, что прямая $A_1 A_2$ проходитъ чрезъ начало координатъ. Въ силу этого условія между координатами точекъ A_1 и A_2 имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1},$$

изъ котораго находимъ

$$\frac{b_2}{a_2} x - y = \frac{b_1}{a_1} x - y$$

или

$$\frac{b_2 x - a_2 y}{a_2} = \frac{b_1 x - a_1 y}{a_1}$$

откуда

$$b_2 x - a_2 y = \frac{a_2}{a_1}(b_1 x - a_1 y).$$

Вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе обращается въ

$$\frac{a_1 a(b_2-y)}{a_2(b_1x-a_1y)}-\frac{b(a_1-x)}{b_1x-a_1y}=1,$$

или, по уничтоженіи знаменателя,

$$a_1 a(b_2-y)-a_2 b(a_1-x)=a_2(b_1 x-a_1 y),$$

или

$$a_2(b-b_1)x+a_1(a_2-a)y+a_1(ab_2-a_2b)=0,$$

или

$$\frac{a_2(b-b_1)x}{a_1(a_2b-ab_2)}+\frac{(a_2-a)y}{a_2b-ab_2}=1,$$

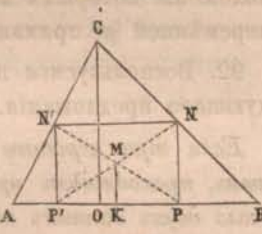
откуда

$$\frac{(b-b_1)x}{a_1b-ab_1}+\frac{(a_2-a)y}{a_2b-ab_2}=1.$$

Это есть уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки пересѣченія прямыхъ AA_1 съ OP и AA_2 съ OQ.

90. *Найти геометрическое мѣсто центра прямоугольника, вписаннаго въ данный треугольникъ.*

Пусть ABC будетъ данный треугольникъ и $PNN'P'$ вписанный въ него прямоугольникъ (фиг. 27). Примемъ основаніе AB и высоту OC треугольника за оси координатъ и обозначимъ абсолютныя величины отрѣзковъ OA, OB, OC послѣдовательно чрезъ a, b, c. Въ такомъ случаѣ уравненія сторонъ AC и BC будутъ



Фиг. 27.

$$\frac{y}{c}-\frac{x}{a}=1 \quad \text{и} \quad \frac{y}{c}+\frac{x}{b}=1.$$

Если назовемъ перемѣнную высоту NP вписаннаго прямоугольника, которая представляетъ собою ординату точекъ N и N', буквою m, то изъ послѣднихъ уравненій получимъ для абсциссъ этихъ точекъ слѣдующія выраженія:

$$x_1=\frac{a(m-c)}{c} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{b(c-m)}{c}.$$

Отсюда заключаемъ, что координаты точки M искомаго геометрическаго мѣста будутъ

$$y=\frac{m}{2} \quad \text{и} \quad x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(a-b)(m-c)}{2c}.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ m, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$2cx=(a-b)(2y-c),$$

которое, по раздѣленіи обѣихъ частей на $(b-a)c$, приметъ видъ

$$\frac{2x}{b-a}+\frac{2y}{c}=1.$$

Оно представляетъ прямую, проходящую чрезъ средины основанія AB и высоты OC даннаго треугольника.

91. Характеръ зависимости уравненія прямой отъ неопредѣленнаго параметра можетъ служить указаніемъ, какимъ образомъ прямая измѣняетъ свое положеніе при измѣненіи этого параметра. Такъ, если коэффиціенты уравненія прямой

$$Ax + By + C = 0$$

содержатъ неопредѣленную величину m въ первой степени, т. е.

$$A = A_1m + A_2\,,\ B = B_1m + B_2\,,\ C = C_1m + C_2\,,$$

то прямая эта проходитъ чрезъ постоянную точку. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ уравненіе прямой принимаетъ видъ

$$(A_1x + B_1y + C_1)\,m + (A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

и при всякомъ значеніи m представляетъ прямую, проходящую чрезъ точку пересѣченія прямыхъ

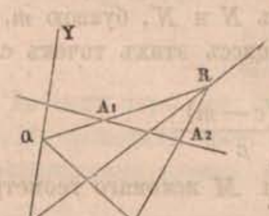
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0\,,$$

положеніе которыхъ не зависитъ отъ m. Слѣдовательно, при измѣненіи перемѣнной m прямая перемѣщается, вращаясь около этой точки.

92. Воспользуемся послѣднимъ замѣчаніемъ для доказательства слѣдующаго предложенія.

Если три вершины треугольника перемѣщаются по даннымъ прямымъ, проходящимъ чрезъ одну точку, а двѣ его стороны вращаются около двухъ данныхъ точекъ, то третья сторона будетъ перемѣщаться, вращаясь также около нѣкоторой точки.

Пусть данныя прямыя, на которыхъ должны находиться вершины треугольника PQR, будутъ OP, OQ, OR (фиг. 28). Примемъ двѣ первыя изъ нихъ за оси координатъ. Въ такомъ случаѣ уравненіе прямой OR будетъ



Фиг. 28.

$$y = mx,$$

гдѣ m данная величина.

Если обозначимъ далѣе координаты данныхъ точекъ A_1 и A_2, около которыхъ вращаются стороны QR и PR треугольника, чрезъ $(a_1\,, b_1)$ и $(a_2\,, b_2)$, а координаты вершины R чрезъ $(\alpha,\ \beta)$, то будемъ имѣть, что сторона PR, какъ проходящая чрезъ точки A_2 и R, выразится уравненіемъ

$$(b_2 - \beta)\,x - (a_2 - \alpha)\,y + a_2\beta - b_2\alpha = 0\,.$$

Точно также уравненіе стороны QR будетъ

$$(b_1 - \beta)\,x - (a_1 - \alpha)\,y + a_1\beta - b_1\alpha = 0\,.$$

Полагая въ первомъ изъ этихъ уравненій $y=0$, а во второмъ $x=0$, получимъ слѣдующія выраженія для отрѣзковъ OP и OQ:

$$OP = x = \frac{b_2\alpha - a_2\beta}{b_2 - \beta} \quad \text{и} \quad OQ = y = \frac{a_1\beta - b_1\alpha}{a_1 - \alpha}.$$

Слѣдовательно, уравненіе стороны PQ, какъ отсѣкающей на осяхъ координатъ эти отрѣзки, будетъ

$$\frac{(b_2 - \beta)\,x}{b_2\alpha - a_2\beta} + \frac{(a_1 - \alpha)\,y}{a_1\beta - b_1\alpha} = 1.$$

Такъ какъ α и β суть двѣ неопредѣленныя величины, связанныя между собою зависимостью

$$\beta = m\alpha,$$

то послѣднее уравненіе, по умноженіи обѣихъ его частей на α, можно представить такъ:

$$\frac{b_2 - m\alpha}{b_2 - ma_2}\,x + \frac{a_1 - \alpha}{ma_1 - b_1} - \alpha = 0.$$

Въ этомъ видѣ уравненіе содержитъ неопредѣленную величину α въ первой степени, а потому и заключаемъ, что прямая PQ проходитъ чрезъ постоянную точку, именно чрезъ точку пересѣченія прямыхъ, выражаемыхъ уравненіями:

$$\frac{b_2\,x}{b_2 - ma_2} + \frac{a_1\,y}{ma_1 - b_1} = 0$$

и

$$\frac{mx}{b_2 - ma_2} + \frac{y}{ma_1 - b_1} + 1 = 0.$$

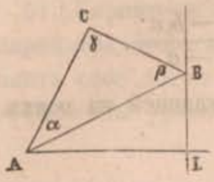
93. Иногда условія, опредѣляющія искомое геометрическое мѣсто, бываютъ такого рода, что уравненіе этого мѣста находится быстрѣе или въ болѣе простомъ видѣ по отношенію къ выбранной соотвѣтственнымъ образомъ полярной системѣ координатъ. Это бываетъ, напр., тогда, когда точки геометрическаго мѣста опредѣляются, какъ лежащія на прямыхъ, исходящихъ изъ одной данной точки, и притомъ разстоянія ихъ отъ этой точки легко получаются въ видѣ общаго выраженія. Естественно въ такомъ случаѣ эту данную точку принять за полюсъ полярной системы координатъ.

Возьмемъ для примѣра слѣдующую задачу.

Одна вершина перемѣннаго треугольника неподвижна, другая перемѣщается по данной прямой; найти геометрическое мѣсто третьей вершины въ предположеніи, что всѣ три угла треугольника извѣстны по величинѣ.

Обозначимъ внутренніе углы треугольника ABC послѣдовательно чрезъ α, β, γ и положимъ, что вершина A неподвижна, а вершина B

должна лежать на прямой BL (фиг. 29). Примемъ далѣе точку A за полюсъ полярной системы координатъ, а перпендикуляръ изъ нея на данную прямую BL за полярную ось. Относительно этой системы координаты вершины C будутъ:



Фиг. 29.

$$r = AC \quad \text{и} \quad \varphi = \angle CAL,$$

а координаты вершины B:

$$r' = AB \quad \text{и} \quad \varphi' = \angle BAL.$$

Между этими величинами существуютъ, очевидно, слѣдующія соотношенія:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi' + \alpha,$$

откуда

$$r' = r\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \quad \text{и} \quad \varphi' = \varphi - \alpha.$$

По условію задачи углы α, β, γ должны считаться извѣстными и кромѣ того должно быть извѣстно разстояніе AL данной точки отъ данной прямой. Обозначая это разстояніе буквою p, будемъ имѣть для координатъ точки B соотношеніе

$$p = r'\cos\varphi',$$

имѣющее мѣсто при всякомъ положеніи этой точки на прямой BL.

Внеся сюда вмѣсто r' и φ' ихъ предыдущія выраженія чрезъ r и φ, получимъ

$$p = r\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cos(\varphi - \alpha)$$

или

$$\frac{p\sin\beta}{\sin\gamma} = r\cos(\alpha - \varphi).$$

Это уравненіе представляетъ зависимость между координатами точки C и выражаетъ прямую (см. стр. 52), которая и есть искомое геометрическое мѣсто.

§ 4. Мнимыя точки и прямыя.

94. Изъ самаго понятія о координатахъ слѣдуетъ, что всякому положенію точки на плоскости соотвѣтствуютъ нѣкоторыя дѣйствительныя алгебраическія величины координатъ, и обратно, какія бы дѣйствительныя алгебраическія значенія ни приписывались координатамъ, онѣ опредѣляютъ нѣкоторую непремѣнно существующую на плоскости точку. Всѣми возможными сочетаніями дѣйствительныхъ величинъ абсциссы и дѣйствительныхъ величинъ ординаты исчерпываются, слѣдовательно, всѣ возможныя точки плоскости. Между тѣмъ при рѣшеніи

геометрическихъ задачъ посредствомъ алгебраическаго анализа, т. е. при отысканіи неизвѣстныхъ геометрическихъ величинъ изъ алгебраическихъ уравненій, для координатъ искомой точки могутъ получаться величины *мнимыя*. Такимъ координатамъ, на основаніи сейчасъ сказаннаго, уже не могутъ соотвѣтствовать реально существующія точки плоскости; такія координаты не имѣютъ, слѣдовательно, реальнаго геометрическаго значенія.

Если, однако, полученныя какимъ либо образомъ мнимыя координаты принять за данныя, служащія для рѣшенія какого нибудь вопроса, то въ результатѣ, рѣшающемъ вопросъ, искомыя величины могутъ оказаться дѣйствительными, имѣющими вполнѣ опредѣленное и реальное геометрическое значеніе, такъ же точно, какъ еслибы данными вопроса были дѣйствительныя координаты.

На этомъ основаніи въ Аналитической Геометріи признается полезнымъ и вполнѣ соотвѣтствующимъ обобщающему характеру этой науки вводить въ разсмотрѣніе не только дѣйствительныя точки, т. е. опредѣляемыя дѣйствительными координатами, но и точки, имѣющія координаты мнимыя. Ихъ называютъ *мнимыми точками*.

Понятіе о мнимой точкѣ есть совершенно абстрактное, для составленія котораго вполнѣ отвлекаются отъ первоначальнаго, такъ сказать, нагляднаго геометрическаго представленія точки и удерживаютъ только аналитически вполнѣ характеризующее ее свойство быть опредѣляемой посредствомъ алгебраическихъ значеній координатъ.

95. Самый общій видъ мнимаго количества есть, какъ извѣстно,

$$a+b\sqrt{-1},$$

гдѣ a и b количества дѣйствительныя. Такое выраженіе называется полнымъ мнимымъ количествомъ или *комплексною величиною*. Двѣ комплексныя величины

$$a+b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad a-b\sqrt{-1},$$

различающіяся между собою только знакомъ коэффиціента при $\sqrt{-1}$, называются *сопряженными*.

Точка M есть мнимая, когда координаты ея x и y выражаются такъ:

$$x=a+b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y=c+d\sqrt{-1},$$

гдѣ дѣйствительныя величины a, b, c и d могутъ имѣть какое угодно значеніе, и только въ случаѣ, когда b и d одновременно равняются нулю, эта точка будетъ дѣйствительною.

Двѣ мнимыя точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), которыхъ абсциссы, такъ же какъ и ординаты, суть сопряженныя комплексныя величины, называются также сопряженными между собою. Слѣдовательно, полагая, что координаты первой точки суть

$$x_1=a+b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y_1=c+d\sqrt{-1},$$

будемъ имѣть, что координаты сопряженной съ нею мнимой точки суть:

$$x_2 = a - b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad y_2 = c - d\sqrt{-1}\,.$$

96. *Средина разстоянія между двумя сопряженными мнимыми точками есть точка дѣйствительная.*

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣляя координаты средины разстоянія между точками $(x_1\,,\ y_1)$ и $(x_2\,,\ y_2)$, также какъ еслибы эти точки были дѣйствительныя (см. стр. 8), находимъ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(a + b\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1})}{2} = a\,,$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(c + d\sqrt{-1}) + (c - d\sqrt{-1})}{2} = c\,.$$

Прямая, проходящая чрезъ двѣ сопряженныя мнимыя точки, есть дѣйствительная.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки $(x_1\,,\ y_1)$ и $(x_2\,,\ y_2)$, какъ извѣстно, имѣетъ видъ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

Подставивъ сюда вмѣсто $x_1\,,\ y_1\,,\ x_2\,,\ y_2$ ихъ предыдущія выраженія, получимъ

$$\frac{(x - a) - b\sqrt{-1}}{-2b\sqrt{-1}} = \frac{(y - c) - d\sqrt{-1}}{-2d\sqrt{-1}}$$

или, по сокращеніи,

$$\frac{x - a}{b} = \frac{y - c}{d}\,.$$

Это есть уравненіе нѣкоторой реально существующей на плоскости прямой, которая по величинамъ a, b, c и d можетъ быть найдена построеніемъ.

Отношеніе разстоянія между двумя сопряженными мнимыми точками къ разстоянію между двумя другими такими же точками есть величина дѣйствительная.

Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе δ между двумя точками $(x_1\,,\ y_1)$ и $(x_2\,,\ y_2)$ выражается, какъ извѣстною, формулой

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2\,(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega}\,.$$

Подставляя сюда предыдущія выраженія кординатъ сопряженныхъ мнимыхъ точекъ, получимъ

$$\delta = 2\sqrt{b^2 + d^2 + 2bd\cos\omega}\,.\,\sqrt{-1}\,,$$

гдѣ множитель $\sqrt{b^2 + d^2 + 2bd\cos\omega}$, какъ представляющій разстояніе дѣйствительной точки $(b,\ d)$ отъ начала координатъ, есть величина дѣйствительная. По раздѣленіи же всего произведенія на такое же, представляющее разстояніе между двумя другими сопряженными мнимыми точками, мнимый множитель $\sqrt{-1}$ сократится.

97. Мы видѣли, что всякая прямая на плоскости выражается уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0$$

при дѣйствительныхъ значеніяхъ его коэффиціентовъ и, обратно, каковы-бы ни были дѣйствительныя алгебраическія величины A, B, C, это уравненіе выражаетъ нѣкоторую реально существующую на плоскости прямую. Но, отыскивая коэффиціенты уравненія прямой по какимъ-нибудь условіямъ, выраженнымъ аналитически, т. е. уравненіями, мы можемъ получить для нихъ значенія мнимыя. Такая прямая, уравненіе которой имѣетъ мнимые коэффиціенты, называется *мнимою прямою.*

Понятіе о мнимыхъ прямыхъ имѣетъ тотъ же характеръ и такое же значеніе, какъ и понятіе о мнимыхъ точкахъ.

Двѣ мнимыя прямыя, въ уравненіяхъ которыхъ соотвѣтственные коэффиціенты суть мнимыя сопряженныя количества, называются *сопряженными между собою.*

Общій видъ уравненія мнимой прямой есть

$$(A + A'\sqrt{-1})x + (B + B'\sqrt{-1})y + (C + C'\sqrt{-1}) = 0; \quad \ldots (1)$$

уравненіе сопряженной съ нею мнимой прямой будетъ

$$(A - A'\sqrt{-1})x + (B - B'\sqrt{-1})y + (C - C'\sqrt{-1}) = 0. \quad \ldots (2)$$

Эти уравненія могутъ быть представлены еще такимъ образомъ:

$$(Ax + By + C) + \sqrt{-1}\,(A'x + B'y + C') = 0$$

и

$$(Ax + By + C) - \sqrt{-1}\,(A'x + B'y + C') = 0$$

Отсюда видно, что первая часть каждаго изъ нихъ обращается въ нуль только тѣми дѣйствительными значеніями x и y, которыя представляютъ точку пересѣченія дѣйствительныхъ прямыхъ

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Слѣдовательно, на всякой мнимой прямой существуетъ единственная дѣйствительная точка, именно точка пересѣченія этой прямой съ сопряженною ей мнимой прямою.

98. Уравненіе всякой прямой, проходящей чрезъ данную точку (x_1, y_1), есть, какъ извѣстно,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

гдѣ A и B неопредѣленные коэффиціенты.

Если данная точка есть мнимая, опредѣляемая координатами

$$x_1 = a + b\sqrt{-1} \qquad \text{и} \qquad y_1 = c + d\sqrt{-1},$$

то это уравненіе принимаетъ видъ

$$A(x - a - b\sqrt{-1}) + B(y - c - d\sqrt{-1}) = 0$$

или
$$A(x-a) + B(y-c) \mp \sqrt{-1}\,(Ab + Bd) = 0$$

и представляетъ, вообще говоря, мнимую прямую. Только въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты A и B удовлетворяютъ условію

$$Ab + Bd = 0,$$

т. е.
$$A = dk \qquad \text{и} \qquad B = -bk,$$

это уравненіе обращается въ

$$d(x-a) - b(y-c) = 0$$

и представляетъ дѣйствительную прямую.

Слѣдовательно, чрезъ всякую мнимую точку проходитъ единственная мнимая прямая, именно прямая, соединяющая эту точку съ сопряженною ей мнимою точкою.

99. Алгебраическія уравненія высшихъ порядковъ могутъ выражать совокупности прямыхъ линій. Это бываетъ, какъ извѣстно, тогда, когда первая часть такого уравненія, представленнаго въ видѣ

$$f(x_1 y) = 0,$$

разлагается на множители первой степени.

Возьмемъ для примѣра уравненіе второй степени и положимъ сперва, что оно содержитъ только одно неизвѣстное x. Общій видъ такого уравненія есть

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Какъ извѣстно изъ Алгебры, это уравненіе имѣетъ два рѣшенія или корня, которые будутъ дѣйствительные и различные, когда $B^2 - 4AC > 0$, дѣйствительные и равные, когда $B^2 - 4AC = 0$, и оба мнимые и сопряженные, когда $B^2 - 4AC < 0$.

Обозначая эти два корня чрезъ x_1 и x_2, будемъ имѣть

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

и уравненіе (3) можетъ быть представлено такъ:

$$A(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Оно выражаетъ, слѣдовательно, совокупность двухъ прямыхъ, параллельныхъ оси ординатъ и выражающихся въ отдѣльности уравненіями

$$x - x_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x - x_2 = 0.$$

Эти прямыя будутъ также дѣйствительныя и различныя, или совпадающія, или, наконецъ, мнимыя сопряженныя, въ трехъ упомянутыхъ сейчасъ случаяхъ.

Подобнымъ же образомъ уравненіе второй степени, содержащее только неизвѣстное y, представляетъ двѣ прямыя, параллельныя оси абсциссъ, которыя также могутъ быть дѣйствительными, или мнимыми, или совпадающими.

100. Возьмемъ теперь однородное уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными, т. е. такое, которое содержитъ только члены второго измѣренія. Общій видъ такого уравненія есть

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Если возьмемъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

и обозначимъ его корни чрезъ u_1 и u_2, т. е. положимъ

$$u_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

то будемъ имѣть тождество

$$Au^2 + Bu + C = A(u - u_1)(u - u_2).$$

Полагая въ немъ $u = \dfrac{x}{y}$ и помножая обѣ его части на y^2, получимъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A(x - u_1 y)(x - u_2 y)$$

Слѣдовательно, первая часть уравненія (4) разлагается на два множителя первой степени, а потому оно представляетъ также совокупность двухъ прямыхъ, выражаемыхъ въ отдѣльности уравненіями

$$x - u_1 y = 0 \qquad \text{и} \qquad x - u_2 y = 0$$

или

$$2Ax + (B - \sqrt{B^2 - 4AC})y = 0 \quad \text{и} \quad 2Ax + (B + \sqrt{B^2 - 4AC})y = 0.$$

Это двѣ прямыя, проходящія черезъ начало координатъ. Онѣ будутъ дѣйствительныя и различныя, когда $B^2 - 4AC > 0$, мнимыя сопряженныя, когда $B^2 - 4AC < 0$, и, наконецъ, дѣйствительныя и совпадающія, когда $B^2 - 4AC = 0$.

101. Каковы бы ни были двѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ (4), по коэффиціентамъ этого уравненія можетъ быть найденъ уголъ, ими образуемый. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ отдѣльно эти прямыя выражаются уравненіями

$$x - u_1 y = 0 \qquad \text{и} \qquad x - u_2 y = 0,$$

то, по извѣстной общей формулѣ для выраженія тангенса угла между двумя данными прямыми (см. стр. 41), будемъ имѣть

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(u_1 - u_2)\sin\omega}{(1 + u_1 u_2) - (u_1 + u_2)\cos\omega},$$

гдѣ ω есть уголъ между осями координатъ.

*

Изъ предыдущихъ же выраженій для u_1 и u_2 имѣемъ

$$u_1 - u_2 = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A},$$

$$u_1 + u_2 = -\frac{B}{A} \quad \text{и} \quad u_1 u_2 = \frac{C}{A}.$$

Слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}\sin\omega}{(A + C) + B\cos\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Отсюда видимъ, что уголъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ (4), будетъ прямой, когда

$$(A + C) + B\cos\omega = 0\ .$$

Когда же $B^2 - 4AC = 0$, то $\varphi = 0$ и, слѣдовательно, прямыя, какъ уже показано, совпадаютъ.

Если система координатъ прямоугольная, то необходимое и достаточное условіе перпендикулярности прямыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ (4), есть

$$C = -A\ .$$

102. Положимъ, что требуется найти прямую, дѣлящую пополамъ уголъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ (4) относительно прямоугольной системы координатъ.

Уравненія двухъ прямыхъ, дѣлящихъ пополамъ уголъ между прямыми

$$x - u_1 y = 0 \quad \text{и} \quad x - u_2 y = 0\ ,$$

имѣютъ, какъ извѣстно, видъ (см. стр. 48)

$$\frac{x - u_1 y}{\sqrt{1 + u_1^2}} + \frac{x - u_2 y}{\sqrt{1 + u_2^2}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x - u_1 y}{\sqrt{1 + u_1^2}} - \frac{x - u_2 y}{\sqrt{1 + u_2^2}} = 0\ .$$

Перемножая ихъ почленно, получимъ уравненіе второй степени

$$\frac{(x - u_1 y)^2}{1 + u_1^2} - \frac{(x - u_2 y)^2}{1 + u_2^2} = 0\ ,$$

представляющее совокупность этихъ прямыхъ.

По уничтоженіи знаменателей и соединеніи подобныхъ членовъ, это уравненіе принимаетъ видъ

$$(u_2^2 - u_1^2)\,x^2 + 2\,(u_2 - u_1)(1 - u_1 u_2)\,xy - (u_2^2 - u_1^2)\,y^2 = 0$$

или

$$(u_1 + u_2)\,x^2 + 2\,(1 - u_1 u_2)\,xy - (u_1 + u_2)\,y^2 = 0,$$

и такъ какъ мы видѣли, что

$$u_1 + u_2 = -\frac{B}{A} \quad \text{и} \quad u_1 u_2 = \frac{C}{A}\ ,$$

то это послѣднее уравненіе обращается, по умноженіи обѣихъ частей на $-A$, въ

$$Bx^2 + 2\,(C - A)\,xy - By^2 = 0\ .$$

На основаніи сказаннаго выше заключаемъ, что это уравненіе представляетъ двѣ прямыя, взаимно перпендикулярныя и притомъ всегда дѣйствительныя, потому что

$$(C-A)^2+B^2,$$

при всякихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ A, B, C, есть величина положительная.

И такъ, линіи, дѣлящія пополамъ уголъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ (4), будутъ дѣйствительныя даже и тогда, когда сами эти прямыя мнимыя.

103. Самый общій видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными есть

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Легко обнаружить условіе, при которомъ оно также представляетъ совокупность двухъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая его относительно неизвѣстнаго y, получимъ

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)}}{2C}$$

или

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)}}{2C} \quad . \quad (7)$$

Для того, чтобы это уравненіе представляло прямую и, слѣдовательно, имѣло видъ

$$y=mx+n,$$

необходимо и достаточно, чтобы выраженіе, находящееся во второй части подъ радикаломъ, было полнымъ квадратомъ, а это, какъ извѣстно, будетъ тогда, когда

$$(BE-2CD)^2=(B^2-4AC)(E^2-4CF) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (7) обращается въ

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm(\sqrt{B^2-4AC}\,.\,x+\sqrt{E^2-4CF})}{2C}$$

или

$$(B\mp\sqrt{B^2-4AC})x+2Cy+(E\mp\sqrt{E^2-4CF})=0 \quad . \quad . \quad (9)$$

и включаетъ въ себѣ уравненія двухъ прямыхъ, совокупность которыхъ выражается общимъ уравненіемъ (6) при условіи (8).

Такъ какъ изъ этого условія видно, что двучлены

$$B^2-4AC \qquad \text{и} \qquad E^2-4CF,$$

при дѣйствительныхъ коэффиціентахъ уравненія (6), имѣютъ одинаковые знаки, то и заключаемъ изъ уравненія (9), что прямыя, выражаемыя имъ или, что все тоже, уравненіемъ (6), будутъ дѣйствительныя, когда $B^2-4AC\geqq 0$, и мнимыя сопряженныя, когда $B^2-4AC<0$. При $B^2-4AC=0$ эти прямыя совпадаютъ.

104. Условіе (8), по раскрытіи скобокъ и сокращеніи всѣхъ членовъ на $-2C$, принимаетъ видъ

$$2(4ACF+BDE-AE^2-CD^2-B^2F)=0.$$

Здѣсь первая часть есть, очевидно, опредѣлитель вида

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} = \Delta.$$

Этотъ опредѣлитель, который, будучи приравненъ нулю, даетъ условіе необходимое и достаточное для того, чтобы общее уравненіе второй степени (6) представляло совокупность двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ прямыхъ, называется *дискриминантомъ* этого уравненія.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

СОКРАЩЕННЫЙ СПОСОБЪ И НАЧАЛА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

§ 1. Сокращенный способъ въ примѣненіи къ прямой линіи.

105. При разсмотрѣніи нѣсколькихъ линій совмѣстно часто бываетъ возможно рѣшать различные вопросы и выводить нѣкоторыя общія заключенія, не обращая вниманія на частныя свойства уравненій, выражающихъ эти линіи. Въ такихъ случаяхъ уравненіе линіи представляютъ обыкновенно въ сокращенномъ видѣ

$$f=0$$

и разсуждаютъ надъ знакомъ f лишь подъ условіемъ нѣкоторыхъ общихъ свойствъ означаемаго имъ выраженія. Это составляетъ основаніе и сущность такъ называемаго сокращеннаго способа, простѣйшее примѣненіе котораго можно видѣть въ слѣдующемъ.

106. Пусть $f_1=0$ и $f_2=0$ будутъ уравненія двухъ линій одного и того же порядка m и k нѣкоторая постоянная величина. Составивъ уравненіе

$$f_1-kf_2=0, \qquad (1)$$

легко видѣть, что оно также степени m и притомъ удовлетворяется всѣми значеніями неизвѣстныхъ, обращающими въ нуль одновременно многочлены f_1 и f_2. Слѣдовательно, уравненіе (1) представляетъ линію m-го порядка, проходящую черезъ всѣ точки пересѣченія линій

$$f_1=0 \quad \text{и} \quad f_2=0.$$

Это заключеніе не зависитъ отъ частныхъ свойствъ послѣднихъ линій и имѣетъ мѣсто, какого-бы порядка онѣ ни были.

При неопредѣленномъ k уравненіе (1) выражаетъ цѣлую систему линій, имѣющихъ однѣ и тѣ же точки пересѣченія. Такую систему называютъ *пучкомъ* линій. Каждому значенію параметра k соотвѣтствуетъ опредѣленная линія пучка. Линіи $f_1=0$ и $f_2=0$ принадлежатъ также этому пучку, и соотвѣтствующія имъ значенія параметра суть $k=0$ и $k=\infty$.

107. Положимъ теперь, что даны двѣ прямыя линіи SL_1 и SL_2, отнесенныя къ прямоугольной системѣ координатъ (фиг. 30), и пусть

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

будутъ представленныя сокращенно ихъ уравненія въ нормальной формѣ, такъ что

$$A_1 = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$$

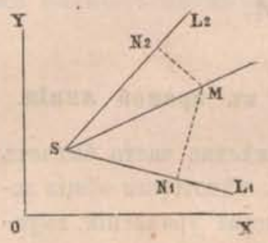
и

$$A_2 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 .$$

Въ этомъ случаѣ въ уравненіи

$$A_1 - kA_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

параметръ k имѣетъ простое геометрическое значеніе, которое обнаруживается слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ на прямой, выражаемой этимъ уравненіемъ, какую нибудь точку $M(x_1, y_1)$. Подставивъ въ него координаты этой точки, получимъ тождество, изъ котораго находимъ



Фиг. 30.

$$k = \frac{A_1}{A_2} = \frac{x_1 \cos \alpha_1 + y_1 \sin \alpha_1 - p_1}{x_1 \cos \alpha_2 + y_1 \sin \alpha_2 - p_2}$$

Члены этого отношенія представляютъ, какъ извѣстно, длины перпендикуляровъ MN_1 и MN_2, опущенныхъ изъ точки M на прямыя SL_1 и SL_2. Но изъ треугольниковъ SMN_1 и SMN_2 имѣемъ

$$MN_1 = SM \sin MSN_1$$

и

$$MN_2 = SM \sin MSN_2 .$$

Слѣдовательно,

$$k = \frac{MN_1}{MN_2} = \frac{\sin MSN_1}{\sin MSN_2}$$

или, означая черезъ λ_1 и λ_2 углы, составляемые прямой (3) съ прямыми (2),

$$k = \frac{\sin \lambda_1}{\sin \lambda_2} .$$

И такъ, постоянное k означаетъ отношеніе синусовъ угловъ, на которые прямая (3) дѣлитъ уголъ между данными прямыми (2).

108. Данныя прямыя, пересѣкаясь въ S, образуютъ при этой точкѣ смежные углы, дополняющіе другъ друга до 180^0. Очевидно, что для всѣхъ положеній прямой (3) внутри одного и того же изъ этихъ угловъ постоянное k сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ. Напротивъ того, для двухъ какихъ-нибудь положеній этой прямой внутри двухъ названныхъ смежныхъ угловъ значенія постояннаго k имѣютъ разные знаки.

Если $k = \pm 1$, то $\sin \lambda_1 = \pm \sin \lambda_2$. Слѣдовательно, при $k = +1$ имѣемъ $\lambda_1 = \lambda_2$, а при $k = -1$ имѣемъ $\lambda_1 = \pi - \lambda_2$. Это значитъ, что прямыя, выражаемыя уравненіями

$$A_1 - A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 = 0,$$

суть бисектры двухъ угловъ, образуемыхъ прямыми

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0,$$

т. е. дѣлятъ эти углы пополамъ.

109. Если положимъ, что

$$U_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

суть уравненія данныхъ прямыхъ въ общемъ видѣ, такъ что

$$U_1 = A_1 x + B_1 y + C_1$$

и

$$U_2 = A_2 x + B_2 y + C_2,$$

то значеніе постояннаго k въ уравненіи

$$U_1 - kU_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

будетъ нѣсколько иное. Въ самомъ дѣлѣ, означая черезъ p_1 и p_2 длины перпендикуляровъ изъ начала координатъ на прямыя (4), а черезъ α_1 и α_2 углы этихъ перпендикуляровъ съ осью абсциссъ, будемъ имѣть, какъ извѣстно,

$$\frac{U_1}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}} = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$$

и

$$\frac{U_2}{\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}} = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 .$$

Раздѣливъ одно изъ этихъ равенствъ на другое, получимъ

$$\frac{U_1}{U_2} \frac{\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}} = \frac{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1}{x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2} = \frac{\sin \lambda_1}{\sin \lambda_2},$$

откуда

$$k = \frac{U_1}{U_2} = m \frac{\sin \lambda_1}{\sin \lambda_2},$$

гдѣ

$$m = \frac{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}}{\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}}.$$

Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ параметръ k означаетъ то же отношеніе синусовъ, умноженное на постоянный множитель, постоянный въ томъ смыслѣ, что онъ не измѣняется отъ измѣненія направленія прямой (5).

110. Если три прямыя

$$U_1 = 0, \; U_2 = 0, \; U_3 = 0$$

проходятъ черезъ одну точку, то въ уравненіи

$$U_1 - kU_2 = 0$$

мы можемъ дать параметру k такое значеніе, при которомъ оно будетъ представлять прямую $U_3 = 0$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ первыя части послѣднихъ двухъ уравненій могутъ различаться только постояннымъ множителемъ, то должно быть

$$U_1 - kU_2 = lU_3$$

или

$$U_1 - kU_2 - lU_3 = 0 .$$

Это тождество, т. е. равенство, имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ x и y, является, такимъ образомъ, условіемъ или признакомъ, что три прямыя проходятъ черезъ одну точку. Помноживъ обѣ его части на какое-нибудь постоянное p_1 и положивъ $-kp_1 = p_2$ и $-lp_1 = p_3$, дадимъ ему видъ

$$p_1 U_1 + p_2 U_2 + p_3 U_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Слѣдовательно, можно сказать, что три прямыя проходятъ черезъ одну точку, когда существуютъ три такія постоянныя количества p_1, p_2, p_3, что сумма произведеній ихъ на первыя части уравненій этихъ прямыхъ тождественно равняется нулю.

Въ примѣненіяхъ сокращеннаго способа къ прямымъ линіямъ признакъ этотъ особенно удобенъ, какъ можно видѣть изъ слѣдующихъ простыхъ доказательствъ извѣстныхъ предложеній о треугольникѣ.

111. *Бисектры трехъ угловъ треугольника проходятъ черезъ одну точку.*

Пусть M_1, M_2, M_3 будутъ вершины треугольника. Положимъ, что уравненія въ нормальной формѣ сторонъ его M_2M_3, M_1M_3 и M_1M_2 будутъ послѣдовательно:

$$A_1 = 0 \,, \; A_2 = 0 \,, \; A_3 = 0 \,.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія бисектровъ будутъ, какъ мы видѣли,

$$A_2 \pm A_3 = 0 \,, \; A_3 \pm A_1 = 0 \,, \; A_1 \pm A_2 = 0$$

Сумма первыхъ частей уравненій

$$A_2 - A_3 = 0 \,, \; A_3 - A_1 = 0 \,, \; A_1 - A_2 = 0$$

равняется нулю тождественно.

Это значитъ, что къ нимъ прилагается предыдущій признакъ, полагая

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1 \,.$$

Если же возьмемъ уравненія:

$$A_2 + A_3 = 0 \,, \; A_3 + A_1 = 0 \,, \; A_1 - A_2 = 0 \,,$$

или

$$A_2 + A_3 = 0 \,, \; A_3 - A_1 = 0 \,, \; A_1 + A_2 = 0 \,,$$

или

$$A_2 - A_3 = 0 \,, \; A_3 + A_1 = 0 \,, \; A_1 + A_2 = 0 \,,$$

то къ нимъ прилагается предыдущій признакъ, принимая одинъ изъ множителей p_1, p_2, p_3 за -1, а два другіе за $+1$.

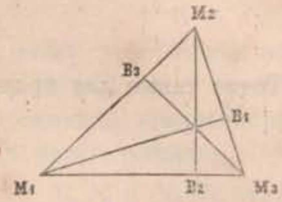
Такимъ образомъ, убѣждаемся, что существуетъ четыре точки, въ одной изъ которыхъ пересѣкаются бисектры внутреннихъ угловъ, а въ каждой изъ остальныхъ бисектры одного внутренняго и двухъ внѣшнихъ угловъ.

112. *Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ треугольника на противоположныя стороны, проходятъ черезъ одну точку.*

Сохраняя для вершинъ и сторонъ треугольника прежнее обозначеніе, назовемъ внутренніе углы его послѣдовательно чрезъ (M_1), (M_2), (M_3). Уравненіе перпендикуляра M_1B_1 (фиг. 31) будетъ

$$A_2 - kA_3 = 0,$$

гдѣ
$$k = \frac{\sin B_1M_1M_3}{\sin B_1M_1M_2}.$$



Фиг. 31.

Но изъ треугольниковъ $M_1B_1M_3$ и $M_1B_1M_2$ имѣемъ

$$\sin B_1M_1M_3 = \cos(M_3)$$

и
$$\sin B_1M_1M_2 = \cos(M_2),$$

вслѣдствіе чего уравненіе прямой M_1B_1 принимаетъ видъ

$$A_2 - \frac{\cos(M_3)}{\cos(M_2)}A_3 = 0.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что уравненія перпендикуляровъ M_2B_2 и M_3B_3 суть:

$$A_3 - \frac{\cos(M_1)}{\cos(M_3)}A_1 = 0$$

и
$$A_1 - \frac{\cos(M_2)}{\cos(M_1)}A_2 = 0.$$

Къ этимъ тремъ уравненіямъ прилагается предыдущій признакъ, полагая

$$p_1 = \cos(M_2),\ p_2 = \cos(M_3),\ p_3 = \cos(M_1),$$

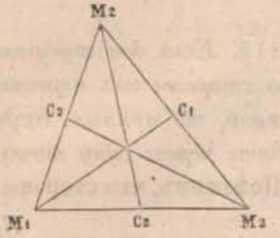
что и доказываетъ предложеніе.

113. *Медіаны, т. е. прямыя, соединяющія вершины треугольника съ срединами противоположныхъ сторонъ, проходятъ черезъ одну точку.*

Пусть C_1, C_2, C_3 будутъ средины сторонъ треугольника (фиг. 32). Уравненіе прямой M_1C_1 будетъ

$$A_2 - kA_3 = 0,$$

гдѣ
$$k = \frac{\sin(C_1M_1M_3)}{\sin(C_1M_1M_2)}.$$



Фиг. 32.

Но изъ треугольниковъ $M_1C_1M_3$ и $M_1C_1M_2$ имѣемъ

$$\frac{C_1M_3}{C_1M_1} = \frac{\sin C_1M_1M_3}{\sin(M_3)} \quad \text{и} \quad \frac{C_1M_2}{C_1M_1} = \frac{\sin C_1M_1M_2}{\sin(M_2)},$$

и такъ какъ $C_1M_3 = C_1M_2$, то

$$\frac{\sin C_1M_1M_3}{\sin(M_3)} = \frac{\sin C_1M_1M_2}{\sin(M_2)},$$

вслѣдствіе чего уравненіе прямой M_1C_1 принимаетъ видъ

$$A_2 - \frac{\sin(M_3)}{\sin(M_2)} A_3 = 0.$$

Точно также для прямыхъ M_2C_2 и M_3C_3 находимъ уравненія:

$$A_3 - \frac{\sin(M_1)}{\sin(M_3)} A_1 = 0$$

и

$$A_1 - \frac{\sin(M_2)}{\sin(M_1)} A_2 = 0.$$

Изъ того, что сумма произведеній первыхъ частей этихъ трехъ уравненій послѣдовательно на $\sin(M_2)$, $\sin(M_3)$ и $\sin(M_1)$ равняется тождественно нулю, заключаемъ о справедливости предложенія.

114. Изъ тождества (6) получается, какъ слѣдствіе, условіе пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ, которое было дано выше (см. стр. 42). Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ (6) вмѣсто U_1, U_2, U_3 означаемые ими многочлены, будемъ имѣть по приведеніи

$$(A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3)x + (B_1p_1 + B_2p_2 + B_3p_3)y + (C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3) = 0.$$

Но для того чтобы это было возможно при всякихъ значеніяхъ x и y, должно быть

$$\begin{aligned} A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 &= 0 \\ B_1p_1 + B_2p_2 + B_3p_3 &= 0 \\ C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Существованіе же величинъ p_1, p_2, p_3, удовлетворяющихъ этимъ равенствамъ, возможно только при условіи совмѣстимости трехъ однородныхъ уравненій, которое, какъ извѣстно (см. стр. 27), должно заключаться въ слѣдующемъ

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, \\ B_1, & B_2, & B_3, \\ C_1, & C_2, & C_3, \end{vmatrix} = 0.$$

115. *Если два треугольника $M_1M_2M_3$ и $N_1N_2N_3$ расположены такъ, что стороны ихъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой, то прямыя, соединяющія ихъ соотвѣтственныя вершины, проходятъ черезъ одну точку.*

Положимъ, что стороны перваго треугольника выражаются уравненіями

$$U_1 = 0, \ U_2 = 0, \ U_3 = 0,$$

и пусть $V = 0$ будетъ уравненіе прямой, на которой находятся три точки пересѣченія сторонъ треугольниковъ. Въ такомъ случаѣ уравненія сторонъ второго треугольника могутъ быть представлены такъ:

$$V - k_1U_1 = 0, \ V - k_2U_2 = 0, \ V - k_3U_3 = 0,$$

гдѣ k_1, k_2, k_3 вполнѣ опредѣленныя постоянныя величины.

Такъ какъ при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ x и y

$$(V - k_1 U_1) - (V - k_2 U_2) = k_2 U_2 - k_1 U_1 ,$$

то заключаемъ, что уравненіе

$$k_2 U_2 - k_1 U_1 = 0$$

выражаетъ прямую, проходящую какъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $U_1 = 0$ и $U_2 = 0$, такъ и черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V - k_1 U_1 = 0$ и $V - k_2 U_2 = 0$. Это есть, слѣдовательно, уравненіе прямой, соединяющей вершины M_3 и N_3 данныхъ треугольниковъ.

Точно также находимъ, что уравненія прямыхъ $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$ будутъ

$$k_3 U_3 - k_2 U_2 = 0$$

и

$$k_1 U_1 - k_3 U_3 = 0 .$$

Изъ того, что сумма первыхъ частей этихъ трехъ уравненій тождественно равняется нулю, и убѣждаемся, что прямыя, ими выражаемыя, проходятъ черезъ одну точку.

Легко доказать такимъ же образомъ и обратное предложеніе.

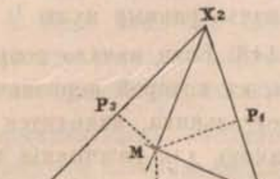
Треугольники, имѣющіе такое расположеніе, называются *гомологическими*; при этомъ точка, въ которой сходятся прямыя, соединяющія ихъ вершины, именуется *центромъ гомологіи*, а прямая, на которой пересѣкаются ихъ стороны,—*осью гомологіи*.

§ 2. Трилинейныя координаты.

116. Если намъ извѣстно на плоскости положеніе трехъ прямыхъ линій, не проходящихъ черезъ одну точку, то положеніе всякой точки плоскости можетъ быть опредѣляемо тремя однородными величинами, пропорціональными разстояніямъ этой точки отъ этихъ линій.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть относительно какой нибудь прямоугольной системы координатъ три данныя прямыя, составляющія треугольникъ $X_1 X_2 X_3$ (фиг. 33), выражаются уравненіями въ нормальной формѣ:

$$A_1 = 0 ,\ A_2 = 0 ,\ A_3 = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$



Фиг. 33.

и пусть h_1, h_2, h_3 будутъ послѣдовательно разстоянія нѣкоторой точки M отъ этихъ прямыхъ. Называя черезъ x_1, x_2, x_3 три однородныя величины, пропорціональныя этимъ разстояніямъ, будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{x_2}{h_2} = \frac{x_3}{h_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

или

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{и} \quad \frac{h_1}{h_3} = \frac{x_1}{x_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Двѣ прямыя X_3M и X_2M, проходящія черезъ вершины треугольника $X_1X_2X_3$ и пересѣкающіяся въ точкѣ M, выражаются, какъ мы знаемъ, уравненіями

$$A_1 - kA_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad A_1 - lA_3 = 0\,,$$

при чемъ постоянныя k и l имѣютъ слѣдующія значенія:

$$k = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{h_1}{h_2} \qquad \text{и} \qquad l = \frac{MP_1}{MP_3} = \frac{h_1}{h_3}\,.$$

Сличая эти равенства съ равенствами (2), видимъ, что по даннымъ величинамъ x_1, x_2, x_3 опредѣляются вполнѣ величины k и l. Этими же послѣдними опредѣляются прямыя X_3M и X_2M, а съ тѣмъ вмѣстѣ и точка ихъ пересѣченія M.

117. Три однородныя величины x_1, x_2, x_3, которыми, такимъ образомъ, вполнѣ опредѣляется положеніе точки M, называются *трилинейными координатами* этой точки. Такъ какъ положеніе точки зависитъ только отъ отношеній этихъ величинъ между собою, то онѣ могутъ быть какого угодно рода. Проще всего подъ ними понимать отвлеченныя числа.

Три прямыя X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1, положеніе которыхъ, при опредѣленіи точки трилинейными координатами, считается извѣстнымъ, составляютъ въ этомъ случаѣ систему координатъ и называются *осями координатъ*. Самый треугольникъ $X_1X_2X_3$ называютъ *координатнымъ треугольникомъ*.

Легко видѣть изъ сказаннаго, что для всѣхъ точекъ, лежащихъ на какой нибудь изъ осей, одна изъ координатъ равняется нулю. Это значитъ, что условія

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 0$$

характеризуютъ послѣдовательно три оси координатъ.

Каждая изъ вершинъ координатнаго треугольника имѣетъ двѣ координаты, равныя нулю [1]).

118. Если начало координатъ прямолинейной или декартовой системы, къ которой первоначально были отнесены стороны координатнаго треугольника, находится внутри его, то, согласно извѣстному правилу знаковъ для разстоянія точки отъ прямой (см. стр. 47), трилинейныя координаты каждой точки, находящейся также внутри этого треугольника, имѣютъ одинаковые знаки. Замѣчая же, что, съ переходомъ точки съ одной стороны прямой на другую, направленіе ея разстоянія отъ этой прямой измѣняется, легко понять, что въ каждой изъ остальныхъ частей плоскости, на которыя она дѣлится тремя осями координатъ, двѣ изъ координатъ имѣютъ одинаковые знаки, а третья имъ противоположный.

---

[1]) Между осями координатъ не должно быть двухъ параллельныхъ между собой.

Разсматривая трилинейную систему координатъ независимо отъ первоначальной декартовой, можно ту часть плоскости, въ которой всѣ три координаты каждой точки имѣютъ одинаковые знаки, выбирать по произволу, чрезъ что знаки координатъ всѣхъ другихъ точекъ плоскости уже вполнѣ опредѣлятся.

119. На первый взглядъ можетъ показаться, что трилинейная система координатъ представляетъ лишь усложненіе декартовой, такъ какъ вмѣсто двухъ координатъ, употребляемыхъ въ послѣдней, въ ней для той же цѣли употребляется три. На самомъ же дѣлѣ, пользуясь трилинейною системой, можно достигать значительныхъ упрощеній изслѣдованій, въ особенности, когда эти изслѣдованія носятъ общій характеръ и прилагаются къ линіямъ алгебраическимъ. Причины этого заключаются въ слѣдующемъ.

Хотя трилинейныхъ координатъ точки три, но, какъ замѣчено выше, ихъ можно разсматривать, какъ отвлеченныя числа. Въ декартовой же системѣ абсцисса и ордината суть длины, выраженныя въ опредѣленныхъ единицахъ, и только тогда опредѣляютъ точку, когда единица дана.

Трилинейныя координаты точки, какъ величины, долженствующія быть лишь пропорціональными извѣстнымъ разстояніямъ, могутъ быть умножаемы или раздѣляемы на одну и ту же величину безъ измѣненія опредѣляемой ими точки, подобно тому, какъ это можно дѣлать съ тремя коэффиціентами общаго уравненія первой степени, опредѣляющаго прямую. Въ этомъ прежде всего усматривается сходство между прямой линіей и точкой по отношенію къ опредѣляемости, и кромѣ того этимъ можно пользоваться для упрощенія аналитическихъ преобразованій и вычисленій.

Выборомъ осей координатъ часто пользуются для упрощенія аналитическихъ формулъ и дѣйствій надъ ними, и такъ какъ въ случаѣ трилинейной системы координатъ осей три, то это упрощеніе бываетъ возможно вести дальше, чѣмъ при употребленіи декартовой системы.

Наконецъ, самое важное преимущество трилинейныхъ координатъ заключается въ томъ, что при употребленіи ихъ всѣ алгебраическія линіи выражаются уравненіями однородными, вслѣдствіе чего всѣ аналитическія операціи надъ этими уравненіями подчиняются болѣе однообразнымъ законамъ.

120. Покажемъ, напримѣръ, что прямая линія выражается въ трилинейныхъ координатахъ однороднымъ уравненіемъ первой степени. Общій видъ такого уравненія есть

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Замѣтимъ прежде всего, что въ уравненіяхъ (1), выражающихъ стороны координатнаго треугольника относительно нѣкоторой прямоугольной системы, первыя части имѣютъ слѣдующія значенія:

$$A_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1\,,$$
$$A_2 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2\,,$$
$$A_3 = x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3\,,$$

и если подразумѣвать подъ x и y координаты точки M, то будемъ имѣть:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = h_1\,,$$
$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = h_2\,,$$
$$x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = h_3\,.$$

Внеся эти выраженія для разстояній h_1, h_2, h_3 въ равенства (2), получимъ соотношенія:

$$\frac{x_1}{x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1} = \frac{x_2}{x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2} = \frac{x_3}{x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3}, \quad . \ (5)$$

представляющія зависимость между трилинейными и декартовыми координатами одной и той же точки. Поэтому, подставляя въ уравненіе (4) на мѣсто перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3 пропорціональныя имъ величины изъ послѣднихъ соотношеній и соединяя подобные члены, дадимъ ему видъ:

$$(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)\,x +$$
$$+ (a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3)\,y - (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) = 0$$

Такъ какъ въ этомъ видѣ оно представляетъ относительно декартовой системы прямую, то такое же значеніе имѣетъ относительно трилинейной системы и уравненіе (4).

Для того, чтобы оно представляло какую угодно прямую, выражаемую въ декартовыхъ координатахъ общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0\,,$$

его коэффиціенты должны удовлетворять условіямъ:

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3 = A\,,$$
$$a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3 = B\,,$$
$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = -C\,,$$

изъ которыхъ, какъ изъ трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными, эти коэффиціенты могутъ быть найдены. При этомъ для нихъ не могутъ получиться неопредѣленныя или безконечно большія значенія, потому что опредѣлитель этой системы уравненій

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1\,, & \cos\alpha_2\,, & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1\,, & \sin\alpha_2\,, & \sin\alpha_3 \\ p_1\,, & p_2\,, & p_3 \end{vmatrix}$$

не можетъ равняться нулю [1]).

[1]) Равенство нулю этого опредѣлителя есть условіе, при которомъ три прямыя $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, т. е. оси координатъ, проходятъ черезъ одну точку, чего, по условію, не должно быть.

И такъ, уравненіе (4) можетъ представлять въ трилинейныхъ координатахъ какую угодно прямую, что и нужно было доказать.

121. Назовемъ абсолютныя величины сторонъ координатнаго треугольника послѣдовательно черезъ d_1, d_2, d_3 и пусть S означаетъ его площадь. Соединивъ прямыми линіями вершины координатнаго треугольника съ какою-нибудь точкою M, получимъ три треугольника, для которыхъ стороны d_1, d_2, d_3 будутъ основаніями, а точка M общей вершиной. Площади этихъ треугольниковъ выразятся послѣдовательно черезъ

$$\frac{d_1h_1}{2}, \quad \frac{d_2h_2}{2}, \quad \frac{d_3h_3}{2},$$

и въ случаѣ, когда точка M находится внутри координатнаго треугольника, очевидно, должно быть

$$d_1h_1 + d_2h_2 + d_3h_3 = 2S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Если точка M выйдетъ изъ внутренней области координатнаго треугольника, перейдя черезъ одну изъ сторонъ его, то одно изъ разстояній h_1, h_2, h_3 сдѣлается отрицательнымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ и площадь S будетъ равняться суммѣ площадей двухъ изъ названныхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершину въ M, безъ площади того изъ нихъ, для котораго эта сторона служитъ основаніемъ.

Отсюда убѣждаемся, что соотношеніе (6) должно имѣть мѣсто при всякомъ положеніи точки M.

Вслѣдствіе равенствъ (2) можно положить

$$h_1 = kx_1, \quad h_2 = kx_2, \quad h_3 = kx_3,$$

гдѣ k есть величина постоянная, т. е. не зависящая отъ положенія точки M. Поэтому соотношенію (6) можно дать видъ

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ K равняется $\frac{2S}{k}$ и есть постоянная величина въ томъ же смыслѣ.

122. Положимъ теперь, что мы имѣемъ двѣ прямыя линіи, уравненія которыхъ въ трилинейныхъ координатахъ суть:

$$\left.\begin{array}{l} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0 \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0 \end{array}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

и пусть между коэффиціентами ихъ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\frac{m_1 - n_1}{d_1} = \frac{m_2 - n_2}{d_2} = \frac{m_3 - n_3}{d_3} = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Если замѣнимъ въ нихъ перемѣнныя x_1, x_2, x_3 пропорціональными имъ выраженіями изъ равенствъ (5), то получимъ уравненія тѣхъ же прямыхъ въ декартовыхъ координатахъ, и такъ какъ при условіи (9) первыя части уравненій (8) различаются на λK, т. е. величину постоянную, то и полученныя уравненія имѣютъ то же свойство. Это, какъ извѣстно, показываетъ, что прямыя, выражаемыя этими уравненіями, параллельны. Но при условіи (9) имѣемъ тождественно

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) - (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3) = \lambda(d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3),$$

откуда заключаемъ, что прямая

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

проходитъ чрезъ общую точку прямыхъ (8), т. е. безконечно удаленную.

Такъ какъ сказанное относится ко всякимъ двумъ параллельнымъ прямымъ, то послѣднее уравненіе представляетъ прямую, безконечно удаленную всѣми своими точками.

Замѣчая, что условіе параллельности прямыхъ (8) есть въ то же время условіе совмѣстимости уравненій (8) и (10), находимъ, что въ наиболѣе общемъ видѣ оно можетъ быть представлено такъ

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \\ d_1, & d_2, & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(m_2n_3 - m_3n_2)\,d_1 + (m_3n_1 - m_1n_3)\,d_2 + (m_1n_2 - m_2n_1)\,d_3 = 0.$$

Если обозначимъ внутренніе углы координатнаго треугольника последовательно черезъ (X_1), (X_2), (X_3), то, какъ извѣстно,

$$\frac{d_1}{\sin(X_1)} = \frac{d_2}{\sin(X_2)} = \frac{d_3}{\sin(X_3)},$$

Вслѣдствіе этого уравненіе безконечно удаленной прямой и условіе параллельности двухъ прямыхъ принимаютъ видъ

$$x_1\sin(X_1) + x_2\sin(X_2) + x_3\sin(X_3) = 0$$

и

$$(m_2n_3 - m_3n_2)\sin(X_1) + (m_3n_1 - m_1n_3)\sin(X_2) + (m_1n_2 - m_2n_1)\sin(X_3) = 0.$$

123. Это послѣднее условіе можно вывести также изъ условія параллельности для декартовой системы

$$AB' - BA' = 0,$$

подставляя на мѣсто A, B, A', B' соотвѣтствующіе коэффиціенты уравненій, въ которыя преобразуются уравненія (8) по замѣнѣ x_1, x_2, x_3 ихъ выраженіями черезъ x и y. Результатъ этой подстановки будетъ

$$(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2 + m_3\cos\alpha_3)(n_1\sin\alpha_1 + n_2\sin\alpha_2 + n_3\sin\alpha_3) -$$
$$-(m_1\sin\alpha_1 + m_2\sin\alpha_2 + m_3\sin\alpha_3)(n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2 + n_3\cos\alpha_3) = 0$$

или по преобразованіи

$$(m_1n_2 - m_2n_1)\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + (m_3n_1 - m_1n_3)\sin(\alpha_1 - \alpha_3) +$$
$$+(m_2n_3 - m_3n_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0.$$

Здѣсь $(\alpha_2 - \alpha_1)$ есть уголъ между перпендикулярами къ двумъ сторонамъ координатнаго треугольника. Слѣдовательно, онъ или равняется углу (X_3) между этими сторонами, или дополняетъ его до 180^0. Въ обоихъ случаяхъ $\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin(X_3)$. На томъ же основаніи имѣемъ

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_3) = \sin(X_2) \quad \text{и} \quad \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \sin(X_1).$$

Вслѣдствіе этого предыдущее равенство принимаетъ видъ найденнаго выше.

124. Подобнымъ же образомъ условіе перпендикулярности для декартовой прямоугольной системы

$$AA' + BB' = 0$$

преобразуется въ

$$(m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2 + m_3 \cos\alpha_3)(n_1 \cos\alpha_1 + n_2 \cos\alpha_2 + n_3 \cos\alpha_3) +$$
$$+ (m_1 \sin\alpha_1 + m_2 \sin\alpha_2 + m_3 \sin\alpha_3)(n_1 \sin\alpha_1 + n_2 \sin\alpha_2 + n_3 \sin\alpha_3) = 0$$

или по перемноженіи

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) +$$
$$+ (m_3 n_1 + m_1 n_3)\cos(\alpha_1 - \alpha_3) + (m_2 n_3 - m_3 n_2)\cos(\alpha_3 - \alpha_2) = 0.$$

Въ томъ случаѣ, когда начало координатъ декартовой системы находится внутри координатнаго треугольника трилинейной, всѣ три угла $(\alpha_2 - \alpha_1)$, $(\alpha_1 - \alpha_3)$, $(\alpha_3 - \alpha_2)$ равняются внѣшнимъ угламъ этого треугольника и, слѣдовательно,

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -\cos(X_3)$$
$$\cos(\alpha_1 - \alpha_3) = -\cos(X_2)$$
$$\cos(\alpha_3 - \alpha_2) = -\cos(X_1).$$

Вслѣдствіе этого условіе перпендикулярности прямыхъ (8) принимаетъ видъ

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 - (m_1 n_2 + m_2 n_1)\cos(X_3) -$$
$$- (m_3 n_1 - m_1 n_3)\cos(X_2) - (m_2 n_3 - m_3 n_2)\cos(X_1) = 0.$$

Легко видѣть, однако, что это соотношеніе характеризуетъ перпендикулярность прямыхъ при всякой трилинейной системѣ координатъ и независитъ отъ расположенія ея относительно первоначальной декартовой. Это обнаруживается, напримѣръ, изъ того, что, при перенесеніи начала декартовой системы изъ внутренней области координатнаго треугольника черезъ одну изъ сторонъ его, мѣняется знакъ одного изъ знаменателей дробей (5) и въ то же время два изъ угловъ $(\alpha_2 - \alpha_1)$, $(\alpha_1 - \alpha_3)$, $(\alpha_3 - \alpha_2)$ измѣняются въ дополнительные до 180^0, т. е. дѣлаются равными внутреннимъ угламъ координатнаго треугольника.

125. Данное выше опредѣленіе трилинейныхъ координатъ, выражаемое равенствами (2), можно подвергнуть обобщенію, условившись понимать подъ ними величины, пропорціональныя не самимъ разстояніямъ точки отъ трехъ осей, а произведеніямъ этихъ разстояній на

нѣкоторыя постоянныя количества. Равенства (2) замѣняются въ такомъ случаѣ равенствами:

$$\frac{x_1}{\mu_1 h_1} = \frac{x_2}{\mu_2 h_2} = \frac{x_3}{\mu_3 h_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Постоянныя μ_1, μ_2, μ_3 называютъ *параметрами отношенія*.

Очевидно, что всѣ указанныя выше особенности трилинейныхъ координатъ сохраняются и при этомъ ихъ обобщеніи, но вмѣстѣ съ тѣмъ является возможность пользоваться выборомъ значеній для параметровъ отношенія съ цѣлью упрощенія аналитическихъ преобразованій и выраженій.

Можно, напримѣръ, выбрать μ_1, μ_2, μ_3 такъ, чтобы данная произвольно точка имѣла данныя координаты.

Если положимъ въ равенствахъ (11)

$$h_1 = h_2 = h_3 ,$$

то будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{\mu_1} = \frac{x_2}{\mu_2} = \frac{x_3}{\mu_3} .$$

Слѣдовательно, параметры отношенія суть координаты центра круга, вписаннаго въ координатный треугольникъ.

Если же въ равенствахъ (11) положимъ

$$x_1 = x_2 = x_3 ,$$

то будемъ имѣть

$$\mu_1 h_1 = \mu_2 h_2 = \mu_3 h_3 ,$$

откуда видимъ, что параметры отношенія обратно пропорціональны разстояніямъ отъ осей той точки, для которой всѣ три координаты равны.

Полагая $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, возвратимся къ прежнему опредѣленію трилинейныхъ координатъ.

Если примемъ за параметры отношенія величины, пропорціональныя сторонамъ координатнаго треугольника, или положимъ

$$\frac{\mu_1}{\sin(X_1)} = \frac{\mu_2}{\sin(X_2)} = \frac{\mu_3}{\sin(X_3)} ,$$

то координаты всякой точки будутъ величины, пропорціональныя площадямъ трехъ треугольниковъ, для которыхъ эта точка есть общая вершина, а стороны координатнаго треугольника основанія. Такія координаты называются *барицентрическими*.

Безконечно удаленная прямая выражается въ этомъ случаѣ уравненіемъ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 .$$

126. Уравненіе всякой алгебраической линіи въ декартовыхъ координатахъ можно сдѣлать однороднымъ, замѣняя въ немъ x и y отно-

шеніями $\frac{\xi}{\zeta}$ и $\frac{\eta}{\zeta}$ и умножая обѣ его части на ζm, гдѣ m есть степень уравненія. Такъ, напримѣръ, полагая

$$x=\frac{\xi}{\zeta} \quad \text{и} \quad y=\frac{\eta}{\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

въ общемъ уравненіи прямой

$$Ax+By+C=0,$$

дадимъ ему видъ

$$A\frac{\xi}{\zeta}+B\frac{\eta}{\zeta}+C=0$$

или по умноженіи на ζ

$$A\xi+B\eta+C\zeta=0.$$

Такое преобразованіе представляетъ въ сущности не что иное, какъ введеніе явнымъ образомъ подъ обозначеніемъ ζ той единицы, въ которой черезъ x и y выражаются прямолинейныя координаты. Полагая $\zeta=1$, возвращаемся снова къ декартовой системѣ.

Величины ξ, η, ζ, вводимыя такимъ образомъ, иногда называютъ *однородными координатами.* Не трудно показать, что онѣ, а слѣдовательно и декартовы координаты, представляютъ частный случай трилинейныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что ξ, η, ζ суть координаты точекъ относительно нѣкоторой трилинейной системы, будемъ имѣть, что три оси этой системы опредѣляются въ отдѣльности условіями

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=0.$$

Но изъ равенствъ (12) видно, что два первыя условія, независимо отъ послѣдняго, равнозначущи съ

$$x=0 \quad \text{и} \quad y=0;$$

послѣднее же, независимо отъ двухъ первыхъ, возможно только при

$$x=\infty \quad \text{и} \quad y=\infty.$$

Это означаетъ, что двѣ изъ осей разсматриваемой трилинейной системы совпадаютъ съ осями декартовой системы; третья же есть прямая безконечно удаленная.

Чтобы найти параметры отношенія разсматриваемой системы, положимъ

$$\xi=\eta=\zeta.$$

Въ такомъ случаѣ изъ равенствъ (12) получимъ

$$x=y=1.$$

Слѣдовательно, точка, для которой три координаты равны между собой, находится на равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ изъ осей. Разстояніе же ея отъ третьей есть безконечно большое.

Припоминая, что параметры отношенія должны быть обратно пропорціональны этимъ разстояніямъ, получимъ

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\mu_1}{\mu_3} = \infty,$$

откуда

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{и} \quad \mu_3 = 0 .$$

Итакъ декартова система координатъ представляетъ частный случай трилинейной системы, когда одна изъ осей послѣдней есть безконечно удаленная и въ то же время соотвѣтственный этой оси параметръ отношенія равняется нулю, два же другіе параметра отношенія равны между собою.

§ 3. Начала проективной геометріи.

127. Методъ координатъ въ томъ видѣ, какъ мы его изложили въ предыдущемъ, основывается на разсмотрѣніи точки, какъ элемента всѣхъ возможныхъ геометрическихъ фигуръ.

Координаты служатъ для опредѣленія каждой точки въ отдѣльности; системы же точекъ, подчиненныя общему условію и составляющія въ совокупности то, что называютъ геометрическими мѣстами или линіями, выражаются уравненіями.

Сама плоскость, на которой разсматриваются и изучаются фигуры, представляется при этомъ, какъ система всѣхъ возможныхъ помѣщающихся на ней точекъ, изъ которыхъ посредствомъ алгебраическихъ символовъ и уравненій выдѣляются лишь нѣкоторыя въ конечномъ или безконечномъ числѣ.

Одновременно съ этимъ воззрѣніемъ и, такъ сказать, въ параллель къ нему можетъ быть составлено другое на основаніи слѣдующихъ соображеній.

128. Выражая прямую линію общимъ уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0 ,$$

мы видимъ, что она опредѣляется вполнѣ тремя величинами

$$u_1 , u_2 , u_3 ,$$

пропорціональными его коэффиціентамъ A, B, C, точно такъ же, какъ тремя трилинейными координатами опредѣляется точка на плоскости.

Величины u_1, u_2, u_3 мы можемъ поэтому называть координатами прямой и съ тѣмъ вмѣстѣ самыя прямыя принимать за элементы, изъ которыхъ составляются разсматриваемыя и изучаемыя фигуры.

Всякое уравненіе, однородное относительно u_1, u_2, u_3 или, что все то же, всякое уравненіе, представляющее аналитическую зависимость между отношеніями s и t двухъ изъ этихъ величинъ къ третьей $\left(\text{напримѣръ } s = \frac{u_1}{u_3},\ t = \frac{u_2}{u_3}\right)$, выдѣляетъ изъ всѣхъ возможныхъ прямыхъ на плоскости систему прямыхъ, непрерывно слѣдующихъ одна за другой и могущихъ быть разсматриваемыми, какъ послѣдовательныя положенія прямой, непрерывно движущейся по плоскости.

Подобно тому, какъ точка, перемѣщаясь по плоскости, описываетъ линію, такъ прямая, при непрерывномъ своемъ движеніи по плоскости, *огибаетъ* нѣкоторую линію, оставаясь къ ней касательною. Поэтому можно сказать, что всякое уравненіе, содержащее, какъ перемѣнныя величины, координаты прямой, опредѣляетъ систему прямыхъ, огибающихъ нѣкоторую линію, или, что все то же, самую линію, огибаемую этими прямыми.

Одна и та же линія можетъ быть выражена или уравненіемъ, въ которомъ перемѣнныя суть координаты ея точекъ, или уравненіемъ, въ которомъ перемѣнныя суть координаты огибающихъ ее касательныхъ. Разсмотрѣніе прямой, какъ элемента фигуръ, опредѣляемаго координатами, принято поэтому называть методомъ касательныхъ координатъ (coordonnées tangentielles).

129. Посмотримъ, что выражаетъ уравненіе первой степени въ такихъ координатахъ, т. е. уравненіе

$$Mu_1+Nu_2+Pu_3=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ M, N, P суть извѣстныя постоянныя величины, а u_1, u_2, u_3 перемѣнныя координаты прямой, т. е. величины, пропорціональныя коэффиціентамъ уравненія

$$Ax+By+C=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

представляющаго относительно нѣкоторой декартовой системы любую прямую на плоскости.

Такъ какъ

$$\frac{u_1}{A}=\frac{u_2}{B}=\frac{u_3}{C}\,,$$

то данное уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$MA+NB+PC=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и представляетъ условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненія (2). Въ силу этого условія послѣднее уравненіе можетъ быть представлено такъ

$$P(Ax+By)-(MA+NB)=0$$

или

$$A(Px-M)+B(Py-N)=0$$

или

$$(Px-M)+k(Py-N)=0\,,$$

гдѣ

$$k=\frac{B}{A}=\frac{u_2}{u_1}\,,$$

и, вслѣдствіе неопредѣленности k, оно выражаетъ, очевидно, любую прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$Px-M=0 \quad \text{и} \quad Py-N=0\,.$$

Такимъ образомъ видимъ, что уравненіемъ (1) или, что все то же, условіемъ (3) выдѣляется, изъ всѣхъ возможныхъ прямыхъ на плоскости, пучекъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ опредѣленную точку. Иначе говоря, имъ опредѣляется эта точка.

И такъ, когда координатами опредѣляется на плоскости точка, то уравненіе первой степени относительно перемѣнныхъ, означающихъ координаты, выражаетъ прямую. Когда же координатами опредѣляется прямая, то уравненіе первой степени, въ которомъ перемѣнныя суть эти координаты, выражаетъ точку.

Алгебраическія уравненія высшихъ степеней, какъ въ тѣхъ такъ и въ другихъ координатахъ, выражаютъ кривыя линіи. При этомъ подобно тому, какъ по степенямъ уравненій въ обыкновенныхъ координатахъ линіи раздѣляются на порядки, такъ по степенямъ уравненій въ касательныхъ координатахъ онѣ подраздѣляются на *классы*. Линіи одного и того же порядка могутъ быть различныхъ классовъ и обратно.

130. Возможность принимать за элементы плоскихъ фигуръ прямыя линіи, точно такъ же какъ и точки, и притомъ взаимная опредѣляемость точекъ черезъ прямыя и обратно, составляютъ основаніе особаго геометрическаго принципа, называемаго *закономъ двойственности* или *взаимности*.

Выше было сказано (см. стр. 17), что изученіе геометріи при посредствѣ алгебраическаго анализа сводится на изученіе аналитическихъ соотношеній (уравненій, тождествъ) въ связи съ ихъ геометрическимъ истолкованіемъ. Теперь мы видимъ, что одному и тому же аналитическому выводу можно дать два различныя истолкованія, смотря потому, будутъ ли величинами, означающими координаты, опредѣляться точки или прямыя. Эти два истолкованія представляютъ два различныя геометрическія заключенія или предложенія, которыя принято называть *взаимными*, такъ какъ они взаимно переходятъ одно въ другое посредствомъ только замѣны точекъ прямыми и обратно.

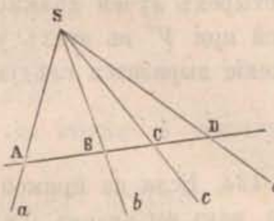
То же самое относится, очевидно, и къ самой постановкѣ вопросовъ и задачъ.

131. Система всѣхъ возможныхъ точекъ на плоскости обладаетъ тою особенностью, что для опредѣленія каждой ея точки въ отдѣльности необходимо дать два отношенія однородныхъ величинъ или двѣ величины (координаты), выраженныя въ извѣстныхъ единицахъ. То же самое имѣетъ мѣсто и для системы всѣхъ возможныхъ прямыхъ на плоскости. Обѣ эти системы называются поэтому системами *двухъ измѣреній*.

Всѣ точки, принадлежащія какой-нибудь линіи, или всѣ прямыя, огибающія линію (касательныя), представляютъ, напротивъ, системы *одного измѣренія*, такъ какъ въ нихъ для опредѣленія каждаго элемента требуется одно только отношеніе или одна величина, выраженная въ соотвѣтствующихъ единицахъ.

Простѣйшія изъ системъ одного измѣренія суть: *рядъ* всѣхъ возможныхъ точекъ на прямой и *пучекъ* всѣхъ возможныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку.

132. Если двѣ прямыя Sa и Sb (фиг. 34) принадлежатъ пучку и выражаются уравненіями $U=0$ и $V=0$, то, какъ мы видѣли, уравненіе всякой прямой Sc, принадлежащей тому же пучку, т. е. проходящей черезъ точку S, будетъ $U-kV=0$,



Фиг. 34.

гдѣ
$$k=m\frac{\sin aSc}{\sin cSb},$$
причемъ m есть постоянный множитель, не зависящій отъ положенія прямой Sc. Величиною k опредѣляется вполнѣ положеніе прямой Sc въ пучкѣ S, а потому различныя ея значенія можно разсматривать какъ координаты прямыхъ, принадлежащихъ этому пучку, или, какъ говорятъ, лучей его.

Если мы возьмемъ еще одинъ лучъ Sd въ пучкѣ S, выражаемый уравненіемъ
$$U-lV=0,$$
то отношеніе $\frac{k}{l}$ или
$$\frac{\sin aSc}{\sin cSb}:\frac{\sin aSd}{\sin dSb} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
уже не будетъ зависѣть отъ постояннаго m. Оно называется *сложнымъ* или *ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ лучей* Sa, Sb, Sc, Sd. Очевидно, что величиною его (и притомъ независимо ни отъ какихъ постоянныхъ) опредѣляется положеніе каждаго изъ этихъ четырехъ лучей, когда положеніе трехъ остальныхъ извѣстно.

133. Въ предыдущемъ два луча Sa и Sb были, такъ сказать, начальными или основными, по отношенію къ которымъ два другіе луча Sc и Sd опредѣлялись величинами k и l. Возьмемъ теперь четыре какіе нибудь луча, опредѣляемые величинами k, l, p, q, т. е. выражаемые уравненіями
$$U-kV=0,\; U-lV=0,\; U-pV=0,\; U-qV=0,$$
и постараемся найти ихъ сложное отношеніе.

Принимая два первые изъ этихъ лучей за начальные, т. е. полагая
$$U-kV=U' \quad \text{и} \quad U-lV=V',$$
будемъ имѣть
$$U=\frac{lU'-kV'}{l-k} \quad \text{и} \quad V=\frac{U'-V'}{l-k}.$$

Вслѣдствіе этого уравненія двухъ остальныхъ лучей будутъ:

$$lU' - kV' - p(U' - V') = 0$$

и

$$lU' - kV' - q(U' - V') = 0$$

или

$$U' - \frac{k-p}{l-p}V' = 0 \quad \text{и} \quad U' - \frac{k-q}{l-q}V' = 0.$$

Согласно же предыдущему, сложное отношеніе (4) разсматриваемыхъ четырехъ лучей должно равняться частному отъ раздѣленія множителей при V' въ этихъ уравненіяхъ. Слѣдовательно, это сложное отношеніе выразится слѣдующимъ образомъ чрезъ величины k, l, p, q:

$$\frac{k-p}{l-p} : \frac{k-q}{l-q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

134. Если на прямой линіи мы имѣемъ двѣ точки A и B (фиг. 34), то, какъ мы знаемъ (см. стр. 7), за величину, опредѣляющую положеніе какой угодно третьей точки C на этой прямой, т. е. за координату этой точки, можно принять отношеніе отрѣзковъ AC и CB. Для большей общности къ этому отношенію можетъ быть присоединенъ нѣкоторый постоянный множитель m, не зависящій отъ положенія точки C. Называя величины, опредѣляющія положеніе двухъ точекъ C и D, чрезъ k и l, будемъ имѣть

$$k = m\frac{AC}{CB} \quad \text{и} \quad l = m\frac{AD}{DB}.$$

Отношеніе этихъ величинъ

$$\frac{k}{l} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

не зависитъ, слѣдовательно, отъ постояннаго m.

Это отношеніе принято называть *сложнымъ* или *ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ* на прямой. Величиной его опредѣляется, очевидно, каждая изъ этихъ четырехъ точекъ, когда извѣстно положеніе трехъ остальныхъ.

Для четырехъ какихъ-нибудь точекъ на прямой, опредѣляемыхъ координатами k, l, p, q, сложное отношеніе будетъ выражаться также формулою (5). Полагая, напримѣръ, что этими величинами опредѣляются послѣдовательно точки A, B, C, D относительно нѣкоторыхъ двухъ начальныхъ или основныхъ точекъ M и N, будемъ имѣть

$$k = m\frac{MA}{AN}, \quad l = m\frac{MB}{BN}, \quad p = m\frac{MC}{CN}, \quad q = m\frac{MD}{DN},$$

откуда и получимъ

$$\frac{k-p}{l-p} : \frac{k-q}{l-q} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

135. Если четыре прямыя пучка Sa, Sb, Sc, Sd пересѣчемъ какою-нибудь прямою (фиг. 34), то сложное отношеніе четырехъ точекъ A,

B, C, D, получаемыхъ въ пересѣченіи, равняется сложному отношенію четырехъ лучей пучка. Это свойство было извѣстно еще древнимъ геометрамъ, но особенно важное значеніе оно получило лишь въ новой проективной геометріи. Въ справедливости его можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Изъ треугольниковъ ASC, CSB, ASD и DSB имѣемъ:

$$\frac{AC}{SC}=\frac{\sin aSc}{\sin CAS}; \quad \frac{CB}{SC}=\frac{\sin cSb}{\sin CBS};$$

$$\frac{AD}{SD}=\frac{\sin aSd}{\sin DAS}; \quad \frac{DB}{SD}=\frac{\sin dSb}{\sin DBS}.$$

По раздѣленіи перваго изъ этихъ равенствъ на второе и третьяго на четвертое получимъ

$$\frac{AC}{CB}=\frac{\sin aSc}{\sin cSb}\cdot\frac{\sin CBS}{\sin CAS} \quad \text{и} \quad \frac{AD}{DB}=\frac{\sin aSd}{\sin dSb}\cdot\frac{\sin DBS}{\sin DAS},$$

и такъ какъ здѣсь вторые множители вторыхъ частей равны между собою, то, раздѣливъ одно равенство на другое, будемъ имѣть

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{\sin aSc}{\sin cSb}:\frac{\sin aSd}{\sin dSb},$$

что и нужно было доказать.

Доказанное предложеніе позволяетъ намъ заключить, что, съ одной стороны, величина сложнаго отношенія четырехъ точекъ, получаемыхъ при пересѣченіи пучка прямою, не зависитъ отъ положенія этой сѣкущей, а съ другой, величина сложнаго отношенія четырехъ прямыхъ, соединяющихъ точки прямой линіи съ какою-нибудь точкою, не зависитъ отъ положенія этой послѣдней.

136. Въ томъ случаѣ, когда сложное отношеніе четырехъ точекъ на прямой или сложное отношеніе четырехъ лучей пучка равняется -1, говорятъ, что эти точки или эти лучи составляютъ *гармоническую группу*. Гармоническую группу точекъ называютъ также *гармоническимъ рядомъ*, а гармоническую группу лучей — *гармоническимъ пучкомъ*. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что при пересѣченіи гармоническаго пучка прямою получается гармоническій рядъ, и что, соединяя точки гармоническаго ряда съ какою-нибудь точкой плоскости, получаемъ гармоническій пучекъ.

Полагая, что четыре точки A, B, C, D составляютъ гармоническій рядъ, будемъ имѣть по самому опредѣленію

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1,$$

откуда

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

Слѣдовательно, точки C и D дѣлятъ разстояніе между точками A и B въ одинаковомъ отношеніи, но такъ какъ эти отношенія имѣютъ разные знаки, то одна изъ точекъ C и D находится внутри отрѣзка AB, а другая внѣ его. Точки C и D называютъ при этомъ *дѣлящими* отрѣзокъ AB *гармонически*.

Представивъ послѣднее равенство въ видѣ

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{CB}{DB}$$

или

$$\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD},$$

мы заключаемъ, что точки A и B въ свою очередь дѣлятъ отрѣзокъ CD гармонически.

Такимъ образомъ видимъ, что гармоническій рядъ состоитъ изъ двухъ паръ точекъ, и отрѣзокъ между точками каждой пары дѣлится точками другой пары въ одинаковомъ отношеніи или гармонически.

Изъ равенства (7) видно также, что когда точки A и B, составляющія одну пару гармоническаго ряда, неподвижны, а точка C перемѣщается внутри отрѣзка AB, то четвертая гармоническая точка D будетъ перемѣщаться внѣ этого отрѣзка и притомъ въ противоположномъ направленіи. При совпаденіи точки C съ A или B точка D также совпадаетъ съ нею. Если же точка C дѣлитъ отрѣзокъ AB пополамъ, то точка D есть безконечно удаленная (см. стр. 8).

137. Въ силу указаннаго выше соотношенія между гармоническими рядами и пучками, четыре луча гармоническаго пучка должны также составлять двѣ пары; при этомъ также говорятъ, что уголъ между лучами одной пары дѣлится гармонически лучами другой. Изъ двухъ лучей, дѣлящихъ гармонически данный уголъ, одинъ помѣщается, очевидно, внутри этого угла, а другой внѣ его, т. е. внутри угла, съ нимъ смежнаго.

Соотношеніе между углами, образуемыми четырьмя лучами Sa, Sb, Sc, Sd гармоническаго пучка, состоитъ въ слѣдующемъ:

$$\frac{\sin aSc}{\sin cSb} : \frac{\sin aSd}{\sin dSb} = -1$$

или

$$\frac{\sin aSc}{\sin cSb} = -\frac{\sin aSd}{\sin dSb}.$$

Если уравненія двухъ лучей пучка суть

$$U = 0 \quad \text{и} \quad V = 0,$$

а уравненія двухъ другихъ лучей

$$U - kV = 0 \quad \text{и} \quad V - lV = 0,$$

то заключаемъ, что пучекъ будетъ гармоническій, когда

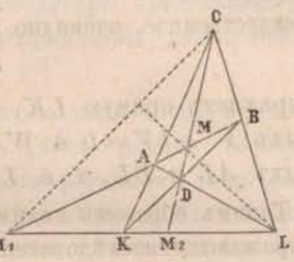
$$\frac{k}{l} = -1 \qquad \text{или} \qquad k + l = 0 .$$

Отсюда усматриваемъ въ частности, что стороны угла и два его бисектра составляютъ гармоническій пучекъ.

138. Если на плоскости даны четыре точки A, B, C, D, между которыми нѣтъ трехъ, лежащихъ на одной прямой (фиг. 35), то прямыхъ, соединяющихъ ихъ между собою, будетъ шесть:

$$AB,\ CD,\ AC,\ BD,\ AD,\ BC .$$

Фигура, составляемая этими точками и прямыми, называется *полнымъ четыреугольникомъ.* Данныя точки суть его вершины, а прямыя, ихъ соединяющія,— его стороны. Двѣ изъ сторонъ, не проходящія чрезъ одну и ту же вершину, называютъ противоположными, а точку ихъ пересѣченія *діагональною точкою.* Такихъ точекъ, очевидно, три: K, L, M.



Фиг. 35.

Во всякомъ полномъ четыреугольникѣ двѣ противоположныя стороны и двѣ прямыя, соединяющія точку ихъ пересѣченія съ двумя другими діагональными точками, составляютъ гармоническій пучекъ.

Это свойство выражаютъ еще такъ:

Діагональныя точки полнаго четыреугольника раздѣляютъ гармонически углы между его противоположными сторонами.

Покажемъ, напримѣръ, что уголъ ALC дѣлится гармонически прямыми LM и LK.

Пусть прямыя LA, LC и AC выражаются послѣдовательно уравненіями

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0 .$$

Въ такомъ случаѣ, полагая, что уравненія прямыхъ LM и AB суть

$$U' = 0 \qquad \text{и} \qquad V' = 0 ,$$

будемъ имѣть тождественно

$$U' = U - kV \qquad \text{и} \qquad V' = U - lW .$$

Полагая же

$$U' - V' = W'$$

и замѣчая, что

$$U' - V' = lW - kV ,$$

легко видѣть, что уравненіе

$$W' = 0$$

выражаетъ прямую, проходящую, съ одной стороны, черезъ точку пересѣченія прямыхъ $U' = 0$ и $V' = 0$, т. е. точку M, а съ другой, черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V=0$ и $W=0$, т. е. C. Эта прямая есть, слѣдовательно, CD.

Далѣе, уравненіе

$$W'-U=0,$$

тождественное, очевидно, съ

$$V'+kV=0,$$

выражаетъ прямую BD, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ $U=0$ и $W'=0$, т. е. D, и черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V=0$ и $V'=0$, т. е. B.

Наконецъ, уравненіе

$$(V'+kV)+lW=0,$$

тождественное, очевидно, съ

$$U+kV=0,$$

выражаетъ прямую LK, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V'+kV=0$ и $W=0$, т. е. K, и черезъ точку пересѣченія прямыхъ AL и BL, т. е. L.

Такимъ образомъ видимъ, что четыре прямыя LA, LC, LM и LK выражаются послѣдовательно уравненіями

$$U=0,\ V=0,\ U-kV=0,\ U+kV=0,$$

а это и показываетъ, согласно сказанному выше, что онѣ образуютъ пучекъ гармоническій.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что уголъ, образуемый прямыми AC и BD, раздѣляется гармонически точками L и M, а уголъ, образуемый прямыми AB и CD, — точками K и L.

139. Если на плоскости даны четыре прямыя AC, AD, BC, BD (фиг. 35), между которыми нѣтъ трехъ, проходящихъ черезъ одну точку, то точекъ пересѣченія каждыхъ двухъ изъ нихъ будетъ шесть, именно: A, B, C, D, K, L.

Фигура, составляемая этими элементами, называется *полнымъ четырехсторонникомъ*. Данныя прямыя суть его стороны, а точки ихъ пересѣченія его вершины. Двѣ вершины, не лежащія на одной и той же сторонѣ, называются противоположными, прямыя же, ихъ соединяющія — *діагоналями*. Такихъ прямыхъ, очевидно, три; точки ихъ пересѣченія суть M, M', M''.

На каждой діагонали полнаго четырехсторонника двѣ противоположныя вершины и двѣ точки пересѣченія съ другими діагоналями составляютъ гармоническую группу.

Это свойство выражается иначе такъ:

Діагонали полнаго четырехсторонника раздѣляютъ гармонически разстоянія между его вершинами.

Чтобы убѣдиться, напримѣръ, что точки K, L, M', M'' составляютъ гармоническій рядъ, примемъ четыре точки A, B, K, L за вершины полнаго четыреугольника. Такъ какъ діагональныя точки этого четыреугольника суть M', C, D, то заключаемъ, на основаніи предыдущаго, что пучекъ прямыхъ CK, CL, CM' и CD есть гармоническій. Отсюда же слѣдуетъ, что и рядъ точекъ K, L, M', M'', какъ получаемый при пересѣченіи этого пучка прямою KL, есть также гармоническій.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что ряды A, B, M, M' и C, D, M, M'' суть гармоническіе.

Доказанныя гармоническія свойства полныхъ четыреугольниковъ и четырехсторонниковъ, такъ же какъ и сами эти фигуры, представляются взаимными между собою и могутъ служить примѣрами для уясненія закона двойственности.

140. Если какой-нибудь пучекъ прямыхъ пересѣчемъ двумя прямыми, не принадлежащими ему, то каждый изъ двухъ рядовъ точекъ, получаемыхъ при пересѣченіи, можетъ быть разсматриваемъ, какъ *центральная проекція* или *перспектива* другого. При этомъ каждой точкѣ одного ряда будетъ соотвѣтствовать опредѣленная и единственная точка другого, и сложное отношеніе любыхъ четырехъ точекъ одного ряда будетъ равняться сложному отношенію соотвѣтственныхъ точекъ другого.

Всякія двѣ системы одного измѣренія, связанныя между собою такою зависимостью, какимъ бы образомъ эта послѣдняя ни устанавливалась, называются *проективно соотвѣтственными* или просто *проективными между собой* [1]). Проективно соотвѣтственными могутъ быть, слѣдовательно, также два пучка прямыхъ или пучекъ прямыхъ и рядъ точекъ.

141. Равенство сложныхъ отношеній, будучи характеристическимъ признакомъ проективнаго соотвѣтствія, въ свою очередь есть только слѣдствіе однозначности этой зависимости, т. е. того ея свойства, что каждому элементу одной системы соотвѣтствуетъ (алгебраически) только одинъ элементъ другой.

Въ силу этого свойства двѣ величины x и x', опредѣляющія положенія элементовъ въ той и другой системѣ, должны быть связаны алгебраическимъ уравненіемъ первой степени по отношенію къ каждой, т. е. уравненіемъ вида

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Если возьмемъ въ одной системѣ четыре элемента, опредѣляемые величинами k, l, p, q, и положимъ, что соотвѣтственные имъ элементы

[1]) Самая зависимость называется *проективнымъ соотвѣтствіемъ*. Кромѣ того ее называютъ *гомографіей*, а такъ же *коллинеаціей*.

другой системы опредѣляются величинами k', l', p', q', то будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} Akk' + Bk + Ck' + D = 0 \\ All' + Bl + Cl' + D = 0 \\ App' + Bp + Cp' + D = 0 \\ Aqq' + Bq + Cq' + D = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Помножая первое изъ этихъ равенствъ на $Ap' + B$, а третье на $Ak' + B$ и вычитая результаты, получимъ

$$(Ak'+B)(Ap'+B)(k-p)+(Ap'+B)(Ck'+D)-(Ak'+B)(Cp'+D)=0,$$

откуда

$$(Ak' + B)(Ap' + B)(k - p) = (AD - CB)(k' - p').$$

Точно такъ же изъ второго и третьяго равенствъ получимъ

$$(Al' + B)(Ap' + B)(l - p) = (AD - CB)(l' - p').$$

Раздѣливъ почленно эти послѣднія равенства, найдемъ

$$\frac{Ak' + B}{Al' + B} \cdot \frac{k - p}{l - p} = \frac{k' - p'}{l' - p'}.$$

Подобнымъ же образомъ, пользуясь первымъ, вторымъ и четвертымъ изъ равенствъ (9), будемъ имѣть

$$\frac{Ak' + B}{Al' + B} \cdot \frac{k - q}{l - q} = \frac{k' - q'}{l' - q'}.$$

Изъ этого и предыдущаго равенства, наконецъ, находимъ по раздѣленіи

$$\frac{k - p}{l - p} : \frac{k - q}{l - q} = \frac{k' - p'}{l' - p'} : \frac{k' - q'}{l' - q'} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Этотъ выводъ, представляющій равенство сложныхъ отношеній соотвѣтственныхъ элементовъ, есть не что иное, какъ результатъ исключенія коэффиціентовъ A, B, C, D изъ уравненій (9), а потому его можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} kk', & k, & k', & 1 \\ ll', & l, & l', & 1 \\ pp', & p, & p', & 1 \\ qq', & q, & q', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тождественность этого соотношенія съ (10) не трудно провѣрить.

142. Посредствомъ уравненія (8) вполнѣ опредѣляется зависимость между x и x', т. е. проективное соотвѣтствіе между двумя системами одного измѣренія, когда извѣстны величины, пропорціональныя коэффиціентамъ A, B, C, D. Эти же величины опредѣляются изъ трехъ первыхъ равенствъ группы (9), когда даны три пары величинъ k и k', l и l', p и p'.

Это показываетъ, что проективное соотвѣтствіе вполнѣ опредѣляется или устанавливается посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ.

143. Проективнымъ соотвѣтствіемъ могутъ быть связаны не только элементы двухъ различныхъ системъ, но и элементы одной и той же системы. Мы можемъ, напримѣръ, положить, что двѣ прямыя, между точками которыхъ имѣетъ мѣсто проективное соотвѣтствіе, совпадаютъ между собою, вслѣдствіе чего соотвѣтственными будутъ точки одной и той же прямой, разсматриваемыя, однако, какъ принадлежащія двумъ различнымъ рядамъ. То же самое можно сказать о двухъ пучкахъ, когда ихъ центры совпадаютъ [1]).

Во всѣхъ этихъ случаяхъ, такъ же какъ и для различныхъ системъ, соотвѣтствіе опредѣляется посредствомъ уравненія (8) или равенства сложныхъ отношеній (10). Но, при соотвѣтствіи между элементами одной и той же системы, x и x' въ уравненіи (8) могутъ означать координаты соотвѣтственныхъ элементовъ относительно однихъ и тѣхъ же начальныхъ или основныхъ элементовъ. Если при этомъ предположимъ, что $x = x'$, то будемъ имѣть, что соотвѣтственные элементы совпадаютъ.

Такой элементъ, который совпадаетъ съ своимъ соотвѣтствующимъ, называется *двойнымъ*.

При $x = x'$ уравненіе (8) обращается въ

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0$$

и въ этомъ видѣ опредѣляетъ двойные элементы. Такъ какъ оно второй степени, то даетъ для x два дѣйствительныя или мнимыя значенія. Отсюда заключаемъ, что двойныхъ элементовъ не можетъ быть болѣе двухъ или что ихъ вообще два, но они могутъ быть дѣйствительными или мнимыми.

Такъ, напримѣръ, при проективномъ соотвѣтствіи между точками прямой, на ней существуютъ двѣ (дѣйствительныя или мнимыя) двойныя точки, и, при проективномъ соотвѣтствіи между лучами пучка, въ немъ существуютъ два двойные луча.

144. Когда на прямой линіи разсматриваются два проективно соотвѣтственные ряда, то каждую точку этой прямой можно принимать за точку того или другого ряда, такъ что соотвѣтственныхъ ей точекъ будетъ, вообще говоря, двѣ. Если же какой-нибудь точкѣ прямой соотвѣтствуетъ одна и та же точка въ обоихъ рядахъ или, другими словами, если двѣ точки соотвѣтствуютъ другъ другу независимо отъ того, къ какому ряду каждую изъ нихъ относимъ, то ихъ называютъ *сопряженными*.

---

[1]) Центромъ пучка называютъ точку, въ которой пересѣкаются всѣ составляющія его прямыя.

Предполагая, что n и n' суть координаты двухъ сопряженныхъ точекъ, мы будемъ имѣть, что уравненіе (8) должно удовлетворяться какъ при $x=n$ и $x'=n'$, такъ и при $x=n'$, $x'=n$, т. е. должно быть

$$Ann' + Bn + Cn' + D = 0$$

и

$$Ann' + Bn' + Cn + D = 0,$$

откуда по вычитаніи

$$(B-C)(n-n') = 0$$

и если только n не равняется n', т. е. разсматриваемыя точки не совпадаютъ, то $B=C$. Уравненіе (8) обращается, слѣдовательно, въ

$$Axx' + B(x+x') + D = 0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

и такъ какъ въ этомъ видѣ оно симметрично относительно x и x', то каждыя двѣ точки, опредѣляемыя этими величинами, должны быть сопряженными.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что при проективномъ соотвѣтствіи между точками прямой или вовсе не существуетъ сопряженныхъ точекъ (кромѣ двойныхъ), или всѣ соотвѣтственныя между собою точки суть сопряженныя.

Соотвѣтствіе этого послѣдняго рода называется *инволюціоннымъ соотвѣтствіемъ* или просто *инволюціей*. Очевидно, что оно можетъ имѣть мѣсто и между элементами другихъ системъ первой степени.

145. Посредствомъ уравненія (11) вполнѣ опредѣляется инволюція, когда извѣстны величины, пропорціональныя коэффиціентамъ A, B, D.

Это позволяетъ заключить, что инволюція опредѣляется или устанавливается двумя парами сопряженныхъ элементовъ, и что между шестью величинами, опредѣляющими положеніе трехъ паръ сопряженныхъ элементовъ, должно существовать опредѣленное соотношеніе.

Полагая, что эти величины суть k и k', l и l', m и m', будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} Akk' + B(k+k') + D &= 0 \\ All' + B(l+l') + D &= 0 \\ Amm' + B(m+m') + D &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Если вычтемъ второе изъ этихъ равенствъ изъ перваго, то получимъ

$$A(kk' - ll') + B(k + k' - l - l') = 0$$

или

$$(Ak' + B)k - Bl' = (Al' + B)l - Bk',$$

откуда, отнимая отъ обѣихъ частей по $Ak'l'$, найдемъ

$$(Ak' + B)(k - l') = (Al' + B)(l - k').$$

Подобнымъ же образомъ второе и третье изъ равенствъ (12) даютъ

$$(Al'+B)(l-m')=(Am'+B)(m-l'),$$

и такъ же точно изъ перваго и третьяго изъ равенствъ (12) получимъ

$$(Am'+B)(m-k')=(Ak'+B)(k-m').$$

Перемноживъ почленно три послѣднія равенства, найдемъ по сокращеніи

$$(k-l')(l-m')(m-k')=(l-k')(m-l')(k-m')$$

или

$$\frac{(k-l')(l-m')(m-k')}{(k'-l)(l'-m)(m'-k)}=-1, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

что и представляетъ упомянутое соотношеніе. Такъ какъ оно есть результатъ исключенія изъ равенствъ (12) коэффиціентовъ A, B, D, то должно быть равнозначуще съ

$$\begin{vmatrix} kk', & k+k', & 1 \\ ll', & l+l', & 1 \\ mm', & m+m', & 1 \end{vmatrix}=0. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Тождественность этихъ двухъ соотношеній легко можетъ быть провѣрена.

146. Положимъ, что мы имѣемъ шесть прямыхъ линій, составляющихъ пучекъ и выражаемыхъ уравненіями:

$$\left.\begin{matrix} U-kV=0, & U-k'V=0 \\ U-lV=0, & U-l'V=0 \\ U-mV=0, & U-m'V=0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Перемножая ихъ первыя части по двѣ, получимъ три многочлена второй степени:

$$\begin{aligned} (U-kV)(U-k'V)&=U^2-(k+k')\,UV+kk'V^2 \\ (U-lV)(U-l'V)&=U^2-(l+l')\,UV+ll'V^2 \\ (U-mV)(U-m'V)&=U^2-(m+m')\,UV+mm'V^2. \end{aligned}$$

Если допустимъ, что сумма произведеній этихъ многочленовъ на нѣкоторые постоянные множители p, q, r тождественно равняется нулю, то не трудно убѣдиться, что шесть разсматриваемыхъ прямыхъ составляютъ три пары сопряженныхъ лучей инволюціоннаго пучка.

Въ самомъ дѣлѣ, допускаемое тождество

$$p(U-kV)(U-k'V)+q(U-lV)(U-l'V)+r(U-mV)(U-m'V)=0\ldots (16)$$

можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} U^2(p+q+r)-UV[p(k+k')+q(l+l')+r(m+m')]+ \\ +V^2(pkk'+qll'+rmm')=0, \end{aligned}$$

и для того, чтобы оно имѣло мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ, необходимо должно быть

$$\left.\begin{array}{c} p+q+r=0 \\ p(k+k')+q(l+l')+r(m+m')=0 \\ pkk'+qll'+rmm'=0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Эти же послѣднія равенства, которыя можно разсматривать, какъ три однородныя уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными p, q, r, возможны совмѣстно (см. стр. 27) только при условіи

$$\begin{vmatrix} 1 \; , & 1 \; , & 1 \\ k+k' \; , & l+l' \; , & m+m' \\ kk' \; , & ll' \; , & mm' \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

тождественномъ съ (14) или (13), которыми, какъ показано, и выражается инволюціонное соотвѣтствіе.

Очевидно, что и обратно, при условіи, что шесть прямыхъ (15) составляютъ инволюцію, т. е. при существованіи соотношенія (14) или (13), имѣютъ мѣсто равенства (17) и съ тѣмъ вмѣстѣ и тождество (16).

Послѣднее можетъ, слѣдовательно, также служить признакомъ или условіемъ, при которомъ прямыя (15) составляютъ инволюцію.

При помощи этого признака мы можемъ, напримѣръ, убѣдиться, что три пары лучей, дѣлящихъ гармонически одинъ и тотъ же уголъ, составляютъ инволюцію.

Если стороны угла выражаются уравненіями $U=0$ и $V=0$, то уравненія этихъ трехъ паръ лучей будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} U-kV=0\, , \;\; U+kV=0 \\ U-lV=0\, , \;\; U+lV=0 \\ U-mV=0\, , \;\; U+mV=0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Условіе (16) принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ

$$p(U^2-k^2V^2)+q(U^2-l^2V^2)+r(U^2-m^2V^2)=0$$

и, очевидно, удовлетворяется тождественно при

$$p=l^2-m^2\, , \; q=m^2-k^2\, , \; r=k^2-l^2\, .$$

Въ томъ же можно убѣдиться, замѣчая, что уравненія (18) представляютъ частный случай уравненій (15), когда

$$k'=-k\, , \; l'=-l\, , \; m'=-m\, ,$$

а въ такомъ случаѣ существованіе соотношеній (13) и (14) очевидно.

Изъ сказаннаго заключаемъ также, что и пары точекъ, дѣлящихъ гармонически отрѣзокъ между двумя данными точками, составляютъ инволюцію.

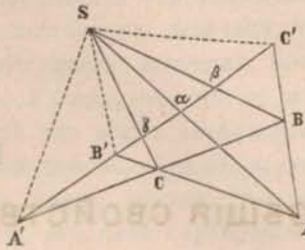
147. Покажемъ въ заключеніе, что шесть прямыхъ линій, соединяющихъ произвольную точку плоскости съ шестью вершинами полнаго четырехсторонника, составляютъ инволюціонный пучекъ.

Пусть стороны разсматриваемаго четырехсторонника BA', AB', AC' и $A'C'$ (фиг. 36) выражаются послѣдовательно уравненіями:

$$U_1=0\,,\ U_2=0\,,\ U_3=0\,,\ U_4=0\,,$$

и пусть кромѣ того уравненія трехъ прямыхъ, соединяющихъ произвольную точку S съ тремя точками A', B', C', въ которыхъ четвертая сторона пересѣкаетъ три остальныя, будутъ послѣдовательно

$$V_1=0\,,\ V_2=0\,,\ V_3=0\,.\ .\ .\ (19)$$



Фиг. 36.

Въ такомъ случаѣ должны существовать три такія постоянныя величины k, l и m, что будемъ имѣть тождественно

$$V_1=U_4-kU_1\,,\ V_2=U_4-lU_2\,,\ V_3=U_4-mU_3\,.$$

Такъ какъ при этомъ

$$V_2-V_3=mU_3-lU_2\,,$$
$$V_3-V_1=kU_1-mU_3\,,$$
$$V_1-V_2=lU_2-kU_1\,,$$

то убѣждаемся, что три уравненія

$$V_2-V_3=0\,,\ V_3-V_1=0\,,\ V_1-V_2=0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (20)$$

представляютъ прямыя, соединяющія точку S съ тремя точками A, B, C пересѣченія прямыхъ

$$U_1=0\,,\ U_2=0\,,\ U_3=0\,.$$

Если перемножимъ попарно первыя части уравненій (19) и (20), то будемъ имѣть тождественно

$$V_1(V_2-V_3)+V_2(V_3-V_1)+V_3(V_1-V_2)=0\,.$$

Слѣдовательно, эти уравненія удовлетворяютъ условію (16) при $p=q=r=1$, а потому выражаемые ими лучи пучка S составляютъ инволюцію.

Сопряженными лучами будутъ, очевидно, тѣ, которые проходятъ черезъ противоположныя вершины A и A', B и B', C и C'.

148. Изъ сказаннаго легко убѣдиться также, что шесть точекъ, въ которыхъ стороны полнаго четыреугольника пересѣкаются произвольною прямою, составляютъ инволюцію.

Въ самомъ дѣлѣ, мы предполагали въ предыдущемъ, что стороны четырехсторонника и точка S (фиг. 36) взяты произвольно; но очевидно, что для построенія той же самой фигуры можно взять произвольно четыре точки A, B, C, S и прямую $A'C'$. Принимая эти четыре точки за вершины полнаго четыреугольника, будемъ имѣть, что его стороны пересѣкаются прямою $A'C'$ въ тѣхъ же шести точкахъ α, β, γ, A', B', C', въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ пучекъ S, по доказанному инволюціонный. Отсюда слѣдуетъ, что и эти шесть точекъ также составляютъ инволюцію.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ОБЩІЯ СВОЙСТВА ЛИНІЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Предварительныя замѣчанія.

149. Линіи второго порядка суть простѣйшія и, вмѣстѣ съ тѣмъ, наиболѣе изученныя изъ алгебраическихъ *кривыхъ.* Еще въ глубокой древности онѣ были изучаемы греческими философами и геометрами, какъ получающіяся отъ пересѣченія различными плоскостями прямого круглаго конуса. Это составляетъ причину, по которой имъ и въ настоящее время дается названіе *коническихъ сѣченій.* Первое извѣстное систематическое сочиненіе объ этихъ кривыхъ принадлежитъ Аполлонію, ученому александрійской школы, жившему около 247 года до Р. X. Съ возникновеніемъ Аналитической Геометріи и введеніемъ метода координатъ, изученіе коническихъ сѣченій сдѣлалось наиболѣе легкимъ, и теорія этихъ кривыхъ пріобрѣла такую общность, какой не могла имѣть до того времени.

150. Самый общій видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными есть

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

При данной прямолинейной системѣ координатъ это уравненіе представляетъ вполнѣ опредѣленную линію только тогда, когда въ немъ коэффиціенты A, B, ... F имѣютъ вполнѣ опредѣленныя алгебраическія значенія. Разсматриваемое въ предположеніи, что коэффиціенты его суть какія угодно алгебраическія величины, это уравненіе можетъ относительно всякой прямолинейной системы координатъ представлять любую линію второго порядка, а потому и называется *общимъ уравненіемъ* этихъ кривыхъ. Понятно, что всѣ заключенія, выводимыя изъ него въ этомъ предположеніи, будутъ относиться ко всѣмъ возможнымъ линіямъ второго порядка и будутъ, слѣдовательно, представлять *общія свойства* этихъ линій.

151. Когда линія второго порядка должна быть найдена по какимъ-нибудь геометрическимъ условіямъ, то, предполагая, согласно сейчасъ

сказанному, что эта линія выражается уравненіемъ (1), мы будемъ имѣть дѣло съ опредѣленіемъ по даннымъ условіямъ коэффиціентовъ этого уравненія.

Но такъ какъ значеніе уравненія (1) не измѣняется отъ умноженія всѣхъ его коэффиціентовъ на одну и ту же постоянную величину, то вопросъ сводится къ нахожденію какихъ-либо шести величинъ, пропорціональныхъ коэффиціентамъ A, B, ... F, или, что все то же, къ нахожденію отношеній какихъ-нибудь пяти изъ этихъ коэффиціентовъ къ шестому. Эти отношенія суть, слѣдовательно, *параметры* линіи второго порядка (см. стр. 32), и потому можно сказать, что общее уравненіе линій второго порядка зависитъ отъ пяти параметровъ.

Если линія второго порядка проходитъ черезъ начало координатъ, то въ уравненіи (1) послѣдній коэффиціентъ F долженъ равняться нулю. Если же линія не проходитъ черезъ начало координатъ, то раздѣляя обѣ части уравненія (1) на F, мы можемъ послѣдній коэффиціентъ сдѣлать равнымъ единицѣ. Уравненіе линіи второго порядка можетъ, слѣдовательно, быть разсматриваемо въ этомъ случаѣ въ видѣ

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + 1 = 0,$$

гдѣ A', B', ... E' суть отношенія пяти первыхъ коэффиціентовъ уравненія (1) къ послѣднему.

151. *Линія второго порядка вполнѣ опредѣляется пятью принадлежащими ей точками.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ даны пять точекъ: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) и (x_5, y_5). Предполагая, что линія второго порядка, проходящая чрезъ эти точки, выражается уравненіемъ (1), и подставляя въ него на мѣсто неизвѣстныхъ x и y координаты каждой изъ данныхъ точекъ, мы получимъ пять равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_5^2 + Dx_5 + Ey_5 + F = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Относительно коэффиціентовъ A, B .... F эти равенства суть однородныя уравненія первой степени, а потому изъ нихъ (см. стр. 27) величины, пропорціональныя этимъ коэффиціентамъ, могутъ быть найдены. При этомъ для каждаго отношенія двухъ какихъ-нибудь коэффиціентовъ получается единственное значеніе. Такимъ образомъ, предложеніе доказано.

Изъ сказаннаго видимъ, между прочимъ, что уравненіе линіи второго порядка, проходящей чрезъ пять данныхъ точекъ, получается, какъ результатъ исключенія коэффиціентовъ A, B .... F изъ шести уравненій (1) и (2).

Въ частныхъ случаяхъ, при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между координатами данныхъ точекъ, изъ уравненій (2) могутъ получаться неопредѣленныя значенія для отношеній искомыхъ коэффиціентовъ. Это показываетъ, что пять данныхъ точекъ, вполнѣ достаточныя для опредѣленія проходящей чрезъ нихъ кривой второго порядка по своему числу, могутъ быть недостаточны для этой цѣли по своему расположенію.

152. Предположимъ теперь, что кривая второго порядка дана, и постараемся найти точки ея пересѣченія съ прямою.

Пусть данная кривая выражается общимъ уравненіемъ (1) и пусть уравненіе разсматриваемой прямой будетъ взято въ видѣ

$$y = mx + n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Чтобы найти координаты искомыхъ точекъ, нужно эти уравненія рѣшить совмѣстно.

Исключая изъ нихъ неизвѣстное y, получимъ

$$Ax^2 + Bx(mx+n) + C(mx+n)^2 + Dx + E(mx+n) + F = 0$$

или

$$Mx^2 + Nx + P = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ полагается

$$M = A + Bm + Cm^2,$$
$$N = (B + 2Cm)n + (D + Em),$$
$$P = Cn^2 + En + F.$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія мы имѣемъ квадратное уравненіе (4). Каждой найденной изъ него абсциссѣ соотвѣтствуетъ единственная ордината, которая опредѣлится изъ уравненія (3).

Уравненіе (4), смотря по значенію его коэффиціентовъ M, N, P, можетъ имѣть или два дѣйствительные, или два мнимые корня. Такими же въ соотвѣтственныхъ случаяхъ будутъ и искомыя точки пересѣченія. Не дѣлая различія между этими случаями, можно сказать, что *линія второго порядка пересѣкается всякою прямою въ двухъ* (дѣйствительныхъ или мнимыхъ) *точкахъ*.

153. Когда двѣ точки пересѣченія дѣйствительныя и различныя, то прямая (3) называется сѣкущей, а отрѣзокъ ея между точками пересѣченія—*хордою*.

Когда уравненіе (4) имѣетъ равные корни, то двѣ точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, хорда исчезаетъ или равняется нулю. Въ этомъ случаѣ прямая (3) называется *касательною* къ кривой (1).

Такъ какъ мнимые корни всякаго квадратнаго уравненія съ одною неизвѣстною суть величины сопряженныя, то и точки пересѣченія кривой второго порядка съ прямою въ томъ случаѣ, когда онѣ мнимыя, будутъ сопряженными (см. стр. 63). Хотя дѣйствительнаго пересѣченія въ этомъ случаѣ не происходитъ и, слѣдовательно, не получается дѣйствительной хорды, но, тѣмъ не менѣе, можно говорить о хордѣ, образуемой прямою (3), какъ о нѣкоторой алгебраической величинѣ, и мы знаемъ уже (см. стр. 64), что средина такой хорды, какъ средина разстоянія между двумя сопряженными мнимыми точками, есть всегда точка дѣйствительная.

154. Если случится, что въ уравненіи (4) коэффиціентъ M равняется нулю и, слѣдовательно, угловой коэффиціентъ въ уравненіи прямой (3) удовлетворяетъ условію

$$A+Bm+Cm^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то будемъ имѣть

$$Nx+P=0,$$

откуда опредѣляется только одна точка пересѣченія. Но не трудно показать, что въ этомъ случаѣ другая точка пересѣченія прямой (3) съ кривой (1) будетъ безконечно удаленною (см. стр. 8).

Въ самомъ дѣлѣ, рѣшеніе уравненія (4) представляется, какъ извѣстно, въ видѣ

$$x=\frac{-N\pm\sqrt{N^2-4MP}}{2M}.$$

Но такъ какъ при всякихъ значеніяхъ M, N и P имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{-N+\sqrt{N^2-4MP}}{2M}=\frac{2P}{-N-\sqrt{N^2-4MP}}$$

и

$$\frac{-N-\sqrt{N^2-4MP}}{2M}=\frac{2P}{-N+\sqrt{N^2-4MP}},$$

то этому рѣшенію можно дать видъ

$$x=\frac{2P}{-N\mp\sqrt{N^2-4MP}},$$

откуда видно, что при $M=0$ одно изъ значеній x есть $x=-\frac{P}{N}$, а другое $x=\frac{2P}{0}=\infty$.

Такъ какъ условіе (5) не содержитъ вовсе n, то при этомъ условіи линія второго порядка, выражаемая общимъ уравненіемъ, пересѣкается въ безконечно удаленной точкѣ не только прямою (3), но и всякою прямою, съ ней параллельною.

Изъ сказаннаго легко заключить, что при $A=0$ линія, выражаемая уравненіемъ (1), пересѣкается въ безконечно удаленной точкѣ всѣми прямыми, параллельными оси абсциссъ, а при $C=0$ всѣми прямыми, параллельными оси ординатъ.

155. Уравненіе (3) представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ, когда въ немъ $n=0$ и когда, слѣдовательно, оно имѣетъ видъ

$$y=mx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Для того, чтобы эта прямая встрѣчала кривую (1) въ безконечно удаленной точкѣ, нужно дать угловому коэффиціенту значеніе, удовлетворяющее условію (5).

Но изъ условія (5), какъ квадратнаго уравненія относительно m, получается для этой величины два значенія дѣйствительныя или мнимыя. Это показываетъ, что чрезъ начало координатъ проходятъ всегда двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, пересѣкающія кривую второго порядка въ безконечно удаленныхъ точкахъ.

Чтобы найти уравненія этихъ прямыхъ, нужно величину m, опредѣленную изъ условія (5), внести въ уравненіе (6), или обратно; иначе говоря, нужно исключить m изъ этихъ двухъ уравненій.

Результатъ исключенія будетъ уравненіе

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0\,,$$

которое, какъ мы уже знаемъ (см. стр. 67), представляетъ совокупность двухъ прямыхъ дѣйствительныхъ и различныхъ, когда $B^2-4AC>0$, дѣйствительныхъ и совпадающихъ, когда $B^2-4AC=0$, и, наконецъ, мнимыхъ, когда $B^2-4AC<0$.

И такъ, однородное уравненіе, которое получаемъ, приравнивая нулю три члена второго измѣренія въ общемъ уравненіи линіи второго порядка, выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ начало координатъ и встрѣчающихъ эту линію въ безконечно удаленныхъ точкахъ.

156. Такъ какъ принимается, что на каждой прямой безконечно удаленная точка единственна (см. стр. 8), то всѣ параллельныя прямыя, встрѣчающія линію второго порядка въ безконечности, имѣютъ съ нею одну и ту же общую безконечно удаленную точку. Отсюда слѣдуетъ, что линія второго порядка не можетъ имѣть другихъ безконечно удаленныхъ точекъ кромѣ тѣхъ, въ которыхъ она пересѣкается прямыми, проходящими черезъ начало координатъ. Это показываетъ, что линія второго порядка не можетъ имѣть болѣе двухъ безконечно удаленныхъ точекъ.

Смотря по числу дѣйствительныхъ безконечно удаленныхъ точекъ, линіи второго порядка раздѣляются на три рода: 1) *эллипсы*, не имѣющіе вовсе безконечно удаленныхъ точекъ, 2) *гиперболы*, имѣющія двѣ различныя безконечно удаленныя точки, и 3) *параболы*, имѣющія двѣ совпадающія безконечно удаленныя точки.

На основаніи предыдущаго видимъ, что общее уравненіе второй степени (1) должно представлять эллипсъ, когда $B^2-4AC<0$, гиперболу, когда $B^2-4AC>0$, и параболу, когда $B^2-4AC=0$.

Ниже мы разсмотримъ болѣе подробно значенія общаго уравненія въ этихъ трехъ случаяхъ.

157. Для того, чтобы прямая (3) была касательною къ кривой второго порядка, выражаемой общимъ уравненіемъ, нужно, чтобы уравненіе (4), опредѣляющее абсциссы точекъ пересѣченія этихъ линій, имѣло равные корни, что, какъ извѣстно, можетъ имѣть мѣсто только при условіи

$$N^2-4MP=0$$

или

$$[(B+2Cm)n+(D+Em)]^2=4(A+Bm+Cm^2)(Cn^2+En+F)\,, \quad . \ . \ (7)$$

которое, слѣдовательно, и можетъ быть разсматриваемо, какъ условіе соприкосновенія.

Въ предположеніи, что прямая проходитъ черезъ начало координатъ, это условіе обращается въ

$$(D+Em)^2=4(A+Bm+Cm^2)\,F$$

или

$$(E^2-4CF)m^2+2(DE-2BF)m+(D^2-4AF)=0\,. \quad . \ . \ . \ (8)$$

Изъ него, какъ квадратнаго уравненія относительно m, получаются для этой величины два дѣйствительныя или мнимыя значенія. Это показываетъ, что черезъ начало координатъ проходятъ двѣ дѣйствительныя или мнимыя касательныя ко всякой линіи второго порядка.

Такъ какъ всякая точка плоскости можетъ быть принята за начало координатъ и относительно всякой системы координатъ линія второго порядка выражается уравненіемъ вида (1), то заключаемъ изъ сказаннаго, что *чрезъ всякую точку проходятъ двѣ дѣйствительныя или мнимыя касательныя къ какой угодно линіи второго порядка.*

Отсюда слѣдуетъ, что въ касательныхъ координатахъ (см. стр. 87) линіи второго порядка должны выражаться также уравненіями второй степени. Это значитъ, что *всякая линія второго порядка есть въ то же время второго класса* (см. стр. 88).

158. Чтобы получить уравненія касательныхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, нужно величину m, опредѣленную изъ условія (8), подставить въ уравненіе прямой

$$y=mx\,,$$

или обратно. Другими словами, нужно исключить m изъ этихъ двухъ уравненій. Результатъ исключенія представляется въ видѣ однороднаго уравненія

$$(D^2-4AF)\,x^2+2\,(DE-2BF)\,xy+(E^2-4CF)\,y^2=0\,,$$

выражающаго совокупность этихъ двухъ касательныхъ.

Изъ этого уравненія видимъ, что двѣ касательныя изъ начала координатъ будутъ дѣйствительныя, когда

$$(DE-2BF)^2>(D^2-4AF)(E^2-4CF),$$

и мнимыя, когда

$$(DE-2BF)^2<(D^2-4AF)(E^2-4CF).$$

Въ случаѣ, когда

$$(DE-2BF)^2=(D^2-4AF)(E^2-4CF)\,. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

обѣ эти касательныя совпадаютъ и потому можно сказать, что чрезъ начало координатъ проходитъ въ этомъ случаѣ только одна касательная къ линіи (1).

Равенству (9), которое, такимъ образомъ, есть условіе существованія только одной касательной, проходящей черезъ начало координатъ, можно дать видъ

$$F(4ACF-AE^2-CD^2+BDE-B^2F)=0\,.$$

Оно можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда

$$F=0\,,$$

или когда

$$4ACF-AE^2-CD^2+BDE-B^2F=0\,.$$

Въ первомъ изъ этихъ случаевъ, линія, выражаемая уравненіемъ (1), проходитъ черезъ начало координатъ или, другими словами, точка, черезъ которую проводится касательная, лежитъ на самой кривой.

Во второмъ же случаѣ, какъ было показано выше (см. стр. 70), общее уравненіе (1) представляетъ совокупность двухъ прямыхъ. Чтобы пояснить этотъ случай, замѣтимъ, что подъ касательной мы разумѣемъ такую прямую, которая съ линіей, выражаемой уравненіемъ (1), имѣетъ двѣ совпадающія общія точки. Когда уравненіе (1) выражаетъ двѣ прямыя, то прямая, проходящая черезъ начало координатъ и встрѣчающая ихъ въ двухъ совпадающихъ точкахъ, будетъ, очевидно, одна. Это есть прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ. Исключеніе представляетъ только тотъ случай, когда обѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ (1), сами совпадаютъ, и когда условіе (8) имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи m.

§ 2. Центръ и діаметры.

159. Мы видѣли выше, что для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія линіи второго порядка

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

съ прямою

$$y=mx+n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

служитъ уравненіе

$$Mx^2+Nx+P=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} M &= A + Bm + Cm^2 \\ N &= (B + 2Cm)\,n + (D + Em) \\ P &= Cn^2 + En + F \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Предположимъ, что сѣкущая прямая (2) проходитъ черезъ начало координатъ и, слѣдовательно, $n = 0$.

Если при этомъ двѣ точки пересѣченія ея съ кривою (1) будутъ симметричны относительно начала координатъ (см. стр. 4), то корни уравненія (3) должны имѣть равныя абсолютныя величины и противоположные знаки.

Это можетъ быть только тогда, когда въ этомъ уравненіи коэффиціентъ N равняется нулю, т. е., какъ видно изъ (4), когда

$$D + Em = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Это послѣднее равенство есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ хорда, образуемая прямой

$$y = mx,$$

имѣетъ средину въ началѣ координатъ или дѣлится въ началѣ координатъ пополамъ.

160. Когда $D = 0$ и $E = 0$, то это условіе выполняется, каково бы ни было m, т. е. каково бы ни было направленіе хорды. Это позволяетъ сдѣлать слѣдующее заключеніе:

Если въ уравненіи, представляющемъ линію второго порядка, не существуетъ членовъ съ первыми степенями неизвѣстныхъ, то всѣ хорды, проходящія черезъ начало координатъ, дѣлятся въ немъ пополамъ.

Очевидно, что справедливо и обратное заключеніе, потому что условіе (5) можетъ выполняться при всякомъ m только тогда, когда $D = 0$ и $E = 0$.

Точка, въ которой дѣлятся пополамъ всѣ проходящія черезъ нее хорды кривой второго порядка, называется *центромъ* этой кривой. Можно, слѣдовательно, сказать, что центръ кривой второго порядка есть точка, относительно которой всѣ точки этой линіи расположены симметрично.

161. Предыдущимъ заключеніемъ можно воспользоваться, чтобы найти центръ линіи второго порядка, данной общимъ уравненіемъ (1).

Для этого положимъ, что точка, которой координаты суть

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b,$$

есть центръ, и измѣнимъ систему координатъ такъ, чтобы начало новой системы находилось въ этой точкѣ и оси были параллельны прежнимъ. Формулы такого преобразованія координатъ будутъ:

$$x = x' + a \quad \text{и} \quad y = y' + b,$$

и, слѣдовательно, уравненіе кривой (1) обратится въ

$$A(x'+a)^2+B(x'+a)(y'+b)+C(y'+b)^2+D(x'+a)+E(y'+b)+F=0$$

или

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Aa+Bb+D)x'+(Ba+2Cb+E)y'+$$
$$+Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0.$$

На основаніи предыдущаго, въ этомъ уравненіи не должно существовать членовъ съ первыми степенями неизвѣстныхъ, т. е. должно быть

$$2Aa+Bb+D=0 \quad \text{и} \quad Ba+2Cb+E=0.$$

Это значитъ, что координаты a и b центра относительно первоначальной системы координатъ должны удовлетворять двумъ уравненіямъ первой степени:

$$2Ax+By+D=0 \quad \text{и} \quad Bx+2Cy+E=0. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности выражаетъ прямую и центръ есть, слѣдовательно, точка пересѣченія этихъ прямыхъ.

Такъ какъ точка пересѣченія всякихъ двухъ прямыхъ есть единственная, то заключаемъ, что *всякая линія второго порядка можетъ имѣть только одинъ центръ.*

162. Рѣшая совмѣстно уравненія (6), получимъ для координатъ центра слѣдующія выраженія чрезъ коэффиціенты уравненія кривой

$$a=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}, \quad b=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}.$$

Эти выраженія представляютъ конечныя и опредѣленныя величины, когда $B^2-4AC<0$ или когда $B^2-4AC>0$. Если же $B^2-4AC=0$, то величины эти суть безконечно большія. На этомъ основаніи всѣ кривыя второго порядка раздѣляются на два отдѣла: 1) кривыя *центральныя*, имѣющія опредѣленный центръ, и 2) кривыя, *не имѣющія центра* или, точнѣе говоря, имѣющія центромъ безконечно удаленную точку.

Къ первому отдѣлу принадлежатъ всѣ эллипсы и гиперболы, ко второму только параболы.

Наконецъ, возможенъ случай неопредѣленнаго центра, когда оба уравненія (6) выражаютъ одну и ту же прямую (см. стр. 42) и когда, слѣдовательно, каждая точка этой прямой имѣетъ свойства центра. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ уравненіе второй степени (1) представляетъ не кривую линію, а совокупность двухъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ неопредѣленности выраженій для a и b имѣемъ

$$2CD-BE=0,\ 2AE-BD=0,\ B^2-4AC=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Помножая первое изъ этихъ равенствъ на $-D$, второе на $-E$, третье на $-2F$ и складывая результаты, получимъ

$$2(4ACF-CD^2-AE^2+BDE-B^2F)=0,$$

а это, какъ извѣстно, и есть то условіе, при которомъ уравненіе (1) выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ (см. стр. 70).

163. Если изъ двухъ послѣднихъ равенствъ (7) опредѣлимъ C и E и подставимъ въ уравненіе (1), то это послѣднее, по умноженіи всѣхъ коэффиціентовъ на $4A$, приметъ видъ

$$4A^2x^2+4ABxy+B^2y^2+4ADx+2BDy+4AF=0$$

или

$$(2Ax+By)^2+2D(2Ax+By)+4AF=0$$

или

$$(2Ax+By+D)^2-(D^2-4AF)=0.$$

Здѣсь первая часть разлагается на два множителя первой степени, которые, будучи приравнены отдѣльно нулю, дадутъ два уравненія первой степени

$$2Ax+By+D+\sqrt{D^2-4AF}=0$$

и

$$2Ax+By+D-\sqrt{D^2-4AF}=0,$$

представляющія двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, параллельныя съ прямой, выражаемой уравненіями (6).

И такъ, въ случаѣ неопредѣленнаго центра, двѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ второй степени, параллельны между собою.

164. Мы видѣли (см. стр. 107), что совокупность двухъ касательныхъ къ кривой второго порядка, проходящихъ черезъ начало координатъ, выражается уравненіемъ

$$(D^2-4AF)x^2+2(DE-2BF)xy+(E^2-4CF)y^2=0.$$

Въ томъ случаѣ, когда начало координатъ находится въ центрѣ и когда, слѣдовательно, $D=E=0$, это уравненіе обращается въ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

которое, какъ было показано выше (см. стр. 106), представляетъ совокупность двухъ прямыхъ, встрѣчающихъ кривую въ безконечно удаленныхъ точкахъ. Отсюда заключаемъ, что двѣ прямыя линіи, проходящія черезъ центръ кривой второго порядка и встрѣчающія ее въ безконечности, суть касательныя къ этой кривой въ безконечно удаленныхъ точкахъ. Такія прямыя называются *ассимптотами*.

Изъ предыдущаго легко заключить, что ассимптоты гиперболы суть дѣйствительныя прямыя, а ассимптоты эллипса мнимыя.

165. Обозначимъ черезъ x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты концовъ хорды, образуемой прямою (2), т. е. точекъ, въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ кривую (1). Въ такомъ случаѣ координаты средины этой хорды опредѣлятся по формуламъ:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Но абсциссы x_1 и x_2 суть, какъ мы знаемъ, корни уравненія (3), а потому по свойству квадратныхъ уравненій, должно быть

$$x_1 + x_2 = -\frac{N}{M}$$

или, по замѣнѣ M и N ихъ значеніями,

$$x_1 + x_2 = -\frac{(B+2Cm)\,n + (D+Em)}{A+Bm+Cm^2},$$

откуда для абсциссы средины хорды получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$x = -\frac{(B+2Cm)\,n + (D+Em)}{2\,(A+Bm+Cm^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Такъ какъ соотвѣтствующая ордината можетъ быть опредѣлена изъ уравненія прямой (2), то для нея получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$y = -\frac{(B+2Cm)\,mn + (D+Em)\,m}{2\,(A+Bm+Cm^2)} + n,$$

которое, по приведеніи къ одному знаменателю и соединеніи подобныхъ членовъ, принимаетъ видъ

$$y = \frac{(2A+Bm)\,n - (D+Em)\,m}{2\,(A+Bm+Cm^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

166. Если помножимъ выраженіе (8) на $(2A+Bm)$, а выраженіе (9) на $(B+2Cm)$ и результаты сложимъ, то получимъ соотношеніе

$$(2A+Bm)\,x + (B+2Cm)\,y = -(D+Em)$$

или $$(2A+Bm)\,x + (B+2Cm)\,y + (D+Em) = 0, \quad . \; . \; . \quad (10)$$

не содержащее вовсе n и потому имѣющее мѣсто при всякомъ значеніи этого коэфиціента.

Но уравненіе (2) при данномъ m и неопредѣленномъ n выражаетъ всѣ возможныя прямыя, имѣющія данное направленіе и, слѣдовательно, параллельныя между собою. Соотношеніе (10) представляетъ поэтому зависимость между координатами срединъ всѣхъ хордъ, параллельныхъ между собою; оно есть, слѣдовательно, уравненіе геометрическаго мѣста срединъ всѣхъ этихъ хордъ. Такъ какъ оно первой степени, то заключаемъ, что *средины всѣхъ хордъ, параллельныхъ между собою, лежатъ на одной прямой.*

Такая прямая называется *діаметромъ* линіи второго порядка.

Изъ сказаннаго видимъ, что уравненіе (10) есть общее уравненіе діаметра.

167. Уравненіе (10) при всякомъ значеніи m представляетъ вполнѣ опредѣленную прямую, исключая того случая, когда

$$2A + Bm = B + 2Cm = D + Em = 0,$$

т. е. когда

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} = \frac{D}{E}.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе второй степени (1) выражаетъ, какъ показано выше, совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ.

Мы можемъ поэтому сказать, что *въ кривыхъ второго порядка всякому направленію хордъ соотвѣтствуетъ единственный и опредѣленный діаметръ.*

Представляя уравненіе (10) въ видѣ

$$y = m'x + n',$$

мы будемъ имѣть, что угловой коэффиціентъ діаметра выражается слѣдующимъ образомъ:

$$m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Отсюда видимъ, что съ измѣненіемъ направленія хордъ измѣняется, вообще говоря, и направленіе діаметра.

Исключеніе представляетъ только тотъ случай, когда $B^2 - 4AC = 0$, т. е. когда кривая второго порядка не имѣетъ центра.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \quad \text{или} \quad \frac{2A}{B} = \frac{Bm}{2Cm},$$

откуда

$$\frac{2A + Bm}{B + 2Cm} = \frac{2A}{B},$$

слѣдовательно,

$$m' = -\frac{2A}{B}.$$

Направленіе діаметра не зависитъ, такимъ образомъ, отъ направленія хордъ. Это значитъ, что *всѣ діаметры кривой второго порядка, не имѣющей центра, параллельны между собою.*

168. При условіи $B^2 - 4AC = 0$ уравненіе

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

представляющее двѣ прямыя, встрѣчающія линію второго порядка (1) въ безконечности, обращается, по умноженіи обѣихъ частей на $4A$, въ

$$(2Ax + By)^2 = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{2A}{B}x.$$

Это есть прямая, имѣющая направленіе діаметровъ. Слѣдовательно, всѣ діаметры кривой, не имѣющей центра, встрѣчаютъ ее въ безконечности.

Отвлекаясь отъ безконечно удаленныхъ точекъ, можно поэтому сказать, что *каждый изъ діаметровъ кривой, не имѣющей центра, пересѣкаетъ эту кривую только въ одной точкѣ.*

Относительно кривыхъ центральныхъ тѣмъ же свойствомъ обладаютъ прямыя, параллельныя ассимптотамъ.

169. Общее уравненіе діаметра (10)

$$(2A+Bm)x+(B+2Cm)y+(D+Em)=0$$

можетъ быть представлено еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$(2Ax+By+D)+m(Bx+2Cy+E)=0, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

откуда видимъ, что всякій діаметръ проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$2Ax+By+D=0$$

и

$$Bx+2Cy+E=0.$$

Эта точка, какъ мы уже знаемъ, есть центръ кривой, и потому заключаемъ, что *всѣ діаметры всякой центральной линіи второго порядка проходятъ черезъ ея центръ.*

Уравненіе (12) обращается въ

$$2Ax+By+D=0$$

при $m=0$ и въ

$$Bx+2Cy+E=0$$

при $m=\infty$. Слѣдовательно, прямыя, выражаемыя этими уравненіями, суть также діаметры, и легко понять, что первый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя оси абсциссъ, а второй всѣ хорды, параллельныя оси ординатъ.

170. Соотношеніе (11), представляющее зависимость между угловыми коэффиціентами хордъ и соотвѣтствующаго имъ діаметра, можетъ быть представлено слѣдующимъ образомъ:

$$2A+B(m+m')+2Cmm'=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Такъ какъ въ этомъ видѣ оно симметрично относительно m и m', т. е. не измѣняется отъ взаимнаго перемѣщенія этихъ величинъ, то заключаемъ, что, при измѣненіи направленія хордъ въ направленіе діаметра, это послѣднее измѣняется въ первоначальное направленіе хордъ. Всякому діаметру соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, другой діаметръ, проходящій черезъ средины хордъ, параллельныхъ первому, и въ то же время параллельный хордамъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ первый.

Такіе два діаметра, изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, называютъ *сопряженными.*

Для всякой центральной линіи второго порядка существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ. Соотношеніе (13) можетъ, слѣдовательно, быть разсматриваемо, какъ представляющее зависимость между угловыми коэффиціентами двухъ какихъ бы то ни было сопряженныхъ діаметровъ центральной линіи, выражаемой уравненіемъ (1).

171. Въ томъ случаѣ, когда уравненіе, представляющее кривую второго порядка, не содержитъ члена съ произведеніемъ перемѣнныхъ, т. е. когда $B=0$, діаметры кривой, параллельные осямъ координатъ, будутъ сопряженные. Въ самомъ дѣлѣ, соотношеніе (13) обращается въ этомъ случаѣ въ

$$A+Cmm'=0,$$

откуда и видно, что, при $m=0$, $m'=\infty$ или обратно. Это слѣдуетъ также изъ того, что при $B=0$ уравненія

$$2Ax+By+D=0 \quad \text{и} \quad Bx+2Cy+E=0,$$

представляющія два діаметра, которые проходятъ чрезъ средины хордъ, параллельныхъ осямъ координатъ, обращаются въ

$$2Ax+D=0 \quad \text{и} \quad 2Cy+E=0.$$

Отсюда заключаемъ, что когда въ уравненіи кривой второго порядка (1)

$$B=D=E=0,$$

т. е. когда это уравненіе имѣетъ видъ

$$Ax^2+Cy^2+F=0,$$

оси координатъ суть два сопряженные діаметра, и обратно: относительно осей координатъ, совпадающихъ съ двумя сопряженными діаметрами, линія второго порядка выражается уравненіемъ этого вида.

172. Если діаметръ кривой второго порядка перпендикуляренъ къ хордамъ, черезъ средины которыхъ онъ проходитъ, то его называютъ *осью* или *главнымъ діаметромъ* этой кривой, а точки, въ которыхъ онъ пересѣкаетъ кривую, ея *вершинами*.

Для центральной кривой такому діаметру соотвѣтствуетъ, очевидно, другой, сопряженный съ нимъ и обладающій тѣмъ же свойствомъ. Поэтому найти оси центральной кривой значитъ найти сопряженные діаметры, перпендикулярные между собою.

Если оси координатъ, къ которымъ отнесена линія второго порядка, прямоугольныя, то перпендикулярность между сопряженными діаметрами, которыхъ угловые коэффиціенты суть m и m', выразится условіемъ

$$mm'=-1.$$

Вслѣдствіе этого зависимость (13) между этими коэффиціентами обратится въ

$$2A+B(m+m')-2C=0,$$

откуда

$$m+m'=\frac{2(C-A)}{B}$$

Имѣя, такимъ образомъ, сумму и произведеніе коэффиціентовъ m и m', мы можемъ опредѣлить ихъ, какъ корни квадратнаго уравненія

$$Bm^2+2(A-C)m-B=0.$$

Такъ какъ это уравненіе при всякихъ значеніяхъ A, B и C имѣетъ дѣйствительные и различные корни, то заключаемъ, что *всякая центральная кривая второго порядка имѣетъ двѣ дѣйствительныя оси.*

Послѣднее квадратное уравненіе не даетъ опредѣленныхъ значеній для m только въ томъ случаѣ, когда $B=0$ и $A=C$. Мы увидимъ вскорѣ, что въ этомъ случаѣ уравненіе второй степени (1) выражаетъ кругъ, для котораго, какъ извѣстно, всякій діаметръ имѣетъ свойства оси.

173. Когда центръ кривой находится въ началѣ координатъ, то уравненіе всякаго діаметра будетъ

$$y=mx.$$

Исключая m изъ этого и предыдущаго уравненія, получимъ однородное уравненіе

$$Bx^2+2(C-A)\,xy-By^2=0,$$

представляющее совокупность двухъ осей кривой.

Выше мы имѣли случай убѣдиться (см. стр. 68), что этимъ уравненіемъ выражаются два бисектра угловъ между прямыми, выражаемыми уравненіемъ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0.$$

Отсюда заключаемъ, что *оси центральной кривой второго порядка дѣлятъ пополамъ углы между ассимптотами.*

174. Для кривыхъ, не имѣющихъ центра, очевидно, не существуетъ и сопряженныхъ діаметровъ, потому что всѣ діаметры такой кривой имѣютъ одно и то же направленіе.

Легко видѣть, однако, что всякая такая кривая имѣетъ ось и при томъ только одну.

Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы діаметръ былъ осью кривой, нужно, чтобы выполнялось условіе перпендикулярности его къ соотвѣтствующимъ ему хордамъ.

Замѣчая же, что для линій, не имѣющихъ центра, угловой коэффиціентъ діаметра есть

$$m'=-\frac{2A}{B},$$

будемъ имѣть, что это условіе перпендикулярности въ случаѣ прямоугольной системы координатъ есть

$$m\frac{2A}{B}=1,$$

гдѣ m есть угловой коэффиціентъ хордъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ.

Отсюда находимъ, что

$$m=\frac{B}{2A},$$

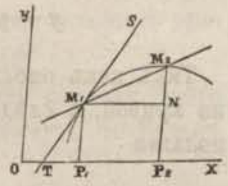
чѣмъ опредѣляется направленіе хордъ, соотвѣтствующихъ оси. Подставляя же это значеніе m въ общее уравненіе (10) діаметровъ, получимъ уравненіе самой оси [1]).

175. Двѣ точки плоскости, лежащія на одномъ перпендикулярѣ къ какой-нибудь данной прямой и на одинаковыхъ отъ нея разстояніяхъ, называются *симметричными* относительно этой прямой. Если какая-нибудь фигура обладаетъ свойствомъ, что каждой ея точкѣ соотвѣтствуетъ другая точка, принадлежащая также этой фигурѣ и симметричная съ первой относительно нѣкоторой прямой, то эту прямую называютъ *осью симметріи* фигуры, а самое фигуру *симметричною* относительно этой оси.

Замѣчая, что для всякой кривой второго порядка концы хорды, соотвѣтствующей ея оси, симметричны относительно этой послѣдней, мы можемъ заключить, что всякая такая кривая симметрична относительно каждой изъ своихъ осей или что *оси кривой второго порядка суть ея оси симметріи.*

§ 3. Касательныя и поляры.

176. Для того чтобы прямая линія была касательною къ какой-нибудь кривой второго порядка, нужно, какъ мы видѣли, чтобы хорда, образуемая этою прямою, равнялась нулю. На этомъ основаніи подъ касательною къ кривой въ данной точкѣ M_1 (фиг. 37) слѣдуетъ понимать прямую TS, представляющую собою предѣльное положеніе сѣкущей M_1M_2, вращающейся около данной точки до тѣхъ поръ, пока другая ея точка M_2 пересѣченія съ кривой не придетъ въ совпаденіе съ данной M_1.



Фиг. 37.

Положимъ, что кривая второго порядка выражается общимъ уравненіемъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будутъ координаты двухъ точекъ M_1 и M_2 этой кривой.

Уравненіе сѣкущей, встрѣчающей кривую въ этихъ двухъ точкахъ, будетъ, какъ извѣстно (см. стр. 43),

[1]) Когда кривая второго порядка имѣетъ безконечно удаленный центръ, то къ числу ея діаметровъ, т. е. прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ, должна быть отнесена прямая, всѣ точки которой суть безконечно удаленныя. Эта прямая имѣетъ свойства діаметра, сопряженнаго съ каждымъ другимъ діаметромъ, а потому ее можно также разсматривать какъ ось кривой. Можно, слѣдовательно, сказать, что кривая съ безконечно удаленнымъ центромъ имѣетъ, такъ же какъ и центральная, двѣ оси, но одна изъ нихъ есть безконечно удаленная всѣми своими точками.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

или
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

гдѣ первый множитель второй части есть отношеніе отрѣзковъ M_2N и M_1N, обращающихся въ нуль, когда точка M_2 совпадаетъ съ M_1.

Такъ какъ точки M_1 и M_2 принадлежатъ кривой, то должны имѣть мѣсто тождества

$$\left.\begin{aligned} &Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0 \\ \text{и}\quad &Ax_2^2+Bx_2y_2+Cy_2^2+Dx_2+Ey_2+F=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

изъ которыхъ находимъ

$$A(x_2^2-x_1^2)+B(x_2y_2-x_1y_1)+C(y_2^2-y_1^2)+D(x_2-x_1)+E(y_2-y_1)=0.$$

Это послѣднее равенство, очевидно, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$(x_2-x_1)[A(x_2+x_1)+By_2+D]+(y_2-y_1)[Bx_1+C(y_2+y_1)+E]=0,$$

откуда

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{A(x_2+x_1)+By_2+D}{Bx_1+C(y_2+y_1)+E}.$$

Вслѣдствіе этого предыдущему уравненію сѣкущей можно дать видъ

$$y-y_1=-\frac{A(x_2+x_1)+By_2+D}{Bx_1+C(y_2+y_1)+E}(x-x_1).$$

Такъ какъ оно имѣетъ мѣсто при всякомъ положеніи точекъ M_1 и M_2 на кривой, а слѣдовательно и тогда, когда эти точки совпадаютъ, то, полагая

$$x_2=x_1 \quad \text{и} \quad y_2=y_1,$$

получимъ изъ него уравненіе касательной

$$y-y_1=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}(x-x_1) \quad \ldots \quad (3)$$

Оно можетъ быть упрощено слѣдующимъ образомъ.

Уничтожая знаменателя, получимъ

$$(2Ax_1+By_1+D)(x-x_1)+(Bx_1+2Cy_1+E)(y-y_1)=0$$

или

$$\begin{aligned}(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y= \\ =2Ax_1^2+2Bx_1y_1+2Cy_1^2+Dx_1+Ey_1.\end{aligned}$$

Прибавляя же къ обѣимъ частямъ

$$Dx_1+Ey_1+2F$$

и принимая во вниманіе первое изъ равенствъ (2), будемъ имѣть

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)=0 \quad \ldots \quad (4)$$

Здѣсь x и y суть координаты любой точки касательной, а x_1 и y_1 координаты точки прикосновенія. Слѣдуетъ замѣтить, что уравненіе

(4) симметрично относительно этихъ координатъ, т. е. оно не измѣняется отъ взаимной перестановки однихъ координатъ на мѣсто другихъ.

177. Уравненіе сѣкущей, встрѣчающей кривую (1) въ двухъ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2), можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$A(x-x_1)(x-x_2)+B(x-x_1)(y-y_2)+C(y-y_1)(y-y_2)+$$
$$+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по раскрытіи скобокъ, члены второго измѣренія сокращаются, то это уравненіе есть первой степени и потому представляетъ прямую. Такъ какъ, далѣе, это уравненіе, въ виду тождествъ (2), удовлетворяется координатами x_1, y_1 и x_2, y_2, то прямая, имъ выражаемая, проходитъ черезъ эти точки.

Слѣдовательно, полагая въ послѣднемъ уравненіи $x_2=x_1$ и $y_2=y_1$, получимъ уравненіе касательной въ слѣдующемъ видѣ:

$$A(x-x_1)^2+B(x-x_1)(y-y_1)+C(y-y_1)^2+$$
$$+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Отсюда, раскрывая скобки и соединяя подобные члены, легко получить и уравненіе (4).

178. Мы видѣли (см. стр. 114), что уравненіе діаметра кривой (1) имѣетъ видъ

$$(2Ax+By+D)+m(Bx+2Cy+E)=0,$$

гдѣ m есть угловой коэффиціентъ хордъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ.

Если положимъ, что точка (x_1, y_1) есть одинъ изъ концовъ этого діаметра, т. е. точка, въ которой онъ встрѣчаетъ кривую, то будемъ имѣть

$$(2Ax_1+By_1+D)+m(Bx_1+2Cy_1+E)=0,$$

откуда

$$m=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

Но изъ уравненія (3) видно, что это есть угловой коэффиціентъ касательной въ точкѣ (x_1, y_1).

Слѣдовательно, *касательныя въ концахъ какого-нибудь діаметра кривой второго порядка параллельны хордамъ, средины которыхъ находятся на этомъ діаметрѣ.*

179. Если кривая второго порядка, не имѣющая центра, отнесена къ такой системѣ координатъ, что ось абсциссъ совпадаетъ съ однимъ изъ діаметровъ, а ось ординатъ есть касательная въ концѣ этого діаметра, то уравненіе этой кривой принимаетъ весьма простой видъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ кривая проходитъ черезъ начало координатъ, то должно быть $F=0$. Такъ какъ, далѣе, хорды, параллельныя оси ординатъ, дѣлятся осью абсциссъ пополамъ, то каждой абсциссѣ должны соотвѣтствовать двѣ ординаты равныя, но противоположно направленныя. Это значитъ, что при каждомъ значеніи x изъ уравненія кривой должны получаться два значенія для y, равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками, что возможно только тогда, когда уравненіе не содержитъ вовсе членовъ, въ которыхъ y входитъ въ первой степени. Слѣдовательно, должно быть $B=0$ и $E=0$.

Наконецъ, вслѣдствіе того, что кривая не имѣетъ центра, должно быть

$$B^2-4AC=0,$$

откуда, при $B=0$, получаемъ $A=0$.

Итакъ, въ уравненіи кривой (1) четыре коэффиціента A, B, E и F будутъ равняться нулю, и потому уравненіе это принимаетъ видъ

$$Cy^2+Dx=0.$$

180. Прямая линія, перпендикулярная къ касательной и проходящая черезъ точку ея прикосновенія, называется *нормалью* къ кривой. Изъ уравненія касательной легко вывести общее уравненіе нормали.

Положимъ, что система координатъ прямоугольная, и пусть, какъ было и выше, координаты точки прикосновенія будутъ x_1 и y_1. Уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ эту точку, какъ извѣстно, имѣетъ видъ

$$y-y_1=a(x-x_1),$$

и если эта прямая перпендикулярна къ касательной, то должно быть

$$am=-1,$$

гдѣ m есть угловой коэффиціентъ касательной, равный, какъ мы видѣли, отношенію

$$-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

Слѣдовательно,

$$a=\frac{Bx_1+2Cy_1+E}{2Ax_1+By_1+D},$$

и потому уравненіе нормали будетъ

$$y-y_1=\frac{Bx_1+2Cy_1+E}{2Ax_1+By_1+D}(x-x_1)$$

или

$$(2Ax_1+By_1+D)(y-y_1)-(Bx_1+2Cy_1+E)(x-x_1)=0.$$

181. Положимъ, что прямая, соединяющая двѣ данныя точки M_1 и M_2, которыхъ координаты суть x_1, y_1 и x_2, y_2, встрѣчаетъ кривую второго порядка въ нѣкоторой точкѣ M, и пусть отношеніе разстояній этой точки отъ данныхъ M_1 и M_2 будетъ $\frac{m}{n}$. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно (см. стр. 6), координаты точки M опредѣлятся формулами:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}.$$

Такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію кривой, то будемъ имѣть

$$A\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}\right)^2 + B\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}\right)\left(\frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right) + C\left(\frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)^2 +$$
$$+ D\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}\right) + E\left(\frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right) + F = 0.$$

или, по уничтоженіи знаменателей,

$$A(nx_1 + mx_2)^2 + B(nx_1 + mx_2)(ny_1 + my_2) + C(ny_1 + my_2)^2 +$$
$$+ D(\kappa x_1 + mx_2)(m+n) + E(ny_1 + my_2)(m+n) + F(m+n)^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и располагая первую часть по степенямъ m и n, дадимъ этому равенству видъ

$$S_1 n^2 + Pmn + S_2 m^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ положено для сокращенія:

$$Ax_1{}^2 + Bx_1y_1 + Cy_1{}^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = S_1,$$
$$Ax_2{}^2 + Bx_2y_2 + Cy_2{}^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = S_2,$$
$$(2Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = P.$$

Величины S_1 и S_2 суть, такимъ образомъ, результаты подстановки въ первую часть уравненія кривой координатъ точекъ M_1 и M_2. Что же касается величины P, то это есть результатъ замѣны въ первой части уравненія касательной перемѣнныхъ координатъ координатами одной изъ точекъ M_1 и M_2, а координатъ точки прикосновенія координатами другой.

182. Значеніемъ отношенія $\frac{m}{n}$ опредѣляется, какъ извѣстно (см. стр. 7), положеніе точки M на прямой M_1M_2. Изъ равенства (5), которое можетъ быть представлено такъ:

$$S_2\left(\frac{m}{n}\right)^2 + P\left(\frac{m}{n}\right) + S_1 = 0,$$

опредѣляются два значенія этого отношенія, соотвѣтствующія двумъ точкамъ пересѣченія прямой M_1M_2 съ кривою. И эти значенія будутъ равны между собою, когда

$$P^2 = 4S_1S_2$$

или

$$[(2Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + (Dx_1 + Ey_1 + 2F)]^2 -$$
$$-4(Ax_1{}^2 + Bx_1y_1 + Cy_1{}^2 + Dx_1 + Ey_1 + F) \times$$
$$(Ax_2{}^2 + Bx_2y_2 + Cy_2{}^2 + Dx_2 + Ey_2 + F) = 0.$$

Послѣднее равенство есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ прямая, соединяющая точки M_1 и M_2, есть касательная къ кривой.

Если точка M_2 будетъ замѣнена какою-нибудь другою точкою, лежащею на той же касательной, то это условіе не нарушится. Отсюда заключаемъ, что уравненіе

$$\left.\begin{aligned}&[(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)]^2-\\&-4(Ax_1{}^2+Bx_1y_1+Cy_1{}^2+Dx_1+Ey_1+F)\times\\&\qquad\qquad(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)=0\end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; (6)$$

которое получаемъ изъ предыдущаго равенства, замѣняя данныя координаты x_2, y_2 неизвѣстными x, y, удовлетворяется подстановкою на мѣсто x и y координатъ какой угодно точки, лежащей на касательной, проходящей черезъ M_1.

Будучи второй степени, это уравненіе выражаетъ, слѣдовательно, совокупность двухъ касательныхъ къ кривой второго порядка (1) изъ данной точки (x_1, y_1).

Въ частномъ случаѣ, при $x_1=0$ и $y_1=0$, это будутъ двѣ касательныя, проходящія черезъ начало координатъ, и уравненіе (6) обращается въ

$$(Dx+Ey+2F)^2-4F(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)=0$$

или

$$(D^2-4AF)x^2+2(DE-2BF)xy+(E^2-4CF)y^2=0,$$

что мы имѣли уже выше (см. стр. 107).

183. Уравненіе

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)=0 \quad . \; . \; (7)$$

выражаетъ, какъ мы видѣли, касательную къ кривой второго порядка (1), и въ немъ x_1, y_1 суть координаты точки прикосновенія. Это уравненіе будетъ представлять нѣкоторую прямую также и тогда, когда x_1, y_1 суть координаты какой угодно точки плоскости. Прямая эта называется въ такомъ случаѣ *полярою* точки (x_1, y_1), а эта точка ея *полюсомъ* относительно кривой (1).

Отсюда слѣдуетъ прежде всего, что поляра точки, лежащей на кривой, есть касательная въ этой точкѣ, и полюсъ касательной есть ея точка прикосновенія.

Далѣе, легко видѣть, что координаты точекъ пересѣченія прямой (7) съ кривой (1), т. е. значенія x и y, обращающія одновременно въ нуль многочлены

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)$$

и

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

удовлетворяютъ и уравненію (6). Это значитъ, что точки эти суть точки прикосновенія касательныхъ, выражаемыхъ уравненіемъ (6).

И такъ, въ томъ случаѣ, когда чрезъ данную точку проходятъ двѣ дѣйствительныя касательныя къ кривой второго порядка, поляра этой точки есть прямая, соединяющая точки прикосновенія этихъ касательныхъ, или такъ называемая хорда прикосновенія.

Если касательныя изъ данной точки (x_1, y_1) суть мнимыя, то таковы же должны быть и точки прикосновенія. Слѣдовательно, поляра данной точки не будетъ въ этомъ случаѣ имѣть дѣйствительныхъ общихъ точекъ съ кривою, т. е. не будетъ пересѣкать ея.

Уравненіе (7), при $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$, обращается въ

$$Dx + Ey + 2F = 0$$

и въ этомъ видѣ представляетъ поляру начала координатъ.

184. Если точка (x_2, y_2) лежитъ на полярѣ точки (x_1, y_1), то, какъ видно изъ (7), должно быть

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = 0,$$

или

$$(2Ax_2 + By_2 + D)x_1 + (Bx_2 + 2Cy_2 + E)y_1 + (Dx_2 + Ey_2 + 2F) = 0,$$

а это показываетъ, что точка (x_1, y_1) лежитъ на полярѣ точки (x_2, y_2).

И такъ, если изъ двухъ данныхъ точекъ вторая лежитъ на полярѣ первой, то первая лежитъ на полярѣ второй. Другими словами, если одна изъ двухъ прямыхъ проходитъ черезъ полюсъ другой, то эта послѣдняя проходитъ черезъ полюсъ первой.

Такія двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярѣ другой, называются *сопряженными*. Точно также и двѣ прямыя, изъ которыхъ каждая проходитъ черезъ полюсъ другой, называются *сопряженными*.

Изъ сказаннаго видимъ также, что если прямая будетъ перемѣщаться, вращаясь около какой-нибудь своей точки, то ея полюсъ будетъ перемѣщаться по полярѣ этой точки, и если точка будетъ двигаться по какой-нибудь прямой, то ея поляра будетъ вращаться около полюса этой прямой.

185. Если въ уравненіи (7) x_1 и y_1 означаютъ координаты центра кривой (1), то коэффиціенты при x и при y будутъ равняться нулю. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно (см. стр. 37), прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ, будетъ безконечно удаленною. Отсюда заключаемъ, что *центръ есть полюсъ безконечно удаленной прямой*.

Если точка (x_1, y_1) лежитъ на прямой

$$y = mx,$$

то уравненію поляры (7) можно дать видъ

$$[(2A + Bm)x_1 + D]x + [(B + 2Cm)x_1 + E]y + [(D + Em)x_1 + 2F] = 0$$

или

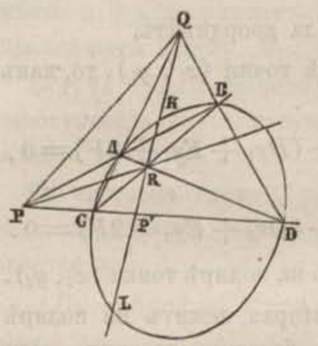
$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + (D + Em) + \frac{1}{x_1}(Dx + Ey + 2F) = 0.$$

При $x_1 = \infty$, т. е. когда (x_1, y_1) будетъ безконечно удаленною точкою прямыхъ, имѣющихъ m угловымъ коэффиціентомъ, это уравненіе обращается въ уравненіе діаметра

$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + (D + Em) = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что *діаметры суть поляры безконечно удаленныхъ точекъ* и что *два сопряженные діаметра суть двѣ проходящія черезъ центръ сопряженныя прямыя.*

186. Положимъ теперь, что на линіи второго порядка даны четыре точки A, B, C, D (фиг. 38). Соединяя ихъ прямыми, получимъ полный четыреугольникъ, для котораго данныя точки суть вершины и для котораго точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ, или такъ называемыя діагональныя точки (см. стр. 93), суть P, Q, R.



Фиг. 38.

Не трудно убѣдиться, что каждая изъ этихъ послѣднихъ точекъ есть полюсъ прямой, соединяющей двѣ другія. Иначе говоря, каждая изъ сторонъ діагональнаго треугольника PQR есть поляра противоположной вершины.

Примемъ для этого прямую AB за ось ординатъ, а прямую CD за ось абсциссъ, и обозначимъ чрезъ p_1 и p_2 длины отрѣзковъ PC и PD, а чрезъ q_1 и q_2 длины отрѣзковъ PA и PB. Въ такомъ случаѣ прямыя AC и BD выразятся уравненіями

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} - 1 = 0, \quad . \ . \ . \quad (8)$$

а прямыя AD и BC уравненіями

$$\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_1} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_2} - 1 = 0. \quad . \ . \ . \quad (9)$$

Отсюда видимъ, что прямая QR будетъ выражаться уравненіемъ

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} + \frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} - 2 = 0$$

или

$$\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} x + \frac{q_1 + q_2}{q_1 q_2} y - 2 = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (10)$$

потому что первая часть этого уравненія есть въ одно и то же время и сумма первыхъ частей уравненій (8) и сумма первыхъ частей уравненій (9).

Если кривая второго порядка, проходящая черезъ точки A, B, C, D, выражается общимъ уравненіемъ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

то корни уравненія

$$Ax^2+Dx+F=0,$$

опредѣляющаго абсциссы ея точекъ пересѣченія съ осью x-овъ, будутъ p_1 и p_2, и потому

$$p_1+p_2=-\frac{D}{A} \quad \text{и} \quad p_1p_2=\frac{F}{A};$$

слѣдовательно,

$$\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}=-\frac{D}{F}.$$

Корни же уравненія

$$Cy^2+Ey+F=0,$$

опредѣляющаго ординаты точекъ пересѣченія кривой съ осью y-овъ, будутъ q_1 и q_2, и потому

$$q_1+q_2=-\frac{E}{C} \quad \text{и} \quad q_1q_2=\frac{F}{C},$$

откуда

$$\frac{q_1+q_2}{q_1q_2}=-\frac{E}{F}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что уравненію (10) прямой QR можно дать видъ

$$-\frac{D}{F}x-\frac{E}{F}y-2=0$$

или

$$Dx+Ey+2F=0,$$

а это, какъ мы видѣли, есть уравненіе поляры начала координатъ, т. е. точка P.

Точно такъ же можно убѣдиться, что прямая PR есть поляра точки Q, а прямая PQ поляра точки R.

Такой треугольникъ, каждая сторона котораго есть поляра противоположной вершины, называется *полярнымъ треугольникомъ* относительно кривой второго порядка.

Очевидно, что для всякой кривой второго порядка существуетъ безчисленное множество полярныхъ треугольниковъ. Одна изъ вершинъ такого треугольника можетъ быть взята произвольно; двѣ же остальныя суть какія-нибудь двѣ сопряженныя точки, лежащія на полярѣ первой.

187. По свойству полнаго четыреугольника четыре прямыя QP, QP', QC и QD составляютъ гармоническій пучекъ (см. стр. 93). Слѣдовательно, четыре точки P, P', C и D составляютъ гармоническій рядъ, при чемъ точки P и P' дѣлятъ гармонически отрѣзокъ CD, а точки C и D отрѣзокъ PP'. Изъ этихъ точекъ первая P можетъ быть разсматриваема, какъ произвольно взятая на плоскости, двѣ другія C

и D суть точки пересѣченія кривой съ какою-нибудь прямою, проходящею черезъ P; наконецъ, послѣдняя P' есть точка пересѣченія съ тою же прямою поляры точки P. Можно, слѣдовательно, сказать, что всякая прамая, проходящая черезъ какую-нибудь данную точку P, встрѣчаетъ ея поляру въ точкѣ, которая вмѣстѣ съ данною дѣлитъ гармонически хорду, образуемую этою прямою.

Такимъ образомъ видимъ, что поляру можно опредѣлять, какъ геометрическое мѣсто точекъ, которыя вмѣстѣ съ данною точкою дѣлятъ гармонически хорды, образуемыя прямыми, проходящими черезъ эту данную точку.

188. Если прямая линія, выражаемая общимъ уравненіемъ

$$Mx+Ny+P=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

есть поляра точки $(x_1\,,\,y_1)$, то изъ этого уравненія и уравненія (7), какъ имѣющихъ одно и то же геометрическое значеніе, будемъ имѣть

$$\frac{2Ax_1+By_1+D}{M}=\frac{Bx_1+2Cy_1+E}{N}=\frac{Dx_1+Ey_1+2F}{P}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2Ax_1+By_1+D&=kM\,,\\ Bx_1+2Cy_1+E&=kN\,,\\ Dx_1+Ey_1+2F&=kP\,,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ k есть произвольная постоянная величина.

Отсюда, какъ изъ уравненій первой степени, могутъ быть найдены величины x_1, y_1, т. е. координаты полюса данной прямой.

Если прямая (11) есть касательная къ кривой (1), то ея полюсъ есть точка прикосновенія, и потому координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравненію прямой, т. е. будемъ имѣть

$$Mx_1+Ny_1+P=0\,.$$

Условіе совмѣстимости этого уравненія относительно x_1 и y_1 съ уравненіями (12) есть, слѣдовательно, условіе прикосновенія прямой (11) съ кривой. Какъ извѣстно (см. стр. 28), оно можетъ быть выражено равенствомъ

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D, & M\\ B, & 2C, & E, & N\\ D, & E, & 2F, & P\\ M, & N, & P, & 0\end{vmatrix}=0\,.$$

Разлагая опредѣлителя первой части, мы можемъ представить его въ видѣ

$$(E^2-4CF)\,M^2+2\,(2BF-DE)\,MN+(D^2-4AF)\,N^2+$$
$$+2\,(2CD-BE)\,MP-2\,(2AE-BD)\,NP+(B^2-4AC)\,P^2=0$$

или сокращенно

$$A'M^2 + B'MN + C'N^2 + D'MP + E'NP + F'P^2 = 0.$$

Если обозначимъ черезъ u_1, u_2, u_3 три величины, пропорціональныя коэффиціентамъ M, N, P уравненія (11), которыя, какъ извѣстно, можно разсматривать, какъ однородныя координаты прямой (см. стр. 86), то послѣднее уравненіе, принимая видъ

$$A'u_1^2 + B'u_1u_2 + C'u_2^2 + D'u_1u_3 + E'u_2u_3 + F'u_3^2 = 0,$$

будетъ выражать зависимость между координатами всѣхъ касательныхъ къ кривой второго порядка (1) и, слѣдовательно, будетъ уравненіемъ этой кривой въ касательныхъ координатахъ.

§ 4. Изслѣдованіе значеній уравненія второй степени.

189. Мы видѣли, что общее уравненіе второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

при различныхъ соотношеніяхъ между его коэффиціентами можетъ имѣть различныя геометрическія значенія. Въ однихъ случаяхъ оно представляетъ кривую линію, не имѣющую безконечно удаленныхъ точекъ, въ другихъ кривую линію, имѣющую одну или двѣ такія точки (см. стр. 106). Могутъ быть случаи, когда оно представляетъ не кривую, а совокупность двухъ прямыхъ (см. стр. 69). Постараемся представить въ этомъ параграфѣ систематическое изслѣдованіе всѣхъ значеній уравненія (1).

На первое время будемъ предполагать, что въ этомъ уравненіи коэффиціентъ C при y^2 не равняется нулю. Случай, когда $C = 0$, мы разсмотримъ впослѣдствіи отдѣльно.

190. Рѣшивъ уравненіе (1) относительно y, будемъ имѣть

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF)}}{2C}$$

и если обозначимъ радикалъ второй части буквою R и положимъ

$$B^2 - 4AC = H, \quad BE - 2CD = K, \quad E^2 - 4CF = L,$$

то будемъ имѣть

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm R}{2C}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ

$$R = \sqrt{Hx^2 + 2Kx + L},$$

и слѣдовательно,

$$R^2 = Hx^2 + 2Kx + L$$

или

$$R^2 = \frac{(Hx + K)^2 + (HL - K^2)}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Но

$$HL - K^2 = (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF) - (BE - 2CD)^2 =$$
$$= 4C(4ACF - AE^2 - CD^2 + BDE - B^2F) = 2C.\Delta.$$

Здѣсь буквою Δ обозначенъ многочленъ

$$2(4ACF - AE^2 - CD^2 + BDE - B^2F),$$

который можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix}$$

и который называется *дискриминантомъ* уравненія (1) (см. стр. 70).

Такимъ образомъ, равенство (3) принимаетъ видъ

$$R^2 = \frac{(Hx + K)^2 + 2C\Delta}{H} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

или

$$R^2 = \frac{(Hx + K + \sqrt{-2C\Delta})(Hx + K - \sqrt{-2C\Delta})}{H}$$

или, наконецъ,

$$R^2 = H(x - x_1)(x - x_2), \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ

$$x_1 = \frac{-K - \sqrt{-2C\Delta}}{H} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-K + \sqrt{-2C\Delta}}{H} \quad \ldots \quad (6)$$

191. Выраженіе (2) представляетъ значенія ординатъ точекъ разсматриваемой линіи, соотвѣтствующихъ произвольно взятой абсциссѣ. Для того чтобы эти значенія были дѣйствительными, т. е. чтобы геометрическое мѣсто, выражаемое уравненіемъ (1), представляло систему точекъ, дѣйствительно существующихъ на плоскости, нужно, чтобы радикалъ R былъ величиною дѣйствительною, и, слѣдовательно, квадратъ его долженъ быть величиною положительной.

Такъ какъ значенія, которыя должны быть приписываемы перемѣнному x для того, чтобы выраженіе для R^2 давало величину положительную, обусловливаются значеніями коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), то будемъ разсматривать отдѣльно три случая: 1) когда H или $B^2 - 4AC$ есть величина отрицательная, 2) когда это есть величина положительная и 3) когда она равняется нулю.

192. Полагаемъ $H < 0$. Въ этомъ случаѣ коэффиціенты A и C имѣютъ одинаковые знаки, и если дискриминантъ Δ имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и эти коэффиціенты, то, какъ видно изъ равенства (4), R^2 не можетъ быть положительной величиною ни при какихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ перемѣннаго x. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ уравненіе (1), какъ не удовлетворяющееся никакими дѣйствительными значеніями перемѣнныхъ, не выражаетъ никакой дѣйствительной линіи, или, какъ еще говорятъ, не имѣетъ вовсе дѣйствительнаго геометрическаго значенія.

Выраженіе (4) показываетъ также, что при $\Delta=0$ величина R^2 не будетъ отрицательною только тогда, когда она равняется нулю, т. е. когда

$$x=-\frac{K}{H}=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}.$$

Такъ какъ этому значенію x соотвѣтствуетъ единственное значеніе y, которое опредѣляется по формулѣ (2) и равняется

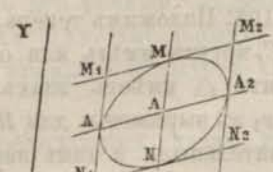
$$\frac{2AE-BD}{B^2-4AC},$$

то уравненіе (1) выражаетъ единственную дѣйствительную точку.

Мы видѣли выше (см. стр. 69), что при $\Delta=0$ и $H<0$ уравненіе (1) можетъ быть разсматриваемо, какъ выражающее двѣ мнимыя сопряженныя прямыя. Точка, опредѣляемая указанными сейчасъ координатами, есть дѣйствительная точка пересѣченія этихъ прямыхъ (см. стр. 65).

193. Если дискриминантъ Δ имѣетъ знакъ, обратный знаку коэффиціентовъ A и C, то R^2 будетъ положительною величиною при непрерывномъ рядѣ значеній перемѣннаго x, которыя, однако, заключаются между нѣкоторыми опредѣленными предѣлами. Уравненіе (1) будетъ выражать поэтому непрерывную дѣйствительную линію, помѣщающуюся внутри извѣстныхъ границъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ величины x_1 и x_2 въ равенствѣ (5), какъ показываютъ ихъ выраженія (6), суть дѣйствительныя и конечныя *). Такъ какъ во второй части равенства (5) первый множитель H есть величина отрицательная, то R^2 будетъ положительною величиною для всѣхъ тѣхъ значеній перемѣннаго x, при которыхъ два другіе множителя $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ имѣютъ разные знаки, т. е. для значеній x, заключающихся между конечными величинами x_1 и x_2.

Эти двѣ величины могутъ быть разсматриваемы, какъ абсциссы двухъ точекъ P_1 и P_2, лежащихъ на оси OX (фиг. 39-я), и если проведемъ черезъ эти точки прямыя M_1P_1 и M_2P_2, параллельныя оси OY, то будемъ имѣть, на основаніи сейчасъ сказаннаго, что каждая изъ точекъ, удовлетворяющихъ уравненію (1), а слѣдовательно, и вся выражаемая этимъ уравненіемъ линія, помѣщается между этими двумя прямыми.



Фиг. 39.

194. Пусть A_1A_2 будетъ прямая, выражаемая уравненіемъ

$$Bx+2Cy+E=0.$$

*) Эти величины суть корни квадратнаго уравненія $Hx^2+2Kx+L=0$.

Мы уже знаемъ, что это есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя оси OY. Замѣчая, что изъ послѣдняго уравненія

$$y = \frac{-(Bx + E)}{2C},$$

и сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (2) ординатъ точекъ, принадлежащихъ кривой (1), мы убѣждаемся, что отношеніе

$$\frac{R}{C}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Hx^2 + 2Kx + L}}{C}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{H(x - x_1)(x - x_2)}}{C},$$

представляетъ длину хорды, образуемой какой-нибудь прямою, параллельною оси OY.

Хорда эта получаетъ наибольшую величину, когда произведеніе $(x - x_1)(x - x_2)$ будетъ наибольшимъ, а это, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто тогда, когда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

т. е. когда прямая, образующая эту хорду, дѣлитъ отрѣзокъ P_1P_2 пополамъ.

Концы этой хорды M и N будутъ, слѣдовательно, точками кривой, наиболѣе удаленными отъ діаметра A_1A_2, и потому вся кривая должна помѣщаться между прямыми, проведенными чрезъ M и N параллельно этому діаметру.

Такимъ образомъ видимъ, что всѣ точки кривой находятся внутри параллелограмма $M_1M_2N_2N_1$ и, слѣдовательно, между ними нѣтъ безконечно удаленныхъ. Выше было сказано (см. стр. 106), что такая кривая называется *эллипсомъ*.

Легко видѣть, что точка A есть центръ этого эллипса, а прямая MN діаметръ, сопряженный съ діаметромъ A_1A_2.

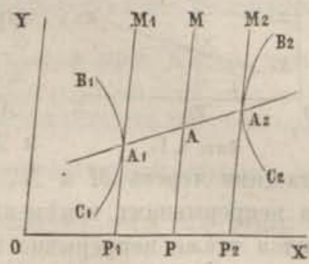
195. Положимъ теперь, что $H > 0$. Въ этомъ случаѣ коэффиціенты A и C могутъ имѣть или одинаковые или разные знаки. Если дискриминантъ $\triangle$ имѣетъ знакъ, противоположный знаку C, то величины x_1 и x_2 въ выраженіи для R^2, представляемомъ равенствомъ (5), суть дѣйствительныя, и такъ какъ первый множитель H этого выраженія въ настоящемъ случаѣ положительный, то R^2 будетъ положительною величиною лишь для значеній x, большихъ большей изъ величинъ x_1 и x_2 и меньшихъ меньшей изъ этихъ величинъ. Значеніямъ же x, заключающимся между x_1 и x_2, соотвѣтствуютъ, слѣдовательно, мнимыя значенія y.

Полагая, какъ и выше, что (фиг. 40)

$$OP_1 = x_1 \quad \text{и} \quad OP_2 = x_2,$$

будемъ имѣть, что между прямыми M_1P_1 и M_2P_2, параллельными оси OY, не существуетъ вовсе точекъ, принадлежащихъ разсматриваемой кривой.

Для непрерывнаго ряда значеній x, не заключающихся между x_1 и x_2, радикалъ R, а слѣдовательно и ордината y, получаетъ непрерывный рядъ дѣйствительныхъ значеній и вмѣстѣ съ тѣмъ, при достаточно большой абсолютной величинѣ x, величина ординаты y можетъ сдѣлаться сколь угодно большою. Это показываетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ линія, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей или вѣтвей $B_1A_1C_1$ и $B_2A_2C_2$, изъ которыхъ каждая непрерывно простирается въ безконечность. Такая линія называется *гиперболою*, и мы видѣли (см. стр. 106), что ее слѣдуетъ разсматривать, какъ имѣющую двѣ различныя безконечно удаленныя точки.



Фиг. 40.

Прямая линія A_1A_2, выражаемая уравненіемъ

$$Bx + 2Cy + E = 0,$$

есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя оси OY и принадлежащія той или другой изъ двухъ вѣтвей кривой.

Прямая MP, параллельная оси OY и дѣлящая пополамъ отрѣзокъ P_1P_2, есть діаметръ, сопряженный съ A_1A_2, и точка A есть центръ кривой.

196. Если дискриминантъ $\triangle$ имѣетъ знакъ одинаковый съ знакомъ коэффиціента C, то, какъ видно изъ равенства (4), R^2 будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ положительною величиною при всякомъ дѣйствительномъ значеніи x. Это значитъ, что всѣ прямыя, параллельныя оси OY, пересѣкаютъ кривую въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ и, слѣдовательно, каждая изъ этихъ прямыхъ образуетъ хорду опредѣленной величины.

Длина этой хорды, также какъ и въ предыдущемъ случаѣ, выражается отношеніемъ $\frac{R}{C}$ и, слѣдовательно, будетъ наименьшею, когда R получаетъ наименьшее значеніе, а это будетъ, очевидно, тогда, когда

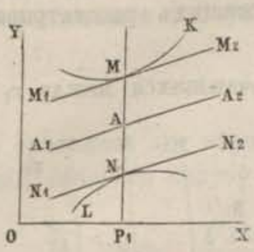
$$Hx + K = 0$$

или

$$x = -\frac{K}{H} = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

*

Полагая, что OP_1 есть абсцисса, имѣющая эту величину (фиг. 41), и что MN есть соотвѣтствующая ей наименьшая изъ хордъ, параллельныхъ оси OY, будемъ имѣть, что M и N суть точки разсматриваемой кривой, наиболѣе близкія къ діаметру A_1A_2, выражаемому уравненіемъ



Фиг. 41.

$$Bx+2Cy+E=0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что между прямыми M_1M_2 и N_1N_2, параллельными этому діаметру и проходящими черезъ M и N, не существуетъ точекъ кривой, и такъ какъ, при непрерывномъ измѣненіи x, обѣ соотвѣтствующія ординаты измѣняются также непрерывно и могутъ достигнуть сколь угодно большой величины, то заключаемъ, что и въ этомъ случаѣ линія, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей MK и NL, простирающихся въ безконечность. Слѣдовательно, она есть также гипербола.

И такъ, въ случаѣ, когда $H>0$, уравненіе (1) представляетъ гиперболу, какую бы величину, отличную отъ нуля, ни имѣлъ дискриминантъ $\triangle$.

197. Если $\triangle=0$, то изъ равенства (4) имѣемъ

$$R^2=\frac{(Hx+K)^2}{H}.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$y=\frac{-(Bx+E)\sqrt{H}\pm(Hx+K)}{2C\sqrt{H}}$$

или

$$\pm(Bx+2Cy+E)\sqrt{H}=Hx+K.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ, когда $H>0$, оно включаетъ въ себѣ два различныя уравненія первой степени съ дѣйствительными коэффиціентами. Въ отдѣльности эти уравненія могутъ быть представлены такъ:

$$(B+\sqrt{H})x+2Cy+\left(E+\frac{K}{\sqrt{H}}\right)=0,$$

$$(B-\sqrt{H})x+2Cy+\left(E-\frac{K}{\sqrt{H}}\right)=0$$

и выражаютъ, очевидно, двѣ дѣйствительныя непараллельныя прямыя.

Величины

$$x=-\frac{K}{H}=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC} \quad \text{и} \quad y=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$$

суть координаты точки ихъ пересѣченія.

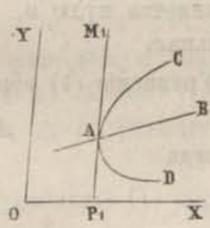
И такъ, если $\triangle=0$, то уравненіе (1) при $H>0$ выражаетъ совокупность двухъ пересѣкающихся прямыхъ (см. стр. 69).

198. Обратимся теперь къ случаю, когда $H=0$
Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть

$$R^2=Kx+L=K\left(x+\frac{L}{K}\right).$$

Очевидно, что при $K>0$ это выраженіе представляетъ положительную величину только тогда, когда $x>-\frac{L}{K}$, а при $K<0$ только тогда, когда $x<-\frac{L}{K}$. Слѣдовательно, дѣйствительныя значенія ординатъ, опредѣляемыхъ изъ уравненія (2), соотвѣтствуютъ только значеніямъ x, большимъ $-\frac{L}{K}$ или только меньшимъ этой величины.

Полагая, что OP_1 (фиг. 42) есть абсцисса, равная $-\frac{L}{K}$, будемъ имѣть, поэтому, что всѣ точки, принадлежащія разсматриваемой кривой, находятся только по одну сторону прямой M_1P_1, параллельной оси OY, а именно, вправо отъ этой прямой, когда $K=BE-2CD$ есть величина положительная, и влѣво, когда это есть величина отрицательная.



Фиг. 42.

Въ обоихъ этихъ случаяхъ, при непрерывномъ измѣненіи x, начиная отъ $x=-\frac{L}{K}$, ординаты y измѣняются также непрерывно и могутъ сдѣлаться сколь угодно большими. Отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, когда $H=0$, линія, выражаемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ одной сплошной вѣтви CAD, простирающейся въ безконечность. Такая линія называется *параболой*. Мы видѣли выше (см. стр. 106), что ее слѣдуетъ разсматривать, какъ имѣющую двѣ совпадающія безконечно удаленныя точки.

Прямая AB, выражаемая уравненіемъ

$$Bx+2Cy+E=0,$$

есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя оси OY. Прямая же M_1P_1 есть касательная и точка A ея точка прикосновенія.

199. Изъ выраженія для $\triangle$ мы имѣемъ (см. стр. 128)

$$\triangle=\frac{HL-K^2}{2C},$$

откуда видно, что при $H=0$ дискриминантъ $\triangle$ равняется нулю одновременно съ K. Но при $H=0$ и $K=0$ мы будемъ имѣть

$$R^2=L$$

и, слѣдовательно,

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{L}}{2C}$$

или

$$Bx + 2Cy + E = \pm\sqrt{L}.$$

Здѣсь мы имѣемъ два уравненія первой степени

$$Bx + 2Cy + E + \sqrt{L} = 0$$

и

$$Bx + 2Cy + E - \sqrt{L} = 0,$$

различающіяся только постоянными членами и представляющія, слѣдовательно, двѣ параллельныя прямыя.

Эти прямыя будутъ дѣйствительныя и различныя, когда $L = E^2 - 4CF$ есть величина положительная, совпадающія, когда $L = 0$, и мнимыя, когда $L < 0$.

200. Мы предполагали во всемъ предыдущемъ, что коэффиціентъ C не равняется нулю. Намъ остается дополнить сказанное разсмотрѣніемъ противнаго случая.

Будемъ предполагать сперва, что при $C = 0$ коэффиціентъ B не равняется нулю и, слѣдовательно, $B^2 - 4AC$ есть величина положительная.

Уравненіе (1) обращается тогда въ

$$Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

откуда

$$y = -\frac{Ax^2 + Dx + F}{Bx + E}$$

или

$$y = Mx + N + \frac{P}{Bx + E}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ

$$M = -\frac{A}{B},\ N = \frac{AE - BD}{B^2},\ P = \frac{BDE - AE^2 - B^2F}{B^2} = \frac{\Delta}{2B^2}.$$

Пусть ST (фиг. 43) будетъ прямая, выражаемая уравненіемъ

$$y = Mx + N.$$

Если P есть величина положительная, то, какъ видно изъ равенства (8), ординаты точекъ разсматриваемой кривой будутъ больше соотвѣтствующихъ ординатъ точекъ прямой ST для всѣхъ значеній x, большихъ $-\frac{E}{B}$. Напротивъ того, для значеній x, меньшихъ $-\frac{E}{B}$, ординаты точекъ прямой ST будутъ больше соотвѣтствующихъ ординатъ разсматриваемой кривой. Слѣдовательно, полагая, что OP есть абсцисса, равная $-\frac{E}{B}$, и прямая PQ парал-

Фиг. 43.

лельна оси OY, будемъ имѣть, что вправо отъ этой прямой точки кривой находятся выше ST, а влѣво — ниже ST. Такъ какъ при $x=-\frac{E}{B}$ получаемъ $y=\infty$, то прямая PQ не имѣетъ съ кривой общихъ точекъ, кромѣ безконечно удаленной. Это показываетъ, что разсматриваемая кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей KL и $K'L'$, простирающихся въ безконечность и помѣщающихся въ двухъ противоположныхъ углахъ PAS и QAT, образуемыхъ прямыми PQ и ST. Слѣдовательно, это есть гипербола.

Такимъ же точно образомъ легко убѣдиться, что и при $P<0$ разсматриваемая линія будетъ гипербола, вѣтви которой расположены въ двухъ другихъ противоположныхъ углахъ, образуемыхъ прямыми PQ и ST.

Если же $P=0$ или, что все тоже, $\triangle=0$, то уравненіе (7) обращается въ

$$(y-Mx-N)(Bx+E)=0$$

и выражаетъ совокупность прямыхъ PQ и ST.

Изъ сказаннаго видно, что при $C=0$ и $B>0$ или $B<0$, такъ же какъ и въ другихъ случаяхъ, когда $B^2-4AC>0$, общее уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, если дискриминантъ $\triangle$ не равняется нулю, и двѣ пересѣкающіяся прямыя, если $\triangle=0$.

201. Если $C=0$ и $B=0$, то $B^2-4AC=0$ и уравненіе (1) обращается въ

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0\,.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\qquad(9)$$

Очевидно, что мы не можемъ предполагать въ немъ $A=0$, потому что въ такомъ случаѣ оно не было бы второй степени.

Умножая обѣ его части на $4A$, получимъ

$$(2Ax+D)^2+4AEy+4AF-D^2=0$$

или

$$(2Ax+D)^2=4AE\left(\frac{D^2-4AF}{4AE}-y\right).$$

Первая часть этого послѣдняго равенства есть положительная величина при всякомъ дѣйствительномъ значеніи x. Поэтому заключаемъ, что, когда A и E имѣютъ одинаковые знаки, то ордината y должна быть меньше $\frac{D^2-4AF}{4AE}$; когда же A и E имѣютъ разные знаки, то должно быть $y>\frac{D^2-4AF}{4AE}$.

Слѣдовательно, въ томъ и другомъ случаѣ разсматриваемая линія находится по одну только сторону отъ прямой, параллельной оси OX, выражаемой уравненіемъ

$$y=\frac{D^2-4AF}{4AE}.$$

Такъ какъ при этомъ координаты точекъ кривой могутъ быть сколь угодно большими, то заключаемъ, что кривая состоитъ изъ одной простирающейся въ безконечность вѣтви и, слѣдовательно, есть парабола.

Замѣтимъ, что при $C=0$ и $B=0$ мы будемъ имѣть $\triangle = -2AE^2$, и если положимъ $\triangle = 0$ и, слѣдовательно, $E=0$, то уравненіе (9) не будетъ вовсе содержать перемѣннаго y, и потому (см. стр. 66) будетъ выражать двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, параллельныя оси OY.

Такимъ образомъ видимъ, что при $C=0$ и $B=0$ уравненіе (1) имѣетъ тѣ же геометрическія значенія, какъ и въ другихъ случаяхъ, когда $B^2-4AC=0$.

202. Все вышесказанное представляетъ достаточно полное изслѣдованіе значеній общаго уравненія второй степени. Резюмируя полученные выводы, мы приходимъ къ заключенію, что различіе геометрическихъ значеній уравненія (1) обусловливается различіемъ алгебраическихъ значеній двухъ выраженій, составленныхъ изъ его коэффиціентовъ, именно выраженій:

$$H = B^2 - 4AC$$

и

$$\triangle = 2\,(4ACF - AE^2 - CD^2 + BDE - B^2F).$$

Если $H<0$, то это уравненіе выражаетъ эллипсъ, когда $\triangle$ имѣетъ знакъ, противоположный знакамъ коэффиціентовъ A и C, одну только точку или двѣ мнимыя прямыя, когда $\triangle = 0$, и вовсе не выражаетъ дѣйствительной линіи, когда $\triangle$ и A или C имѣютъ одинаковые знаки.

Если $H>0$, то уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, всякій разъ какъ $\triangle$ не равняется нулю, и двѣ пересѣкающіяся прямыя, когда $\triangle = 0$.

Если, наконецъ, $H=0$, то уравненіе (1) выражаетъ параболу, когда $\triangle$ не равняется нулю, и двѣ параллельныя прямыя при $\triangle = 0$.

§ 5. Упрощеніе уравненій второй степени.

203. Такъ какъ одна и та же линія второго порядка можетъ быть выражена различными уравненіями второй степени относительно различныхъ системъ координатъ, то, прежде чѣмъ приступить къ подробному изученію свойствъ этихъ линій, мы постараемся показать, какимъ образомъ могутъ быть найдены ихъ простѣйшія уравненія.

Выше было сказано (см. стр. 115), что уравненіе всякой центральной кривой принимаетъ видъ

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0,$$

когда за оси координатъ приняты два какіе-нибудь сопряженные діаметра и въ частности оси кривой. Ближайшей нашей задачей будетъ отысканіе коэффиціентовъ такого уравненія по коэффиціентамъ уравненія той же кривой относительно какой-нибудь системы координатъ.

Пусть дано уравненіе кривой въ видѣ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Преобразуя оси координатъ такъ, чтобы начало новой системы совпадало съ центромъ, а новыя оси координатъ были параллельны прежнимъ, мы получимъ для той же кривой уравненіе

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F'=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ три первые коэффиціента тѣ же, какъ и въ данномъ уравненіи (1), и, слѣдовательно, опредѣленію подлежитъ только постоянный членъ F'.

Замѣтимъ, что если a и b суть координаты центра кривой относительно прежней системы, то должно быть (см. стр. 109 и 110)

$$2Aa+Bb+D=0, \qquad Ba+2Cb+E=0, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и

$$F'=Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0.$$

Послѣднее равенство можно представить въ видѣ

$$2F'=(2Aa+Bb+D)\,a+(Ba+2Cb+E)\,b+Da+Eb+2F,$$

и потому, на основаніи двухъ первыхъ,

$$2F'=Da+Eb+2F.$$

Подставивъ сюда величины a и b, опредѣленныя изъ (3), получимъ

$$2F'=\frac{D(2CD-BE)+E(2AE-BD)}{B^2-4AC}+2F,$$

откуда

$$F'=\frac{CD^2+AE^2-BDE+B^2F-4ACF}{B^2-4AC}=-\frac{\triangle}{2(B^2-4AC)}.$$

Такимъ образомъ, всѣ коэффиціенты уравненія (2) будутъ извѣстны. Приведеніе уравненія центральной кривой къ виду (2) называется преобразованіемъ къ центру.

204. Предыдущее равенство есть слѣдствіе общаго свойства линій второго порядка, состоящаго въ томъ, что отъ преобразованія координатъ, при которомъ оси сохраняютъ свое направленіе, дискриминантъ уравненія кривой не измѣняется.

Въ самомъ дѣлѣ, формулы такого преобразованія суть

$$x=x'+a \qquad \text{и} \qquad y=y'+b.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (1) обращается въ

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

гдѣ

$$D' = 2Aa + Bb + D, \qquad E' = Ba + 2Cb + E,$$
$$F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F.$$

Изъ послѣдняго равенства имѣемъ

$$2F' = (2Aa + Bb + D)\,a + (Ba + 2Cb + E)\,b + Da + Eb + 2\,F$$

или, на основаніи двухъ предыдущихъ,

$$2(F' - F) = (D + D')a + (E + E')b.$$

Подставивъ сюда на мѣсто a и b ихъ значенія, опредѣленныя изъ выраженій для D' и E', получимъ

$$F' - F = \frac{C(D^2 - D'^2) - B(DE - D'E') + A(E^2 - E'^2)}{B^2 - 4AC},$$

откуда

$$(4AC - B^2)F - AE^2 - CD^2 + BDE = (4AC - B^2)F' - AE'^2 - CD'^2 + BD'E'$$

или

$$\triangle = \triangle'.$$

Положивши здѣсь $D' = 0$ и $E' = 0$, получимъ предыдущее выраженіе для F'.

205. Положимъ теперь, что уравненіе

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ которомъ всѣ коэффиціенты извѣстны, выражаетъ центральную кривую относительно прямоугольной системы координатъ, имѣющей начало въ центрѣ, и постараемся найти уравненіе этой кривой относительно системы координатъ, совпадающей съ ея осями. Преобразованіе координатъ, которое для этого нужно сдѣлать и которое называется преобразованіемъ къ осямъ кривой, состоитъ въ переходѣ отъ одной прямоугольной системы къ другой, получающейся вращеніемъ первой около начала на нѣкоторый уголъ α. Формулы для такого преобразованія будутъ, какъ извѣстно (см. стр. 11),

$$x = x'\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

По внесеніи этихъ выраженій, уравненіе (4) обращается въ

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha \\ B' &= 2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ C' &= A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad (6)$$

постоянный же членъ остается, очевидно, тотъ же самый.

Такъ какъ въ уравненіи (5), представляющемъ кривую, отнесенную къ ея осямъ, не должно существовать члена съ произведеніемъ $x'y'$ (см. стр. 115), то должно быть

$$B' = 0$$

или

$$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0\,,$$

откуда

$$tg 2\alpha = \frac{B}{A - C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Обозначая чрезъ α_0 положительный острый уголъ, удовлетворяющій этому условію, будемъ имѣть, что всѣ возможныя значенія α, имъ опредѣляемыя, заключаются въ выраженіи

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{k\pi}{2}\,,$$

гдѣ k есть какое угодно цѣлое положительное или отрицательное число.

Такъ какъ, повернувши систему взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ около ихъ точки пересѣченія на прямой уголъ, мы получаемъ ту же самую систему, то значеніями числа k обусловливается только выборъ наименованія новыхъ осей координатъ и направленій, въ которыхъ координаты считаются положительными.

Замѣтимъ, что условіе (7) не даетъ опредѣленныхъ значеній для α только тогда, когда $B = 0$ и $A = C$. Въ этомъ случаѣ, полагая

$$-\frac{F}{A} = a^2\,,$$

дадимъ уравненію (4) видъ

$$x^2 + y^2 = a^2\,,$$

откуда слѣдуетъ, что оно можетъ представлять только кругъ (см. стр. 18).

206. Изъ равенствъ (6) легко получить соотношенія между коэффиціентами A, B, C съ одной стороны и коэффиціентами A', B', C' съ другой, не зависящія отъ угла α.

Въ самомъ дѣлѣ, сложивъ и вычтя первое и третье изъ этихъ равенствъ, находимъ

$$A' + C' = A + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

и

$$A' - C' = (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2B\sin\alpha\cos\alpha$$

или

$$A' - C' = (A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha\,.$$

Въ то же время второе изъ равенствъ (6) можно представить въ видѣ

$$B' = (C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha\,.$$

Изъ двухъ послѣднихъ равенствъ будемъ имѣть

$$(A'-C')^2+B'^2=(A-C)^2+B^2$$

или, въ виду равенства (8),

$$(A'-C')^2+B'^2-(A'+C')^2=(A-C)^2+B^2-(A+C)^2$$

и, по раскрытіи скобокъ,

$$B'^2-4A'C'=B^2-4AC. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Такимъ образомъ видимъ, что, при переходѣ отъ прямоугольной системы координатъ къ другой также прямоугольной, коэффиціенты A, B, C измѣняются такъ, что остаются неизмѣнными два слѣдующія выраженія:

$$A+C \qquad \text{и} \qquad B^2-4AC.$$

Если новыя оси координатъ суть оси кривой, то будемъ имѣть $B'=0$. Два же другіе коэффиціента A' и C' опредѣлятся изъ соотношеній (8) и (9), дающихъ ихъ сумму и произведеніе. Эти коэффиціенты будутъ, слѣдовательно, корнями квадратнаго уравненія

$$x^2-(A+C)x-\frac{B^2-4AC}{4}=0,$$

которые суть

$$\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2}.$$

Такимъ образомъ, всѣ коэффиціенты уравненія (5), выражающаго разсматриваемую кривую относительно ея осей, будутъ извѣстны.

207. Мы предполагали, что первоначальная система координатъ, относительно которой кривая выражается даннымъ уравненіемъ (4), есть прямоугольная. Если же она косоугольная, то мы можемъ прежде всего замѣнить ее какою-нибудь прямоугольною, напримѣръ такою, которая имѣетъ то же начало и ту же ось абсциссъ.

Формулы для перехода къ такой прямоугольной системѣ будутъ:

$$x=\frac{x'\sin\omega-y'\cos\omega}{\sin\omega}, \qquad y=\frac{y'}{\sin\omega},$$

гдѣ ω есть нормальный уголъ первоначальной системы координатъ.

Внеся эти выраженія въ данное уравненіе (4), преобразуемъ его въ

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+F=0,$$

гдѣ

$$A'=A, \; B'=\frac{B-2A\cos\omega}{\sin\omega}$$

и

$$C'=\frac{A\cos^2\omega-B\cos\omega+C}{\sin^2\omega}.$$

Отсюда находимъ

$$\left.\begin{aligned} A'+C' &= \frac{A+C-B\cos\omega}{\sin^2\omega} \\ B'^2-4A'C' &= \frac{B^2-4AC}{\sin^2\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Такъ какъ первыя части этихъ двухъ равенствъ сохраняютъ свои величины при всякой прямоугольной, системѣ координатъ, то заключаемъ, что эти равенства имѣютъ мѣсто и тогда, когда въ нихъ подъ A', B', C' будемъ разумѣть коэффиціенты въ уравненіи кривой, отнесенной къ ея осямъ.

Въ такомъ случаѣ $B'=0$ и, слѣдовательно,

$$A'C' = -\frac{B^2-4AC}{4\sin^2\omega}.$$

Коэффиціенты A' и C' опредѣлятся, такимъ образомъ, по ихъ суммѣ и произведенію, какъ корни квадратнаго уравненія

$$x^2 - \frac{A+C-B\cos\omega}{\sin^2\omega}\,x - \frac{B^2-4AC}{4\sin^2\omega} = 0,$$

которые суть

$$\frac{A+C-B\cos\omega \pm \sqrt{(A-C)^2\sin^2\omega + [B-(A+C)\cos\omega]^2}}{2\sin^2\omega}.$$

208. Равенства (10) имѣютъ мѣсто, какова бы ни была первоначальная косоугольная система координатъ, и такъ какъ уже доказано, что первыя части этихъ равенствъ не измѣняются при переходѣ отъ одной прямоугольной системы координатъ къ другой, также прямоугольной, то заключаемъ, что и вторыя части сохраняютъ свои величины при переходѣ отъ какой бы ни было прямолинейной системы координатъ ко всякой другой.

Слѣдовательно, если одна и та же кривая выражается относительно двухъ прямолинейныхъ системъ координатъ уравненіями

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+F&=0 \\ A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+F&=0 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (11)$$

то должно быть

$$\left.\begin{aligned} \frac{A+C-B\cos\omega}{\sin^2\omega} &= \frac{A'+C'-B'\cos\omega'}{\sin^2\omega'} \\ \text{и} \qquad \frac{B^2-4AC}{\sin^2\omega} &= \frac{B'^2-4A'C'}{\sin^2\omega'} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (12)$$

гдѣ ω и ω' суть нормальные углы соотвѣтственныхъ системъ координатъ.

Эти соотношенія включаютъ въ себѣ, какъ частные случаи, равенства (8), (9) и (10).

209. Соотношенія (12), выведенныя нами изъ ихъ частныхъ случаевъ, могутъ быть доказаны еще слѣдующимъ образомъ.

Изъ двухъ уравненій (11) одной и той же кривой имѣемъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 .$$

Въ то же время, обозначая черезъ d разстояніе какой-нибудь точки отъ общаго начала обѣихъ системъ координатъ, будемъ имѣть, что квадратъ этого разстоянія выразится чрезъ координаты точки, относительно той и другой системы слѣдующимъ образомъ:

$$d^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\omega' .$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ предыдущаго равенства произведеніе kd^2, гдѣ k есть произвольная конечная величина, мы можемъ представить его въ видѣ

$$\begin{gathered} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + k(x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega) = \\ = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + k(x'^2 + y' + 2x'y'\cos\omega') \end{gathered}$$

или

$$\left.\begin{gathered} (A+k)x^2 + (B + 2k\cos\omega)xy + (C+k)y^2 = \\ = (A'+k)x'^2 + (B' + 2k\cos\omega')x'y' + (C'+k)y'^2 \end{gathered}\right\} \quad \ldots \ldots (13)$$

Величина k можетъ быть выбрана такъ, чтобы первая часть этого послѣдняго равенства была точнымъ квадратомъ двучлена вида

$$Mx + Ny ,$$

что, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто, когда

$$(B + 2k\cos\omega)^2 = 4(A+k)(C+k) ,$$

и, слѣдовательно,

$$4\sin^2\omega\, k^2 + 4(A + C - B\cos\omega)k - (B^2 - 4AC) = 0 .$$

Но при этомъ условіи вторая часть предыдущаго равенства есть также полный квадратъ, потому что она есть результатъ замѣны въ первой части координатъ x и y ихъ выраженіями вида

$$x = mx' + ny' , \qquad y = px' + qy' ,$$

представляющими формулы преобразованія координатъ.

Слѣдовательно, должно быть

$$4\sin^2\omega'\, k^2 + 4(A' + C' - B'\cos\omega')k - (B'^2 - 4A'C') = 0 .$$

Для того, чтобы послѣднія два условія могли имѣть мѣсто при одномъ и томъ же значеніи k, необходимо имѣть

$$\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega'} = \frac{A + C - B\cos\omega}{A' + C' - B'\cos\omega'} = \frac{B^2 - 4AC}{B'^2 - 4A'C'} ,$$

откуда непосредственно получаются равенства (12).

210. Обратимся теперь къ упрощенію уравненія кривыхъ, не имѣющихъ центра. Общее уравненіе (1) представляетъ такую кривую, когда въ немъ $B^2-4AC=0$. Умноживъ обѣ его части на $4A$, мы можемъ, поэтому, представить его въ видѣ

$$(2Ax+By)^2+4A(Dx+Ey+F)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Положимъ, что система координатъ, относительно которой кривая выражается этимъ уравненіемъ, есть прямоугольная. Замѣнимъ эту систему другой также прямоугольной, имѣющей то же начало и, слѣдовательно, получающейся вращеніемъ первой системы на нѣкоторый уголъ α. Формулы для такого преобразованія будутъ:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (14) обращается въ

$$[(2A\cos\alpha+B\sin\alpha)x'+(B\cos\alpha-2A\sin\alpha)y']^2+$$
$$+4A[(D\cos\alpha+E\sin\alpha)x'+(E\cos\alpha-D\sin\alpha)y'+F]=0.$$

Уголъ α можетъ быть выбранъ такъ, чтобы было

$$2A\cos\alpha+B\sin\alpha=0,$$

откуда

$$tg\,\alpha=-\frac{2A}{B}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\alpha=\frac{-2A}{\sqrt{4A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha=\frac{B}{\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

Въ такомъ случаѣ, послѣднее уравненіе кривой принимаетъ видъ

$$Ny'^2+Px'+Qy'+R=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ

$$N=(B\cos\alpha-2A\sin\alpha)^2=4A^2+B^2=4A(A+C),$$

$$P=4A(D\cos\alpha+E\sin\alpha)=\frac{4A(BD-2AE)}{\sqrt{4A^2+B^2}},$$

$$Q=4A(E\cos\alpha-D\sin\alpha)=\frac{4A(BE+2AD)}{\sqrt{4A^2+B^2}}$$

и

$$R=4AF.$$

Такимъ образомъ видимъ, что посредствомъ произведеннаго преобразованія координатъ въ уравненіи кривой уничтожаются два члена второго измѣренія, именно: членъ, содержащій произведеніе неизвѣстныхъ, и членъ, содержащій квадратъ одного изъ неизвѣстныхъ.

Мы предполагали, что первоначальная система координатъ, относительно которой кривая выражается уравненіемъ (14), прямоугольная. Если же она косоугольная, то прежде всего ее можно замѣнить какою-нибудь прямоугольною, напр. такою, которая имѣетъ то же начало и ту же ось абсциссъ, какъ это было показано для центральныхъ кривыхъ (см. стр. 140). Отъ такого преобразованія видъ уравненія (14) не измѣняется.

211. Уравненіе (15) можетъ быть упрощено еще посредствомъ измѣненія начала координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, для перехода отъ прежнихъ осей координатъ къ новымъ, имѣющимъ то же направленіе, мы имѣемъ формулы

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b.$$

Посредствомъ ихъ уравненіе (15) обращается въ

$$Ny^2 + Px + (2Nb + Q)y + (Nb^2 + Pa + Qb + R) = 0.$$

Величины a и b, т. е. координаты новаго начала относительно прежней системы, могутъ быть выбраны такъ, чтобы было

$$2Nb + Q = 0 \quad \text{и} \quad Nb^2 + Pa + Qb + R = 0\;,$$

и, слѣдовательно,

$$b = -\frac{Q}{2N} \quad \text{и} \quad a = \frac{Q^2 - 4NR}{4NP}.$$

Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе обращается въ

$$Ny^2 + Px = 0$$

или

$$y^2 = 2px, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

гдѣ

$$p = -\frac{P}{2N} = \frac{2A(2AE - BD)}{(4A^2 + B^2)^{3/2}}.$$

И такъ, для всякой кривой второго порядка, не имѣющей центра, мы можемъ выбрать такую прямоугольную систему координатъ, относительно которой эта линія выражается уравненіемъ вида (16). Легко видѣть, что ось абсциссъ этой системы есть ось кривой, т. е. діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды, къ нему перпендикулярныя, а ось ординатъ касательныя въ вершинѣ кривой, т. е. въ концѣ этого діаметра (см. стр. 119 и 120).

212. Приведеніе уравненія (14) къ виду (16) и опредѣленіе постояннаго p по коэффиціентамъ этого уравненія достигается еще слѣдующимъ образомъ.

Придавая и отнимая въ первой части уравненія (14) выраженіе

$$2(2Ax + By)K + K^2,$$

гдѣ K есть произвольная конечная величина, дадимъ ему видъ

$$(2Ax + By + K)^2 + 4A(D - K)x + 2(2AE - BK)y + \\ + (4AF - K^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Положимъ сперва, что оси координатъ прямоугольныя, и возьмемъ на плоскости двѣ прямыя, выражаемыя уравненіями

$$\left.\begin{array}{rl} & 2Ax+By+K=0 \\ \text{и} & 4A(D-K)x+2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)=0 \end{array}\right\} \ldots \quad (18)$$

Называя буквами u и v разстоянія какой-нибудь точки разсматриваемой кривой отъ этихъ двухъ прямыхъ, будемъ, какъ извѣстно, имѣть

$$u=\frac{2Ax+By+K}{\sqrt{4A^2+B^2}},$$

$$v=\frac{4A(D-K)x+2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)}{2\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}.$$

Если примемъ первую изъ прямыхъ (18) за новую ось абсциссъ, а вторую за новую ось ординатъ и назовемъ уголъ между ними чрезъ θ, то будемъ, очевидно, имѣть

$$u=y'\sin\theta \quad \text{и} \quad v=x'\sin\theta.$$

Вслѣдствіе этого изъ предыдущихъ равенствъ получимъ

$$2Ax+By+K=y'\sin\theta\sqrt{4A^2+B^2}$$

и

$$4A(D-K)x+2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)=$$
$$=2x'\sin\theta\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2},$$

и потому уравненіе (17) принимаетъ видъ

$$y'^2\sin^2\theta(4A^2+B^2)+2x'\sin\theta\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}=0$$

или

$$y'^2=2px',$$

гдѣ

$$p=-\frac{\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}{(4A^2+B^2)\sin\theta}.$$

Уголъ же θ, образуемый прямыми (18), опредѣляется по коэффиціентамъ ихъ уравненій, при чемъ, какъ извѣстно (см. стр. 39),

$$\sin\theta=\frac{4A[B(D-K)-(2AE-BK)]}{2\sqrt{4A^2+B^2}\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}=$$
$$=\frac{2A(BD-2AE)}{\sqrt{4A^2+B^2}\sqrt{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}}.$$

Слѣдовательно,

$$p=-\frac{4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2}{2A(BD-2AE)\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

Величина K, взятая нами произвольно, можетъ быть выбрана такъ, чтобы уголъ θ между новыми осями координатъ имѣлъ данную величину. Для того чтобы новыя оси были прямоугольныя, должно выполняться условіе перпендикулярности прямыхъ (18):

$$4A^2(D-K)+B(2AE-BK)=0,$$

откуда

$$K=\frac{2A(2AD+BE)}{4A^2+B^2}.$$

Легко убѣдиться, что, по внесеніи этого значенія въ предыдущее выраженіе для p, получимъ

$$p=\frac{2A(2AE-BD)}{(4A^2+B^2)^{3/2}},$$

что мы имѣли и выше.

213. Если положимъ, что первоначальная система координатъ косоугольная, и обозначимъ уголъ между ея осями черезъ ω, то предыдущія выраженія разстояній u и v обратятся въ

$$u=\frac{(2Ax+By+K)\sin\omega}{R_1},$$

$$v=\frac{[4A(D-K)x+2(2AE-BK)y+(4AF-K^2)]\sin\omega}{2R_2},$$

гдѣ положено для краткости

$$R_1{}^2=4A^2+B^2-4AB\cos\omega$$

и $$R_2{}^2=4A^2(D-K)^2+(2AE-BK)^2-4A(D-K)(2AE-BK)\cos\omega.$$

Уравненіе (17) обратится, какъ и прежде, въ

$$y'^2=2px',$$

гдѣ

$$p=-\frac{R_2\sin\omega}{R_1{}^2\sin\theta},$$

при чемъ для угла θ между прямыми (18) будемъ имѣть

$$\sin\theta=\frac{2A(BD-2AE)\sin\omega}{R_1R_2}$$

и, слѣдовательно,

$$p=\frac{R_2{}^2}{2A(2AE-BD)R_1}.$$

Условіе перпендикулярности прямыхъ (18) будетъ имѣть въ настоящемъ случаѣ видъ

$$4A^2(D-K)+B(2AE-BK)-2A[B(D-K)+(2AE-BK)]\cos\omega=0,$$

откуда

$$K=\frac{2A[(2AD+BE)-(2AE+BD)\cos\omega]}{R_1{}^2}.$$

Не трудно убѣдиться, что, при такомъ значеніи K, будемъ имѣть

$$R_1 R_2 = 2A(2AE - BD)\sin\omega\,.$$

Опредѣляя отсюда R_2 и подставляя въ выраженіе для p, получимъ

$$p = \frac{2A(2AE - BD)\sin^2\omega}{R_1^{\,3}}$$

или

$$p = \frac{2A(2AE - BD)\sin^2\omega}{(4A^2 + B^2 - 4AB\cos\omega)^{3/2}}\,.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

КРУГЪ.

§ 1. Уравненія круга. Касательныя и поляры.

214. Кругъ есть линія второго порядка, представляющая частный видъ эллипсовъ. Эта линія разсматривается, какъ извѣстно, въ начальной геометріи, и всѣ ея свойства обнаруживаются элементарнымъ путемъ. Въ настоящей главѣ мы постараемся вывести главныя свойства круга аналитически и приложить методъ Аналитической Геометріи къ нѣкоторымъ вопросамъ о кругѣ и о системахъ круговъ.

215. Опредѣляя кругъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на одномъ и томъ же разстояніи отъ данной точки, называемой его центромъ, мы уже показали (см. стр. 18), что уравненіе его относительно прямоугольной системы координатъ есть

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

а въ случаѣ косоугольной системы координатъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2\,, \quad \ldots \quad (2)$$

гдѣ α и β суть координаты центра, а r радіусъ.

Когда начало координатъ находится въ центрѣ круга, то уравненіе его принимаетъ простѣйшій видъ, а именно

$$x^2+y^2=r^2$$

для прямоугольной системы координатъ

и
$$x^2+y^2+2xy\cos\omega=r^2$$

для косоугольной.

216. Уравненіе (1), по раскрытіи скобокъ, принимаетъ видъ

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0\,.$$

Сравнивая его съ общимъ уравненіемъ второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\,,$$

заключаемъ, что они имѣютъ одно и то же геометрическое значеніе, когда

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{0}=\frac{C}{1}=\frac{D}{-2\alpha}=\frac{E}{-2\beta}=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2-r^2},$$

т. е. когда

$$A=C, \qquad B=0,$$

$$2A\alpha+D=0, \quad 2A\beta+E=0$$

и

$$A(\alpha^2+\beta^2-r^2)=F.$$

Слѣдовательно, чтобы уравненіе второй степени выражало относительно прямоугольной системы координатъ кругъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты при квадратахъ неизвѣстныхъ были равны между собою, а коэффиціентъ при произведеніи неизвѣстныхъ равнялся нулю.

При этихъ условіяхъ, центръ и радіусъ выражаемаго уравненіемъ круга опредѣлятся по его коэффиціентамъ слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha=-\frac{D}{2A}, \quad \beta=-\frac{E}{2A},$$

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}.$$

Отсюда видимъ, что уравненіе второй степени представляетъ при условіяхъ $A=C$ и $B=0$ дѣйствительный кругъ только тогда, когда въ немъ

$$D^2+E^2>4AF.$$

Если же

$$D^2+E^2=4AF,$$

то $r=0$, и уравненіе будетъ представлять единственную точку, которую можно разсматривать, какъ кругъ безконечно малаго радіуса. Такъ какъ въ то же время первая часть уравненія разлагается на два множителя

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}\,(y-\beta) \qquad \text{и} \qquad (x-\alpha)-\sqrt{-1}\,(y-\beta),$$

то можно сказать, что оно выражаетъ совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ.

217. Въ случаѣ косоугольной системы кординатъ общее уравненіе второй степени имѣетъ одно и то же значеніе съ уравненіемъ (2), когда

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2\cos\omega}=\frac{C}{1}=\frac{D}{-2(\alpha+\beta\cos\omega)}=\frac{E}{-2(\beta+\alpha\cos\omega)}=$$

$$=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\beta\cos\omega-r^2},$$

т. е. представляетъ кругъ, когда въ немъ

$$A=C \qquad \text{и} \qquad B=2\cos\omega.$$

Центръ и радіусъ этого круга опредѣлятся въ этомъ случаѣ по коэффиціентамъ уравненія слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \frac{E\cos\omega - D}{2A\sin^2\omega}\,, \qquad \beta = \frac{D\cos\omega - E}{2A\sin^2\omega}$$

и

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 2DE\cos\omega - 4AF\sin^2\omega}}{2A\sin\omega}\,.$$

Въ слѣдующемъ мы будемъ пользоваться исключительно прямоугольными координатами, какъ представляющими болѣе удобства въ видахъ простоты аналитическихъ выраженій и дѣйствій.

218. Уравненіе круга, въ какомъ бы видѣ оно ни было дано, содержитъ три параметра, и всякая система условій, опредѣляющихъ вполнѣ кругъ, должна быть достаточна для нахожденія этихъ параметровъ, такъ же какъ и обратно.

Положимъ, что даны три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), и пусть уравненіе круга, проходящаго черезъ нихъ, будетъ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Въ такомъ случаѣ должно быть

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F &= 0\,,\\ x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F &= 0\,,\\ x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F &= 0\,, \end{aligned}$$

откуда коэффиціенты D, E и F этого уравненія могутъ быть найдены по координатамъ данныхъ точекъ. Слѣдовательно, уравненіе круга, проходящаго черезъ три данныя точки, можно представить, какъ результатъ исключенія D, E и F изъ предыдущихъ четырехъ равенствъ, т. е. въ видѣ

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1\\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1\\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1\\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Поэтому полагая, что четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) лежатъ на одномъ кругѣ, будемъ имѣть соотношеніе

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1\\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1\\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1\\ x_4^2 + y_4^2, & x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} - (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} - (x_4^2+y_4^2)\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или
$$d_1^2\,\Delta_1 - d_2^2\,\Delta_2 + d_3^2\,\Delta_3 - d_4^2\,\Delta_4 = 0\,,$$

гдѣ d_1, d_2, d_3, d_4 означаютъ разстоянія данныхъ точекъ отъ начала координатъ, а Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 суть площади треугольниковъ, образуемыхъ каждыми тремя изъ этихъ точекъ. При этомъ площади двухъ треугольниковъ, напр. Δ_1 и Δ_2, нужно считать имѣющими одинаковые знаки, когда ихъ различныя вершины находятся по одну и ту же сторону отъ общей стороны, и имѣющими различные знаки въ противномъ случаѣ.

219. Отыскивая точки пересѣченія какого-нибудь круга, выражаемаго уравненіемъ
$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\,,$$
съ прямою, проходящею черезъ начало координатъ и выражаемою уравненіемъ
$$y=mx\,,$$
получимъ, по исключеніи y, уравненіе
$$(1+m^2)\,x^2+(D+Em)\,x+F=0.$$

Слѣдовательно, называя чрезъ x_1 и x_2 абсциссы искомыхъ точекъ, а чрезъ y_1 и y_2 ихъ ординаты, будемъ имѣть
$$x_1\,x_2=\frac{F}{1+m^2}$$
и въ то же время
$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=x_1^2\,x_2^2\,(1+m^2)^2\,,$$
откуда получаемъ
$$d_1\,d_2=x_1\,x_2\,(1+m_2)=F\,,$$
гдѣ d_1 и d_2 суть разстоянія искомыхъ точекъ отъ начала координатъ.

Послѣднее равенство выражаетъ извѣстное изъ начальной геометріи свойство, что произведеніе отрѣзковъ сѣкущей, проведенной черезъ какую-нибудь точку, отъ этой точки до точекъ пересѣченія съ кругомъ, есть величина постоянная, т. е. не зависящая отъ направленія сѣкущей.

220. Положимъ, что центръ круга находится въ началѣ координатъ и, слѣдовательно, уравненіе его есть
$$x^2+y^2=r^2\,,$$

и пусть

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

будетъ уравненіе нѣкоторой прямой въ нормальной формѣ.

Рѣшая эти уравненія совмѣстно, получимъ для координатъ точекъ пересѣченія слѣдующія выраженія:

$$x = p \cos\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{r^2 - p^2},$$
$$y = p \sin\alpha \mp \cos\alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

Откуда видно, что точки пересѣченія будутъ дѣйствительныя, когда разстояніе прямой отъ центра круга менѣе его радіуса, и мнимыя, когда это разстояніе болѣе радіуса.

Если же $p = r$, то точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, прямая

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - r = 0$$

есть касательная.

При этомъ предыдущія выраженія для x и y опредѣлятъ координаты точки прикосновенія. Обозначая ихъ черезъ x_1 и y_1, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$x_1 = r \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad y_1 = r \sin\alpha.$$

Вслѣдствіе этого послѣднее уравненіе, выражающее касательную, можно представить въ видѣ

$$x_1 x + y_1 y = r^2.$$

221. Всякая прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія (x_1, y_1), выразится уравненіемъ

$$(y - y_1) = m(x - x_1),$$

и если она есть нормаль, т. е. перпендикулярна къ касательной (см. стр. 120), то должно быть

$$m = \frac{y_1}{x_1}.$$

Слѣдовательно, уравненіе нормали къ кругу будетъ

$$y_1 x - x_1 y = 0,$$

что представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ, т. е. центръ круга. Такимъ образомъ, видимъ, что радіусъ, проведенный къ точкѣ прикосновенія касательной, есть нормаль, свойство, извѣстное также изъ начальной геометріи.

222. Уравненіе касательной къ кругу можетъ быть выведено различнымъ образомъ. Между прочимъ, оно получается, какъ частный

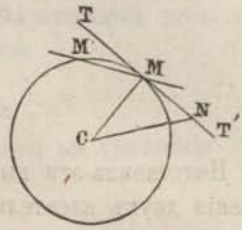
видъ общаго уравненія касательныхъ къ кривымъ второго порядка, найденнаго нами выше (см. стр. 118).

Положимъ, что требуется найти уравненіе касательной къ кругу, выражаемому уравненіемъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0.$$

Обозначая черезъ x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты двухъ какихъ-нибудь точекъ M и M' этого круга (фиг. 44), будемъ имѣть, что уравненіе

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=$$
$$=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$$



Фиг. 44.

представляетъ прямую, пересѣкающую кругъ въ этихъ двухъ точкахъ, ибо оно есть первой степени и удовлетворяется какъ при $x=x_1$, $y=y_1$, такъ и при $x=x_2$, $y=y_2$.

Отсюда слѣдуетъ, что при $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$, т. е. въ предположеніи, что точка M' совпадаетъ съ M, это уравненіе обращается въ искомое уравненіе касательной TT'

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2.$$

Первая часть этого уравненія представляетъ квадратъ разстоянія какой-нибудь точки N, лежащей на касательной, отъ точки прикосновенія M. Слѣдовательно, то же значеніе должна имѣть и вторая часть.

Отсюда заключаемъ, что результатъ подстановки въ первую часть уравненія круга (1), на мѣсто перемѣнныхъ x и y, координатъ какой-нибудь точки равняется квадрату касательной къ кругу изъ этой точки.

Послѣднее уравненіе касательной можетъ быть представлено еще слѣдующимъ образомъ:

$$[(x-\alpha)-(x_1-\alpha)]^2+[(y-\beta)+(y_1-\beta)]^2=$$
$$=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$$

или

$$2(x-\alpha)(x_1-\alpha)+2(y-\beta)(y_1-\beta)=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+r^2$$

или, замѣчая, что x_1 и y_1 удовлетворяютъ уравненію круга,

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=r^2.$$

При $\alpha=0$ и $\beta=0$ отсюда получается уравненіе касательной, найденное выше.

223. Уравненіе

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-r=0$$

представляетъ, какъ мы видѣли, касательную къ кругу радіуса r, имѣющему центръ въ началѣ координатъ. Полагая, что a и b суть координаты нѣкоторой точки, чрезъ которую проходитъ эта касательная, будемъ имѣть

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha - r = 0\,,$$

откуда

$$(a^2+b^2)\cos^2\alpha - 2ar\cos\alpha + r^2 - b^2 = 0\,.$$

Слѣдовательно,

$$\cos\alpha = \frac{ar \pm b\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}$$

и

$$\sin\alpha = \frac{br \mp a\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2}\,.$$

Подставивъ эти выраженія въ предыдущее уравненіе, получимъ уравненія двухъ касательныхъ, проходящихъ черезъ данную точку $(a\,,\ b)$:

$$x\,(ar \pm b\sqrt{a^2+b^2-r^2}) + y\,(br \mp a\sqrt{a^2+b^2-r^2}) - r\,(a^2+b^2) = 0$$

или

$$(ax+by-a^2-b^2)\,r + (bx-ay)\sqrt{a^2+b^2-r^2} = 0$$

и

$$(ax+by-a^2-b^2)\,r - (bx-ay)\sqrt{a^2+b^2-r^2} = 0\,.$$

Перемноживъ ихъ почленно, получимъ уравненіе второй степени, представляющее совокупность этихъ касательныхъ,

$$(ax+by-a^2-b^2)^2\,r^2 - (bx-ay)^2\,(a^2+b^2-r^2) = 0\,.$$

Замѣчая же, что

$$(bx-ay)^2 = (a^2+b^2)\,(x^2+y^2) - (ax+by)^2\,,$$

не трудно это уравненіе представить въ видѣ

$$(ax+by-r^2)^2 - (a^2+b^2-r^2)\,(x^2+y^2-r^2) = 0\,.$$

Понятно, что это уравненіе могло бы быть найдено тѣмъ же самымъ способомъ, какъ выше было выведено уравненіе двухъ касательныхъ къ кривой второго порядка, данной общимъ уравненіемъ (см. стр. 121 и 122).

224. Уравненіе

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0\,,$$

представляющее касательную къ кругу

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0\,,$$

когда $x_1\,,\ y_1$ суть координаты какой-нибудь его точки, выражаетъ нѣкоторую опредѣленную прямую и тогда, когда $x_1\,,\ y_1$ означаютъ координаты точки, данной какъ-нибудь на плоскости. Прямая эта называется *полярою* точки $(x_1\,,\ y_1)$ относительно круга, а сама точка ея *полюсомъ* (см. стр. 122). Понятно, что поляра всякой точки плоскости есть прямая дѣйствительная. Въ случаѣ, когда кругъ выражается уравненіемъ вида (1), уравненіе поляры, очевидно, будетъ

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)-r^2=0\,.$$

Все сказанное выше о полярахъ относительно линій второго порядка вообще относится, очевидно, и къ полярамъ относительно круга. Такъ прежде всего заключаемъ, что поляра точки, лежащей на кругѣ, есть касательная въ этой точкѣ, а полюсъ касательной есть ея точка прикосновенія. Далѣе, замѣчая, что равенство

$$x_1x_2+y_1y_2-r^2=0$$

есть въ одно и то же время результатъ подстановки въ уравненіе

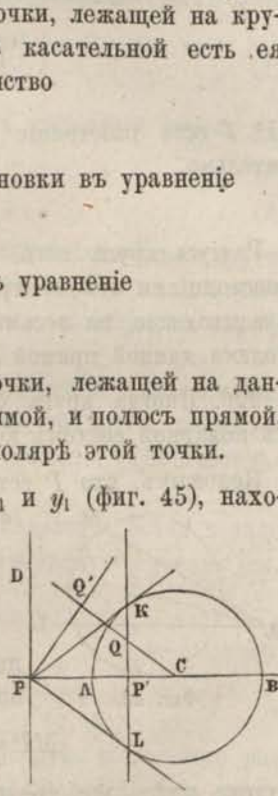
$$xx_1+yy_1-r^2=0$$

координатъ x_2, y_2 и результатъ подстановки въ уравненіе

$$xx_2+yy_2-r^2=0$$

координатъ x_1, y_1, убѣждаемся, что поляра точки, лежащей на данной прямой, проходитъ черезъ полюсъ этой прямой, и полюсъ прямой, проходящей черезъ данную точку, лежитъ на полярѣ этой точки.

Если точка P, которой координаты суть x_1 и y_1 (фиг. 45), находится внѣ круга, такъ что $PC>r$, то, называя черезъ K и L точки прикосновенія касательныхъ изъ этой точки, будемъ имѣть, что поляра точки P, какъ лежащей на этихъ касательныхъ, будетъ прямая, проходящая черезъ ихъ полюсы, т. е. точки прикосновенія K и L.



Фиг. 45.

225. Такъ какъ прямая, соединяющая точку (x_1, y_1) съ центромъ круга

$$x^2+y^2-r^2=0\,,$$

выражается уравненіемъ

$$xy_1-yx_1=0\,,$$

то убѣждаемся, что она перпендикулярна къ прямой

$$xx_1+yy_1-r^2=0\,,$$

т. е. къ полярѣ этой точки.

И такъ, поляра всякой точки относительно круга перпендикулярна къ діаметру, проходящему черезъ эту точку.

Слѣдовательно, поляра точки P', средины хорды KL, будетъ прямая PD, параллельная этой хордѣ, и поляра точки Q, лежащей гдѣ-нибудь на хордѣ KL, будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ P на діаметръ QC.

Называя черезъ l разстояніе прямой

$$xx_1 + yy_1 - r^2$$

отъ начала координатъ, будемъ имѣть

$$l = \frac{r^2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}} = \frac{r^2}{l'},$$

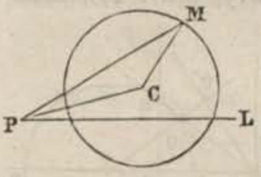
гдѣ l' есть разстояніе точки (x_1, y_1) отъ начала координатъ. Слѣдовательно,

$$ll' = r^2.$$

Радіусъ круга есть, слѣдовательно, средняя геометрическая между разстояніями отъ центра какой-либо точки и ея поляры, соотношеніе, указывающее на весьма простое построеніе поляры данной точки и полюса данной прямой относительно круга.

226. Иногда кругъ бываетъ удобнѣе разсматривать по отношенію къ полярной системѣ координатъ.

Положимъ, что P есть полюсъ и PL полярная ось такой системы (фиг. 46), и пусть координаты центра круга будутъ



Фиг. 46.

$$CP = d \quad \text{и} \quad \angle CPL = \alpha.$$

Въ такомъ случаѣ, называя координаты какой-нибудь точки M на кругѣ черезъ ϱ и φ, т. е. полагая

$$MP = \varrho \quad \text{и} \quad \angle MPL = \varphi,$$

будемъ имѣть изъ треугольника PMC

$$r^2 = \varrho^2 + d^2 - 2\,\varrho\, d \cos(\varphi - \alpha)$$

или

$$\varrho^2 - 2\varrho d \cos(\varphi - \alpha) + d^2 - r^2 = 0,$$

гдѣ r есть радіусъ круга.

Это и есть общая зависимость между координатами точекъ круга, т. е. уравненіе круга въ полярныхъ координатахъ. Понятно, что его можно было бы вывести изъ уравненія круга въ прямолинейныхъ координатахъ посредствомъ преобразованія координатъ.

Если центръ круга находится на полярной оси, то $\alpha = 0$, и предыдущее уравненіе обращается въ

$$\varrho^2 - 2\varrho d \cos\varphi + d^2 - r^2 = 0.$$

Если же кромѣ того кругъ проходитъ черезъ полюсъ системы координатъ, то $d = r$, и уравненіе круга принимаетъ видъ

$$\varrho = 2r \cos\varphi \, .$$

§ 2. Системы круговъ.

227. Положимъ, что намъ даны два круга, уравненія которыхъ суть:

$$\left.\begin{aligned} &(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2=0 \\ \text{и} \qquad &(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-r_2{}^2=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Обозначая для краткости первыя части этихъ уравненій черезъ U_1 и U_2, будемъ имѣть, что уравненіе

$$U_1 - k\,U_2 = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ k есть какая-нибудь постоянная величина, выражаетъ также кругъ. Это слѣдуетъ изъ того, что въ немъ такъ же, какъ и въ данныхъ уравненіяхъ (1), коэффиціенты при x^2 и y^2 равны, а члена съ произведеніемъ xy не существуетъ вовсе.

Такъ какъ значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одновременно уравненіямъ (1), удовлетворяютъ и уравненію (2), то кругъ, выражаемый послѣднимъ, проходитъ черезъ точки пересѣченія (дѣйствительныя или мнимыя) данныхъ круговъ.

При неопредѣленномъ k уравненіе (2) представляетъ безчисленное множество круговъ, составляющихъ систему, называемую *пучкомъ* (см. стр. 71).

Изъ уравненія (2) имѣемъ

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(x-x_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2}{(x-x_2)^2+(y-\beta_2)^2-r_2{}^2}\,,$$

и такъ какъ члены отношенія, составляющаго вторую часть этого равенства, при всякомъ значеніи координатъ x и y представляютъ квадраты длинъ касательныхъ изъ точки, опредѣляемой этими координатами, къ двумъ даннымъ кругамъ (см. стр. 153), то заключаемъ, что кругъ (2) представляетъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, касательныя изъ которыхъ къ двумъ даннымъ кругамъ находятся въ постоянномъ отношеніи [1]).

228. При $k = 1$ уравненіе (2) обращается въ

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2-(x-\alpha_2)^2-(y-\beta_2)^2+r_2{}^2=0$$

или

$$\begin{aligned} 2(\alpha_2-\alpha_1)\,x+2\,(\beta_2-\beta_1)\,y+(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)&- \\ -(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)& \end{aligned}$$

---

[1]) Легко убѣдиться, что и отношеніе разстояній точекъ этого геометрическаго мѣста отъ центровъ данныхъ круговъ есть также постоянное.

и представляетъ, слѣдовательно, прямую, проходящую чрезъ точки пересѣченія данныхъ круговъ. Она есть дѣйствительная при всякомъ расположеніи этихъ круговъ и называется ихъ *радикальною осью*.

Опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ круговъ сводится, такимъ образомъ, на опредѣленіе точекъ пересѣченія одного изъ нихъ съ радикальной осью.

Изъ сказаннаго о значеніи множителя k слѣдуетъ, что радикальная ось есть геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ обоимъ даннымъ кругамъ, равны между собою.

Уравненіе прямой, проходящей черезъ центръ данныхъ круговъ, есть

$$(\beta_2-\beta_1)x-(\alpha_2-\alpha_1)y+(\alpha_2\beta_1-\beta_2\alpha_1)=0\,.$$

Сравнивая его съ уравненіемъ радикальной оси, убѣждаемся, что эти прямыя перпендикулярны.

И такъ, радикальная ось двухъ круговъ перпендикулярна къ ихъ линіи центровъ.

Очевидно, что для всѣхъ круговъ, принадлежащихъ пучку

$$U_1-kU_2=0\,,$$

радикальная ось одна и та же. Отсюда слѣдуетъ, что касательныя изъ какой-нибудь точки радикальной оси ко всѣмъ кругамъ пучка равны между собою и что центры всѣхъ круговъ пучка лежатъ на одной прямой.

Когда круги соприкасаются, то радикальная ось есть ихъ общая касательная.

229. Уравненіе радикальной оси представляетъ, какъ показано, частный случай уравненія (2) или

$$\begin{gathered}(1-k)(x^2+y^2)-2(\alpha_1-k\alpha_2)x-2(\beta_1-k\beta_2)y+\\+(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)-k(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)=0\end{gathered}$$

при $k=1$. Но если мы будемъ измѣнять въ этомъ уравненіи k, непрерывно приближая къ единицѣ, то координаты одной изъ точекъ пересѣченія выражаемаго имъ круга съ какой-нибудь прямой, напримѣръ, съ одной изъ осей координатъ будутъ непрерывно возростать и при $k=1$ сдѣлаются безконечно большими (см. стр. 105). Слѣдовательно, въ этомъ частномъ случаѣ уравненіе (2) удовлетворяется не только точками радикальной оси, но и безконечнымъ множествомъ безконечно удаленныхъ точекъ, т. е. выражаетъ совокупность радикальной оси съ прямою, безконечно удаленною.

Отсюда заключаемъ, что всѣ круги, принадлежащіе пучку

$$U_1-kU_2=0\,,$$

проходятъ не только черезъ точки пересѣченія круга $U_1 = 0$ съ радикальною осью, но и чрезъ точки пересѣченія его съ безконечно удаленною прямою, точки, очевидно, мнимыя.

Тѣ же самыя мнимыя безконечно удаленныя точки должны быть разсматриваемы, какъ принадлежащія всякому другому кругу, ибо, замѣняя въ уравненіи (2) многочленъ U_2 первою частью уравненія какого бы ни было круга, мы ни круга $U_1 = 0$, ни безконечно удаленной прямой не измѣняемъ [1]).

И такъ, всѣ круги на плоскости должны быть разсматриваемы, какъ имѣющіе двѣ общія безконечно удаленныя мнимыя точки. Эти точки имѣютъ очень важное значеніе во многихъ аналитико-геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Ихъ называютъ *круговыми* или *циклическими* точками.

Такъ какъ эти точки удовлетворяютъ уравненію

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

при всякомъ r, то онѣ суть также безконечно удаленныя точки двухъ мнимыхъ прямыхъ, выражаемыхъ въ совокупности уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = 0$$

и отдѣльно уравненіями

$$x + y\sqrt{-1} = 0 \quad \text{и} \quad x - y\sqrt{-1} = 0.$$

230. Если, имѣя пучекъ круговъ, мы примемъ ихъ радикальную ось за ось ординатъ, а прямую центровъ за ось абсциссъ (фиг. 47), то уравненіе всякаго круга, принадлежащаго пучку, будетъ имѣть видъ

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

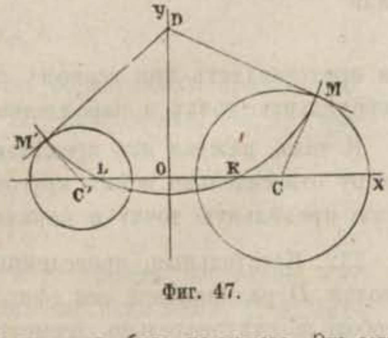
или

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + m^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ

$$m = \sqrt{\alpha^2 - r^2}.$$

Эта величина есть, очевидно, длина касательной къ кругу изъ начала координатъ, ибо при $x=0$, $y=0$ первая часть уравненія (5) обращается въ m^2.



Фиг. 47.

Она есть постоянная, т. е. одинаковая для всѣхъ круговъ пучка, и дѣйствительная только тогда, когда $\alpha^2 > r^2$, т. е. когда круги не пересѣкаются.

Въ уравненіи (5) α есть неопредѣленный параметръ, каждымъ значеніемъ

---

[1]) Двухъ различныхъ безконечно удаленныхъ прямыхъ быть не можетъ. Это есть логическое слѣдствіе положенія, что на каждой прямой безконечно удаленная точка единственна (см. стр. 8).

котораго опредѣляется одинъ изъ круговъ пучка. Если положимъ, что $a = \pm m$, то будемъ имѣть $r = 0$.

Кругъ обращается въ этомъ случаѣ въ точку или совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ.

Слѣдовательно, въ томъ случаѣ, когда круги пучка не пересѣкаются съ радикальной осью, на прямой центровъ существуютъ двѣ дѣйствительныя точки K и L, находящіяся отъ радикальной оси на разстояніи m, которыя представляютъ собою два безконечно малыхъ круга, принадлежащихъ пучку. Эти точки называютъ *предѣльными точками* пучка.

231. Уравненіе поляры какой-нибудь данной точки (x_1, y_1) по отношенію къ кругу (4) есть, какъ извѣстно (см. стр. 155),

$$(x-a)(x_1-a)+yy_1-r^2=0$$

или

$$xx_1+yy_1-a(x+x_1)+m^2=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

При неопредѣленномъ значеніи a, это уравненіе представляетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$xx_1+yy_1+m^2=0 \quad \text{и} \quad x+x_1=0 \, .$$

Слѣдовательно, поляры всякой точки относительно круговъ, имѣющихъ общую радикальную ось, проходятъ черезъ одну точку.

Если данная точка находится на радикальной оси, то $x_1=0$, и второе изъ двухъ послѣднихъ уравненій обращается въ $x=0$. Это показываетъ, что поляры точекъ, лежащихъ на радикальной оси, пересѣкаются также на этой оси.

Если данная точка совпадаетъ съ одной изъ предѣльныхъ точекъ K и L, то $x_1 = \pm m$ и $y_1 = 0$.

Въ этомъ случаѣ уравненіе (6) обращается въ

$$(a \mp m)(x \pm m) = 0$$

или

$$x = \mp m$$

и представляетъ при всякомъ a прямую, проходящую черезъ другую предѣльную точку и параллельную оси ординатъ.

И такъ, каждая изъ предѣльныхъ точекъ имѣетъ одну и ту же поляру относительно всѣхъ круговъ пучка, которая проходитъ чрезъ другую предѣльную точку и параллельна радикальной оси.

232. Касательныя, проведенныя къ кругамъ пучка изъ какой-нибудь точки D радикальной оси (фиг. 47), какъ мы знаемъ, равны между собою и, слѣдовательно, геометрическое мѣсто ихъ точекъ прикосновенія есть кругъ, имѣющій точку D центромъ. Этотъ кругъ проходитъ, очевидно, черезъ предѣльныя точки K и L и пересѣкается съ круга-

ми пучка *ортогонально*, т. е. такъ, что касательныя къ нему въ точкахъ пересѣченія M, M' и т. д. перпендикулярны къ касательнымъ этихъ круговъ.

Уравненіе этого круга имѣетъ видъ

$$x^2+(y-\beta)^2-r'^2=0$$

или

$$x^2+y^2-2\beta y-m^2=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

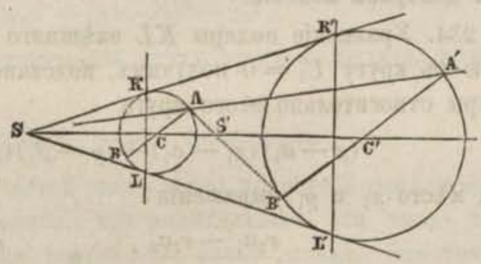
ибо

$$r'^2-\beta^2=\overline{DK}^2-\overline{OD}^2=\overline{OK}^2=m^2\,.$$

При неопредѣленномъ значеніи β это уравненіе представляетъ пучекъ круговъ, для которыхъ ось ординатъ есть прямая центровъ, а ось абсциссъ радикальная ось.

Пучки (5) и (7) представляютъ, такимъ образомъ, двѣ ортогональныя системы круговъ и притомъ предѣльныя точки перваго пучка суть точки пересѣченія всѣхъ круговъ второго или обратно.

233. Если, имѣя два круга, выражаемые уравненіями (1), мы проведемъ черезъ ихъ центры C и C' два параллельные діаметра AB и $A'B'$ (фиг. 48), то прямыя, соединяющія концы этихъ діаметровъ, будутъ встрѣчать линію центровъ въ двухъ точкахъ S и S', положеніе которыхъ не зависитъ отъ направленія, въ какомъ проведены діаметры.



Фиг. 48.

Въ самомъ дѣлѣ, прямая AA' образуетъ съ прямою центровъ и радіусами CA и $C'A'$ два подобныхъ треугольника, изъ которыхъ, при всякой величинѣ угловъ, имѣемъ

$$\frac{CS}{C'S}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{r_1}{r_2}\,.$$

Точно также изъ подобія треугольниковъ, образуемыхъ прямою AB' съ прямою центровъ и радіусами CA и $C'B'$, заключаемъ, что, при всякомъ направленіи этихъ радіусовъ, должно быть

$$\frac{CS'}{C'S'}=\frac{CA}{C'B'}=\frac{r_1}{r_2}\,.$$

Такимъ образомъ видимъ, что точки S и S' дѣлятъ разстояніе CC' между центрами круговъ въ одномъ и томъ же отношеніи, т. е. гармонически (см. стр. 92), и это отношеніе равняется отношенію радіусовъ круговъ. Первая изъ этихъ точекъ, находящаяся внѣ отрѣзка

CC', называется *внѣшнимъ центромъ подобія* данныхъ круговъ, а вторая, лежащая внутри этого отрѣзка,—ихъ *внутреннимъ центромъ подобія*.

Координаты внѣшняго центра подобія будутъ, очевидно (см. стр. 7),

$$x = \frac{r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2}{r_2 - r_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{r_2 - r_1},$$

а внутренняго

$$x = \frac{r_2\alpha_1 + r_1\alpha_2}{r_2 + r_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{r_2\beta_1 + r_1\beta_2}{r_2 + r_1}.$$

Въ томъ случаѣ, когда радіусы CA и $C'A'$ перпендикулярны къ прямой, соединяющей ихъ концы, эта послѣдняя будетъ касательною къ обоимъ кругамъ.

Слѣдовательно, центры подобія двухъ круговъ суть точки пересѣченія ихъ общихъ касательныхъ.

Зная координаты центровъ подобія, не трудно найти и уравненія общихъ касательныхъ, какъ касательныхъ изъ данной точки къ одному изъ данныхъ круговъ (см. стр. 154), а также и точки прикосновенія этихъ касательныхъ, какъ точекъ пересѣченія круговъ съ полярами центровъ подобія.

234. Уравненіе поляры KL внѣшняго центра подобія S по отношенію къ кругу $U_1 = 0$ получимъ, подстановляя въ общее уравненіе поляры относительно этого круга

$$(x-\alpha_1)(x_1-\alpha_1)+(y-\beta_1)(x_1-\beta_1)-r_1^2=0$$

на мѣсто x_1 и y_1 выраженія

$$\frac{r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2}{r_2 - r_1} \quad \text{и} \quad \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{r_2 - r_1}.$$

Результатъ этой подстановки будетъ

$$(x-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)+(y-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)-r_1(r_2-r_1)=0$$

или

$$(\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y-(\alpha_1^2+\beta_1^2-r_1^2)+(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-r_1r_2)=0.$$

Это уравненіе можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$2(\alpha_1-\alpha_2)x+2(\beta_1-\beta_2)y-(\alpha_1^2+\beta_1^2-r_1^2)+(\alpha_2^2+\beta_2^2-r_2^2)-$$
$$-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1-r_2)^2=0$$

или, наконецъ,

$$(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1-r_2)^2=0.$$

Подставляя тѣ же самыя значенія координатъ x_1 и y_1 въ уравненіе поляры относительно второго круга

$$(x-\alpha_2)(x_1-\alpha_2)+(y-\beta_2)(y_1-\beta_2)-r_2^2=0,$$

получимъ уравненіе поляры $K'L'$ точки S въ видѣ

$$(x-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)+(y-\beta_2)(\beta_1-\beta_2)-r_2(r_2-r_1)=0$$

или, по выполненіи тѣхъ же преобразованій,

$$(U_2-U_1)+(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2=0\,.$$

Такимъ же точно образомъ найдемъ, что уравненія поляръ внутренняго центра подобія S' относительно круговъ $U_1=0$ и $U_2=0$ будутъ послѣдовательно

$$(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1+r_2)^2=0$$

и $$(U_2-U_1)+(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)-(r_1+r_2)^2=0\,.$$

§ 3. Свойства трехъ круговъ.

235. Возьмемъ три какіе-нибудь круга, уравненія которыхъ пусть будутъ

$$U_1=0\,,\quad U_2=0\,,\quad U_3=0\,,\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad (1)$$

гдѣ

$$U_1=(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1{}^2\,,$$
$$U_2=(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-r_2{}^2\,,$$
$$U_3=(x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2-r_3{}^2\,.$$

Радикальныя оси каждыхъ двухъ изъ этихъ круговъ будутъ выражаться уравненіями

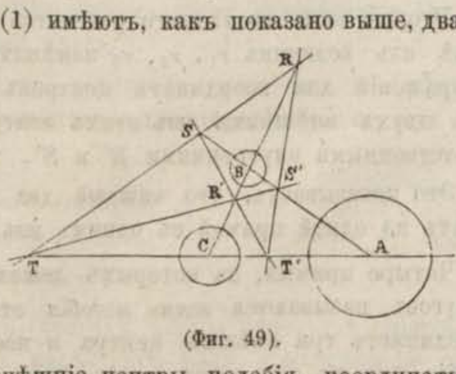
$$U_1-U_2=0\,,\quad U_2-U_3=0\,,\quad U_3-U_1=0\,.$$

Такъ какъ сумма первыхъ частей этихъ трехъ уравненій тождественно равняется нулю, то убѣждаемся, что радикальныя оси трехъ какихъ бы ни было круговъ пересѣкаются въ одной точкѣ. Эта точка называется *радикальнымъ центромъ* системы трехъ круговъ.

По свойству радикальныхъ осей касательныя изъ радикальнаго центра ко всѣмъ тремъ даннымъ кругамъ равны между собою.

236. Каждые два изъ круговъ (1) имѣютъ, какъ показано выше, два центра подобія. Слѣдовательно, всего имѣется для этихъ круговъ шесть центровъ подобія.

Не трудно убѣдиться, что эти шесть точекъ расположены на четырехъ прямыхъ, по три на каждой.



(Фиг. 49).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A, B, C будутъ центры данныхъ круговъ (фиг. 49) и R, S, T ихъ внѣшніе центры подобія, координаты которыхъ суть послѣдовательно

*

$$x_1 = \frac{r_3\alpha_2 - r_2\alpha_3}{r_3 - r_2}, \qquad y_1 = \frac{r_3\beta_2 - r_2\beta_3}{r_3 - r_2},$$

$$x_2 = \frac{r_1\alpha_3 - r_3\alpha_1}{r_1 - r_3}, \qquad y_2 = \frac{r_1\beta_3 - r_3\beta_1}{r_1 - r_3},$$

$$x_3 = \frac{r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2}{r_2 - r_1}, \qquad y_3 = \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{r_2 - r_1}.$$

Отсюда находимъ

$$y_2 - y_3 = \frac{r_1[\beta_1(r_3 - r_2) + \beta_2(r_1 - r_3) + \beta_3(r_2 - r_1)]}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_1)}$$

или сокращенно

$$y_2 - y_3 = \frac{r_1 M}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_1)}.$$

Точно такъ же найдемъ

$$y_3 - y_1 = \frac{r_2 M}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)}$$

и

$$y_1 - y_2 = \frac{r_3 M}{(r_3 - r_2)(r_1 - r_3)}.$$

Слѣдовательно,

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) =$$

$$= \frac{M[(r_3\alpha_2 - r_2\alpha_3)r_1 + (r_1\alpha_3 - r_3\alpha_1)r_2 + (r_2\alpha_1 - r_1\alpha_2)r_3]}{(r_3 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_1)},$$

и такъ какъ вторая часть тождественно равняется нулю, то и убѣждаемся, что условіе, при которомъ три точки R, S и T лежатъ на одной прямой (см. стр. 44), выполняется.

Вторая часть послѣдняго равенства равняется нулю и тогда, когда двѣ изъ величинъ r_1, r_2, r_3 измѣнятъ знакъ, что, какъ видно изъ выраженій для координатъ центровъ подобія, соотвѣтствуетъ замѣнѣ двухъ внѣшнихъ изъ этихъ центровъ, напримѣръ R и S, соотвѣтственными внутренними R' и S'.

Это показываетъ, что каждые два внутренніе центра подобія лежатъ на одной прямой съ однимъ изъ внѣшнихъ.

Четыре прямыя, на которыхъ лежатъ по три центра подобія трехъ круговъ, называются *осями подобія* этихъ круговъ. Одна изъ нихъ соединяетъ три внѣшніе центра и носитъ названіе внѣшней оси подобія, три же остальныя соединяютъ одинъ внѣшній центръ подобія съ двумя внутренними.

Если два круга соприкасаются съ третьимъ, то прямая, соединяющая точки прикосновенія, есть ось подобія и, слѣдовательно, проходитъ чрезъ центръ подобія этихъ двухъ круговъ.

237. Соприкосновеніе двухъ круговъ, какъ извѣстно, можетъ быть двоякаго рода: внѣшнее, когда центры круговъ лежатъ по разныя стороны отъ точки касанія, и внутреннее, когда они лежатъ по одну и ту же сторону отъ этой точки.

Въ первомъ случаѣ разстояніе между центрами круговъ равняется суммѣ ихъ радіусовъ, а во второмъ разности.

Отсюда заключаемъ, что условіе, что какой-нибудь кругъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

соприкасается одновременно съ тремя данными кругами

$$U_1=0\,,\ U_2=0\,,\ U_3=0\,,$$

можетъ быть выражено слѣдующими тремя равенствами:

$$(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2=(r\pm r_1)^2\,,$$
$$(\alpha-\alpha_2)^2+(\beta-\beta_2)^2=(r\pm r_2)^2\,,$$
$$(\alpha-\alpha_3)^2+(\beta-\beta_3)^2=(r\pm r_3)^2\,,$$

которыми этотъ кругъ и опредѣляется вполнѣ, ибо изъ нихъ три неизвѣстныя α, β и r могутъ быть найдены.

Эти равенства могутъ быть представлены еще слѣдующимъ образомъ:

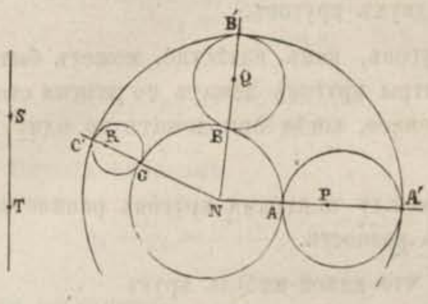
$$U_1=r(r\pm 2r_1)\,,$$
$$U_2=r(r\pm 2r_2)\,,$$
$$U_3=r(r\pm 2r_3)\,,$$

гдѣ въ многочленахъ, составляющихъ первыя части, неизвѣстныя суть координаты α и β центра искомаго круга.

Вычитая же почленно каждыя два равенства, исключимъ изъ нихъ вторыя степени неизвѣстныхъ и получимъ для опредѣленія α, β и r три линейныхъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} U_1-U_2&=2r(r_1\pm r_2)\\ U_2-U_3&=2r(r_2\pm r_3)\\ U_3-U_1&=2r(r_3\pm r_1)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Смотря по знакамъ во вторыхъ частяхъ этихъ равенствъ опредѣляемый ими кругъ можетъ имѣть различнаго рода прикосновеніе съ данными кругами и дѣлая всѣ возможныя сочетанія этихъ знаковъ, убѣждаемся, что, вообще говоря, должно существовать восемь круговъ, соприкасающихся съ тремя данными. Два изъ этихъ круговъ имѣютъ со всѣми данными кругами внѣшнее или внутреннее прикосновенiе.



Фиг. 50.

Каждый же изъ шести остальныхъ имѣетъ съ однимъ изъ данныхъ круговъ внѣшнее прикосновенiе, а съ двумя другими внутреннее, или обратно.

238. Чтобы найти геометрически, т. е. построенiемъ, кругъ (2), имѣющiй съ тремя данными кругами (1) внѣшнее прикосновенiе, постараемся найти точки прикосновенiя его A, B, C съ этими кругами (фиг. 50). Для координатъ точки C прикосновенiя его съ кругомъ $U_1 = 0$ будемъ имѣть, очевидно, слѣдующiя выраженiя:

$$x = \frac{r_1 \alpha + r \alpha_1}{r_1 + r}, \qquad y = \frac{r_1 \beta + r \beta_1}{r_1 + r}, \quad . \ . \ . \ . \ (4)$$

откуда находимъ

$$\alpha = \frac{r_1 + r}{r_1} x - \frac{r}{r_1} \alpha_1 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{r_1 + r}{r_1} y - \frac{r}{r_1} \beta_1 \quad . \ . \ . \ (5)$$

Подставляя эти значенiя для α и β въ первое изъ уравненiй (3), которое въ настоящемъ случаѣ имѣетъ видъ

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha + 2(\beta_2 - \beta_1)\beta + h = 2r(r_1 - r_2),$$

гдѣ

$$h = (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 - r_1{}^2) - (\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - r_2{}^2),$$

получимъ

$$2[(\alpha_2 - \alpha_1)x + (\beta_2 - \beta_1)y] \frac{r_1 + r}{r_1} =$$

$$= 2[(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_1 + (\beta_2 - \beta_1)\beta_1] \frac{r}{r_1} - h + 2r(r_1 - r_2).$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на r_1 и прибавивъ къ обѣимъ частямъ $(r_1 + r)h$, получимъ

$$[2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + h](r_1 + r) =$$
$$= [2(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_1 + 2(\beta_2 - \beta_1)\beta_1 + h]r + 2rr_1(r_1 - r_2)$$

или

$$[2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + h](r_1 + r) =$$
$$= [(r_1 - r_2)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta - \beta_2)^2]r,$$

что можно представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$(U_2-U_1)(r_1+r)=[(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2]\,r\,, \ldots (6)$$

гдѣ величины x и y, входящія въ многочленъ U_2-U_1, суть координаты точки прикосновенія C.

Подобнымъ же образомъ, подставляя выраженія (5) въ третье изъ равенствъ (3), имѣющее въ настоящемъ случаѣ видъ

$$2(\alpha_1-\alpha_3)\alpha+2(\beta_1-\beta_3)\beta+k=2r(r_3-r_1)\,,$$

гдѣ

$$k=(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2-r_3{}^2)-(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)\,,$$

будемъ имѣть

$$(U_3-U_1)(r_1+r)=[(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2-(r_1-r_3)^2]\,r\,. \ldots (7)$$

Исключая r изъ этого и предыдущаго равенства, получимъ

$$\frac{U_2-U_1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2}=\frac{U_3-U_1}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2-(r_1-r_3)^2}\,, \ldots (8)$$

уравненіе первой степени относительно x и y, выражающее прямую, проходящую чрезъ разсматриваемую точку прикосновенія C. Кромѣ того, эта прямая проходитъ, очевидно, черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$U_2-U_1=0 \quad \text{и} \quad U_3-U_1=0\,,$$

т. е. черезъ радикальный центръ N трехъ данныхъ круговъ.

239. Если кругъ (2) имѣетъ съ тремя данными кругами внутреннее прикосновеніе, то координаты точки C' прикосновенія его съ первымъ изъ этихъ круговъ будутъ

$$x=\frac{r_1\alpha-r\alpha_1}{r_1-r} \quad \text{и} \quad y=\frac{r_1\beta-r\beta_1}{r_1-r}\,.$$

Такъ какъ эти выраженія отличаются отъ выраженій (4) только знакомъ при r, то, опредѣляя изъ нихъ α и β и подставляя въ первое и третье изъ уравненій (3), получимъ два уравненія, отличающіяся отъ уравненій (6) и (7) также только знакомъ при r. Результатомъ исключенія r изъ этихъ двухъ уравненій будетъ, слѣдовательно, то же самое уравненіе (8).

Такимъ образомъ видимъ, что прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ, пересѣкаетъ кругъ $U_1=0$ въ двухъ точкахъ C и C', въ которыхъ онъ соприкасается съ двумя кругами, имѣющими со всѣми тремя данными внѣшнее или внутреннее прикосновеніе.

240. Вычитая изъ обѣихъ частей уравненія (8) по единицѣ, дадимъ ему видъ

$$\frac{(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1-r_2)^2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2}=$$

$$=\frac{(U_3-U_1)-(\alpha_1-\alpha_3)^2-(\beta_1-\beta_3)^2+(r_1-r_3)^2}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2-(r_1-r_3)^2},$$

откуда видно, что прямая, имъ выражаемая, проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$(U_2-U_1)-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+(r_1-r_2)^2=0$$

и $$(U_3-U_1)-(\alpha_1-\alpha_3)^2-(\beta_1-\beta_3)^2+(r_1-r_3)^2=0\,.$$

Первая изъ этихъ прямыхъ есть, какъ мы видѣли выше (см. стр. 162), поляра относительно круга $U_1=0$ внѣшняго центра подобія S круговъ $U_1=0$ и $U_2=0$. Вторая же есть поляра относительно того же круга внѣшняго центра подобія T круговъ $U_1=0$ и $U_3=0$.

Слѣдовательно, точка пересѣченія этихъ прямыхъ есть полюсъ относительно круга $U_1=0$ прямой линіи ST, соединяющей эти центры подобія, т. е. внѣшней оси подобія.

И такъ, прямая (8), проходящая черезъ радикальный центръ трехъ данныхъ круговъ, проходитъ въ тоже время черезъ полюсъ R внѣшней оси подобія этихъ круговъ относительно круга $U_1=0$.

241. Изъ сказаннаго видимъ, что для построенія круговъ, имѣющихъ съ тремя данными внѣшнее или внутреннее прикосновеніе, нужно найти полюсы P, Q, R внѣшней оси подобія относительно каждаго изъ данныхъ круговъ и соединить ихъ прямыми линіями съ радикальнымъ центромъ N этихъ круговъ. Точки пересѣченія A, B, C этихъ прямыхъ съ данными кругами, точки, въ которыхъ касательныя къ этимъ кругамъ пересѣкаются между собою на ихъ радикальныхъ осяхъ, будутъ точками прикосновенія одного изъ искомыхъ круговъ. Остальныя три точки A', B', C' пересѣченія тѣхъ же прямыхъ съ данными кругами будутъ точками прикосновенія другого изъ искомыхъ круговъ.

Пользуясь для такого же построенія другими осями подобія трехъ данныхъ круговъ, найдемъ такимъ же точно образомъ точки прикосновенія круговъ, имѣющихъ съ однимъ изъ данныхъ внѣшнее прикосновеніе, а съ двумя другими внутреннее, или обратно.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ЭЛЛИПСЪ.

§ 1 Форма эллипса и его построеніе.

242. Мы видѣли, что уравненіе всякой центральной кривой второго порядка въ томъ случаѣ, когда за оси координатъ приняты два ея сопряженные діаметра. имѣетъ видъ (см. стр. 115)

$$Ax^2+Cy^2+F=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

и что это уравненіе можетъ представлять эллипсъ только тогда, когда коэффиціенты A и C имѣютъ одинаковые знаки.

Если при этомъ постоянный членъ F имѣетъ такой же знакъ, какъ и эти коэффиціенты, то уравненіе (1) не имѣетъ никакого геометрическаго значенія. Если же $F=0$, то оно удовлетворяется только при $x=0$ и $y=0$ и, слѣдовательно, выражаетъ одну только точку.

Имѣя въ виду въ настоящей главѣ изученіе свойствъ эллипса при помощи его простѣйшаго уравненія вида (1), мы должны, слѣдовательно, предполагать, что въ этомъ уравненіи постоянный членъ F не равняется нулю и имѣетъ знакъ, обратный знаку коэффиціентовъ A и C.

243. Представляя уравненіе (1) въ видѣ

$$-\frac{A}{F}x^2-\frac{C}{F}y^2=1$$

и полагая

$$-\frac{F}{A}=a^2 \qquad \text{и} \qquad -\frac{F}{C}=b^2,$$

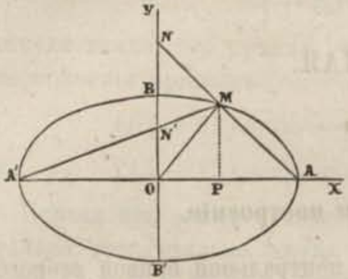
гдѣ a и b суть, очевидно, величины дѣйствительныя и конечныя, будемъ имѣть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

Въ этомъ видѣ можетъ быть, слѣдовательно, представлено уравненіе всякаго эллипса.

Такъ какъ отсюда видно, что, при $y=0$, $x=\pm a$ и, при $x=0$, $y=\pm b$, то заключаемъ, что a есть разстояніе отъ начала координатъ, или центра эллипса, до точекъ пересѣченія его съ осью абсциссъ, т. е. половина того діаметра эллипса, который принятъ за эту ось. И точно такъ же b есть половина діаметра, принятаго за ось ординатъ.

Въ слѣдующемъ мы будемъ предполагать, что уравненіе (2) выражаетъ эллипсъ относительно прямоугольной системы координатъ (фиг. 51), вслѣдствіе чего a и b будутъ означать половины осей эллипса AA' и BB', т. е. двухъ его сопряженныхъ діаметровъ, перпендикулярныхъ между собою. Если же тотъ же самый эллипсъ будетъ отнесенъ къ косоугольной системѣ координатъ, оси которой суть какіе-нибудь его сопряженные діаметры, то уравненіе его будетъ имѣть также видъ (2), но при другихъ значеніяхъ постоянныхъ a и b.



(Фиг. 51).

Если въ уравненіи (2) $a=b$, то оно обращается въ

$$x^2+y^2=a^2$$

и выражаетъ, какъ мы знаемъ, кругъ. Слѣдовательно, кругъ есть частный видъ эллипса, когда двѣ оси его равны между собою.

Очевидно, что изъ двухъ случаевъ, $a>b$ и $a<b$, достаточно разсматривать только одинъ, ибо любая изъ двухъ осей эллипса можетъ быть принята за ось абсциссъ или ординатъ. Обыкновенно за ось абсциссъ принимаютъ большую изъ двухъ осей эллипса, вслѣдствіе чего въ уравненіи (2) должно предполагать $a>b$.

244. Рѣшивъ уравненіе (2) относительно y, будемъ имѣть

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Отсюда видно, что ордината y будетъ дѣйствительною только тогда, когда абсцисса OP по абсолютной величинѣ менѣе OA. Слѣдовательно, вершины A и A' эллипса, лежащія на его большой оси, суть точки этой кривой, наиболѣе удаленныя отъ малой оси BB'. Такъ какъ, далѣе, изъ выраженія (3) видно, что наибольшее значеніе ордината y получаетъ при $x=0$, и это значеніе есть $y=\pm b$, то заключаемъ, что вершины B и B', принадлежащія малой оси, суть точки эллипса, наиболѣе удаленныя отъ его большой оси AA'.

Изъ этого слѣдуетъ, что эллипсъ помѣщается всѣми точками внутри прямоугольника, образуемаго четырьмя прямыми, проведенными черезъ его четыре вершины A, A', B и B' параллельно его осямъ.

Такъ какъ оси эллипса суть его оси симметріи (см. стр. 117), то четыре части или дуги этой кривой, на которыя она раздѣляется вершинами, совершенно одинаковы по виду.

245. Обозначимъ черезъ r разстояніе какой-нибудь точки M эллипса отъ его центра (фиг. 51), т. е. половину діаметра OM, и пусть φ будетъ уголъ, образуемый этою прямою съ положительнымъ направленіемъ оси абсциссъ. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi .$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (2), получимъ

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1 ,$$

откуда

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

или

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Это есть не что иное, какъ уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ r и φ относительно системы координатъ, полюсъ которой находится въ его центрѣ, а полярная ось совпадаетъ съ большою осью.

Для всѣхъ точекъ эллипса, лежащихъ на дугѣ AMB, уголъ φ заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, и если будемъ увеличивать его непрерывно между этими предѣлами, то, какъ видно изъ соотношенія (4), радіусъ r будетъ непрерывно уменьшаться отъ $r = a$ до $r = b$.

Это показываетъ, что большая ось эллипса есть наибольшій изъ его діаметровъ, а малая наименьшій.

Такъ какъ, далѣе, вторая часть равенства (4) не измѣняется при перемѣнѣ φ на $\pi - \varphi$, то заключаемъ, что діаметры, равно наклоненные къ осямъ эллипса, равны между собою.

Отсюда слѣдуетъ, что если изъ центра эллипса опишемъ окружность радіусомъ большимъ его малой оси и меньшимъ большой, то оси будутъ бисекрами угловъ, образуемыхъ діаметрами, проходящими черезъ точки пересѣченія этой окружности съ эллипсомъ.

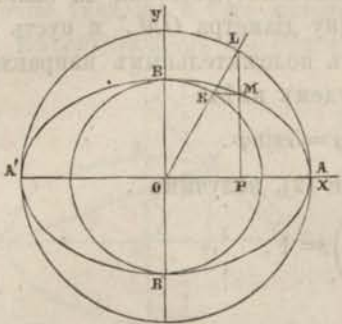
246. Относительно прямоугольныхъ осей, совпадающихъ съ осями эллипса, кругъ, описанный на его большой оси, какъ на діаметрѣ (фиг. 52), выражается уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

Если назовемъ черезъ y' ординату какой-нибудь точки L этого круга, соотвѣтствующую абсциссѣ $OP = x$, то будемъ имѣть

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (3) ординаты эллипса, будемъ имѣть, что для одного и того же значенія x



Фиг. 52.

$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a},$$

т. е. при одной и той же абсциссѣ ордината эллипса менѣе ординаты круга въ отношеніи осей эллипса.

Это указываетъ на слѣдующій весьма простой способъ построенія точекъ эллипса, когда извѣстны его оси.

На двухъ осяхъ эллипса AA' и BB', какъ на діаметрахъ, описываемъ двѣ концентрическія окружности и изъ центра проводимъ произвольный радіусъ OL. Проведя затѣмъ черезъ точку L пересѣченія этого радіуса съ большою окружностью прямую LP, параллельную малой оси, и черезъ точку K пересѣченія его съ малою окружностью прямую KM, параллельную большой оси, получимъ при пересѣченіи этихъ прямыхъ точку M, принадлежащую эллипсу. Дѣйствительно, при такомъ построеніи будемъ имѣть

$$\frac{MP}{LP} = \frac{OK}{OL} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Измѣняя направленіе радіуса OL, можемъ построить такимъ образомъ сколько угодно точекъ эллипса и при томъ сколь угодно близкихъ между собою.

247. Уравненіе (2), по уничтоженіи знаменателей, можно представить въ видѣ

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

или
$$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2).$$

Въ этомъ послѣднемъ видѣ оно можетъ быть разсматриваемо, какъ получающееся отъ перемноженія соотвѣтствующихъ частей двухъ уравненій первой степени

$$ay = kb(a - x) \quad \text{и} \quad kay = b(a + x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ k какая угодно постоянная величина, и такъ какъ, вслѣдствіе этого, значенія перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющія одновременно послѣднимъ уравненіямъ, удовлетворяютъ и уравненію эллипса, то заключаемъ, что точка пересѣченія прямыхъ, выражаемыхъ этими уравненіями, принадлежатъ эллипсу.

При неопредѣленномъ значеніи k первое изъ уравненій (5) представляетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину A (фиг. 51), а второе пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину A'. Если же дадимъ постоянной k какое-нибудь частное значеніе, то получимъ два опредѣленные луча AM и $A'M$ этихъ пучковъ, пересѣкающіеся на эллипсѣ и встрѣчающіе ось OY въ такихъ точкахъ N и N', что, какъ видно изъ уравненій (5),

$$ON = kb \qquad \text{и} \qquad k.ON' = b$$

и, слѣдовательно,

$$ON . ON' = b^2 .$$

Такимъ образомъ видимъ, что эллипсъ можно разсматривать какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ, проходящихъ черезъ концы большой оси и встрѣчающихъ малую ось въ двухъ точкахъ, находящихся по одну и ту же сторону отъ центра и отстоящихъ отъ него на разстоянія, средняя геометрическая которыхъ равняется половинѣ малой оси.

Это указываетъ на другое простое построеніе точекъ эллипса, когда извѣстны его оси AA' и BB'.

Черезъ вершину A проводимъ произвольную прямую AN (фиг. 51) и на оси BB' находимъ извѣстнымъ изъ начальной геометріи построеніемъ такую точку N', чтобы было

$$ON . ON' = \overline{OB}^2 .$$

Точка M пересѣченія прямыхъ AN и $A'N'$ будетъ принадлежать эллипсу.

Измѣняя направленіе прямой AN, можно построить такимъ образомъ сколько угодно точекъ эллипса, сколь угодно близкихъ между собою.

Уравненіе эллипса можно также представить въ видѣ

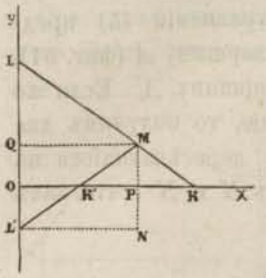
$$b^2x^2 = a^2(b^2 - y^2),$$

въ которомъ оно можетъ быть разсматриваемо, какъ получающееся отъ перемноженія соотвѣтственныхъ частей уравненій

$$bx = ka(b - y) \qquad \text{и} \qquad kbx = a(b + y),$$

выражающихъ прямыя, проходящія черезъ вершины B и B'. Легко видѣть, такъ же какъ и выше, что при одномъ и томъ же значеніи k эти прямыя пересѣкаются на эллипсѣ и встрѣчаютъ большую ось AA'

въ двухъ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ центра имѣютъ среднею геометрическою половину большой оси.



Фиг. 53.

248. Положимъ, что двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя OX и OY (фиг. 53) пересѣкаются нѣкоторой прямою въ двухъ точкахъ K и L, и пусть M будетъ какая-нибудь точка этой прямой. Обозначая черезъ x и y координаты точки M относительно осей OX и OY, а черезъ α уголъ прямой KL съ осью OX, и полагая, что

$$LM = a\,, \qquad MK = b\,,$$

будемъ имѣть изъ треугольниковъ LQM и MPK

$$\left(\frac{MQ}{LM}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{MP}{MK}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha\,,$$

откуда по сложеніи

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Это показываетъ, что точка M находится на эллипсѣ, оси котораго совпадаютъ съ прямыми OX и OY и равняются удвоеннымъ отрѣзкамъ LM и MK.

Если вообразимъ, что прямая KL перемѣщается такъ, что точки K и L движутся по осямъ OX и OY и отрѣзокъ KL сохраняетъ свою величину, то точка M будетъ перемѣщаться, оставаясь на названномъ эллипсѣ.

На этомъ основывается построеніе эллипса непрерывнымъ движеніемъ посредствомъ такъ называемаго эллиптическаго циркуля.

Если будемъ разсматривать точку M, какъ принадлежащую прямой $K'L'$, уголъ которой съ осью OX есть $(\pi - \alpha)$, то изъ треугольниковъ $L'MN$ и $K'MP$ будемъ также имѣть

$$\left(\frac{NL'}{L'M}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{MP}{MK'}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

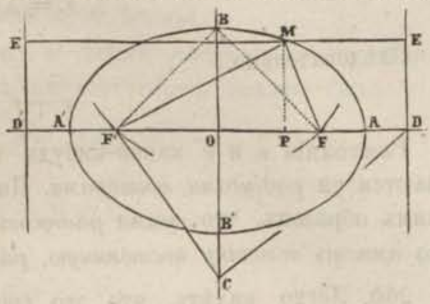
Такимъ образомъ видимъ, что когда прямая линія движется такъ, что отрѣзокъ ея, заключающійся между точками ея пересѣченія съ двумя неподвижными взаимно перпендикулярными прямыми, сохраняетъ свою величину, то каждая точка этой прямой, какъ внутренняя, такъ и внѣшняя по отношенію къ отрѣзку, описываетъ эллипсъ.

§ 2. Фокусы и директрисы.

249. Двѣ точки F и F', лежащія на большой оси эллипса (фиг. 54) и отстоящія отъ его центра на разстояніи равномъ

$$\sqrt{a^2-b^2}\,,$$

гдѣ a и b суть половины осей, называются *фокусами* этой кривой.



Фиг. 54.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что для нахожденія этихъ точекъ построеніемъ нужно только большую ось AA' пересѣчь окружностью, описанною изъ конца малой оси B радіусомъ, равнымъ половинѣ большой оси.

Если эллипсъ отнесенъ къ его осямъ и, слѣдовательно, выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

то координаты одного изъ фокусовъ F будутъ

$$x=+\sqrt{a^2-b^2} \quad \text{и} \quad y=0\,,$$

а другого F'

$$x=-\sqrt{a^2-b^2} \quad \text{и} \quad y=0\,.$$

Поэтому, обозначая черезъ r и r' разстоянія какой-нибудь точки $M(x,\,y)$ эллипса отъ двухъ его фокусовъ и называя буквою α абсолютную величину радикала $\sqrt{a^2-b^2}$, т. е, разстояніе OF., будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} r^2&=(x-\alpha)^2+y^2 \\ \text{и} \qquad r'^2&=(x+\alpha)^2+y^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2)$$

И такъ какъ для точки M, какъ принадлежащей эллипсу

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,,$$

то

$$r^2=(x-\alpha)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\alpha x+\alpha^2+b^2=$$

$$=\frac{\alpha^2}{a^2}x^2-2\alpha x+a^2=\left(a-\frac{\alpha}{a}x\right)^2,$$

откуда

$$r=a-\frac{\alpha}{a}x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3)$$

Принимая во вниманіе, что $\alpha<a$ и $a>x$, заключаемъ, что это выраженіе представляетъ абсолютную величину разстоянія r.

Такимъ же образомъ второе изъ равенствъ (2) даетъ

$$r' = a + \frac{\alpha}{a} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Слѣдовательно,

$$r + r' = 2a\,.$$

Разстоянія r и r' какой-нибудь точки эллипса отъ фокусовъ называются ея *радіусами векторами*. Послѣднее равенство показываетъ, такимъ образомъ, что *сумма радіусовъ векторовъ для всѣхъ точекъ эллипса имѣетъ величину постоянную, равную его большой оси.*

250. Легко видѣть, что это свойство вполнѣ характеризуетъ эллипсъ и можетъ быть принято за его опредѣленіе.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что требуется найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ равняется данной длинѣ. Обозначая эту послѣдюю черезъ $2a$, а разстояніе между двумя данными точками черезъ 2α, и принимая за ось абсциссъ прямую, соединяющую данныя точки, а за ось ординатъ перпендикуляръ изъ ея средины, будемъ имѣть, что уравненіе искомаго геометрическаго мѣста есть

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} + \sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Такъ какъ, по уничтоженіи радикаловъ, отсюда получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \alpha^2} = 1\,,$$

то и заключаемъ, что это геометрическое мѣсто есть эллипсъ.

На послѣднемъ свойствѣ эллипса основывается слѣдующій способъ построенія его непрерывнымъ движеніемъ при помощи гибкой и нерастяжимой нити.

Два конца нити, длина которой равняется большой оси искомаго эллипса, укрѣпляютъ въ его фокусахъ и затѣмъ натягиваютъ эту нить чертящимъ остріемъ, прилегающимъ къ плоскости чертежа. Понятно изъ сказаннаго, что при перемѣщеніи острія по плоскости, такъ чтобы нить постоянно была натянута, оно должно описать эллипсъ.

251. Приравнивая нулю предыдущія выраженія радіусовъ векторовъ (3) и (4), получимъ уравненія

$$\frac{\alpha}{a} x - a = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{a} x + a = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

выражающія двѣ прямыя DE и $D'E'$ (фиг. 54), перпендикулярныя къ большой оси и называемыя *директрисами* эллипса.

или

$$(b^2 + a^2m^2)\,x^2 + 2a^2mnx + a^2\,(n^2 - b^2) = 0\,,$$

откуда опредѣляются абсциссы точекъ пересѣченія.

Если прямая (3) касается эллипса, то корни послѣдняго уравненія должны быть равны между собою и, слѣдовательно, должно быть

$$a^2m^2n^2 = (b^2 + a^2m^2)\,(n^2 - b^2)$$

или, по сокращеніи,

$$n^2 - a^2m^2 - b^2 = 0\,,$$

откуда

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}\,.$$

Слѣдовательно, уравненіе (3) обращается въ

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

и, при данномъ угловомъ коэффиціентѣ m, представляетъ двѣ касательныя къ эллипсу, имѣющія данное направленіе.

Такъ какъ $\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ есть дѣйствительная величина при всякомъ дѣйствительномъ значеніи m, то заключаемъ, что *во всякомъ направленіи къ эллипсу могутъ быть проведены двѣ касательныя.*

256. Если касательныя, выражаемыя уравненіемъ (4), проходятъ черезъ данную точку (x_1, y_1), то должно быть

$$y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}\,,$$

откуда

$$m^2(x_1{}^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1{}^2 - b^2) = 0\,.$$

Относительно m это есть уравненіе второй степени, корни котораго суть угловые коэффиціенты двухъ проходящихъ черезъ данную точку касательныхъ. Эти двѣ касательныя будутъ перпендикулярны между собою, когда произведеніе ихъ угловыхъ коэффиціентовъ равно отрицательной единицѣ, т. е. когда

$$\frac{y_1{}^2 - b^2}{x_1{}^2 - a^2} = -1$$

или

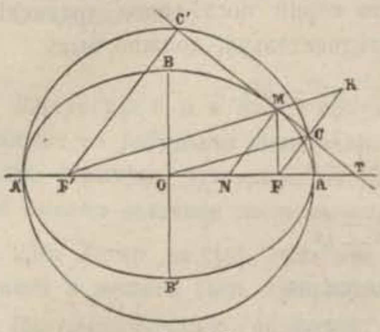
$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = a^2 + b^2\,.$$

Это показываетъ, что точки пересѣченія перпендикулярныхъ между собою касательныхъ находятся на окружности круга, выражаемаго уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2\,;$$

иначе говоря, геометрическое мѣсто вершины прямого угла, стороны котораго касаются эллипса, есть окружность, описанная около прямоугольника, построеннаго на осяхъ эллипса.

257. Прямая, проходящая черезъ какую-нибудь точку M эллипса и перпендикулярная къ касательной въ этой точкѣ (фиг. 55), есть *нормаль* къ эллипсу (см. стр. 120).



Фиг. 55.

Такъ какъ уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1), есть

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

и условіе перпендикулярности этой прямой съ касательной (2) есть

$$A\frac{x_1}{a^2}+B\frac{y_1}{b^2}=0,$$

то заключаемъ, что уравненіе нормали въ точкѣ (x_1, y_1) есть

$$\frac{(x-x_1)y_1}{b^2}-\frac{(y-y_1)x_1}{a^2}=0$$

или

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Пусть N и T будутъ точки, въ которыхъ нормаль и касательная въ точкѣ M пересѣкаются съ большой осью эллипса. Полагая въ уравненіи нормали (5) $y=0$, получимъ

$$ON=\frac{\alpha^2x_1}{a^2}$$

и точно также, полагая $y=0$ въ уравненіи касательной (2), будемъ имѣть

$$OT=\frac{a^2}{x_1}.$$

Слѣдовательно,

$$ON.OT=\alpha^2.$$

258. Отрѣзокъ MN нормали, заключающійся между точкою эллипса и точкою пересѣченія съ осью абсциссъ, называютъ *длиною нормали*. Отрѣзокъ же этой оси, заключающійся между перпендикуляромъ на ось изъ точки M и нормалью въ этой точкѣ, называется *поднормалью* или *субнормалью*.

Обозначая субнормаль чрезъ S_n, будемъ имѣть

$$S_n=x_1-\frac{\alpha^2x_1}{a^2}=\frac{(a^2-\alpha^2)x_1}{a^2}=\frac{b^2x_1}{a^2},$$

откуда

$$\frac{S_n}{ON}=\frac{b^2}{\alpha^2}=\frac{b^2}{a^2-b^2}.$$

Слѣдовательно, *абсцисса всякой точки эллипса дѣлится нормалью въ постоянномъ отношеніи.*

Длина нормали эллипса опредѣляется по общей формулѣ для разстоянія между двумя точками слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{MN}^2 = \left(x_1 - \frac{a^2 x_1}{a^2}\right)^2 + y_1{}^2 = \frac{b^4 x_1{}^2}{a^4} + y_1{}^2,$$

откуда

$$MN = b^2 \sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4} + \frac{y_1{}^2}{b^4}}.$$

Но если назовемъ чрезъ l длину перпендикуляра изъ центра эллипса на касательную, то изъ уравненія касательной (2) будемъ имѣть

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4} + \frac{y_1{}^2}{b^4}}}.$$

Слѣдовательно,

$$MN = \frac{b^2}{l}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что *произведеніе нормали въ какой-нибудь точкѣ эллипса на перпендикуляръ изъ центра на касательную въ этой точкѣ есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.*

Отрѣзокъ MT касательной, заключающійся между точкою прикосновенія и точкою пересѣченія съ осью абсциссъ, называютъ обыкновенно *длиной касательной.* Отрѣзокъ же этой оси, заключающійся между касательною и перпендикуляромъ изъ точки прикосновенія, называется *подкасательной* или *субтангенсомъ.*

Обозначая подкасательную черезъ S_t, будемъ имѣть, что, по абсолютной величинѣ,

$$S_t = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1{}^2}{x_1} = \frac{a^2 y_1{}^2}{b^2 x_1}.$$

Что же касается длины касательной, то для нея получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\overline{MT}^2 = \left(\frac{a^2 - x_1{}^2}{x_1}\right)^2 + y_1{}^2 = \frac{(a^2 - x_1{}^2)^2 + x_1{}^2 y_1{}^2}{x_1{}^2} =$$

$$= \frac{y_1{}^2(a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2)}{b^4 x_1{}^2} = \frac{y_1{}^4}{b^4}\left(\frac{a^4}{x_1{}^2} + \frac{b^4}{y_1{}^2}\right)$$

и такъ какъ, обозначая чрезъ k длину перпендикуляра изъ центра эллипса на нормаль, будемъ имѣть изъ уравненія нормали (5)

$$k=\frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^4}{x_1{}^2}+\frac{b^4}{y_1{}^2}}},$$

то

$$MT=\frac{a^2 y_1{}^2}{b^2 k}.$$

259. Пусть FC и $F'C'$ (фиг. 55) будутъ перпендикуляры, опущенные изъ двухъ фокусовъ эллипса на какую-нибудь касательную. Изъ уравненія касательной (2) будемъ имѣть, что длины этихъ перпендикуляровъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$FC=\frac{\frac{\alpha x_1}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4}+\frac{y_1{}^2}{b^4}}} \quad \text{и} \quad F'C'=\frac{-\frac{\alpha x_1}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4}+\frac{y_1{}^2}{b^4}}},$$

гдѣ x_1 и y_1 суть координаты точки прикосновенія.

Слѣдовательно,

$$\frac{FC}{F'C'}=\frac{1-\frac{\alpha x_1}{a^2}}{1+\frac{\alpha x_1}{a^2}}=\frac{a-\frac{\alpha x_1}{a}}{a+\frac{\alpha x_1}{a}}.$$

Члены послѣдняго отношенія, какъ мы видѣли выше (см. стр. 175 и 176), суть радіусы векторы точки прикосновенія M, т. е. разстоянія MF и MF', и потому имѣемъ

$$\frac{FC}{F'C'}=\frac{MF}{MF'}.$$

Это доказываетъ, что прямоугольные треугольники MCF и $MC'F'$ подобны и, слѣдовательно, углы CMF и $C'MF'$ равны.

И такъ, *касательная къ эллипсу составляетъ равные углы съ радіусами векторами точки прикосновенія.*

То же самое свойство принадлежитъ, слѣдовательно, и нормали въ точкѣ M, въ чемъ можно убѣдиться и непосредственно, усматривая изъ найденнаго выше выраженія отрѣзка ON, что нормаль MN дѣлитъ сторону FF' треугольника FMF' на части, пропорціональныя двумъ его другимъ сторонамъ. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что нормаль есть бисектръ внутренняго угла этого треугольника, а касательная внѣшняго.

Изъ этихъ уравненій видно, что абсолютная величина разстоянія директрисъ отъ центра эллипса равняется $\frac{a^2}{\alpha}$ и, слѣдовательно, директрисы могутъ быть найдены слѣдующимъ построеніемъ.

Отложивши отъ центра по направленію малой оси длину OC, равную OA, и соединивъ точку C съ фокусомъ F', возставляемъ въ C перпендикуляръ къ CF'; точка D пересѣченія этого перпендикуляра съ большой осью AA' будетъ принадлежать директрисѣ. Дѣйствительно, изъ прямоугольнаго треугольника DCF' имѣемъ

$$\overline{OC}^2 = OD \, . \, OF',$$

откуда

$$OD = \frac{\overline{OC}^2}{OF'} = \frac{a^2}{\alpha}.$$

Называя черезъ d и d' разстоянія ME и ME' какой-нибудь точки $M(x, y)$ эллипса отъ двухъ директрисъ, будемъ имѣть изъ уравненій (5), что по абсолютнымъ величинамъ

$$d = \frac{a}{\alpha} r \quad \text{и} \quad d' = \frac{a}{\alpha} r',$$

откуда

$$\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'} = \frac{\alpha}{a} = \frac{2\alpha}{2a}.$$

Это показываетъ, что каждому фокусу соотвѣтствуетъ своя директриса и что *отношеніе разстояній каждой точки эллипса отъ фокуса и соотвѣтствующей директрисы есть постоянная величина, равная отношенію разстоянія между фокусами къ большой оси.*

Отношеніе это называется *эксцентриситетомъ*. Очевидно, что для всякаго эллипса эксцентриситетъ меньше единицы.

Обозначая эксцентриситетъ буквою e, будемъ имѣть

$$e = \frac{\alpha}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Слѣдовательно, съ уменьшеніемъ отношенія малой оси къ большой эксцентриситетъ эллипса увеличивается, и обратно.

При $e = 0$ эллипсъ, очевидно, обращается въ кругъ.

252. Длина перпендикуляра, возставленнаго изъ фокуса эллипса къ большой оси до пересѣченія съ эллипсомъ, называется его *пара-*

метромъ [1]). Иначе говоря, параметромъ эллипса называютъ половину хорды, проходящей черезъ фокусъ и перпендикулярной къ большой оси.

Обозначая параметръ буквою p, будемъ, слѣдовательно, имѣть, что α и p суть координаты точки, принадлежащей эллипсу, и потому

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1,$$

откуда

$$p^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)=\frac{b^4}{a^2}$$

и

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-\alpha^2}{a}=\frac{a^2(1-e^2)}{a}=a(1-e^2).$$

Если за оси координатъ примемъ двѣ прямыя, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ большой осью, а другая есть перпендикуляръ къ ней въ фокусѣ F, то уравненіе эллипса относительно такой системы координатъ получится изъ уравненія (1), полагая

$$x=\alpha+x' \quad \text{и} \quad y=y'.$$

Слѣдовательно, это уравненіе будетъ

$$b^2(\alpha+x')^2+a^2y'^2=a^2b^2,$$

или

$$a^2(x'^2+y'^2)=(b^2-\alpha x')^2,$$

или

$$x'^2+y'^2=(p-ex')^2.$$

Полагая здѣсь

$$x'=\varrho\cos\varphi \quad \text{и} \quad y'=\varrho\sin\varphi,$$

получимъ

$$\varrho^2=(p-e\varrho\cos\varphi)^2,$$

откуда

$$\varrho(1+e\cos\varphi)=p$$

и, слѣдовательно,

$$\varrho=\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Это есть уравненіе эллипса относительно полярной системы координатъ, полюсъ которой находится въ фокусѣ, а полярная ось совпадаетъ

---

[1]) До сихъ поръ мы употребляли это наименованіе въ его широкомъ смыслѣ (см. стр. 32), т. е. какъ названіе всякой постоянной величины, служащей для опредѣленія линіи. Въ настоящемъ же случаѣ ему приписывается исключительное геометрическое значеніе.

съ большой осью и направлена изъ полюса къ ближайшей вершинѣ. Очевидно, что его можно также представить въ видѣ

$$\varrho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}.$$

§ 3. Касательныя и нормали.

253. Уравненіе касательной къ эллипсу, отнесенному къ его осямъ и выражаемому, слѣдовательно, уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

можетъ быть получено изъ общаго уравненія касательной къ кривой второго порядка (см. стр. 118), разсматривая само уравненіе эллипса (1), какъ частный видъ общаго уравненія второй степени. Но, въ виду простоты уравненія (1), легко получить уравненіе касательной и непосредственно, повторяя одинъ изъ тѣхъ пріемовъ, которые мы прилагали къ общему уравненію. Замѣчая, напримѣръ, что уравненіе

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{a^2} + \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

выражаетъ сѣкущую, встрѣчающую эллипсъ (1) въ двухъ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2), и полагая, что эти двѣ точки постепенно сближаются, будемъ имѣть, что въ предѣлѣ, когда сѣкущая обратится въ касательную, уравненіе ея будетъ

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

или

$$\frac{x_1{}^2 - 2xx_1}{a^2} + \frac{y_1{}^2 - 2yy_1}{b^2} = -1,$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Здѣсь x_1 и y_1 суть координаты точки прикосновенія, а x и y координаты любой точки касательной.

Такъ какъ въ приведенныхъ соображеніяхъ не принимается вовсе во вниманіе, что оси координатъ прямоугольныя, то эти соображенія примѣнимы и къ случаю, когда эллипсъ отнесенъ къ какимъ бы ни было двумъ сопряженнымъ діаметрамъ (см. стр. 170). Полагая, что въ этомъ случаѣ его уравненіе есть

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

*

будемъ, слѣдовательно, имѣть для выраженія касательной уравненіе

$$\frac{xx_1}{a'^2}+\frac{yy_1}{b'^2}=1\,.$$

254. Мы видѣли (см. стр. 122), что если въ уравненіи касательной вмѣсто координатъ точки прикосновенія будутъ находиться координаты какой-нибудь точки плоскости, то это уравненіе будетъ представлять *поляру* этой точки.

Полагая, что данная точка находится на большой оси эллипса, будемъ имѣть, изъ уравненія (2), что ея поляра выражается уравненіемъ

$$xx_1=a^2\,,$$

и точно также поляра точки, лежащей на малой оси эллипса, будетъ выражаться уравненіемъ

$$yy_1=b^2\,.$$

Припоминая, что двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярѣ другой, называются *сопряженными* (см. стр. 123), мы видимъ, такимъ образомъ, что половина большой оси эллипса есть средняя геометрическая разстояній каждыхъ двухъ сопряженныхъ точекъ этой оси отъ центра эллипса и такое же значеніе имѣетъ половина малой оси для лежащихъ на ней сопряженныхъ точекъ.

Соотношенія эти указываютъ на простой способъ построенія поляры какой угодно точки по отношенію къ эллипсу, когда даны оси этой кривой.

Если положимъ въ уравненіи (2) $x=\pm\alpha$ и $y=0$, то оно обратится въ

$$\pm\alpha x=a^2$$

или

$$\frac{\alpha}{a}x\mp a=0\,.$$

Это показываетъ, что *каждая изъ двухъ директрисъ эллипса есть поляра соотвѣтствующаго ей фокуса.*

255. Можно получить уравненіе касательной къ эллипсу еще слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$y=mx+n\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

будетъ уравненіе какой-нибудь прямой. Исключая y изъ этого уравненія и уравненія эллипса (1), получимъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

$$m = -\frac{kb}{a} \quad \text{и} \quad m' = +\frac{b}{ka},$$

откуда, при всякомъ значенiи k,

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

соотношенiе между угловыми коэффицiентами двухъ какихъ бы ни было сопряженныхъ дiаметровъ.

Это соотношенiе можно было бы также получить, какъ частный видъ такого же соотношенiя, выведеннаго выше (см. стр. 114) для кривыхъ второго порядка, выраженныхъ общимъ уравненiемъ второй степени.

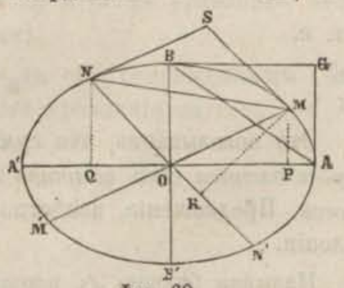
Обозначая чрезъ α и β углы, которые два сопряженные дiаметра составляютъ съ большою осью эллипса, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$tg\alpha tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и такъ какъ вторая часть этого равенства есть величина отрицательная, то изъ двухъ угловъ α и β одинъ острый, а другой тупой. Это показываетъ, что всякiе два сопряженные дiаметра эллипса помѣщаются въ различныхъ углахъ, образуемыхъ его осями.

267. Пусть MM' и NN' будутъ два какiе-нибудь сопряженные дiаметра (фиг. 60). Обозначая чрезъ x_1 и y_1 координаты точки M, а чрезъ x_2 и y_2 координаты точки N, будемъ имѣть, что уравненiя этихъ дiаметровъ суть

$$y = \frac{y_1}{x_1} x \quad \text{и} \quad y = \frac{y_2}{x_2} x.$$



Фиг. 60.

Равенство (2) приметъ въ такомъ случаѣ видъ

$$\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$$

или

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Отсюда находимъ

$$\frac{x_1^2}{a^2} : \frac{y_2^2}{b^2} = \frac{y_1^2}{b^2} : \frac{x_2^2}{a^2} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) : \left(\frac{y_2^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2}\right)$$

и такъ какъ точки M и N находятся на эллипсѣ, то члены послѣдняго отношенiя равны единицѣ.

Вслѣдствiе этого будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{a} = \pm \frac{y_2}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x_2}{a} = \mp \frac{y_1}{b}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

при чемъ, какъ видно изъ (4), верхнему знаку одного равенства соотвѣтствуетъ верхній же знакъ другого и нижнему нижній.

Равенство (4) есть не что иное, какъ условіе параллельности одного изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ MM' и NN' съ касательными въ концахъ другого. Соотношенія (2) или (3) можно было бы, слѣдовательно, получить, какъ слѣдствіе этого свойства, доказаннаго нами выше для кривыхъ второго порядка вообще (см. стр. 119).

268. Если обозначимъ черезъ $2a'$ и $2b'$ длины діаметровъ MM' и NN', то будемъ имѣть, въ силу послѣднихъ равенствъ,

$$a'^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 = x_1{}^2 + \frac{b^2 x_2{}^2}{a^2} = \frac{a^2 x_1{}^2 + b^2 x_2{}^2}{a^2}$$

и

$$b'^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 = \frac{a^2 y_1{}^2}{b^2} + y_2{}^2 = \frac{a^2 y_1{}^2 + b^2 y_2{}^2}{b^2},$$

откуда, по сложеніи, получимъ

$$a'^2 + b'^2 = a^2\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2}\right) + b^2\left(\frac{x_2{}^2}{a^2} + \frac{y_2{}^2}{b^2}\right),$$

т. е.

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Это показываетъ, что *сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ его осей.* Предложеніе, извѣстное подъ названіемъ первой теоремы Аполлонія.

Называя буквою $\triangle$ площадь треугольника MON, будемъ имѣть, по общей формулѣ для опредѣленія площади треугольника по координатамъ его вершинъ (см. стр. 49),

$$2\triangle = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

или, въ силу равенствъ (5),

$$2\triangle = \frac{b x_1{}^2}{a} + \frac{a y_1{}^2}{b} = ab\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2}\right),$$

или

$$2\triangle = ab. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Первая часть этого равенства означаетъ площадь параллелограмма $MONS$, а вторая площадь прямоугольника $AOBG$. Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, построеннаго на его осяхъ.* Это есть вторая теорема Аполлонія.

Если φ есть уголъ между діаметрами MM' и NN', т. е. $\varphi = \beta - \alpha$, то площадь треугольника MON можетъ быть выражена произведеніемъ $\frac{1}{2}a'b'\sin\varphi$, вслѣдствіе чего равенство (7) можетъ быть представлено въ видѣ

$$a'b'\sin\varphi = ab \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

и выражаетъ, слѣдовательно, зависимость между величинами сопряженныхъ діаметровъ и угломъ, ими образуемымъ.

269. Свойства діаметровъ, выражаемыя двумя теоремами Аполлонія, суть не что иное, какъ прямое геометрическое истолкованіе доказанной нами выше неизмѣняемости отъ преобразованія координатъ для всякой центральной кривой слѣдующихъ двухъ выраженій (см. стр. 141):

$$\frac{A + C - B\cos\omega}{\sin^2\omega} \quad \text{и} \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\omega},$$

гдѣ A, B и C суть коэффиціенты при x^2, xy и y^2 въ уравненіи этой кривой, а ω уголъ между осями координатъ.

Если кривая есть эллипсъ, отнесенный къ его сопряженнымъ діаметрамъ, уголъ между которыми есть φ, то уравненіе ея есть

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

и названныя выраженія обращаются въ

$$\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{-4}{a'^2b'^2\sin^2\varphi}.$$

Если же за оси координатъ приняты оси эллипса, то уравненіе его есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

при чемъ $\omega = \frac{\pi}{2}$, и потому тѣ же выраженія обращаются въ

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{и} \quad \frac{-4}{a^2b^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\omega}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

и

$$\frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\omega}=\frac{1}{a^2b^2}\,.$$

Второе изъ этихъ равенствъ равнозначуще съ (8) или (7); первое же при существованіи второго обращается въ (6).

270. Такъ какъ всѣ точки эллипса находятся внутри круга, описаннаго на его большой оси, какъ на діаметрѣ, то внутренній уголъ между двумя дополнительными хордами, опирающимися на большую ось, больше прямого. Это показываетъ, что и уголъ MON между сопряженными полудіаметрами, лежащими по одну сторону отъ большой оси, также тупой.

Изъ равенства (8) мы имѣемъ для этого угла

$$\sin^2\varphi=\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}$$

и, слѣдовательно,

$$tg^2\varphi=\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2-a^2b^2}.$$

Но такъ какъ, вслѣдствіе равенства (6),

$$4a'^2b'^2=(a^2+b^2)^2-(a'^2-b'^2)^2\,,$$

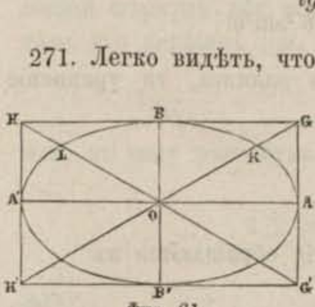
то

$$tg^2\varphi=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2-(a'^2-b'^2)^2}.$$

Отсюда видно, что тупой уголъ MON между двумя сопряженными діаметрами получаетъ наибольшую величину, когда $a'=b'$, т. е. когда эти діаметры равны между собою и, слѣдовательно, равно наклонены къ осямъ эллипса. Въ такомъ случаѣ

$$tg(MON)=-\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

271. Легко видѣть, что два равные сопряженные діаметра совпадаютъ съ діагоналями GH' и HG', построеннаго на осяхъ эллипса прямоугольника (фиг. 61).



Фиг. 61.

Дѣйствительно, полагая, что уравненія этихъ діагоналей суть

$$y=mx \qquad \text{и} \qquad y=m'x\,,$$

будемъ имѣть

$$m=+\frac{b}{a} \qquad \text{и} \qquad m'=-\frac{b}{a}$$

и, слѣдовательно,

260. Перемножая предыдущія выраженія перпендикуляровъ FC и $F'C'$, получимъ

$$FC.F'C' = \frac{1 - \frac{a^2 x_1^2}{a^4}}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}},$$

и такъ какъ точка M лежитъ на эллипсѣ, то

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2}$$

и

$$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 - x_1^2}{b^2}\right) = \frac{a^4 - a^2 x_1^2}{a^4 b^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{a^2 x_1^2}{a^4}\right).$$

Слѣдовательно,

$$FC.F'C' = b^2.$$

Произведеніе перпендикуляровъ изъ двухъ фокусовъ эллипса на какую бы ни было касательную есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

261. Пусть K будетъ точка, симметричная съ фокусомъ F относительно касательной (фиг. 55), т. е. лежащая на перпендикулярѣ FC такъ, что $KC = FC$. Соединивъ эту точку съ точкою прикосновенія M, будемъ имѣть, что углы KMC, FMC и $F'MC'$ равны между собою и при томъ $MK = MF$. Слѣдовательно, прямая MK есть продолженіе радіуса вектора $F'M$ и разстояніе $F'K$ равняется суммѣ радіусовъ векторовъ $F'M$ и FM, т. е. большой оси $2a$.

Такъ какъ въ треугольникѣ KFF' точки C и O суть средины двухъ сторонъ, то прямая, соединяющая эти точки, параллельна третьей сторонѣ $F'K$ и равняется ея половинѣ, т. е. половинѣ большой оси.

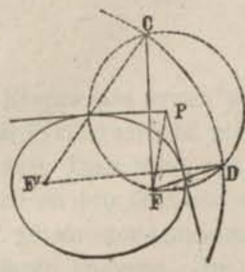
Точно также легко убѣдиться, построивши точку, симметричную съ фокусомъ F' относительно касательной, что и разстояніе точки C' отъ центра эллипса равняется половинѣ его большой оси.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что *геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ изъ фокусовъ на касательныя есть окружность, построенная на большой оси, какъ на діаметрѣ.*

262. Изъ того, что точки, симметричныя съ фокусомъ эллипса относительно касательныхъ, находятся на разстояніи, равномъ большой оси,

отъ другого фокуса, легко обнаруживается одинъ изъ способовъ построенія касательныхъ къ эллипсу.

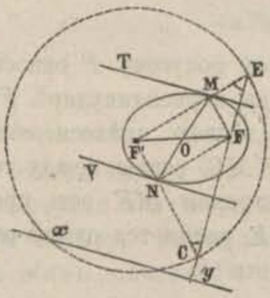
Положимъ, что требуется построить касательныя къ эллипсу, проходящія черезъ данную точку P (фиг. 56). Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, должны находиться на такомъ же разстояніи отъ данной точки, какъ и этотъ фокусъ. Съ другой стороны эти точки должны находиться на разстояніи, равномъ большой оси, отъ фокуса F'. Слѣдовательно, описавши изъ точки P, какъ центра, окружность радіусомъ PF, а изъ фокуса F', какъ центра, окружность радіусомъ, равнымъ большой оси, и соединивши точки пересѣченія C и D этихъ окружностей прямыми линіями съ фокусомъ F, будемъ имѣть, что перпендикуляры изъ данной точки на эти прямыя суть искомыя касательныя.



Фиг. 56.

Прямыя CF' и DF', соединяющія точки пересѣченія окружностей съ другимъ фокусомъ, опредѣлятъ, очевидно, на этихъ касательныхъ точки прикосновенія.

Положимъ теперь, что требуется построить касательныя къ эллипсу, параллельныя данной прямой XY (фиг. 57). Описавши изъ фокуса F', какъ центра, окружность радіусомъ, равнымъ большой оси, и проведя черезъ другой фокусъ F хорду CE этой окружности, перпендикулярную къ данной прямой, будемъ имѣть, на основаніи предыдущаго, что концы C и E этой хорды суть точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ. Сами же касательныя будутъ, слѣдовательно, перпендикуляры къ этой хордѣ, возставленные изъ срединъ отрѣзковъ EF и FC.



Фиг. 57.

Точки M и N пересѣченія ихъ съ радіусами $F'E$ и $F'C$ построенной окружности суть, очевидно, точки прикосновенія. Онѣ могутъ быть найдены также, какъ точки пересѣченія этихъ радіусовъ съ прямыми, имъ параллельными и проходящими черезъ фокусъ F.

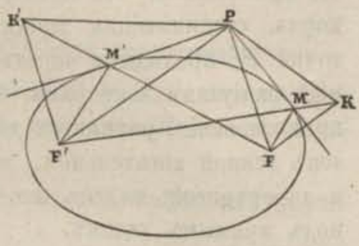
263. Изъ предыдущаго легко обнаруживаются также слѣдующія свойства касательныхъ къ эллипсу.

Двѣ касательныя къ эллипсу составляютъ равные углы съ прямыми, соединяющими точку ихъ пересѣченія съ фокусами.

Пусть PM и PM' будутъ двѣ касательныя, пересѣкающіяся въ точкѣ P (фиг. 58). Взявши точки K и K', изъ которыхъ первая симметрична съ фокусомъ F относительно одной изъ нихъ, а вторая симметрична съ фокусомъ F' относительно другой, будемъ имѣть

$$PK = PF \quad \text{и} \quad PK' = PF',$$

и такъ какъ, кромѣ того, разстоянія FK' и $F'K$ равны между собой, какъ равныя большой оси эллипса, то изъ равенства треугольниковъ FPK' и KPF' заключаемъ о равенствѣ угловъ FPK' и KPF'. Отнимая же отъ этихъ угловъ ихъ общую часть FPF', получимъ



Фиг. 58.

$$\angle F'PK' = \angle FPK$$

или, по раздѣленіи на 2,

$$\angle F'PM' = \angle FPM,$$

что и требовалось доказать.

Въ справедливости послѣдняго предложенія можно убѣдиться также изъ пропорціональности разстояній фокусовъ отъ двухъ касательныхъ, пропорціональности, которая есть прямое слѣдствіе одного изъ доказанныхъ выше свойствъ эллипса.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая чрезъ u и u' разстоянія фокусовъ F и F' отъ касательной PM, а чрезъ v и v' отъ касательной PM', будемъ имѣть (см. стр. 185)

$$uu' = vv' = b^2,$$

откуда

$$\frac{u}{v} = \frac{v'}{u'}.$$

264. Изъ равенства треугольниковъ FPK' и KPF' (фиг. 58) слѣдуетъ также равенство угловъ PFM' и PKM, но, вслѣдствіе симметричности точекъ K и F относительно касательной PM, имѣемъ

$$\angle PKM = \angle PFM.$$

Слѣдовательно,

$$\angle PFM = \angle PFM'.$$

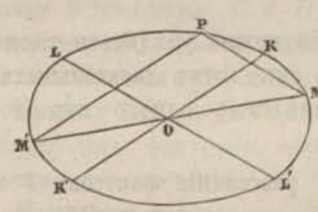
Это показываетъ, что прямая, соединяющая точку пересѣченія двухъ касательныхъ къ эллипсу съ его фокусомъ, дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый двумя радіусами векторами, проведенными изъ этого фокуса къ точкамъ прикосновенія.

Отсюда заключаемъ, что уголъ, подъ которымъ виденъ изъ фокуса отрѣзокъ *какой-нибудь* касательной къ эллипсу, заключающійся между двумя данными касательными, имѣетъ постоянную величину, ибо онъ равняется половинѣ угла, подъ которымъ видна изъ этого фокуса хорда, соединяющая точки прикосновенія данныхъ касательныхъ.

Если точка P пересѣченія касательныхъ находится на директрисѣ, то, припоминая, что послѣдняя есть поляра фокуса, заключаемъ, что хорда, соединяющая точки прикосновенія касательныхъ, какъ поляра точки P, проходитъ черезъ фокусъ. Это значитъ, что уголъ, образуемый радіусами векторами, проведенными изъ этого фокуса къ точкамъ прикосновенія, равняется двумъ прямымъ. Отсюда слѣдуетъ, что отрѣзокъ всякой касательной, заключающійся между точкой прикосновенія и директрисой, виденъ изъ соотвѣтствующаго этой директрисѣ фокуса подъ прямымъ угломъ.

§ 4. Сопряженные діаметры.

265. Двѣ хорды эллипса, соединяющія какую-нибудь его точку P съ концами какого-либо діаметра MM' (фиг. 59), называются *дополнительными*. Если возьмемъ два діаметра KK' и LL', параллельные такимъ хордамъ, то каждый изъ нихъ, будучи прямою, проходящею черезъ средину стороны MM' треугольника MPM' параллельно другой его сторонѣ, раздѣлитъ третью сторону пополамъ. Это доказываетъ, что діаметры KK' и LL' суть сопряженные (см. стр. 114).



Фиг. 59.

И такъ, діаметры, параллельные двумъ какимъ-нибудь дополнительнымъ хордамъ, суть сопряженные.

Обратно, если даны два сопряженные діаметра KK' и LL', то параллельныя имъ хорды, проходящія черезъ какую-нибудь точку P эллипса, будутъ дополнительными. Это слѣдуетъ изъ того, что оба данные діаметра должны дѣлить хорду MM' пополамъ, а потому послѣдняя, какъ проходящая чрезъ ихъ точку пересѣченія, есть діаметръ.

266. Если эллипсъ отнесенъ къ его осямъ и выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то, какъ мы видѣли (см. стр. 172 и 173), двѣ хорды, пересѣкающіяся въ какой-нибудь его точкѣ и проходящія черезъ концы большой оси, выражаются уравненіями

$$ay=kb(a-x) \quad \text{и} \quad kay=b(a+x).$$

Полагая, что уравненія діаметровъ, имъ параллельныхъ и, слѣдовательно, сопряженныхъ, суть

$$y=mx \quad \text{и} \quad y=m'x,$$

будемъ имѣть

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2},$$

что и доказываетъ, что діаметры OK и OL суть сопряженные.

Это видно также изъ того, что діагонали GH' и HG' параллельны дополнительнымъ хордамъ, соединяющимъ вершину B съ вершинами A и A'.

Если назовемъ уголъ GOH черезъ φ, то будемъ имѣть изъ прямоугольнаго треугольника OBG

$$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{b}.$$

Слѣдовательно,

$$tg\varphi = \frac{2\frac{a}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{b^2-a^2},$$

а это и есть предыдущее выраженіе тангенса наибольшаго угла между сопряженными діаметрами.

272. Пусть l будетъ длина перпендикуляра MK, опущеннаго изъ конца одного изъ сопряженныхъ діаметровъ на другой (фиг. 60). Въ такомъ случаѣ равенство (7) можетъ быть представлено въ видѣ

$$lb' = ab,$$

откуда

$$l = \frac{ab}{b'} = \frac{ab}{\sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}}$$

или, вслѣдствіе соотношеній (5),

$$l = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2 y_1{}^2}{b^2} + \frac{b^2 x_1{}^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4} + \frac{y_1{}^2}{b^4}}}.$$

Такъ же точно выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 183), разстояніе касательной къ эллипсу въ точкѣ M отъ его центра.

273. Если эллипсъ, отнесенный къ двумъ какимъ-нибудь сопряженнымъ діаметрамъ, выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

и x_1, y_1 суть координаты какой-нибудь его точки, то діаметръ, проходящій чрезъ эту точку, и ему сопряженный выразятся уравненіями

$$xy_1 - yx_1 = 0$$

и

$$\frac{xx_1}{a'^2}+\frac{yy_1}{b'^2}=0 .$$

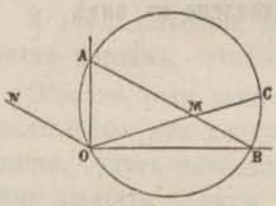
Полагая $x=a'$, получимъ изъ этихъ уравненій

$$y=\frac{a'y_1}{x_1} \quad \text{и} \quad y=-\frac{b'^2x_1}{a'y_1}.$$

Такъ какъ уравненіе $x=a'$ выражаетъ касательную къ эллипсу въ концѣ діаметра, принятаго за ось абсциссъ, то послѣднія выраженія означаютъ, очевидно, отрѣзки этой касательной, заключающіеся между точкою прикосновенія и разсматриваемыми сопряженными діаметрами. Замѣчая, что произведеніе этихъ выраженій при всякихъ значеніяхъ x_1 и y_1 есть $-b'^2$, приходимъ къ заключенію, что *произведеніе отрѣзковъ касательной къ эллипсу, заключающихся между точкою прикосновенія и двумя какими бы ни было сопряженными діаметрами, есть величина постоянная, равная квадрату полудіаметра, параллельнаго этой касательной.*

274. Пользуясь этимъ свойствомъ, не трудно построить оси эллипса, когда даны два его сопряженные діаметра.

Пусть OM и ON будутъ половины такихъ діаметровъ, данныхъ по величинѣ и направленію (фиг. 62). Возьмемъ на продолженіи одного изъ нихъ OM точку C такъ, чтобы было



Фиг. 62.

$$OM \,.\, MC=\overline{ON}^2 ,$$

и построимъ окружность, проходящую чрезъ точки O и C и имѣющую центръ на прямой, проведенной чрезъ M параллельно ON. Эта прямая есть, очевидно, касательная къ эллипсу, и отрѣзки ея внутри построенной окружности будутъ таковы, что

$$MA \,.\, MB=-ON^2 .$$

Слѣдовательно, прямыя OA и OB будутъ два перпендикулярные между собою сопряженные діаметра, т. е. оси эллипса.

Что касается величинъ осей, то онѣ опредѣляются по величинамъ данныхъ сопряженныхъ діаметровъ на основаніи теоремъ Аполлонія, т. е. сотношеній

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$

и

$$ab=a'b'\sin\varphi ,$$

изъ которыхъ

$$(a+b)^2=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\varphi$$

и

$$(a-b)^2=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\varphi .$$

Слѣдовательно,

$$2a = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\varphi} + \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\varphi}$$

и

$$2b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\varphi} - \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\varphi}\,.$$

Величины эти помощію циркуля и линейки также легко могутъ быть построены.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ГИПЕРБОЛА.

§ 1. Форма и построеніе гиперболы.

275. Въ предыдущей главѣ мы исходили изъ предположенія, что въ уравненіи

$$Ax^2+Cy^2+F=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

выражающемъ центральную кривую второго порядка, отнесенную къ двумъ ея сопряженнымъ діаметрамъ, коэффиціенты A и C имѣютъ одинаковые знаки. Будемъ теперь предполагать, что эти коэффиціенты имѣютъ различные знаки.

Относительно постояннаго члена F можно при этомъ сдѣлать каждое изъ трехъ слѣдующихъ предположеній: 1) онъ имѣетъ знакъ, одинаковый съ знакомъ коэффиціента C, 2) онъ имѣетъ знакъ, одинаковый съ знакомъ коэффиціента A, 3) онъ равенъ нулю. И мы уже знаемъ (см. стр. 136), что въ первыхъ двухъ случаяхъ уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, а въ послѣднемъ совокупность двухъ дѣйствительныхъ прямыхъ.

Имѣя въ виду изученіе свойствъ гиперболы, мы займемся въ настоящей главѣ преимущественно первыми двумя случаями.

276. Представляя уравненіе (1) въ видѣ

$$-\frac{A}{F}x^2-\frac{C}{F}y^2=1\,,$$

мы можемъ положить

$$-\frac{F}{A}=\pm a^2 \qquad \text{и} \qquad -\frac{F}{C}=\mp b^2\,,$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя и конечныя величины и притомъ верхніе знаки во вторыхъ частяхъ относятся къ тому случаю, когда C и F имѣютъ одинаковые знаки, а нижніе къ случаю, когда A и F имѣютъ одинаковые знаки.

Уравненіе (1) принимаетъ, такимъ образомъ, въ этихъ двухъ случаяхъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Двѣ гиперболы, выражаемыя этими уравненіями при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ постоянныхъ a и b, называются *сопряженными* между собою.

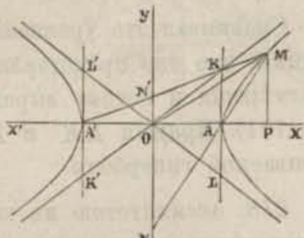
Такъ какъ каждое изъ этихъ двухъ уравненій обращается въ другое при измѣненіи наименованія осей абсциссъ и ординатъ и соотвѣтственномъ тому измѣненіи обозначенія постоянныхъ a и b, то заключаемъ, что всякая гипербола, разсматриваемая въ отдѣльности, можетъ быть, при соотвѣтственномъ наименованіи осей, выражаема уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Полагая въ этомъ уравненіи $x=0$, получимъ $y = \pm b\sqrt{-1}$, откуда заключаемъ, что діаметръ, принятый за ось ординатъ, не пересѣкаетъ гиперболы; такой діаметръ называютъ *мнимымъ* *).

Если же положимъ $y=0$, то будемъ имѣть $x = \pm a$, откуда видимъ, что ось абсциссъ пересѣкаетъ гиперболу въ двухъ точкахъ, отстоящихъ отъ ея центра на разстояніе a. Діаметръ, принятый за эту ось, есть, слѣдовательно, *дѣйствительный* и $2a$ есть его длина.

277. Въ слѣдующемъ мы будемъ полагать, что уравненіе (2) выражаетъ гиперболу относительно прямоугольной системы координатъ (фиг. 63). Ось абсциссъ будетъ въ этомъ случаѣ *дѣйствительною* или *поперечною* осью гиперболы, а ось ординатъ ея *мнимою* осью. Концы A и A' дѣйствительной оси суть двѣ вершины гиперболы. Длина дѣйствительной оси AA' равняется $2a$.



Фиг. 63.

Рѣшая уравненіе (2) относительно y, получимъ

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

и такъ какъ отсюда видно, что дѣйствительныя значенія y соотвѣтствуютъ такимъ значеніямъ x, абсолютная величина которыхъ болѣе a, то заключаемъ, что двѣ вѣтви гиперболы (см. стр. 131) расположены по разныя стороны отъ прямыхъ KL и $K'L'$, проходящихъ черезъ

*) Мнимый діаметръ не есть мнимая прямая (см. стр. 65); не существуетъ только его точекъ пересѣченія съ гиперболой.

вершины A и A' и параллельныхъ мнимой оси, и что между этими прямыми не существуетъ точекъ гиперболы.

Если на прямой, проходящей чрезъ одну изъ вершинъ параллельно мнимой оси, отложимъ отрѣзки AK и AL, равные b, и соединимъ точки K и L съ началомъ координатъ, т. е. центромъ гиперболы, то будемъ имѣть двѣ прямыя KK' и LL', уравненія которыхъ, какъ видно изъ самаго построенія, суть

$$y = +\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Легко видѣть, что двѣ вѣтви гиперболы помѣщаются въ двухъ противоположныхъ углахъ KOL и $K'OL'$, образуемыхъ этими прямыми; въ углахъ же, смежныхъ съ этими, не существуетъ точекъ кривой. Это слѣдуетъ изъ того, что абсолютныя величины ординатъ, опредѣляемыхъ уравненіями (4), при всякомъ x, болѣе абсолютной величины ординаты гиперболы (3) при томъ же значеніи x.

Уравненія прямыхъ (4) могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

и, слѣдовательно, уравненіе, выражающее ихъ совокупность, будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ самой гиперболы, мы видимъ, что оно представляетъ равенство нулю суммы членовъ второго измѣренія и потому выражаетъ *ассимптоты* этой кривой (см. стр. 106 и 111). Прямыя KK' и LL' суть, слѣдовательно, ассимптоты разсматриваемой гиперболы.

278. Ассимптотою къ какой-либо кривой линіи, имѣющей безконечныя вѣтви, называютъ вообще такую прямую, что разстоянія отъ нея точекъ кривой безпредѣльно уменьшаются по мѣрѣ удаленія этихъ точекъ въ безконечность. Не трудно показать, что это свойство принадлежитъ и прямымъ KK' и LL'.

Дѣйствительно, разстояніе какой-нибудь точки M гиперболы отъ прямой KK' равняется, очевидно, по абсолютной величинѣ разности ординатъ (4) и (3), т. е.

$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

умноженной на косинусъ угла, составляемаго этою прямою съ осью AA'.

Слѣдовательно, обозначая это разстояніе черезъ d и полагая, что $\angle KOA = \lambda$, будемъ имѣть

$$d = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \cos\lambda ,$$

и такъ какъ

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ,$$

то

$$d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

или

$$d = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}\ (x + \sqrt{x^2 - a^2})} .$$

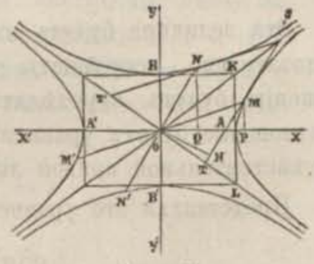
Отсюда и видно, что, при удаленіи точки M по гиперболѣ въ безконечность, когда, слѣдовательно, абсцисса x этой точки безпредѣльно возрастаетъ, разстояніе d безпредѣльно уменьшается и, при $x = \infty$, обращается въ нуль.

279. Если обозначимъ черезъ r разстояніе какой-нибудь точки M гиперболы отъ центра, т. е. половину діаметра OM (фиг. 64), а черезъ φ уголъ, образуемый этою прямою съ положительнымъ направленіемъ оси абсциссъ, то будемъ имѣть

$$x = r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin\varphi ,$$

и уравненіе гиперболы (2) обратится въ

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$$



Фиг. 64.

или

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\varphi} ,$$

откуда

$$r^2 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\varphi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Это есть уравненіе гиперболы въ полярныхъ координатахъ.

Для всѣхъ точекъ гиперболы, находящихся внутри нормальнаго угла XOY, уголъ φ заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, и послѣднее равенство показываетъ, что съ возрастаніемъ этого угла разстояніе $r = OM$ также возрастаетъ. Дѣйствительная ось гиперболы есть, слѣдовательно, наименьшій изъ ея діаметровъ.

Если

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и, слѣдовательно,

$$tg\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \varphi = \lambda,$$

то $r=\infty$. Это показываетъ, что діаметры гиперболы безпредѣльно возрастаютъ по мѣрѣ уклоненія отъ дѣйствительной оси и дѣлаются безконечно большими при совпаденіи съ ассимптотами.

280. Если $\varphi > \lambda$ и, слѣдовательно,

$$\sin\varphi > \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

то величина r будетъ мнимою. Полагая при этомъ $r=\varrho\sqrt{-1}$, мы будемъ имѣть изъ уравненія (6)

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)\sin^2\varphi - b^2}}.$$

Эта величина будетъ въ настоящемъ случаѣ дѣйствительная и, слѣдовательно, координаты ϱ и φ, удовлетворяющія послѣднему соотношенію, будутъ опредѣлять дѣйствительную точку N, а само это соотношеніе будетъ уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ нѣкоторой дѣйствительной кривой линіи.

Представляя это уравненіе въ видѣ

$$\varrho^2(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi) = a^2b^2$$

или

$$\varrho^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{b^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\right) = 1$$

и полагая

$$\varrho\cos\varphi = x \quad \text{и} \quad \varrho\sin\varphi = y,$$

получимъ уравненіе той же линіи въ прежнихъ прямолинейныхъ координатахъ

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Это есть уравненіе гиперболы, сопряженной съ разсматриваемою.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что мнимые діаметры каждой изъ двухъ сопряженныхъ гиперболъ суть дѣйствительные другой, и обратно. Ассимптоты же обѣихъ сопряженныхъ гиперболъ однѣ и тѣ же.

Подъ именемъ длины мнимаго діаметра данной гиперболы (2) разумѣютъ обыкновенно длину NN' этого діаметра, какъ дѣйствительнаго для гиперболы, сопряженной съ данною. Въ частности длина мнимой оси есть разстояніе $2b$ между вершинами B и B' этой сопряженной гиперболы.

281. Представивъ уравненіе гиперболы (2) въ видѣ

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$a^2y^2 = b^2(x^2 - a^2)$$

и замѣчая, что въ такомъ случаѣ оно можетъ быть разсматриваемо, какъ результатъ перемноженія уравненій первой степени

$$ay = kb(x - a) \quad \text{и} \quad kay = b(x + a), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

заключаемъ, подобно тому, какъ это было сдѣлано для эллипса (см. стр. 172), что гиперболу можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ, выражаемыхъ послѣдними двумя уравненіями при одномъ и томъ же значеніи постояннаго k.

При неопредѣленномъ значеніи k, эти уравненія выражаютъ пучки прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины A и A' гиперболы. Давая же k частное значеніе, получимъ двѣ опредѣленныя прямыя AM и $A'M$ (фиг. 63), пересѣкающіяся на гиперболѣ и встрѣчающія ея мнимую ось въ такихъ двухъ точкахъ N и N', что, какъ видно изъ уравненій (7),

$$ON = -kb \quad \text{и} \quad k \, . \, ON' = b$$

и, слѣдовательно,

$$ON \, . \, ON' = -b^2 .$$

Это показываетъ, что всякія двѣ прямыя, проходящія черезъ вершины гиперболы и встрѣчающіяся въ какой-нибудь ея точкѣ, пересѣкаютъ мнимую ось въ двухъ точкахъ, лежащихъ по разныя стороны отъ центра и на такихъ отъ него разстояніяхъ, средняя геометрическая которыхъ равняется половинѣ мнимой оси.

На этомъ можетъ быть основано, такъ же какъ и для эллипса, построеніе точекъ гиперболы въ какомъ угодно числѣ и сколь угодно близкихъ между собою.

282. Если въ уравненіи (2) $a = b$, то оно можетъ быть представлено въ видѣ

$$x^2 - y^2 = a^2$$

и въ этомъ случаѣ выражаемая имъ гипербола называется *равносторонней*. Очевидно, что уголъ каждой ассимптоты съ дѣйствительною осью равняется въ этомъ случаѣ половинѣ прямого и, слѣдовательно, ассимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны между собою.

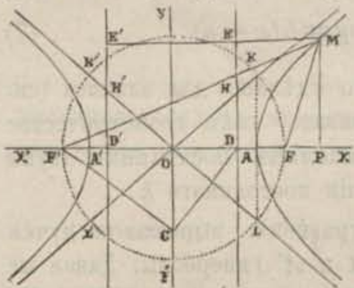
Понятно также, что двѣ сопряженныя гиперболы тождественны, когда онѣ равностороннія.

§ 2. Фокусы и директрисы.

283. Двѣ точки F и F', лежащія на дѣйствительной оси гиперболы (фиг. 65) и на разстояніи отъ ея центра, равномъ

$$\sqrt{a^2+b^2},$$

гдѣ a и b суть длины полуосей (дѣйствительной и мнимой), называются *фокусами* этой кривой. Слѣдовательно, возставляя изъ вершины A перпендикуляръ къ дѣйствительной оси и описывая изъ центра гиперболы окружность, проходящую через точку K встрѣчи этого перпендикуляра съ ассимптотою, получимъ фокусы, какъ точки пересѣченія этой окружности съ дѣйствительною осью.



Фиг. 65.

Полагая, что гипербола отнесена къ ея осямъ и выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будемъ имѣть, что координаты фокуса F суть

$$x=+\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad y=0,$$

а фокуса F'

$$x=-\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad y=0.$$

Обозначая чрезъ α абсолютную величину радикала $\sqrt{a^2+b^2}$, т. е. разстояніе OF, а чрезъ r и r' разстоянія какой-нибудь точки M гиперболы отъ фокусовъ F и F', будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$r^2=(x-\alpha)^2+y^2$$

и

$$r'^2=(x+\alpha)^2+y^2,$$

и такъ какъ для точки M

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

то

$$r^2 = \frac{\alpha^2+b^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - b^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = \left(\frac{\alpha}{a}x - a\right)^2$$

и точно такъ же

$$r'^2 = \frac{\alpha^2+b^2}{a^2}x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - b^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = \left(\frac{\alpha}{a}x + a\right)^2.$$

Замѣчая, что для гиперболы $x > a$ и притомъ $\alpha > a$, убѣждаемся, что по абсолютнымъ размѣрамъ

$$r = \frac{\alpha}{a}x - a \quad \text{и} \quad r' = \frac{\alpha}{a}x + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Отсюда находимъ

$$r' - r = 2a.$$

Разстоянія точекъ гиперболы отъ ея фокусовъ называютъ обыкновенно *радіусами векторами* этой точки. Послѣднее равенство показываетъ, такимъ образомъ, что для гиперболы *разность радіусовъ векторовъ каждой точки имѣетъ величину постоянную, равную дѣйствительной оси этой кривой.*

284. Свойство это вполнѣ характеризуетъ гиперболу и можетъ быть принято за ея опредѣленіе.

Дѣйствительно, положимъ, что требуется найти геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ F и F' имѣетъ данную постоянную величину. Обозначая эту величину черезъ $2a$, а разстояніе между данными точками F и F' черезъ 2α, и принимая прямую, соединяющую эти точки, за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ ея средины, за ось ординатъ, будемъ, очевидно, имѣть для искомаго геометрическаго мѣста уравненіе

$$\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2} - \sqrt{(x-\alpha)^2+y^2} = 2a.$$

По уничтоженіи радикаловъ это уравненіе легко приводится къ виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 - a^2} = 1,$$

а это есть уравненіе гиперболы, которой дѣйствительная ось равняется $2a$, а мнимая

$$2b = 2\sqrt{\alpha^2 - a^2}.$$

На послѣднемъ свойствѣ можетъ быть основано построеніе гиперболы непрерывнымъ движеніемъ при помощи гибкихъ и нерастяжимыхъ нитей.

Двѣ нити, разность длинъ которыхъ равняется дѣйствительной оси гиперболы, укрѣпляютъ концами въ фокусахъ. Свободные же концы этихъ нитей соединяютъ вмѣстѣ и удерживаютъ рукою такъ, чтобы обѣ нити, будучи перекинуты черезъ чертящее остріе, оставались натянутыми. Въ такомъ случаѣ, при всякомъ положеніи этого острія на плоскости, разность разстояній его отъ фокусовъ будетъ имѣть одну и ту же величину, равную разности длинъ нитей, и, при непрерывномъ перемѣщеніи острія, оно начертитъ гиперболу.

285. Приравнявши нулю выраженія радіусовъ векторовъ (2), получимъ уравненія двухъ прямыхъ

$$\frac{\alpha}{a}x - a = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{a}x + a = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

называемыхъ *директрисами* гиперболы.

Какъ видно изъ этихъ уравненій, директрисы гиперболы параллельны ея мнимой оси и отстоятъ отъ центра на разстояніе, равное по абсолютной величинѣ $\frac{a^2}{\alpha}$. Это указываетъ на возможность найти для гиперболы директрисы такимъ же точно построеніемъ, какъ и для эллипса. Проведя изъ фокуса F' (фиг. 65) прямую $F'C$ такъ, чтобы отрѣзокъ OC на мнимой оси равнялся половинѣ дѣйствительной оси OA, и возставивъ въ C перпендикуляръ къ этой прямой, получимъ, при пересѣченіи этого перпендикуляра съ дѣйствительною осью, точку D, принадлежащую директрисѣ.

Кромѣ того, легко видѣть, что точки K и H' пересѣченія ассимптотъ съ окружностью, описанною на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ, принадлежатъ также директрисамъ и что эти точки суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на ассимптоты.

286. Обозначая черезъ d и d' разстоянія ME и ME' какой-нибудь точки M (x, y) гиперболы отъ двухъ ея директрисъ, будемъ имѣть изъ уравненій (3)

$$d = x - \frac{a^2}{\alpha} \quad \text{и} \quad d' = x + \frac{a^2}{\alpha}$$

или, имѣя въ виду равенства (2),

$$d = \frac{a}{\alpha}r \quad \text{и} \quad d' = \frac{a}{\alpha}r',$$

откуда

$$\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'} = \frac{\alpha}{a} = \frac{2\alpha}{2a}.$$

Это показываетъ, что для гиперболы, такъ же какъ и для эллипса, каждому фокусу соотвѣтствуетъ своя директриса и *отношеніе разстояній каждой точки гиперболы отъ фокуса и соотвѣтствующей ему директрисы есть постоянная величина, равная отношенію разстоянія между фокусами къ дѣйствительной оси.*

Это отношеніе, называемое, какъ было сказано (см. стр. 177), *эксцентриситетомъ*, для всякой гиперболы болѣе единицы.

Обозначая эксцентриситетъ буквою e, будемъ имѣть

$$e = \frac{\alpha}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}.$$

Слѣдовательно, эксцентриситетъ гиперболы возрастаетъ съ увеличеніемъ отношенія $\frac{b}{a}$, т. е. съ возрастаніемъ остраго угла, образуемаго ассимптотами съ дѣйствительною осью.

Для равносторонней гиперболы $e=\sqrt{2}$.

При $e=\infty$ и $b=\infty$, гипербола обращается въ совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ.

287. Обозначая черезъ $2p$ длину хорды, проходящей черезъ фокусъ перпендикулярно къ дѣйствительной оси гиперболы, будемъ имѣть, что α и p суть координаты точки, принадлежащей этой кривой. Поэтому

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1.$$

Величина p, такъ же какъ и для эллипса, называется *параметромъ*. Изъ послѣдняго соотношенія получаемъ для нея слѣдующія выраженія черезъ оси и эксцентриситетъ:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{\alpha^2 - a^2}{a} = a(e^2-1).$$

Если за оси координатъ примемъ двѣ прямыя, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ дѣйствительною осью гиперболы, а другая съ перпендикуляромъ къ ней, возставленнымъ въ фокусѣ F', то уравненіе гиперболы получится изъ уравненія (1), полагая

$$x = x' - \alpha \qquad \text{и} \qquad y = y'.$$

Это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

$$b^2(x'-\alpha)^2 - a^2y'^2 = a^2b^2,$$

или

$$a^2(x'^2+y'^2) = (b^2-\alpha x')^2,$$

или

$$x'^2+y'^2 = (p-ex')^2.$$

Полагая здѣсь

$$x' = \varrho \cos\varphi \quad \text{и} \quad y' = \varrho \sin\varphi ,$$

получимъ

$$\varrho^2 = (p - e\varrho\cos\varphi)^2 ,$$

откуда

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} .$$

Это есть уравненіе въ полярныхъ координатахъ, представляющее гиперболу только тогда, когда въ немъ $e > 1$. Если же $e < 1$, то этимъ же уравненіемъ выражается, какъ мы видѣли (см. стр. 178), эллипсъ.

288. Уравненіе (1) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 - a^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \alpha^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такимъ же точно образомъ можетъ быть представлено и уравненіе эллипса.

Предполагая, что въ послѣднемъ уравненіи α имѣетъ данную дѣйствительную величину, а величина a неопредѣленная, будемъ имѣть, что относительно прямоугольной системы координатъ это уравненіе выражаетъ систему *софокусныхъ* линій второго порядка, т. е. линій, имѣющихъ общіе фокусы въ двухъ точкахъ оси абсциссъ, отстоящихъ отъ начала координатъ на разстояніе α. И эти линіи будутъ эллипсы для значеній a, большихъ по абсолютной величинѣ, нежели α, и гиперболы для $a < \alpha$.

Постараемся найти линіи системы (4), проходящія черезъ какую-нибудь данную точку (x_1, y_1).

Въ силу самого условія будемъ имѣть

$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{a^2 - \alpha^2} = 1$$

или

$$a^4 - (x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + \alpha^2)\, a^2 + \alpha^2 x_1^{\,2} = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

откуда получаемъ два значенія для a^2:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + \alpha^2 \pm \sqrt{(x_1^{\,2} - \alpha^2)^2 + 2\,(x_1^{\,2} + \alpha^2)\, y_1^{\,2} + y_1^{\,4}}\right],$$

дѣйствительныя при всякихъ координатахъ x_1, y_1. Поэтому заключаемъ, что *черезъ всякую данную точку проходятъ двѣ дѣйствительныя линіи второго порядка, имѣющія данные фокусы*.

Предыдущее уравненіе (5) можно представить еще такъ:

$$(a^2-\alpha^2)^2-(x_1{}^2+y_1{}^2-\alpha^2)(a^2-\alpha^2)-\alpha^2 y_1{}^2=0\,,$$

откуда для $(a^2-\alpha^2)$ получаются также два значенія, произведеніе которыхъ равняется отрицательной величинѣ $-\alpha^2 y_1{}^2$. Это показываетъ, что одно изъ значеній a^2 болѣе α^2, а другое менѣе, а потому заключаемъ, что *изъ двухъ софокусныхъ кривыхъ второго порядка, проходящихъ черезъ данную точку, одна непремѣнно эллипсъ, а другая гипербола*.

На возможности опредѣлить точки плоскости пересѣченіемъ эллипсовъ и гиперболъ, принадлежащихъ системѣ софокусныхъ кривыхъ, основывается употребленіе особой *криволинейной* системы координатъ, въ которой роль абсциссъ играютъ оси эллипсовъ, а роль ординатъ оси гиперболъ, или обратно.

§ 3. Касательныя и нормали.

289. Предполагая, что гипербола отнесена къ своимъ осямъ и, слѣдовательно, выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будемъ имѣть, что уравненіе

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{a^2}-\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\,,$$

въ которомъ x_1, y_1 и x_2, y_2 суть координаты двухъ какихъ-нибудь точекъ этой кривой, выражаетъ прямую, пересѣкающую ее въ этихъ двухъ точкахъ.

Въ томъ случаѣ, когда точки пересѣченія совпадаютъ и, слѣдовательно, $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$, сѣкущая дѣлается касательной и уравненіе ея будетъ

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$$

или, по сокращеніи,

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Это уравненіе можно было бы получить изъ общаго уравненія касательныхъ къ кривымъ второго порядка, разсматривая само уравненіе гиперболы (1), какъ частный видъ общаго уравненія второй степени.

Въ немъ x_1 и y_1 суть, слѣдовательно, координаты точки прикосновенія, а x и y координаты любой точки касательной.

Хотя мы предполагали, что уравненіе (1) выражаетъ гиперболу, отнесенную къ ея осямъ, но такъ какъ въ предыдущихъ разсужденіяхъ перпендикулярность осей не принимается вовсе во вниманіе, то выводъ имѣетъ мѣсто и тогда, когда оси координатъ косоугольныя, т. е. когда гипербола отнесена къ какимъ-нибудь двумъ ея сопряженнымъ діаметрамъ. Слѣдовательно, полагая, что уравненіе ея въ этомъ случаѣ есть

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

будемъ имѣть для касательной въ точкахъ x_1, y_1 уравненіе

$$\frac{xx_1}{a'^2}-\frac{yy_1}{b'^2}=1.$$

290. Мы видѣли, что совокупность ассимптотъ гиперболы (1) выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Величины x и y, удовлетворяющія этому уравненію совмѣстно съ уравненіемъ касательной (2), суть координаты точекъ пересѣченія касательной съ ассимптотами. Если исключимъ изъ этихъ двухъ уравненій y, то получимъ для опредѣленія абсциссъ этихъ точекъ уравненіе второй степени

$$\left(\frac{xx_1}{a^2}-1\right)^2=\frac{x^2y_1{}^2}{a^2b^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}\right)-\frac{2xx_1}{a^2}+1=0,$$

и такъ какъ x_1 и y_1 суть координаты точки, принадлежащей гиперболѣ, то это послѣднее уравненіе, по умноженіи обѣихъ частей на a^2, обращается въ

$$x^2-2x_1x+a^2=0.$$

Слѣдовательно, называя чрезъ x' и x'' корни этого уравненія, т. е. абсциссы точекъ пересѣченія касательной съ ассимптотами, будемъ имѣть

$$x'+x''=2x_1.$$

Точно также исключая x изъ уравненій (3) и (2), получимъ

$$\frac{y^2 x_1{}^2}{a^2 b^2} = \left(\frac{y y_1}{b^2} + 1\right)^2,$$

откуда

$$y^2 - 2y_1 y - b^2 = 0.$$

Слѣдовательно, называя чрезъ y' и y'' корни этого уравненія, т. е. ординаты точекъ пересѣченія касательной съ ассимптотами, будемъ имѣть

$$y' + y'' = 2y_1.$$

Такимъ образомъ, видимъ, что

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2} \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{y' + y''}{2},$$

и потому заключаемъ, что *точка прикосновенія касательной къ гиперболѣ есть средина отрѣзка этой касательной, заключающагося между ассимптотами.*

291. Уравненіе касательной (2), будучи рѣшено относительно y, получаетъ видъ

$$y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

и, замѣняя y_1 его выраженіемъ через x_1 изъ уравненія гиперболы (1), получимъ

$$y = \pm \frac{b x_1}{a\sqrt{x_1{}^2 - a^2}} x \pm \frac{ab}{\sqrt{x_1{}^2 - a^2}}$$

или

$$y = \pm \frac{b}{a\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x_1{}^2}}} x \pm \frac{ab}{\sqrt{x_1{}^2 - a^2}}.$$

Предполагая, что точка прикосновенія удаляется въ безконечность, мы будемъ имѣть, что въ предѣлѣ, т. е. при $x_1 = \infty$, послѣднее уравненіе обращается въ

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

а это уравненіе выражаетъ ассимптоты.

Такимъ образомъ, видимъ (см. стр. 111), что *ассипмтоты суть касательныя въ безконечно удаленныхъ точкахъ.*

292. Если обозначимъ буквою m угловой коэффиціентъ въ уравненіи касательной (4), то будемъ имѣть

$$b^2x_1 = ma^2y_1$$

и, слѣдовательно,

$$b^4x_1{}^2 = m^2a^4y_1{}^2\,,$$

или

$$b^2(y_1{}^2 + b^2) = m^2a^2y_1{}^2\,,$$

откуда

$$\frac{b^2}{y_1} = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}\,,$$

и уравненіе касательной (4) приметъ видъ

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}\,.$$

Въ такомъ видѣ оно могло бы быть выведено и непосредственно, подобно тому, какъ это сдѣлано было для эллипса (см. стр. 180 и 181).

При данномъ m это послѣднее уравненіе выражаетъ двѣ касательныя къ гиперболѣ, имѣющія данное направленіе.

Такъ какъ это уравненіе выражаетъ дѣйствительныя прямыя только тогда, когда $a^2m^2 > b^2$ и, слѣдовательно, по абсолютной величинѣ

$$m > \frac{b}{a}\,,$$

то заключаемъ (см. стр. 200), что *въ направленіи каждаго мнимаго діаметра къ гиперболѣ могутъ быть проведены двѣ касательныя, въ направленіяхъ же дѣйствительныхъ діаметровъ нельзя провести ни одной касательной.*

Такъ какъ, далѣе, при $m = \frac{b}{a}$, послѣднее уравненіе обращается въ

$$y = \frac{b}{a}x\,,$$

то заключаемъ, что *въ направленіи ассимптоты можетъ быть проведена только одна касательная къ гиперболѣ и эта касательная есть сама ассимптота.*

293. Уравненіе (2) въ томъ случаѣ, когда въ немъ x_1 и y_1 суть координаты какой-нибудь точки плоскости, выражаетъ *поляру* этой точки относительно гиперболы.

Слѣдовательно, поляра точки, лежащей на дѣйствительной оси гиперболы, выражается уравненіемъ

$$xx_1 = a^2\,,$$

а поляра точки, лежащей на мнимой оси, уравненіемъ

$$yy_1 = -b^2\,.$$

Припоминая, что двѣ точки, изъ которыхъ каждая лежитъ на полярѣ другой, называются сопряженными (см. стр. 123), заключаемъ изъ послѣднихъ уравненій, подобно тому, какъ и для эллипса, что половина дѣйствительной оси гиперболы есть средняя геометрическая разстояній отъ центра каждыхъ двухъ сопряженныхъ точекъ этой оси, и что такое же значеніе имѣетъ половина мнимой оси для лежащихъ на ней сопряженныхъ точекъ. Но при этомъ на дѣйствительной оси сопряженныя точки находятся по одну и ту же сторону отъ центра, а на мнимой по разныя стороны.

Пользуясь этими соотношеніями, не трудно построить поляру какой угодно точки относительно гиперболы, когда даны оси этой кривой.

Если въ уравненіи (2) положимъ $x = \pm a$ и $y = 0$, то оно обратится въ

$$\pm ax = a^2$$

или

$$\frac{\alpha}{a} x \mp a = 0 ,$$

откуда заключаемъ, что для гиперболы, такъ же какъ и для эллипса, *директрисы суть поляры соотвѣтствующихъ фокусовъ*.

294. Уравненіе нормали къ гиперболѣ, т. е. перпендикуляра къ касательной, возставленнаго въ точкѣ прикосновенія, получается легко изъ уравненія касательной и условія перпендикулярности.

Для гиперболы, отнесенной къ ея осямъ, это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

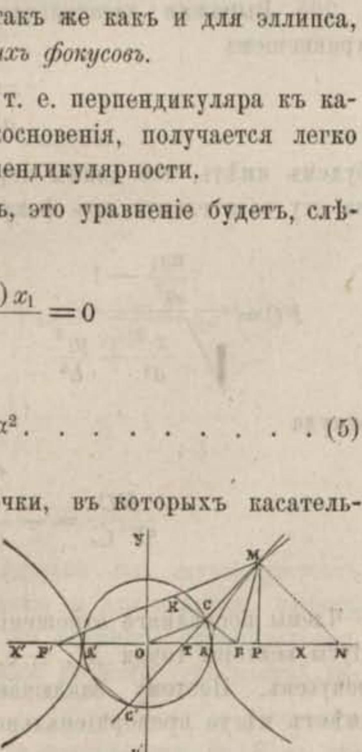
$$\frac{(x - x_1) y_1}{b^2} + \frac{(y - y_1) x_1}{a^2} = 0$$

или

$$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Полагая, что T и N (фиг. 66) суть точки, въ которыхъ касательная и нормаль пересѣкаютъ дѣйствительную ось гиперболы, будемъ имѣть, положивши въ уравненіяхъ (2) и (5) этихъ прямыхъ $y = 0$, что

$$OT = \frac{a^2}{x_1} \quad \text{и} \quad ON = \frac{a^2 x_1}{a^2} \cdot$$



Фиг. 66.

Слѣдовательно,

$$OT \,.\, ON = a^2 ,$$

*

соотношеніе, имѣющее мѣсто, какъ мы видѣли, и для эллипса. Различіе состоитъ, однако, въ томъ, что для эллипса $OT > a$ и, слѣдовательно, $ON < a$, а для гиперболы наоборотъ.

Отрѣзки MT и MN называются *длиною касательной* и *длиною нормали* въ точкѣ M. Отрѣзки же TP и PN *подкасательной* и *субнормалью* точки M. Выраженія абсолютныхъ величинъ подкасательной и субнормали легко получить слѣдующимъ образомъ:

$$TP = OP - OT = x_1 - \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1{}^2 - a^2}{x_1}$$

и

$$PN = ON - OP = \frac{a^2 x_1}{a^2} - x_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что субнормаль въ какой-либо точкѣ гиперболы находится въ постоянномъ отношеніи къ абсциссѣ этой точки.

Выраженія длины нормали и длины касательной легко могутъ быть выведены точно такъ же, какъ и для эллипса.

295. Выражая касательную къ гиперболѣ въ точкѣ M (фиг. 66) уравненіемъ

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

будемъ имѣть, что длины перпендикуляровъ FC и $F'C'$, опущенныхъ на эту касательную изъ фокусовъ, опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

$$FC = \frac{\frac{\alpha x_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4} + \frac{y_1{}^2}{b^4}}} \quad \text{и} \quad F'C' = \frac{-\frac{\alpha x_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^4} + \frac{y_1{}^2}{b^4}}}, \ldots \quad (6)$$

откуда

$$\frac{FC}{F'C'} = -\frac{\frac{\alpha x_1}{a^2} - 1}{\frac{\alpha x_1}{a^2} + 1} = -\frac{\frac{\alpha x_1}{a} - a}{\frac{\alpha x_1}{a} + a}.$$

Члены послѣдняго отношенія представляютъ собою (см. стр. 203) радіусы векторы точки M, т. е. разстоянія MF и MF' этой точки отъ фокусовъ. Поэтому заключаемъ, что между абсолютными длинами имѣетъ мѣсто пропорціональность

$$\frac{FC}{F'C'} = \frac{MF}{MF'},$$

доказывающая, что треугольники MFC и $MF'C'$ подобны и, слѣдовательно, углы FMC и $F'MC'$ равны.

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что *касательная, а слѣдовательно и нормаль, къ гиперболѣ составляютъ равные углы съ радіусами векторами точки прикосновенія.*

Свойство это принадлежитъ, какъ мы видѣли, и эллипсу, но различіе заключается въ томъ, что касательная эллипса дѣлитъ пополамъ внѣшній уголъ треугольника, вершины котораго находятся въ точкѣ прикосновенія и въ двухъ фокусахъ, а нормаль внутренній; для гиперболы же наоборотъ.

Это позволяетъ заключить, что если эллипсъ и гипербола имѣютъ общіе фокусы, то касательныя къ нимъ въ точкѣ ихъ пересѣченія перпендикулярны между собою. Слѣдовательно, софокусные эллипсы и гиперболы (см. стр. 206) представляютъ двѣ ортогональныя системы кривыхъ линій.

296. Перемножая выраженія (6), получимъ

$$FC.F'C'=\frac{1-\dfrac{a^2x_1{}^2}{a^4}}{\dfrac{x_1{}^2}{a^4}+\dfrac{y_1{}^2}{b^4}}$$

и такъ какъ изъ уравненія гиперболы (1) имѣемъ

$$\frac{y_1{}^2}{b^2}=\frac{x_1{}^2-a^2}{a^2},$$

то

$$\frac{x_1{}^2}{a^4}+\frac{y_1{}^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{x_1{}^2-a^2}{b^2}\right)=\frac{a^2x_1{}^2-a^4}{a^4b^2}=$$

$$=\frac{1}{b^2}\left(\frac{a^2x_1{}^2}{a^4}-1\right).$$

Слѣдовательно,

$$FC.F'C'=-b^2.$$

Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ фокусовъ на какую-нибудь касательную, такъ же какъ и для эллипса, имѣетъ постоянную величину. Но для гиперболы эта величина отрицательная, потому что фокусы ея находятся по разныя стороны отъ всякой касательной.

297. Продолживъ перпендикуляръ FC до пересѣченія въ K съ радіусомъ векторомъ $F'M$, будемъ имѣть изъ равенства треугольниковъ MFC и MKC, что

$$FC = KC \quad \text{и} \quad FM = KM.$$

Слѣдовательно, точка K есть симметричная съ фокусомъ F относительно касательной и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$F'K = F'M - FM = AA' = 2a.$$

Отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто точекъ, симметричныхъ съ однимъ изъ фокусовъ гиперболы относительно касательныхъ, есть окружность, описанная изъ другого фокуса радіусомъ, равнымъ дѣйствительной оси.

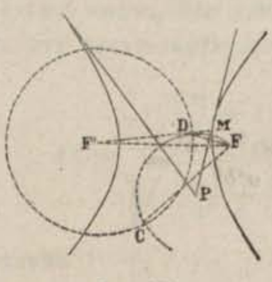
Далѣе, прямая OC, какъ соединяющая средины двухъ сторонъ треугольника FKF', равняется половинѣ третьей стороны $F'K$. Слѣдовательно,

$$OC = OA = a,$$

и такъ какъ очевидно, что $OC' = OC$, то заключаемъ, что геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательныя къ гиперболѣ, есть окружность, описанная на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ.

298. На послѣднихъ свойствахъ гиперболы можетъ быть основано построеніе касательныхъ къ этой кривой, проходящихъ черезъ данную точку или имѣющихъ данное направленіе.

Положимъ, напримѣръ, что требуется построить касательныя къ гиперболѣ, проходящія черезъ точку P (фиг. 67). Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, должны, очевидно, находиться на такомъ же разстояніи отъ точки P, какъ и этотъ фокусъ. Онѣ лежатъ, слѣдовательно, на окружности, описанной изъ P, какъ центра, радіусомъ PF. Съ другой стороны, онѣ должны лежать, какъ сейчасъ показано, на окружности, описанной изъ фокуса F' радіусомъ, равнымъ дѣйствительной оси гиперболы. Построивши эти двѣ окружности и соединивъ точки C и D ихъ пересѣченія съ фокусомъ F, будемъ, слѣдовательно, имѣть, что искомыя касательныя суть перпендикуляры, опущенные изъ точки P на прямыя CF и DF. Понятно также, что точки прикосновенія этихъ касательныхъ опредѣлятся, какъ точки пересѣченія ихъ съ прямыми, соединяющими точки C и D съ другимъ фокусомъ F'.

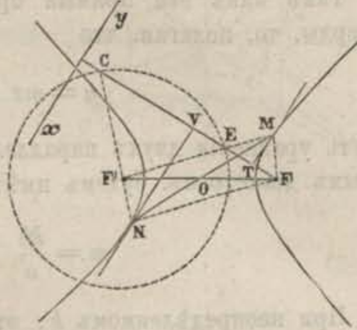


Фиг. 67.

Можно было бы также построить искомыя касательныя, отыскивая основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на нихъ изъ фокуса F. Точки эти находятся, очевидно, при пересѣченіи двухъ окружностей, изъ которыхъ одна имѣетъ діаметромъ прямую PF, а другая дѣйствительную ось гиперболы.

Положимъ теперь, что требуется построить касательныя къ гиперболѣ, параллельныя данной прямой XY (фиг. 68).

Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, суть, очевидно, точки пересѣченія перпендикуляра къ данной прямой, опущеннаго изъ фокуса F, и окружности, описанной радіусомъ, равнымъ дѣйствительной оси, изъ фокуса F'. Если C и E суть эти точки, то искомыя касательныя получатся, какъ проходящія черѣзъ средины T и V отрѣзковъ FE и FC. Точки T и V могутъ быть найдены также пересѣченіемъ прямой FC съ окружностью, описанной на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ.

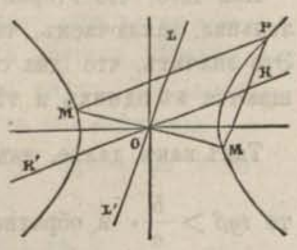


Фиг. 68.

Что касается точекъ прикосновенія M и N искомыхъ касательныхъ, то онѣ, будучи концами одного и того же діаметра, могутъ быть построены, какъ вершины параллелограмма, двѣ другія вершины котораго находятся въ фокусахъ и двѣ стороны котораго суть прямыя, соединяющія фокусъ F' съ точками C и E.

§ 4. Сопряженные діаметры.

299. Называя, какъ и для эллипса, двѣ хорды гиперболы, соединяющія какую-нибудь ея точку P (фиг. 69) съ концами M и M' какого-нибудь діаметра, *дополнительными*, легко убѣдиться, что дополнительныя хорды всегда параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ и обратно. Въ самомъ дѣлѣ, если хорды PM и PM' дополнительныя, то параллельные имъ діаметры KK' и LL' дѣлятъ ихъ пополамъ и потому суть сопряженные. Если же діаметры KK' и LL' сопряженные и хорды PM и PM' имъ параллельны, то прямая MM', соединяющая концы этихъ хордъ, должна дѣлиться пополамъ каждымъ изъ этихъ діаметровъ и, слѣдовательно, сама есть діаметръ, что и доказываетъ, что эти хорды дополнительныя.



Фиг. 69.

300. Мы видѣли выше (см. стр. 201), что если гипербола отнесена къ ея осямъ и выражается уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

то двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ какой-нибудь ея точкѣ и проходящія через ея вершины, выражаются уравненіями

$$ay = kb(x - a) \quad \text{и} \quad kay = b(x + a).$$

Такъ какъ эти прямыя представляютъ, очевидно, дополнительныя хорды, то, полагая, что

$$y = mx \quad \text{и} \quad y = m'x$$

суть уравненія двухъ параллельныхъ имъ и, слѣдовательно, сопряженныхъ діаметровъ, будемъ имѣть

$$m = \frac{kb}{a} \quad \text{и} \quad m' = \frac{b}{ka}.$$

При неопредѣленномъ k, это суть выраженія угловыхъ коэффиціентовъ двухъ какихъ бы ни было сопряженныхъ діаметровъ. Перемножая ихъ, получимъ соотношеніе

$$mm' = \frac{b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и если обозначимъ черезъ α и β углы этихъ діаметровъ съ положительнымъ направленіемъ дѣйствительной оси, то это соотношеніе приметъ видъ

$$tg\alpha\, tg\beta = \frac{b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Изъ того, что вторая часть этого равенства есть величина положительная, заключаемъ, что углы α и β или оба острые, или оба тупые. Это значитъ, что два сопряженные діаметра гиперболы всегда помѣщаются въ однихъ и тѣхъ же углахъ, образуемыхъ осями этой кривой.

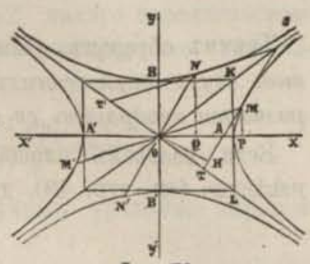
Такъ какъ, далѣе, изъ послѣдняго равенства видно, что если $tg\alpha < \frac{b}{a}$, то $tg\beta > \frac{b}{a}$, и обратно, то заключаемъ, что два сопряженные діаметра помѣщаются въ разныхъ углахъ, образуемыхъ ассимптотами, т. е. что изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ гиперболы одинъ непремѣнно дѣйствительный, а другой мнимый.

301. Положимъ, что M и N (фиг. 70) суть двѣ точки, принадлежащія сопряженнымъ гиперболамъ, уравненія которыхъ относительно ихъ осей суть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Обозначая координаты этихъ точекъ послѣдовательно черезъ x_1, y_1 и x_2, y_2, будемъ имѣть, что діаметры MM' и NN' выражаются уравненіями

$$y=\frac{y_1}{x_1}x \quad \text{и} \quad y=\frac{y_2}{x_2}x,$$



Фиг. 70.

и если эти діаметры сопряженные, то должно быть

$$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{b^2}{a^2}$$

или

$$\frac{x_1x_2}{a^2}-\frac{y_1y_2}{b^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Отсюда находимъ

$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2}:\frac{y_2^{\,2}}{b^2}=\frac{y_1^{\,2}}{b^2}:\frac{x_2^{\,2}}{a^2}=\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2}-\frac{y_1^{\,2}}{b^2}\right):\left(\frac{y_2^{\,2}}{b^2}-\frac{x_1^{\,2}}{a^2}\right),$$

и такъ какъ координаты точекъ M и N удовлетворяютъ послѣдовательно уравненіямъ (4), то члены послѣдняго отношенія равняются единицѣ. Поэтому будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{a}=\pm\frac{y_2}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x_2}{a}=\pm\frac{y_1}{b}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

при чемъ, какъ видно изъ (5), верхнему знаку одного равенства соотвѣтствуетъ верхній же знакъ другого и нижнему нижній.

Равенство (5) есть условіе параллельности каждаго изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ съ касательными въ концахъ другого. Принимая это свойство за доказанное (см. стр. 119), будемъ имѣть, что соотношенія (6), а также и соотношеніе (2) или (3) суть его слѣдствія.

302. Обозначая длины діаметровъ MM' и NN' черезъ $2a'$ и $2b'$, получимъ, на основаніи равенствъ (6),

$$a'^2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=x_1^{\,2}+\frac{b^2x_2^{\,2}}{a^2}=\frac{a^2x_1^{\,2}+b^2x_2^{\,2}}{a^2},$$

и

$$b'^2=x_2^{\,2}+y_2^{\,2}=\frac{a^2y_1^{\,2}}{b^2}+y_2^{\,2}=\frac{a^2y_1^{\,2}+b^2y_2^{\,2}}{b^2},$$

откуда, по вычитаніи,

$$a'^2-b'^2=a^2\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2}-\frac{y_1^{\,2}}{b^2}\right)+b^2\left(\frac{x_2^{\,2}}{a^2}-\frac{y_2^{\,2}}{b^2}\right).$$

Слѣдовательно,

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что для гиперболы *разность квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная, равная разности квадратовъ ея осей.*

Если назовемъ площадь треугольника MON буквою Δ, то, какъ извѣстно (см. стр. 49), должно быть

$$2\Delta = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

или, въ силу соотношеній (6),

$$2\Delta = \frac{bx_1^2}{a} - \frac{ay_1^2}{b} = ab\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

или

$$2\Delta = ab \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Первая часть этого равенства выражаетъ площадь параллелограмма $MONS$, а вторая площадь прямоугольника $AOBK$. Слѣдовательно, *площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ гиперболы, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, построеннаго на ея осяхъ.*

Равенство (8) можно получить также слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ сторона MS параллелограмма $MONS$ есть касательная къ гиперболѣ въ точкѣ M и, слѣдовательно, выражается уравненіемъ

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

то, принимая перпендикуляръ OH за высоту этого параллелограмма и обозначая его черезъ h, будемъ имѣть

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2y_1^2}{b^2} + \frac{b^2x_1}{a^2}}}.$$

Но, въ силу равенствъ (6),

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2} + \frac{b^2x_1}{a^2} = x_2^2 + y_2^2 = b'^2,$$

и потому

$$2\Delta = b'h = ab.$$

Предыдущія два предложенія, представляющія соотношенія между величинами сопряженныхъ діаметровъ, извѣстны, какъ и для эллипса, подъ названіемъ теоремъ Аполлонія.

303. Легко видѣть, что ассимптоты гиперболы суть діагонали всякаго параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ. Въ самомъ дѣлѣ, двѣ стороны ST и ST' такого параллелограмма, какъ касательныя къ двумъ сопряженнымъ гиперболамъ, выражаются уравненіями

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{xx_2}{a^2}-\frac{yy_2}{b^2}=-1 .$$

Сложивши почленно эти уравненія, получимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ ихъ точку пересѣченія

$$\frac{x(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{y(y_1+y_2)}{b^2}=0,$$

но изъ соотношеній (6) имѣемъ

$$\frac{x_1+x_2}{a}=\frac{y_1+y_2}{b},$$

вслѣдствіе чего это уравненіе принимаетъ видъ

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,$$

а это есть уравненіе ассимптоты.

Такъ какъ точка M есть средина отрѣзка ST, то площадь треугольника SOT равняется площади параллелограмма $MONS$ при всякомъ положеніи точки M на гиперболѣ. Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *площадь треугольника, образуемаго касательной къ гиперболѣ и двумя ея ассимптотами, имѣетъ постоянную величину, равную площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ этой гиперболы.*

304. Возьмемъ произвольную прямую, пересѣкающую гиперболу въ двухъ точкахъ M и M', а ассимптоты ея въ точкахъ N и N' (фиг. 71). Принимая за оси координатъ два сопряженные діаметра PP' и QQ', изъ которыхъ одинъ параллеленъ этой прямой, будемъ имѣть уравненіе гиперболы въ видѣ

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Фиг. 71.

гдѣ a' и b' суть половины этихъ діаметровъ. Уравненія же ассимптотъ, какъ діагоналей построеннаго на этихъ діаметрахъ параллелограмма, будутъ, очевидно,

$$y=+\frac{b'}{a'}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b'}{a'}x.$$

Отсюда видимъ, что если H есть средина хорды MM', то, полагая $OH=x$, будемъ имѣть

$$HN=+\frac{b'}{a'}x \quad \text{и} \quad HN'=-\frac{b'}{a'}x$$

и, слѣдовательно, по абсолютнымъ величинамъ,

$$HN=HN'$$

и потому

$$MN=M'N'.$$

Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что *отрѣзки всякой сѣкущей, заключающіеся между точками пересѣченія съ гиперболою и ея ассимптотами, равны между собою.*

Это свойство указываетъ на простое построеніе гиперболы, когда извѣстны ея ассимптоты и одна точка. Въ самомъ дѣлѣ, проведя черезъ данную точку M произвольную сѣкущую и опредѣливъ точки ея встрѣчи съ ассимптотами, мы можемъ простымъ отложеніемъ отрѣзка $N'M'$, равнаго MN, найти другую точку пересѣченія этой сѣкущей съ гиперболою. Измѣняя направленіе сѣкущей, можно, такимъ образомъ, получить сколько угодно точекъ гиперболы и притомъ сколь угодно близкихъ между собою. Понятно, что каждая изъ найденныхъ точекъ можетъ быть употребляема для этого построенія такъ же, какъ и сама данная точка M.

305. Въ предположеніи $OH=x$, мы имѣемъ изъ уравненія гиперболы (9)

$$HM=+\frac{b'}{a'}\sqrt{x^2-a'^2} \quad \text{и} \quad HM'=-\frac{b'}{a'}\sqrt{x^2-a'^2}.$$

Слѣдовательно,

$$MN=\frac{b'}{a'}(x-\sqrt{x^2-a'^2}) \quad \text{и} \quad MN'=\frac{b'}{a'}(x+\sqrt{x^2-a'^2})$$

и, по перемноженіи, находимъ

$$MN\,.\,MN'=b'^2.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что *произведеніе отрѣзковъ сѣкущей, заключающихся между одною изъ точекъ гиперболы и ассимптотами, равняется квадрату половины діаметра, параллельнаго этой сѣкущей.*

Пользуясь этимъ свойствомъ, легко найти построеніемъ длины сопряженныхъ діаметровъ, имѣющихъ данное направленіе, когда извѣстны ассимптоты гиперболы и одна ея точка. Въ самомъ дѣлѣ, если YY' есть данный по направленію діаметръ, то, проведя черезъ данную точку M прямую, ему параллельную, до пересѣченія съ ассимптотами въ точкахъ N и N' и отложивши на немъ отрѣзки OQ и OQ', равные средней геометрической отрѣзковъ MN и MN', найдемъ концы этого діаметра. Если же черезъ Q и Q' проведемъ прямыя, параллельныя ассимптотамъ, то при пересѣченіи ихъ получатся концы P и P' діаметра, сопряженнаго съ даннымъ.

Въ частности такимъ образомъ могутъ быть найдены оси гиперболы, направленіе которыхъ опредѣляется, какъ дѣлящихъ пополамъ углы между ассимптотами.

306. Уравненіе гиперболы получаетъ весьма простой видъ, когда за оси координатъ принимаются ея ассимптоты. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ начало координатъ будетъ въ этомъ случаѣ въ центрѣ кривой, то уравненіе ея должно быть вида (см. стр. 109)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Замѣчая же, что точки пересѣченія кривой съ ассимптотами находятся въ безконечности, будемъ имѣть, что, при $y = 0$,

$$x^2 = -\frac{F}{A} = \infty$$

и, при $x = 0$,

$$y^2 = -\frac{F}{C} = \infty.$$

Слѣдовательно, $A = 0$ и $C = 0$, и уравненіе обращается въ

$$Bxy + F = 0$$

или

$$xy = -\frac{F}{B}.$$

Если направленія осей координатъ выберемъ такъ, чтобы одна изъ вѣтвей гиперболы помѣщалась внутри нормальнаго угла (фиг. 72), то первая часть этого уравненія, какъ произведеніе величинъ, имѣющихъ одинаковые знаки, будетъ положительною, а потому можно положить

$$-\frac{F}{B} = m^2,$$

гдѣ m есть величина дѣйствительная.

Фиг. 72.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ ея ассимптотамъ, получаетъ, такимъ образомъ, видъ

$$xy = m^2,$$

въ которомъ оно содержитъ только одну постоянную величину m, называемую *степенью* гиперболы.

307. Если положимъ, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) суть двѣ точки, принадлежащія гиперболѣ, такъ что

$$x_1y_1 = x_2y_2 = m^2,$$

то уравненіе

$$(x - x_1)(y - y_2) - xy + m^2 = 0,$$

будучи первой степени, удовлетворяется координатами этихъ точекъ и, слѣдовательно, представляетъ прямую, пересѣкающуюся въ нихъ съ гиперболой. При совпаденіи точекъ пересѣченія эта прямая обращается въ касательную. Слѣдовательно, уравненіе касательной въ точкѣ (x_1, y_1) будетъ

$$(x - x_1)(y - y_1) - xy + m^2 = 0,$$

или, по сокращеніи,

$$xy_1 + yx_1 = 2m^2,$$

или, наконецъ,

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1.$$

Отсюда видимъ, что отрѣзки OS и OT, отсѣкаемые касательною на ассимптотахъ, равны послѣдовательно $2x_1$ и $2y_1$.

Называя уголъ между ассимптотами черезъ ω, будемъ поэтому имѣть, что площадь треугольника SOT равняется

$$2x_1y_1\sin\omega = 2m^2\sin\omega.$$

Такимъ образомъ, подтверждается, что площадь треугольника, образуемаго касательною съ ассимптотами, имѣетъ величину постоянную, и такъ какъ мы видѣли, что эта величина равняется площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ гиперболы, то должно быть

$$2m^2\sin\omega = ab.$$

Замѣчая, далѣе, что (см. стр. 199)

$$tg\,\frac{\omega}{2} = tg\lambda = \frac{b}{a},$$

получаемъ

$$tg\omega = \frac{2tg\lambda}{1 - tg^2\lambda} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Поэтому находимъ

$$m = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

выраженіе степени гиперболы чрезъ ея оси.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

ПАРАБОЛА.

§ 1. Построеніе параболы и ея отношеніе къ центральнымъ кривымъ.

308. Кривыя второго порядка, не имѣющія центра, называются параболами. Мы видѣли (см. стр. 119, 143 и слѣд.), что уравненіе всякой такой кривой можетъ быть приведено къ виду

$$y^2 = 2px, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

для чего за ось абсциссъ долженъ быть принятъ одинъ изъ діаметровъ кривой, а за ось ординатъ касательная въ концѣ его.

Въ слѣдующемъ мы будемъ сперва предполагать, что система координатъ прямоугольная, т. е. что ось абсциссъ совпадаетъ съ осью параболы, или главнымъ діаметромъ, а ось ординатъ есть касательная въ вершинѣ.

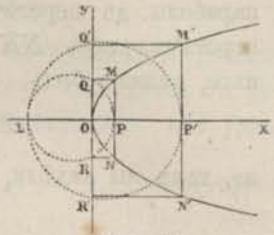
Величина p, входящая въ уравненіе (1), называется въ этомъ случаѣ *параметромъ* параболы. Отъ ея значенія зависитъ видъ и расположеніе кривой на плоскости.

Такъ какъ при дѣйствительныхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію (1), величины p и x должны имѣть одинаковые знаки, то заключаемъ, что парабола, выражаемая этимъ уравненіемъ, расположена по ту сторону отъ оси ординатъ, куда абсциссы считаются положительными, когда $p > 0$, и по другую сторону, когда $p < 0$. Замѣчая же, что положительное направленіе оси абсциссъ можетъ быть выбираемо по произволу, мы можемъ ограничиться только первымъ случаемъ, т. е. предполагать, что въ уравненіи (1) величина p положительная.

309. Изъ уравненія (1) видно прежде всего, что для всякой точки параболы ордината есть средняя пропорціональная между абсциссою и постоянною длиною $2p$. Это указываетъ на слѣдующее весьма простое построеніе точекъ параболы въ какомъ угодно числѣ и сколь угодно близкихъ между собою, построеніе, которымъ и обнаруживается съ

достаточною точностью форма этой кривой, состоящей, какъ извѣстно (см. стр. 133), изъ одной сплошной вѣтви, простирающейся въ безконечность.

Отложивши отъ начала координатъ въ отрицательномъ направленіи оси абсциссъ длину OL (фиг. 73), равную $2p$, описываемъ окружность, проходящую черезъ точку L и имѣющую центръ на оси абсциссъ. Если затѣмъ чрезъ точки пересѣченія этой окружности съ осями координатъ проведемъ прямыя, имъ параллельныя, то точки встрѣчи этихъ прямыхъ M и N будутъ точками параболы.



Фиг. 73.

Такимъ же образомъ, помощію другой окружности найдутся точки M' и N', принадлежащія параболѣ. Понятно при этомъ, что, при достаточно малой разности радіусовъ окружностей, разстояніе между точками M и M' можетъ быть сколь угодно малымъ.

310. Уравненіе (1), по прибавленіи къ обѣимъ его частямъ выраженія $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$, можетъ быть представлено въ видѣ

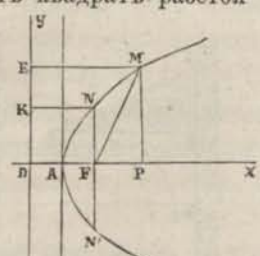
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

и въ такомъ случаѣ первая его часть представляетъ квадратъ разстоянія какой-нибудь точки M параболы (фиг. 74) отъ точки F, которой координаты суть

$$x=\frac{p}{2} \quad \text{и} \quad y=0,$$

а вторая часть есть квадратъ разстоянія той же точки M отъ прямой DE, уравненіе которой есть

$$x+\frac{p}{2}=0.$$



Фиг. 74.

Мы заключаемъ отсюда, что разстоянія каждой точки параболы отъ точки F и отъ прямой DE равны между собой. Точка F и прямая DE, относительно которыхъ парабола обладаетъ этимъ свойствомъ, называются *фокусомъ* и *директрисою* этой кривой. Можно сказать, слѣдовательно, что парабола есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ ея фокуса и директрисы.

Мы видѣли, что отношеніе разстояній каждой точки эллипса отъ его фокуса и соотвѣтствующей директрисы есть постоянная величина, называемая эксцентриситетомъ, и что то же свойство принадлежитъ гиперболѣ съ тѣмъ лишь различіемъ, что для эллипса эксцентриситетъ менѣе единицы, а для гиперболы болѣе единицы (см. стр. 177 и 205). Теперь мы видимъ, что и парабола обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, при чемъ для нея это отношенiе равняется единицѣ.

Если чрезъ фокусъ F проведемъ прямую, перпендикулярную къ оси параболы, до пересѣченiя съ кривою въ точкѣ N и изъ N опустимъ перпендикуляръ NK на директрису, то, на основанiи сейчасъ сказаннаго, должно быть

$$FN = KN = DF = DA + AF,$$

но, какъ мы видѣли,

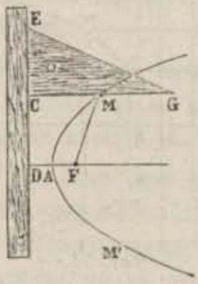
$$DA = AF = \frac{p}{2};$$

слѣдовательно,

$$FN = p.$$

Параметръ параболы есть, такимъ образомъ, длина перпендикуляра къ оси, возставленнаго въ фокусѣ до пересѣченiя съ кривою или, что все то же, половина хорды, проходящей черезъ фокусъ и перпендикулярной къ оси. То же самое геометрическое значенiе имѣетъ параметръ эллипса и гиперболы (см. стр. 178 и 205).

311. На свойствѣ параболы по отношенiю къ ея фокусу и директрисѣ основывается слѣдующiй способъ черченiя этой кривой непрерывнымъ движенiемъ. Взявъ фокусъ F и директрису DE (фиг. 75), помѣщаемъ прямоугольный треугольникъ, употребляемый обыкновенно при черченiи, такъ, чтобы одинъ изъ его катетовъ CE совпадалъ съ директрисою. Если затѣмъ гибкая и нерастяжимая нить, длина которой равняется другому катету CG, будетъ укрѣплена однимъ концомъ въ вершинѣ G треугольника, а другимъ въ фокусѣ F, то, натянувши эту нить чертящимъ острiемъ такъ, чтобы оно прилегало къ катету CG, и заставляя треугольникъ скользить по линейкѣ, прилегающей къ директрисѣ, будемъ имѣть, что острiе, какъ остающееся при всякомъ его положенiи на одинаковыхъ разстоянiяхъ отъ фокуса и директрисы, начертитъ дугу параболы.



Фиг. 75.

312. Если за оси координатъ примемъ ось параболы и перпендикуляръ къ ней въ фокусѣ, то уравненiе этой кривой получится изъ уравненiя (1), полагая

$$x = x' + \frac{p}{2} \quad \text{и} \quad y = y'.$$

Слѣдовательно, оно будетъ имѣть видъ

$$y'^2 = 2px' + p^2 .$$

Полагая же здѣсь

$$x' = -\varrho\cos\varphi \qquad \text{и} \qquad y' = \varrho\sin\varphi ,$$

получимъ уравненіе параболы въ полярныхъ координатахъ относительно такой системы координатъ, полюсъ которой находится въ фокусѣ, а полярная ось направлена изъ фокуса къ вершинѣ. Это уравненіе будетъ

$$\varrho^2\sin^2\varphi + 2p\varrho\cos\varphi = p^2$$

или

$$\varrho^2 = (p - \varrho\cos\varphi)^2 ,$$

откуда

$$\varrho = \frac{p}{1+\cos\varphi} .$$

Оно представляетъ частный видъ уравненія

$$\varrho = \frac{p}{1+e\cos\varphi} ,$$

выражающаго, какъ мы видѣли, какъ эллипсъ, такъ и гиперболу (см. стр. 178 и 206).

Такимъ образомъ видимъ, что это послѣднее уравненіе есть общее для всѣхъ видовъ кривыхъ второго порядка и выражаетъ эллипсъ, когда въ немъ $e < 1$, гиперболу, когда $e > 1$, и параболу, когда $e = 1$.

313. Отношеніе параболы къ центральнымъ кривымъ усматривается всего лучше, если составимъ уравненія этихъ кривыхъ относительно такихъ осей координатъ, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ осью, а другая есть касательная въ вершинѣ.

Если эллипсъ EOE' (фиг. 76) относительно осей координатъ $O'X$ и $O'Y'$, совпадающихъ съ его осями, выражается уравненіемъ

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 ,$$

то уравненіе его по отношенію къ осямъ OX и OY получится, полагая

$$x' = x - a \qquad \text{и} \qquad y' = y .$$

Фиг. 76.

Это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

или, по сокращеніи и умноженіи обѣихъ частей на b^2,

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Подобнымъ же образомъ, полагая, что уравненіе гиперболы HOH', отнесенной къ ея осямъ $O''X$ и $O''Y''$, есть

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

получимъ уравненіе той же кривой относительно системы координатъ XOY, полагая

$$x'' = x + a \qquad \text{и} \qquad y'' = y.$$

Это уравненіе будетъ, слѣдовательно,

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

или, по преобразованіи,

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Замѣчая, что какъ для эллипса, такъ и для гиперболы отношеніе $\frac{b^2}{a}$ равняется параметру p (см. стр. 178 и 205), мы можемъ уравненія (2) и (3) представить въ видѣ

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \qquad \text{и} \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Эти уравненія различаются между собою и съ уравненіемъ параболы POP', которое есть

$$y^2 = 2px,$$

лишь послѣднимъ членомъ вторыхъ частей, содержащимъ x^2. Членъ этотъ отрицательный для эллипса, положительный для гиперболы и равенъ нулю для параболы.

Можно, слѣдовательно, сказать, что для эллипса площадь квадрата, построеннаго на ординатѣ какой-нибудь точки, менѣе площади прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ этой точки, и удвоенномъ параметрѣ. Для гиперболы первая изъ этихъ площадей болѣе второй, а для параболы обѣ площади равны между собою [1]).

[1]) У древнихъ геометровъ это свойство составляетъ основаніе всего ученія о линіяхъ второго порядка.

Если положимъ, что полуоси a и b эллипса увеличиваются до безконечности, но такъ, что отношеніе $\frac{b^2}{a}$, т. е. параметръ, сохраняетъ конечную величину, то въ предѣлѣ, при $a = \infty$, уравненіе эллипса, представляемое въ видѣ (4), обращается въ уравненіе параболы. То же самое можетъ быть сказано и о гиперболѣ.

Мы заключаемъ, такимъ образомъ, что парабола есть предѣлъ, къ которому стремятся эллипсъ и гипербола при безконечномъ возрастаніи ихъ осей.

§ 2. Касательная и нормаль.

314. Если парабола выражается уравненіемъ

$$y^2 = 2px$$

и (x_1, y_1), (x_2, y_2) суть двѣ лежащія на ней точки, то уравненіе

$$(y - y_1)(y - y_2) = y^2 - 2px,$$

или

$$(y_1 + y_2)y - y_1 y_2 = 2px,$$

будучи первой степени, выражаетъ прямую, встрѣчающую параболу въ этихъ двухъ точкахъ.

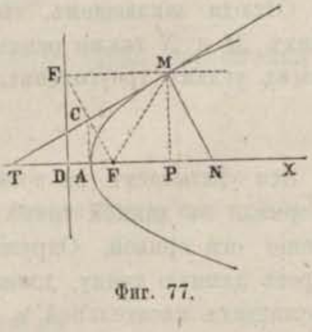
Въ предположеніи, что данныя точки совпадаютъ, т. е. что $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, эта прямая обращается въ касательную. Такимъ образомъ, касательная къ параболѣ выражается уравненіемъ

$$2y_1 y = y_1^2 + 2px.$$

Замѣчая, что $y_1^2 = 2px_1$, мы можемъ дать ему видъ

$$yy_1 = p(x + x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Здѣсь x_1, y_1 суть координаты точки прикосновенія M (фиг. 77), а x, y координаты любой точки на касательной.



Фиг. 77.

Нормаль, какъ прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія M и перпендикулярная къ касательной, выразится, слѣдовательно, уравненіемъ

$$y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Если положимъ въ этомъ уравненіи $y = 0$, то получимъ

$$x = x_1 + p.$$

Это есть абсцисса AN точки N въ которой нормаль пересѣкаетъ ось параболы.

Замѣчая, что субнормаль точки M есть отрѣзокъ PN, будемъ имѣть

$$PN = AN - AP = (x_1 + p) - x_1 = p.$$

Слѣдовательно, *субнормаль параболы есть постоянная величина, равная параметру этой кривой.*

315. Полагая въ уравненіи (1) касательной $y = 0$, получимъ

$$x + x_1 = 0,$$

откуда

$$x = -x_1.$$

Это есть абсцисса точки T, въ которой касательная пересѣкается съ осью. Отсюда заключаемъ, что

$$TA = AP$$

и, слѣдовательно,

$$TP = 2x_1.$$

Такимъ образомъ, видимъ, что *подкасательная всякой точки параболы дѣлится вершиною кривой пополамъ.*

Такъ какъ фокусъ и директриса параболы находятся на одинаковомъ разстояніи отъ вершины, то

$$DA = AF,$$

и потому, на основаніи сейчасъ сказаннаго, будемъ имѣть

$$TF = DP = F_1M = FM.$$

Слѣдовательно, треугольникъ TFM равнобедренный и потому углы TMF и MTF равны.

Касательная къ параболѣ составляетъ равные углы съ осью кривой и съ радіусомъ векторомъ точки прикосновенія.

Отсюда заключаемъ, что въ треугольникѣ MFN углы при вершинахъ M и N также равны, какъ дополнительные до прямого къ равнымъ угламъ треугольника TFM. Слѣдовательно,

$$FM = FN.$$

Это указываетъ на возможность простого построенія касательной и нормали въ данной точкѣ параболы, когда извѣстны фокусъ и направленіе оси кривой. Окружность, описанная изъ фокуса, какъ центра, чрезъ данную точку, должна пересѣчь ось въ двухъ точкахъ, принадлежащихъ касательной и нормали.

316. Если въ уравненіи (1) x_1 и y_1 суть координаты какой-нибудь точки плоскости, то выражаемая имъ прямая есть *поляра* этой точки

(см. стр. 122). Такъ какъ при $x_1 = \frac{p}{2}$ и $y_1 = 0$ это уравненіе обращается въ

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

и выражаетъ директрису (см. стр. 225), то убѣждаемся, что для параболы, также какъ и для центральныхъ кривыхъ, директриса есть поляра фокуса.

Называя черезъ m угловой коэффиціентъ касательной, будемъ имѣть изъ уравненія (1)

$$m = \frac{p}{y_1},$$

откуда

$$m^2 y_1{}^2 = p^2,$$

или

$$2m^2 p x_1 = p^2.$$

Слѣдовательно,

$$x_1 = \frac{p}{2m^2} = \frac{y_1}{2m}$$

и потому уравненію касательной (1) можно дать видъ

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Такъ какъ при всякомъ дѣйствительномъ значеніи m это уравненіе представляетъ опредѣленную и единственную прямую, то заключаемъ, что во всякомъ данномъ направленіи къ параболѣ можетъ быть проведена касательная и притомъ только одна.

Давая угловому коэффиціенту m два значенія m_1 и m_2, получимъ уравненія двухъ касательныхъ

$$y = m_1 x + \frac{p}{2m_1} \quad \text{и} \quad y = m_2 x + \frac{p}{2m_2}$$

и, рѣшая ихъ совмѣстно, найдемъ для абсциссы точки пересѣченія выраженіе

$$x = \frac{p}{2m_1 m_2}.$$

Если разсматриваемыя касательныя перпендикулярны между собою, то должно быть

$$m_1 m_2 = -1,$$

вслѣдствіе чего послѣднее выраженіе обратится въ

$$x = -\frac{p}{2},$$

а это показываетъ, что перпендикулярныя между собою касательныя пересѣкаются на директрисѣ.

Можно, слѣдовательно, сказать, что *директриса параболы есть геометрическое мѣсто вершины прямого угла, стороны котораго касаются параболы.*

317. Если точка F_1 (фиг. 77) есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь точки M параболы на директрису, то, по свойству параболы, треугольникъ FMF_1 равнобедренный. Замѣчая при этомъ, что, по доказанному выше свойству касательной,

$$\angle FMT = \angle MTF = \angle TMF_1,$$

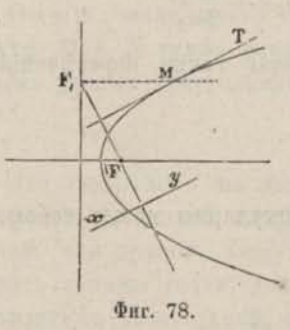
убѣждаемся, что прямая FF_1 перпендикулярна къ касательной MT и, слѣдовательно, точка F_1 есть симметричная съ фокусомъ относительно этой касательной.

И такъ, можно сказать, что *директриса параболы есть геометрическое мѣсто точекъ, симметричныхъ съ фокусомъ относительно касательныхъ.*

Такъ какъ касательная въ вершинѣ A параболы проходитъ черезъ средину отрѣзка DF и параллельна директрисѣ, то она должна проходить и черезъ средину C отрѣзка FF_1, т. е. основаніе перпепендикуляра изъ фокуса на касательную. Это показываетъ, что *основанія перпендикуляровъ изъ фокуса на касательныя къ параболѣ лежатъ на касательной въ вершинѣ этой кривой.*

Оба послѣднія заключенія можно также вывести аналитически, составивъ уравненіе перпендикуляра изъ фокуса на касательную и опредѣливши координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ касательною и директрисою.

318. На послѣднихъ свойствахъ параболы основывается построеніе касательныхъ къ этой кривой, проходящихъ черезъ данную точку или имѣющихъ данное направленіе.



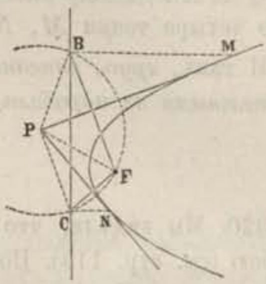
Фиг. 78.

Положимъ сперва, что требуется построить касательную, параллельную данной прямой XY (фиг. 78). Проведя черезъ фокусъ F прямую, перпендикулярную къ данной, до пересѣченія съ директрисою въ точкѣ F_1, будемъ имѣть, что F и F_1 суть точки, симметричныя относительно искомой касательной. Послѣдняя опредѣлится поэтому, какъ перпендикуляръ, возставленный изъ средины отрѣзка FF_1. Что касается точки прикосновенія

M, то она получится, какъ точка пересѣченія построенной касательной съ прямою, проходящею черезъ F_1 параллельно оси параболы.

Положимъ теперь, что требуется построить касательныя къ параболѣ, проходящія черезъ данную точку P (фиг. 79).

Точки, симметричныя съ фокусомъ F относительно искомыхъ касательныхъ, должны находиться на директрисѣ и на такомъ же разстояніи отъ точки P, какъ и фокусъ. Слѣдовательно, это будутъ двѣ точки B и C, въ которыхъ директриса пересѣкается съ окружностью, описанною изъ P, какъ центра, радіусомъ PF. Затѣмъ сами касательныя получаются, какъ перпендикуляры изъ P на прямыя BF и CF, а ихъ точки прикосновенія M и N опредѣлятся пересѣченіемъ ихъ съ перпендикулярами, возставленными въ B и C къ директрисѣ,



Фиг. 79.

Такъ какъ углы PBC и PCB, какъ прилежащіе основанію равнобедреннаго треугольника, равны между собою, то должно быть также

$$\angle PBM = \angle PCN.$$

Но, вслѣдствіе симметричности точекъ B и C съ фокусомъ относительно касательныхъ PM и PN, эти послѣдніе углы равняются угламъ, составляемымъ прямою PF съ прямыми, соединяющими фокусъ съ точками прикосновенія. Слѣдовательно, и эти углы равны между собою.

Это приводитъ насъ къ заключенію, что *прямая, соединяющая фокусъ съ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ къ параболѣ, дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый радіусами векторами точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ.*

319. Уголъ $A'PB'$, образуемый двумя касательными къ параболѣ (фиг. 80), очевидно, равняется разности угловъ $PA'X$ и $PB'X$, составляемыхъ этими касательными съ осью параболы. Съ другой стороны уголъ AFB, образуемый радіусами векторами точекъ прикосновенія A и B этихъ касательныхъ, равняется разности угловъ AFX и BFX, составляемыхъ этими радіусами векторами съ осью. Но AFX, какъ внѣшній уголъ равнобедреннаго треугольника AFA', вдвое болѣе угла $PA'X$ и по той же причинѣ уголъ BFX вдвое болѣе угла $PB'X$. Отсюда заключаемъ, что *уголъ между двумя касательными къ параболѣ равняется половинѣ угла, образуемаго радіусами векторами точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ.*

Фиг. 80.

Если къ параболѣ проведены три касательныя, точки прикосновенія которыхъ суть A, B, C и которыя, пересѣкаясь между собою, образуютъ треугольникъ MNP, то, на основаніи предыдущаго, уголъ PFB равняется половинѣ угла AFB, а уголъ BFM — половинѣ угла BFC. Слѣдовательно, уголъ PFM, составляя половину угла AFC, равняется углу $A'NC'$ между касательными въ точкахъ A и C. Это доказываетъ, что четыре точки M, N, P и F лежатъ на одномъ кругѣ.

И такъ, *кругъ, описанный около треугольника, образуемаго тремя касательными къ параболѣ, проходитъ черезъ фокусъ этой кривой.*

§ 4. Діаметры.

320. Мы видѣли, что всѣ діаметры параболы параллельны между собою (см. стр. 113). Поэтому для параболы, выражаемой относительно прямоугольной системы координатъ уравненіемъ

$$y^2 = 2px, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

уравненіе всякаго діаметра будетъ

$$y = h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Положимъ, что m есть угловой коэффиціентъ хордъ, черезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ. Въ такомъ случаѣ уравненіе какой-нибудь изъ этихъ хордъ будетъ

$$y = mx + k.$$

Исключивъ x изъ этого уравненія и уравненія параболы, получимъ для опредѣленія ординатъ концовъ хорды уравненіе

$$y^2 = 2p\left(\frac{y-k}{m}\right),$$

или

$$y^2 - \frac{2p}{m}y + \frac{2pk}{m} = 0,$$

откуда видимъ, что ордината средины хорды, равная полусуммѣ ординатъ концовъ ея, есть $\frac{p}{m}$. Слѣдовательно,

$$\frac{p}{m} = h \quad \text{или} \quad hm = p, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

соотношеніе, опредѣляющее діаметръ, соотвѣтствующій данному направленію хордъ, или обратно.

Изъ уравненія параболы (1) находимъ, что координаты точки ея пересѣченія съ діаметромъ (2) суть

$$x=\frac{h^2}{2p} \quad \text{и} \quad y=h.$$

Слѣдовательно, уравненіе касательной въ этой точкѣ будетъ

$$hy=p\left(x+\frac{h^2}{2p}\right),$$

или

$$y=\frac{p}{h}x+\frac{h}{2}.$$

Отсюда видимъ, что касательная въ концѣ діаметра параллельна хордамъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ этотъ діаметръ. Это свойство было уже доказано (см. стр. 119) и имъ можно было бы воспользоваться для вывода соотношенія (3).

321. Уравненіе параболы относительно косоугольной системы координатъ, состоящей изъ какого-нибудь діаметра и касательной въ концѣ его, имѣетъ, какъ мы видѣли, также видъ

$$y^2=2p'x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

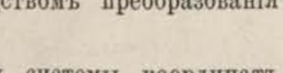
Въ этомъ можно также убѣдиться и, вмѣстѣ съ тѣмъ, обнаружить геометрическое значеніе постояннаго p' посредствомъ преобразованія координатъ.

Положимъ, что относительно прямоугольной системы координатъ XOY (фиг. 81) парабола выражается уравненіемъ

$$y^2=2px.$$

Примемъ за новую систему координатъ діаметръ $O'X'$ и касательную $O'Y'$, пересѣкающую ось параболы въ точкѣ T, и пусть

$$a=OQ \quad \text{и} \quad b=O'Q$$



Фиг. 81.

будутъ координаты новаго начала относительно прежней системы, а ω уголъ между новыми осями координатъ.

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть для точки M

$$x=OP, \quad y=MP, \quad x'=O'P', \quad y'=MP',$$

и такъ какъ

$$OP=OQ+O'P'+MP'\cos\omega$$

и

$$MP=O'Q+MP'\sin\omega,$$

то формулы преобразованія координатъ будутъ

$$x = a + x' + y'\cos\omega,$$

$$y = b + y'\sin\omega.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе параболы относительно прежней системы, получимъ

$$(b + y'\sin\omega)^2 = 2p(a + x' + y'\cos\omega)$$

или

$$y'^2\sin^2\omega + 2y'(b\sin\omega - p\cos\omega) + (b^2 - 2pa) = 2px'.$$

Вслѣдствіе того, что точка O' принадлежитъ параболѣ, должно быть

$$b^2 = 2ap.$$

Кромѣ того, построивши нормаль $O'N$ къ параболѣ въ этой точкѣ, будемъ имѣть изъ треугольника $O'QN$, что

$$QN = O'Q\,tg\omega,$$

или

$$p\cos\omega = b\sin\omega.$$

Послѣднее уравненіе обращается поэтому въ

$$y'^2\sin^2\omega = 2px',$$

или

$$y'^2 = 2p'x',$$

при чемъ

$$p' = \frac{p}{\sin^2\omega}.$$

Такъ какъ, далѣе, изъ треугольниковъ $O'QN$ и $TO'N$ имѣемъ

$$QN = O'N\sin\omega$$

и

$$O'N = TN\sin\omega,$$

откуда, по перемноженіи,

$$QN = TN\sin^2\omega,$$

или

$$p = (2a + p)\sin^2\omega,$$

то заключаемъ, что

$$p' = \frac{p}{\sin^2\omega} = 2\left(a + \frac{p}{2}\right).$$

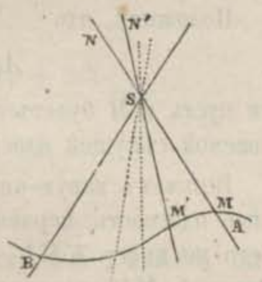
Это показываетъ, что въ уравненіи параболы (4) относительно косоугольной системы координатъ постоянное p' означаетъ удвоенное разстояніе начала координатъ отъ фокуса кривой.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

КОНИЧЕСКІЯ СѢЧЕНІЯ И ИХЪ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНІЕ НА ПЛОСКОСТИ.

§ 1. Линіи второго порядка, какъ сѣченія круглаго конуса плоскостями.

322. Если прямая линія перемѣщается въ пространствѣ такъ, что при всякомъ своемъ положеніи проходитъ черезъ данную неподвижную точку S (фиг. 82) и черезъ какую-нибудь точку M данной кривой AB, то поверхность, описываемая этою прямою, называется *коническою* или просто *конусомъ*. Точка S называется *вершиною* конуса, а кривая AB его *управляющей*. Прямая MN, которою описывается конусъ во всякомъ ея положеніи, носитъ названіе *образующей*.



Фиг. 82.

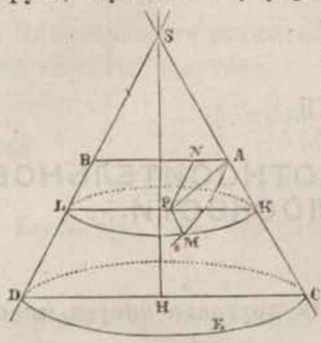
Если управляющая есть кругъ, то конусъ называется *круглымъ* и притомъ прямымъ или наклоннымъ, смотря по тому, будетъ ли прямая, соединяющая вершину съ центромъ управляющаго круга, перпендикулярна къ его плоскости или наклонна къ ней. Очевидно, что такой конусъ состоитъ изъ двухъ одинаковыхъ частей или *полостей*, изъ которыхъ одна описывается тою частью образующей SM, которая направляется изъ вершины къ точкамъ управляющаго круга, а другая ея продолженіемъ SN въ противоположную сторону.

Прямой круглый конусъ или, точнѣе говоря, часть его, заключающаяся между вершиною и плоскостью управляющаго круга, разсматривается обыкновенно въ начальной Геометріи, гдѣ эту плоскость называютъ основаніемъ конуса, а прямую, соединяющую вершину съ центромъ основанія, осью конуса.

323. Выше было замѣчено (см. стр. 102), что линіи второго порядка опредѣлялись древними геометрами, какъ сѣченія круглаго конуса различными плоскостями, вслѣдствіе чего и получили названіе *коническихъ*

сѣченій. Постараемся теперь убѣдиться, что это воззрѣніе дѣйствительно равнозначуще съ опредѣленіемъ этихъ кривыхъ посредствомъ уравненій.

Пусть S будетъ вершина прямого круглаго конуса (фиг. 83) и CED кругъ, служащій ему управляющей или основаніемъ. Прямая SH есть ось конуса, которую мы будемъ предполагать лежащей въ плоскости чертежа. Прямыя SC и SD суть двѣ образующія, лежащія въ той же плоскости.



Фиг. 83.

Всякую сѣкущую плоскость мы можемъ предполагать перпендикулярною къ плоскости CSD и положеніе ея относительно конуса опредѣлится, очевидно, разстояніемъ AS отъ вершины до точки A, въ которой сѣкущая плоскость встрѣчаетъ образующую SC, и угломъ SAP, составляемымъ съ этой образующей прямою AP, по которой сѣкущая плоскость пересѣкается съ плоскостью чертежа CSD.

Положимъ, что

$$AS = d \quad \text{и} \quad \angle SAP = \varphi,$$

и пусть AM будетъ линія, по которой конусъ пересѣкается разсматриваемой сѣкущей плоскостью.

Возьмемъ какую-нибудь точку M на этой линіи и проведемъ черезъ нее плоскость, перпендикулярную къ оси SH конуса и пересѣкающую его по кругу KML, а плоскость разсматриваемаго сѣченія AM по прямой MP, перпендикулярной къ KL. Въ такомъ случаѣ по свойству круга будемъ имѣть

$$\overline{MP}^2 = PK . PL \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Если положимъ, далѣе, что

$$AP = x \quad \text{и} \quad MP = y,$$

и обозначимъ черезъ α уголъ CSH, составляемый каждой образующей конуса съ его осью, то изъ треугольника APK будемъ имѣть

$$\frac{PK}{AP} = \frac{\sin KAP}{\sin AKP} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha},$$

откуда

$$PK = x\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Проведя затѣмъ прямую AB параллельно KL и прямую PN параллельно образующей SD, будемъ имѣть

$$AB = 2d\sin\alpha$$

и изъ треугольника APN

$$\frac{AN}{AP}=\frac{\sin APN}{\sin ANP}=\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos\alpha},$$

откуда

$$AN=x\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Слѣдовательно,

$$PL=AB-AN=2d\sin\alpha-x\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos\alpha}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Подставивъ выраженія (2) и (3) въ равенство (1), получимъ

$$y^2=\frac{2d\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha}x-\frac{\sin\varphi\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha}x^2.\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Это есть уравненіе линіи пересѣченія по отношенію къ прямоугольной системѣ координатъ, для которой ось абсциссъ есть прямая AP, а ось ординатъ перпендикуляръ къ ней въ точкѣ A, лежащій въ сѣкущей плоскости.

324. Полагая

$$\frac{d\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha}=p \qquad \text{и} \qquad -\frac{\sin\varphi\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha}=q,$$

дадимъ послѣднему уравненію видъ

$$y^2=2px+qx^2\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Въ этомъ видѣ, какъ показано выше (см. стр. 228), можетъ быть представлено уравненіе всякой кривой второго порядка, а именно: эллипса, когда $q<0$, гиперболы, когда $q>0$, и параболы, когда $q=0$.

Такъ какъ уголъ φ, опредѣляющій направленіе сѣкущей плоскости, долженъ считаться не превышающимъ 180^0, то $\sin\varphi>0$. Поэтому изъ предыдущаго выраженія для q усматриваемъ, что линія пересѣченія конуса съ плоскостью есть эллипсъ, когда $\varphi<\pi-2\alpha$, гипербола, когда $\varphi>\pi-2\alpha$, и парабола, когда $\varphi=\pi-2\alpha$.

Такимъ образомъ, видимъ, что одинъ и тотъ же круглый конусъ можетъ пересѣкаться плоскостями по всѣмъ тремъ линіямъ второго порядка. При этомъ эллипсъ получается тогда, когда сѣкущая плоскость пересѣкаетъ только одну полость конуса и когда, слѣдовательно, между образующими нѣтъ ни одной параллельной этой плоскости. Если же сѣкущая плоскость пересѣкаетъ обѣ полости конуса, такъ что въ числѣ образующихъ будутъ двѣ, съ нею параллельныя, то линія пересѣченія будетъ гипербола. Наконецъ, въ томъ случаѣ, когда сѣкущая плоскость параллельна только одной образующей, эта линія будетъ парабола.

Изъ уравненія (4) видно также, что если $d=0$, т. е. если сѣкущая плоскость проходитъ черезъ вершину конуса, то она имѣетъ съ нимъ только одну общую точку, когда $\varphi < \pi - 2\alpha$. Въ случаѣ же, когда $\varphi > \pi - 2\alpha$, она пересѣкаетъ его по двумъ различнымъ прямымъ (образующимъ), а когда $\varphi = \pi - 2\alpha$, она касается конуса по образующей.

325. Припомнимъ, что когда уравненіе (5) выражаетъ эллипсъ, то

$$q = -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Эксцентриситетъ эллипса, получаемаго при пересѣченіи конуса, опредѣлится поэтому слѣдующимъ образомъ:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 + q = \frac{\cos^2\alpha - \sin\varphi \sin(\varphi + 2\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Но легко убѣдиться, что

$$\sin\varphi \sin(\varphi + 2\alpha) = \sin^2(\varphi + \alpha) - \sin^2\alpha.$$

Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$e^2 = \frac{\cos^2(\varphi + \alpha)}{\cos^2\alpha},$$

откуда

$$\cos^2(\varphi + \alpha) = e^2\cos^2\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Такое же точно соотношеніе имѣетъ мѣсто и тогда, когда линія пересѣченія есть гипербола, ибо въ этомъ случаѣ

$$q = +\frac{p}{a} = +\frac{b^2}{a^2}$$

и эксцентриситетъ гиперболы опредѣлится по формулѣ

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + q = \frac{\cos^2\alpha - \sin\varphi \sin(\varphi + 2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

или

$$e^2 = \frac{\cos^2(\varphi + \alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Соотношеніе (6) при данныхъ e и α всегда можетъ быть удовлетворено, если кривая есть эллипсъ и, слѣдовательно, $e < 1$. Для этого углу φ нужно дать нѣкоторое значеніе, заключающееся между 0 и $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Если же кривая есть гипербола, то это соотношеніе можетъ удовлетворяться только тогда, когда $e^2\cos^2\alpha \leq 1$.

Это показываетъ, что, имѣя данный конусъ и измѣняя направленіе сѣкущей плоскости, мы можемъ получить въ сѣченіи эллипсы какого угодно эксцентриситета.

Что же касается гиперболъ, получаемыхъ въ сѣченіи того же конуса, то эксцентриситетъ ихъ не можетъ быть болѣе, чѣмъ $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Такъ какъ при $e^2\cos^2\alpha = 1$ изъ соотношенія (6) находимъ

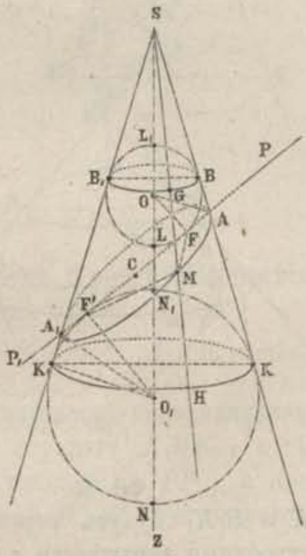
$$\varphi = \pi - \alpha,$$

то заключаемъ, что гиперболы наибольшаго эксцентриситета получаются при пересѣченіи конуса плоскостями, параллельными его оси.

326. Тождественность линій второго порядка съ сѣченіями прямого круглаго конуса можетъ быть еще доказана геометрически слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что конусъ описывается вращеніемъ угла KSZ около его стороны SZ (фиг. 84) и сѣкущая плоскость пересѣкаетъ только одну его полость. Пусть PP_1 будетъ прямая, по которой эта плоскость пересѣкается съ плоскостью чертежа, а AMA_1 кривая, по которой она пересѣкаетъ конусъ. Построимъ двѣ окружности, вписанныя въ уголъ KSK_1 и касающіяся прямой PP_1 въ двухъ точкахъ F и F', находящихся между A и A_1.

Если вообразимъ, что плоскость чертежа будетъ вращаться около прямой SZ, то прямыя SK и SK_1 будутъ описывать разсматриваемый конусъ. Построенныя же окружности опишутъ при этомъ двѣ сферы, касающіяся этого конуса по кругамъ BGB_1 и KHK_1. Точки F и F' будутъ точками прикосновенія этихъ сферъ съ разсматриваемою сѣкущею плоскостью.



Фиг. 84.

Возьмемъ теперь на линіи пересѣченія разсматриваемой плоскости съ конусомъ произвольную точку M и проведемъ черезъ нее образующую SM, пересѣкающуюся съ кругами BGB_1 и KHK_1 въ точкахъ G и H. Вслѣдствіе перпендикулярности плоскостей этихъ круговъ къ оси конуса отрѣзокъ GH имѣетъ одну и ту же величину при всякомъ положеніи образующей.

Такъ какъ точки G и F суть точки прикосновенія двухъ касательныхъ изъ M къ кругу, по которому сфера BLB_1 пересѣкается плоскостью GMF, то заключаемъ, что

$$MF = MG.$$

Вслѣдствіе такого же отношенія точекъ H и F' къ сферѣ KNK_1 должно быть

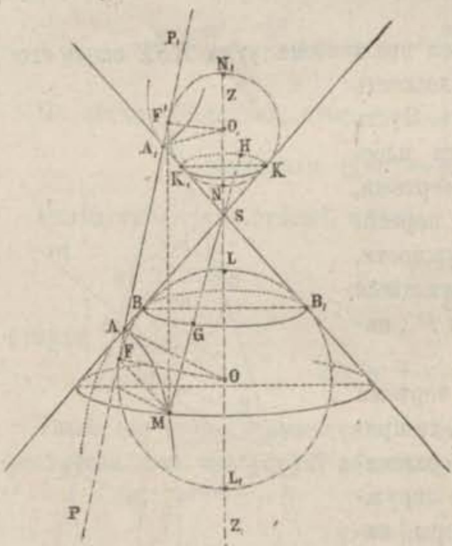
$$MF' = MH.$$

Слѣдовательно,

$$MF + MF' = GH = BK.$$

И такъ, при всякомъ положеніи точки M на линіи AMA_1, сумма ея разстояній отъ точекъ F и F' имѣетъ одну и ту же величину. Это показываетъ (см. стр. 176), что линія эта есть эллипсъ, для котораго точки F и F' суть фокусы.

327. Положимъ теперь, что сѣкущая плоскость, перпендикулярная къ плоскости чертежа и пересѣкающаяся съ ней по прямой PP_1, встрѣчаетъ обѣ полости конуса (фиг. 85). Пусть, какъ и прежде, прямая PP_1 пересѣкаетъ образующія BK и B_1K_1 въ точкахъ A и A_1.



Фиг. 85.

Построимъ двѣ окружности, вписанныя въ противоположные углы, составляемые этими образующими, и касающіяся прямой PP_1 въ точкахъ F и F', лежащихъ внѣ отрѣзка AA_1.

Если вообразимъ, что плоскость чертежа будетъ вращаться около прямой ZZ_1, дѣлящей уголъ BSB_1 пополамъ, то образующія BK и B_1K_1 будутъ перемѣщаться по разсматриваемому конусу, а построенныя окружности опишутъ двѣ сферы, соприкасающіяся съ конусомъ по кругамъ BGB_1 и KHK_1 и съ сѣкущей плоскостью въ точкахъ F и F'.

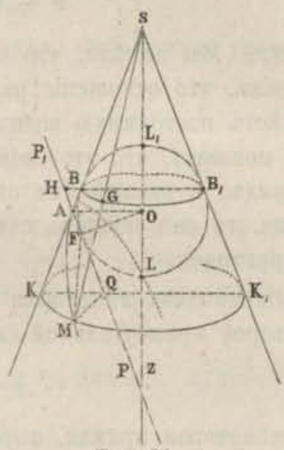
Взявъ на линіи пересѣченія этой плоскости съ конусомъ произвольную точку M и проведя черезъ нее образующую SM, пересѣкающуюся съ кругами BGB_1 и KHK_1 въ точкахъ G и H, будемъ имѣть, что отрѣзки MG и MF равны между собою, какъ касательныя изъ точки M къ кругу, по которому сфера BLB_1 пересѣкается плоскостью GMF. По такой же причинѣ должны быть равны между собою отрѣзки MH и MF'.

Слѣдовательно,

$$MF' - MF = MH - MG = GH,$$

и такъ какъ отрѣзокъ GH при всякомъ положеніи образующей MS имѣетъ одну и ту же длину, то убѣждаемся, что разность разстояній всякой точки линіи пересѣченія отъ точекъ F и F' имѣетъ постоянную величину, что и доказываетъ (см. стр. 203), что эта линія есть гипербола, имѣющая фокусами точки F и F'.

328. Разсмотримъ, наконецъ, случай, когда сѣкущая плоскость, будучи перпендикулярна къ плоскости чертежа, пересѣкаетъ ее по прямой PP_1, параллельной одной изъ образующихъ SK и SK_1, въ ней лежащихъ (фиг. 86). Построивши окружность, вписанную въ уголъ KSK_1 и касающуюся прямой PP_1 въ точкѣ F, вообразимъ, что плоскость чертежа вращается около бисектра SZ угла KSK_1. При этомъ образующія SK и SK_1 будутъ перемѣщаться по конусу, а окружность опишетъ сферу, соприкасающуюся съ конусомъ по кругу BGB_1 и съ сѣкущею плоскостью въ точкѣ F.



Фиг. 86.

Если возьмемъ на линіи пересѣченія сѣкущей плоскости съ конусомъ произвольную точку M и проведемъ черезъ нее образующую MS, пересѣкающую кругъ BGB_1 въ точкѣ G, то будемъ имѣть, по такой же причинѣ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, что

$$MF = MG.$$

Если, затѣмъ, проведемъ черезъ точку M плоскость, перпендикулярную къ оси SZ конуса и пересѣкающую его по кругу KMK_1, а сѣкущую плоскость по прямой MQ, перпендикулярной къ PP_1, и продолжимъ BB_1 до пересѣченія съ PP_1 въ точкѣ H, то будемъ имѣть

$$BK = MG$$

и, вслѣдствіе параллельности прямыхъ PP_1 и SK_1,

$$BK = HQ.$$

Слѣдовательно, при всякомъ положеніи точки M на линіи пересѣченія, должно быть

$$MF = HQ.$$

Отрѣзокъ HQ равняется, очевидно, разстоянію точки M отъ перпендикуляра, возставленнаго въ точкѣ H къ плоскости чертежа. Послѣднее равенство показываетъ, слѣдовательно, что каждая точка линіи пересѣченія находится на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ этого перпендикуляра и отъ точки F. Это означаетъ (см. стр. 225), что линія эта есть парабола и точка F ея фокусъ.

Такимъ образомъ, предыдущія геометрическія доказательства не только удостовѣряютъ, что сѣченія прямого круглаго конуса плоскостями суть разсмотрѣнныя выше линіи второго порядка, но и обнаруживаютъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что фокусы каждой изъ этихъ линій суть точки, въ которыхъ сѣкущая плоскость касается сферъ, вписанныхъ въ конусъ.

§ 2. Общая теорія фокусовъ.

329. Мы видѣли, что каждая линія второго порядка обладаетъ свойствомъ, что отношеніе разстояній ея точекъ отъ фокуса и директрисы имѣетъ постоянную величину, называемую эксцентриситетомъ. Не трудно показать, что это свойство принадлежитъ только линіямъ второго порядка и вполнѣ ихъ опредѣляетъ. Если же линія второго порядка дана, то оно служитъ самымъ общимъ опредѣленіемъ ея фокусовъ и директрисъ.

Пусть дана нѣкоторая точка, которой координаты относительно нѣкоторой прямоугольной системы суть

$$x = \alpha \qquad \text{и} \qquad y = \beta\,,$$

и нѣкоторая прямая, выражаемая относительно той же системы уравненіемъ

$$mx + ny + k = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Постараемся найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ этой точки и этой прямой находятся между собою въ данномъ постоянномъ отношеніи e.

Называя черезъ d и δ эти разстоянія, будемъ имѣть

$$d = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

и

$$\delta = \frac{mx + ny + k}{\sqrt{m^2 + n^2}}\,,$$

и такъ какъ, по услозію, $\dfrac{d}{\delta} = e$ или $d = e\delta$, то уравненіе искомаго геометрическаго мѣста будетъ

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{e(mx + ny + k)}{\sqrt{m^2 + n^2}}\,,$$

или

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = m'x + n'y + k'\,, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ для краткости положено

$$\frac{em}{\sqrt{m^2+n^2}}=m', \quad \frac{en}{\sqrt{m^2+n^2}}=n', \quad \frac{ek}{\sqrt{m^2+n^2}}=k' \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

По уничтоженіи радикала, послѣднее уравненіе принимаетъ видъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(m'x+n'y+k')^2=0 \; . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такъ какъ оно второй степени, то и заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть линія второго порядка.

Точка (α, β) есть фокусъ этой линіи и прямая, выражаемая уравненіемъ (1) или, что все то же, уравненіемъ

$$m'x+n'y+k'=0 ,$$

соотвѣтствующая этому фокусу директриса.

Равенство (2) показываетъ, между прочимъ, что фокусъ линіи второго порядка можно опредѣлять, какъ такую точку, разстояніе которой отъ точекъ этой линіи выражается раціонально черезъ ихъ координаты.

330. Уравненіе (4), по раскрытіи скобокъ и соединеніи подобныхъ членовъ, можетъ быть приведено къ виду

$$\begin{gathered}(1-m'^2)\,x^2-2m'n'xy+(1-n'^2)\,y^2- \\ -2(\alpha+m'k')\,x-2\,(\beta+n'k')\,y+(\alpha^2+\beta^2-k'^2)=0 .\end{gathered}$$

Если при этомъ мы имѣемъ кривую, выражаемую уравненіемъ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 ,$$

то величины α, β, m', n' и k' могутъ быть найдены такъ, чтобы оба уравненія имѣли одно и то же геометрическое значеніе, для чего, какъ извѣстно, должно быть

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-m'^2}{A}=\frac{-2m'n'}{B}=\frac{1-n'^2}{C}= \\ =\frac{-2(\alpha+m'k')}{D}=\frac{-2(\beta+n'k')}{E}=\frac{\alpha^2+\beta^2-k'^2}{F}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Здѣсь заключается пять условій, вполнѣ опредѣляющихъ эти пять величинъ.

Такимъ образомъ, по коэффиціентамъ даннаго уравненія кривой могутъ быть найдены аналитически ея фокусы и директрисы.

Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлится и эксцентриситетъ e, ибо изъ равенствъ (3) имѣемъ

$$m'^2 + n'^2 = e^2,$$

откуда

$$e = \sqrt{m'^2 + n'^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

331. Приложимъ сказанное къ опредѣленію фокусовъ и директрисъ кривыхъ второго порядка, выраженныхъ простѣйшими уравненіями.

Возьмемъ сперва эллипсъ, отнесенный къ его осямъ и выражаемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Въ этомъ случаѣ условія, выражаемыя равенствами (5), будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} m'n' = 0, \quad \alpha + m'k' = 0, \quad \beta + n'k' = 0 \\ a^2(1 - m'^2) = b^2(1 - n'^2) = k'^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Для того чтобы имѣло мѣсто первое изъ этихъ равенствъ, нужно положить $n' = 0$ или $m' = 0$. Сдѣлаемъ сперва первое предположеніе.

Въ такомъ случаѣ изъ второго и третьяго равенства находимъ

$$\alpha = -m'k' \qquad \text{и} \qquad \beta = 0,$$

вслѣдствіе чего послѣднія условія обращаются въ

$$a^2(1 - m'^2) = b^2 = k'^2 - m'^2 k'^2,$$

откуда

$$m' = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad \text{и} \qquad k' = \pm a$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha = -m'k' = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

При этомъ видимъ, что положительному значенію α соотвѣтствуютъ значенія m' и k', имѣющія разные знаки, а отрицательному, имѣющія одинаковые знаки.

Такимъ образомъ, въ предположеніи $n' = 0$ мы находимъ два фокуса эллипса, координаты которыхъ суть

$$\alpha = +\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = 0$$

и

$$\alpha = -\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = 0,$$

и двѣ соотвѣтствующія имъ директрисы, выражаемыя уравненіями

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x - a = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x + a = 0.$$

Это суть фокусы и директрисы, значеніе которыхъ для эллипса было изслѣдовано выше.

По формулѣ (6) находимъ также эксцентриситетъ эллипса

$$e = m' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\alpha}{a}.$$

332. Предположимъ теперь, что $m' = 0$. Въ такомъ случаѣ изъ равенствъ (7) получимъ

$$\alpha = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta = -n'k'$$

и при этомъ

$$a^2 = b^2(1 - n'^2) = k'^2 - n'^2 k'^2.$$

Слѣдовательно,

$$n' = \pm \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}, \qquad k' = \pm b$$

и

$$\beta = -n'k' = \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Такимъ образомъ, и въ этомъ предположеніи мы находимъ два фокуса, лежащіе на оси ординатъ, и двѣ директрисы, параллельныя оси абсциссъ; но такъ какъ полагается, что въ уравненіи эллипса $b < a$, то эти фокусы и директрисы суть мнимые.

И такъ, эллипсъ имѣетъ, собственно говоря, четыре фокуса: два дѣйствительные на большой оси и два мнимые на малой.

333. Возьмемъ теперь гиперболу, отнесенную къ ея осямъ.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ уравненіе кривой есть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то условія (5) обращаются въ

$$m'n' = 0, \quad \alpha + m'k' = 0, \quad \beta + n'k' = 0,$$
$$a^2(1 - m'^2) = -b^2(1 - n'^2) = k'^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Отсюда видно прежде всего, что необходимо сдѣлать два предположенія: или $n' = 0$, или $m' = 0$.

Въ первомъ изъ этихъ предположеній находимъ совершенно такъ же, какъ и для эллипса,

$$\beta = 0, \qquad m' = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$
$$k' = \pm a, \qquad \alpha = -m'k' = \pm \sqrt{a^2 + b^2},$$

при чемъ величины m' и k' должны быть взяты съ разными знаками, когда α дается значенiе положительное, и съ одинаковыми знаками въ противномъ случаѣ.

Такимъ образомъ, получаются для гиперболы два фокуса и двѣ директрисы, которые разсматривались нами выше.

Дѣлая предположенiе $m'=0$, получимъ

$$\alpha=0, \qquad n'=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

$$k'=\pm b\sqrt{-1}, \qquad \beta=\pm\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{-1},$$

что даетъ мнимые фокусы и директрисы.

И такъ, гипербола, точно также какъ и эллипсъ, имѣетъ четыре фокуса, изъ которыхъ два суть дѣйствительные, лежащiе на ея дѣйствительной оси и два мнимые, находящiеся на мнимой оси.

334. Чтобы найти подобнымъ же образомъ фокусы и директрисы параболы, возьмемъ ея простѣйшее уравненiе

$$y^2=2px$$

и будемъ предполагать, что оси координатъ прямоугольныя.

Въ такомъ случаѣ соотношенiя (5) даютъ

$$\left.\begin{array}{c} 1-m'^2=0,\ m'n'=0,\ \beta+n'k'=0,\ k'^2-\alpha^2-\beta^2=0 \\ p(1-n'^2)=\alpha+m'k'. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

Изъ двухъ первыхъ равенствъ находимъ

$$m'=\pm 1 \qquad \text{и} \qquad n'=0,$$

и такъ какъ знакъ одного изъ коэффицiентовъ въ уравненiи прямой произволенъ, то будемъ полагать, что $m'=+1$.

При этомъ изъ остальныхъ трехъ равенствъ найдемъ

$$\beta=0, \qquad \alpha=k'=\frac{p}{2}.$$

Такимъ образомъ, для параболы получается одинъ только фокусъ, опредѣляемый координатами

$$x=0 \qquad \text{и} \qquad y=\frac{p}{2},$$

и одна соотвѣтствующая ему директриса, которой уравненiе есть

$$x+\frac{p}{2}=0.$$

Они разсматривались нами выше.

Отыскивая величины α, β, m', n' и k', удовлетворяющія равенствамъ (8), мы не принимали во вниманіе возможности для этихъ величинъ безконечно большихъ значеній, но, очевидно, эта возможность существуетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли выше, что парабола есть предѣлъ эллипса, оси которой безпредѣльно возрастаютъ (см. стр. 229). Понятно, что въ этомъ предѣльномъ случаѣ, когда одинъ конецъ большой оси и всѣ точки малой оси дѣлаются безконечно удаленными, такими же должны сдѣлаться второй дѣйствительный фокусъ и оба мнимые фокуса.

335. Укажемъ еще на одно опредѣленіе фокусовъ.

Уравненіе

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(m'x+n'y+k')^2,$$

которымъ, какъ мы видѣли, можетъ быть выражена всякая линія второго порядка, имѣющая точку (α,β) фокусомъ, удовлетворяется, очевидно, тѣми значеніями x и y, которыя удовлетворяютъ одновременно уравненіямъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$$

и

$$m'x+n'y+k'=0.$$

Первое изъ этихъ уравненій выражаетъ совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}\,(y-\beta)=0 \quad \text{и} \quad (x-\alpha)-\sqrt{-1}\,(y-\beta)=0,$$

проходящихъ черезъ мнимыя безконечно удаленныя точки круговъ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

а, слѣдовательно, и всѣхъ другихъ круговъ на плоскости, т. е. чрезъ такъ называемыя циклическія безконечно удаленныя точки (см. стр. 159).

Такъ какъ каждая изъ этихъ прямыхъ имѣетъ съ разсматриваемой кривой только одну общую точку, именно мнимую точку пересѣченія съ прямой

$$m'x+n'y+k'=0,$$

т. е. директрисой, то обѣ эти прямыя должны быть разсматриваемы, какъ касательныя къ этой кривой изъ фокуса или изъ циклическихъ точекъ.

Это показываетъ, что фокусы можно опредѣлять, какъ точки пересѣченія четырехъ мнимыхъ касательныхъ къ линіи второго порядка, проходящихъ черезъ циклическія точки. Понятно отсюда, что всякая линія второго порядка должна имѣть четыре фокуса, изъ которыхъ только два дѣйствительные. Это суть точки пересѣченія касательныхъ, сопряженныхъ между собою (см. стр. 65).

При этомъ для параболы, какъ касающейся безконечно удаленной прямой (см. стр. 106), двѣ изъ этихъ касательныхъ совпадаютъ съ этою прямою. Слѣдовательно, одинъ изъ дѣйствительныхъ фокусовъ параболы есть безконечно удаленный, а мнимые совпадаютъ съ циклическими точками.

§ 3. Относительное расположеніе линій второго порядка.

336. Если даны на плоскости двѣ линіи второго порядка, выраженныя уравненіями

$$\left.\begin{array}{rl} & Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \\ \text{и} & A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

съ дѣйствительными коэффиціентами, то для опредѣленія ихъ общихъ точекъ или точекъ пересѣченія эти уравненія должны быть рѣшены совмѣстно, для чего предварительно нужно исключить одно неизвѣстное, напримѣръ y. Это исключеніе можетъ быть сдѣлано слѣдующимъ образомъ.

Положимъ для краткости

$$Bx+E=U_1, \qquad B'x+E'=V_1$$

$$Ax^2+Dx+F=U_2, \quad A'x^2+D'x+F'=V_2.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія (1) примутъ видъ

$$Cy^2+U_1y+U_2=0$$

и

$$C'y^2+V_1y+V_2=0.$$

Умножая первое изъ нихъ на C', а второе на C и вычитая результаты, получимъ

$$(C'U_1-CV_1)y+(C'U_2-CV_2)=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Умножая же первое уравненіе на V_2, а второе на U_2 и, по вычитаніи, сокративши всѣ члены на общаго множителя y, будемъ имѣть

$$(C'U_2-CV_2)y+(V_1U_2-U_1V_2)=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Исключая, наконецъ, y изъ двухъ послѣднихъ уравненій, найдемъ

$$(C'U_1-CV_1)(V_1U_2-U_1V_2)-(C'U_2-CV_2)^2=0.$$

Такъ какъ U_1 и V_1 содержатъ неизвѣстное x въ первой степени, а U_2 и V_2 во второй, то легко видѣть, что первая часть послѣдняго уравненія есть многочленъ четвертой степени, такъ что это уравненіе имѣетъ видъ

$$Px^4 + P_1x^3 + P_2x^2 + P_3x + P_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ коэффиціенты P, P_1, P_2... суть вполнѣ опредѣленные результаты перемноженія и сложенія коэффиціентовъ данныхъ уравненій (1) кривыхъ.

Уравненіе четвертой степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ, вообще говоря, четыре рѣшенія или корня, что видно уже изъ того частнаго случая, когда это уравненіе есть биквадратное [1]).

Полагая, что эти рѣшенія суть x_1, x_2, x_3, x_4, мы для каждаго изъ нихъ найдемъ изъ уравненія (2) или (3) соотвѣтствующее единственное значеніе y.

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что *двѣ линіи второго порядка пересѣкаются, вообще говоря, въ четырехъ точкахъ.*

Эти точки могутъ быть, однако, дѣйствительныя или мнимыя.

337. Если одно изъ значеній x, удовлетворяющее уравненію (4), будетъ мнимое вида

$$a + b\sqrt{-1},$$

то, подставляя его въ это уравненіе, получимъ тождество вида

$$M + N\sqrt{-1} = 0,$$

гдѣ M и N суть дѣйствительныя величины, получающіяся, какъ результаты перемноженій и сложеній величинъ a и b и коэффиціентовъ уравненія (4).

Но послѣднее равенство можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда

$$M = 0 \quad \text{и} \quad N = 0,$$

а въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто и равенство

$$M - N\sqrt{-1} = 0,$$

которое получается отъ замѣны въ предыдущемъ $+\sqrt{-1}$ чрезъ $-\sqrt{-1}$ и которое есть, слѣдовательно, результатъ подстановки въ уравненіе (4) вмѣсто x величины $a - b\sqrt{-1}$.

И такъ, сопряженныя мнимыя величины

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad a - b\sqrt{-1}$$

могутъ быть рѣшеніями уравненія (4) не иначе, какъ одновременно.

---

[1]) Случай, разсматривающійся обыкновенно въ начальной Алгебрѣ.

Если двѣ такія величины подставимъ на мѣсто x въ уравненіе (2) или (3), то получимъ для y также два сопряженныя значенія. Это показываетъ, что *мнимыя точки пересѣченія линій второго порядка должны быть попарно сопряженными.*

Слѣдовательно, въ относительномъ расположеніи двухъ линій второго порядка на плоскости нужно различать слѣдующіе три главные случая: 1) когда четыре точки пересѣченія этихъ линій суть дѣйствительныя, 2) когда двѣ изъ этихъ точекъ дѣйствительныя, а двѣ другія мнимыя сопряженныя, 3) когда общія точки линій второго порядка представляютъ собою двѣ пары мнимыхъ сопряженныхъ точекъ.

338. Прямая, соединяющая двѣ точки пересѣченія линій второго порядка, есть ихъ общая сѣкущая или общая хорда.

Четыре точки пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка со всѣми соединяющими ихъ прямыми составляютъ полный четыреугольникъ (см. стр. 93), вписанный въ обѣ кривыя.

Въ томъ случаѣ, когда всѣ эти точки дѣйствительныя, кривыя имѣютъ шесть общихъ хордъ и діагональныя точки составляемаго ими четыреугольника образуютъ общій полярный треугольникъ, т. е. такой треугольникъ, каждая сторона котораго есть поляра противоположной вершины по отношенію къ обѣимъ кривымъ (см. стр. 124 и 125).

Въ остальныхъ случаяхъ нѣкоторыя изъ общихъ хордъ, а также нѣкоторыя изъ вершинъ и сторонъ общаго полярнаго треугольника, могутъ быть мнимыми.

Если обозначимъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ чрезъ K_1, L_1, K_2 и L_2 и положимъ, что координаты точекъ K_1 и L_1 суть

$$x = a_1 \pm b_1\sqrt{-1} \qquad \text{и} \qquad y = c_1 \pm d_1\sqrt{-1},$$

а координаты точекъ K_2 и L_2 суть

$$x = a_2 \pm b_2\sqrt{-1} \qquad \text{и} \qquad y = c_2 \pm d_2\sqrt{-1},$$

то будемъ имѣть, что прямыя K_1L_1 и K_2L_2, какъ соединяющія сопряженныя мнимыя точки, суть дѣйствительныя (см. стр. 64). Прямыя же K_1L_2 и L_1K_2 суть мнимыя и сопряженныя и точка ихъ пересѣченія дѣйствительная, въ чемъ не трудно убѣдиться, отыскивая уравненія этихъ прямыхъ по даннымъ координатамъ точекъ K_1, K_2, L_1 и L_2, черезъ которыя онѣ проходятъ. Точно также прямыя K_1K_2 и L_1L_2 суть мнимыя сопряженныя, пересѣкающіяся въ дѣйствительной точкѣ.

И такъ, когда всѣ четыре точки пересѣченія кривыхъ мнимыя, то существуютъ только двѣ дѣйствительныя общія хорды, и въ этомъ случаѣ всѣ три вершины, а слѣдовательно и стороны, общаго полярнаго треугольника дѣйствительныя.

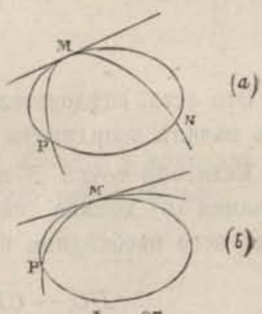
Если положимъ въ предыдущемъ $b_1 = 0$ и $d_1 = 0$, то точки K_1 и L_1 будутъ дѣйствительныя. При этомъ прямыя $K_1 L_2$ и $L_1 K_2$, оставаясь мнимыми, уже не будутъ сопряженными, а потому и точка ихъ пересѣченія не будетъ дѣйствительною. То же самое относится и къ прямымъ $K_1 K_2$ и $L_1 L_2$.

Слѣдовательно, въ случаѣ, когда двѣ точки пересѣченія дѣйствительныя, а двѣ другія мнимыя, существуютъ тоже только двѣ дѣйствительныя общія хорды, точка пересѣченія которыхъ есть единственная дѣйствительная вершина общаго полярнаго треугольника.

Если обѣ разсматриваемыя линіи суть круги, то двѣ ихъ точки пересѣченія могутъ быть или дѣйствительныя или мнимыя; двѣ же другія, именно циклическія безконечно удаленныя точки, всегда мнимыя. Два круга имѣютъ, слѣдовательно, при всякомъ ихъ положеніи, двѣ дѣйствительныя общія хорды, изъ которыхъ одна есть безконечно удаленная прямая, а другая такъ называемая радикальная ось (см. стр. 158).

339. Если двѣ точки пересѣченія кривыхъ второго порядка совпадаютъ, то соединяющая ихъ общая хорда обращается въ общую касательную. Кривыя называются въ этомъ случаѣ соприкасающимися между собою.

При этомъ онѣ, кромѣ точки соприкосновенія M (фиг. 87, a), имѣютъ еще двѣ дѣйствительныя или мнимыя общія точки N и P.



Фиг. 87.

Если ни одна изъ этихъ послѣднихъ точекъ не совпадаетъ съ точкою соприкосновенія, то говорятъ, что соприкосновеніе есть *перваго порядка*. Но можетъ случиться, что одна изъ точекъ пересѣченія, напр. N, совпадаетъ съ M (фиг. 87, b). Тогда кривыя считаются имѣющими въ точкѣ M соприкосновеніе *второго порядка*. При этомъ онѣ непремѣнно имѣютъ одну дѣйствительную точку пересѣченія P.

Возможенъ, наконецъ, случай, когда и эта точка совпадаетъ съ точкою касанія. Тогда соприкосновеніе будетъ *третьяго порядка* и кромѣ точки касанія кривыя общихъ точекъ имѣть не могутъ.

Порядокъ соприкосновенія опредѣляется, такимъ образомъ, числомъ сливающихся въ одну общихъ точекъ двухъ линій.

Такъ какъ для двухъ кривыхъ второго порядка такихъ точекъ не можетъ быть болѣе четырехъ, то и порядокъ соприкосновенія этихъ кривыхъ не можетъ быть выше третьяго.

340. Примемъ точку M соприкосновенія двухъ кривыхъ второго порядка за начало координатъ, а общую касательную за ось ординатъ. Въ такомъ случаѣ уравненія кривыхъ будутъ

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx = 0 \\ A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

и

Умножая первое изъ нихъ на C', а второе на C и вычитая результаты, получимъ уравненіе

$$x[(AC' - CA')x + (BC' - CB')y + (DC' - CD')] = 0,$$

которому удовлетворяютъ координаты общихъ точекъ этихъ кривыхъ.

Но такъ какъ это уравненіе выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ, изъ которыхъ одна

$$x = 0$$

есть общая касательная, то другая, выражаемая уравненіемъ

$$(AC' - CA')x + (BC' - CB')y + (DC' - CD') = 0, \quad . \; . \; (6)$$

есть общая хорда, проходящая чрезъ точки пересѣченія N и P.

Когда одна изъ этихъ послѣднихъ точекъ совпадаетъ съ точкою касанія, т. е. началомъ координатъ, то прямая (6) проходитъ черезъ начало координатъ, и потому должно быть

$$DC' - CD' = 0.$$

Это есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ кривыя (5) имѣютъ въ началѣ координатъ соприкосновеніе второго порядка.

Если обѣ точки N и P совпадаютъ съ точкою соприкосновенія, то прямая (6) должна совпадать съ касательною, т. е. съ осью ординатъ, для чего необходимо имѣть

$$DC' - CD' = 0 \qquad \text{и} \qquad BC' - CB' = 0.$$

Это суть, слѣдовательно, условія, при которыхъ кривыя (5) имѣютъ въ началѣ координатъ соприкосновеніе третьяго порядка.

341. Точки N и P (фиг. 87, a), не совпадая съ точкою M, могутъ совпадать между собою. Въ этомъ случаѣ кривыя будутъ соприкасаться въ двухъ точкахъ и потому говорятъ, что онѣ имѣютъ *двойное соприкосновеніе*. Прямая, соединяющая точки касанія, называется хордою соприкосновенія. Понятно, что въ каждой точкѣ порядокъ соприкосновенія не можетъ быть выше перваго.

Если кривыя выражаются уравненіями (5), то, умножая первое на D', а второе на D, и вычитая результаты, получимъ уравненіе

$$(AD' - DA')x^2 + (BD' - DB')xy + (CD' - DC')y^2 = 0,$$

удовлетворяющееся координатами общихъ точекъ обѣихъ кривыхъ и выражающее, какъ извѣстно (см. стр. 67), совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ. Это суть прямыя, соединяющія точку M съ точками N и P.

Если эти послѣднія точки совпадаютъ, то и прямыя эти должны совпадать, для чего, какъ мы знаемъ, должно быть

$$(BD'-DB')^2-4(AD'-DA')(CD'-DC')=0\,.$$

Это есть, слѣдовательно, условіе, при которомъ кривыя (5) имѣютъ двойное соприкосновеніе.

342. Если одна кривая дана, то другая, обладающая какими-либо частными свойствами, можетъ быть отыскиваема такъ, чтобы она съ данною кривою имѣла соприкосновеніе наивысшаго порядка. Такимъ образомъ можетъ быть найденъ кругъ, имѣющій наиболѣе тѣсное соприкосновеніе съ какой-нибудь кривой второго порядка. Такой кругъ называется вообще соприкасающимся.

Положимъ, что данъ эллипсъ и требуется найти кругъ, соприкасающійся съ нимъ въ данной точкѣ.

Примемъ за ось абсциссъ діаметръ эллипса, проходящій черезъ данную точку, а за ось ординатъ діаметръ, съ нимъ сопряженный. Уравненіе эллипса въ такомъ случаѣ будетъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1\,.$$

Перенеся начало координатъ въ данную точку касанія и сохраняя при этомъ то же направленіе осей, преобразуемъ это уравненіе въ

$$\frac{(x-a')^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$$

или

$$b'^2x^2+a'^2y^2-2a'b'^2x=0\,.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко видѣть изъ общаго уравненія круга, отнесеннаго къ косоугольной системѣ координатъ (см. стр. 149), что кругъ, касающійся въ началѣ координатъ оси y-овъ, выражается уравненіемъ

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-2rx\sin\omega=0\,,$$

гдѣ r есть его радіусъ и ω уголъ между осями.

Послѣднія два уравненія имѣютъ видъ уравненій (5), а потому заключаемъ на основаніи предыдущаго, что кругъ будетъ имѣть съ эллипсомъ соприкосновеніе второго порядка, если

$$a'r\sin\omega-b'^2=0\,.$$

Отсюда находимъ радіусъ соприкасающагося круга

$$r = \frac{b'^2}{a' \sin\omega}$$

и такъ какъ по теоремѣ Аполлонія

$$a'b' \sin\omega = ab\,,$$

то этому выраженію можно дать видъ

$$r = \frac{b'^3}{ab}\,.$$

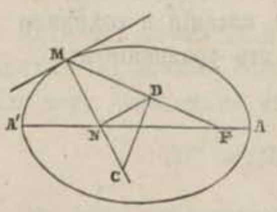
343. Если положимъ, что эллипсъ отнесенъ къ его осямъ, и обозначимъ координаты точки соприкосновенія, т. е. конца діаметра a', черезъ x_1 и y_1, а координаты конца діаметра b' черезъ x_2 и y_2, то будемъ имѣть (см. стр. 190)

$$b'^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{a^2 y_1^2}{b^2} + \frac{b^2 x_1^2}{a^2} = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\,.$$

Вслѣдствіе этого для радіуса соприкасающагося круга получимъ выраженіе

$$r = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^{3/2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Соединимъ какой-нибудь фокусъ F съ точкою соприкосновенія M (фиг. 88) и обозначимъ черезъ ψ уголъ FMN радіуса вектора съ нормалью MN. Положимъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что ϱ и l обозначаютъ послѣдовательно длину радіуса вектора FM и длину перпендикуляра изъ фокуса F на касательную въ M. Въ такомъ случаѣ должно быть



Фиг. 88.

$$l = \varrho \cos\psi\,.$$

Но мы видѣли выше (см. стр. 175 и 184), что

$$\varrho = a \mp \frac{\alpha}{a} x_1$$

и

$$l = \frac{1 \mp \dfrac{\alpha x_1}{a^2}}{\sqrt{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4}}}\,.$$

Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\cos^2\psi = \frac{1}{a^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}\right)}.$$

Перемножая это равенство съ равенствомъ (7), получимъ

$$r\cos^2\psi = b^2\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}.$$

Здѣсь вторая часть есть выраженіе длины нормали MN (см. стр. 183). Слѣдовательно,

$$r = \frac{MN}{\cos^2\psi}.$$

Это послѣднее выраженіе легко можетъ быть построено.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя черезъ N прямую, параллельную касательной, до пересѣченія съ радіусомъ векторомъ въ точкѣ D и затѣмъ черезъ D прямую, перпендикулярную къ радіусу вектору, до пересѣченія съ нормалью въ точкѣ C, будемъ имѣть изъ прямоугольныхъ треугольниковъ MND и MDC, изъ которыхъ каждый содержитъ острый уголъ ψ,

$$MD = \frac{MN}{\cos\psi} \quad \text{и} \quad MC = \frac{MD}{\cos\psi},$$

откуда, по перемноженіи,

$$MC = \frac{MN}{\cos^2\psi}.$$

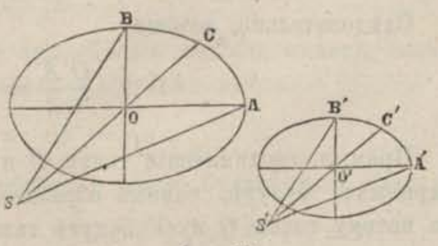
Слѣдовательно, точка C есть центръ соприкасающагося круга.

Такимъ же точно образомъ можетъ быть найденъ соприкасающійся кругъ для гиперболы и параболы.

§ 4. Подобныя линіи второго порядка.

344. Положимъ, что дана какая-нибудь кривая второго порядка ACB и какая-нибудь точка S (фиг. 89).

Соединимъ эту точку съ различными точками кривой прямыми линіями SA, SB, SC... и проведемъ чрезъ нѣкоторую точку S' прямыя $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$..., имъ параллельныя, такъ же направленныя и пропорціональныя, такъ что



Фиг. 89.

$$\frac{S'A'}{SA} = \frac{S'B'}{SB} = \frac{S'C'}{SC} = \ldots$$

Такимъ образомъ получится рядъ точекъ A', C', $B'\dots$, который, при непрерывности ряда точекъ A, C, $B\dots$ на данной кривой, образуетъ также непрерывную линію, которая называется *подобною данной и подобно съ ней расположенною.*

Каждой точкѣ одной изъ такихъ кривыхъ соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, единственная и опредѣленная точка другой и обратно.

Точки S и S' называются центрами подобія кривыхъ.

Если радіусы векторы, соединяющіе центры подобія съ соотвѣтственными точками, вмѣсто того чтобы быть параллельными, будутъ составлять между собою одинъ и тотъ же уголъ, то кривыя, оставаясь подобными, уже не будутъ подобно расположены. Очевидно, что одну изъ двухъ подобныхъ кривыхъ можно перемѣстить такъ, чтобы она сдѣлалась подобно расположенной съ другою. Для этого нужно только повернуть ее въ плоскости около какой-нибудь точки на уголъ, составляемый радіусами векторами соотвѣтственныхъ точекъ обѣихъ кривыхъ [1]).

345. Легко убѣдиться, что для двухъ подобныхъ кривыхъ одинъ изъ центровъ подобія можетъ быть взятъ произвольно, такъ что существуетъ безчисленное множество центровъ подобія.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ на двухъ какихъ-нибудь соотвѣтственныхъ радіусахъ векторахъ SC и $S'C'$ точки O и O' такъ, что

$$\frac{S'O'}{SO}=\frac{S'C'}{SC},$$

и соединивъ эти точки съ соотвѣтственными точками A и A', будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ SOA и $S'O'A'$

$$\frac{O'A'}{OA}=\frac{S'O'}{SO}.$$

Точно также изъ подобія треугольниковъ SOB и $S'O'B'$ имѣемъ

$$\frac{O'B'}{OB}=\frac{S'O'}{SO}.$$

Слѣдовательно, вообще

$$\frac{O'A'}{OA}=\frac{O'B'}{OB}=\dots.$$

Прямыя, соединяющія точки O и O' съ соотвѣтственными точками кривыхъ, будутъ, такимъ образомъ, параллельны и пропорціональны, а потому точки O и O' будутъ также центрами подобія.

---

[1]) Это есть опредѣленіе подобія не только линій второго порядка, но и вообще какихъ угодно плоскихъ фигуръ.

346. Положимъ, что относительно какой-нибудь прямолинейной системы координатъ двѣ подобныя и подобно расположенныя кривыя ACB и $A'C'B'$ выражаются уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

и пусть относительно этой системы координаты центровъ подобія S и S' будутъ послѣдовательно

$$x=p, \quad y=q$$

и

$$x=p', \quad y=q'.$$

Въ такомъ случаѣ, замѣняя въ уравненіи первой кривой x и y чрезъ $x'+p$ и $y'+q$, получимъ уравненіе той же кривой относительно системы координатъ, имѣющей начало въ точкѣ S и прежнее направленіе осей. Точно также, замѣняя во второмъ уравненіи (1) x и y чрезъ $x''+p'$ и $y''+q'$, получимъ уравненіе второй кривой относительно системы координатъ, имѣющей начало въ точкѣ S' и то же направленіе осей.

Эти преобразованныя уравненія будутъ имѣть видъ

$$A_1x'^2+B_1x'y'+C_1y'^2+D_1'x'+E_1'y'+F_1'=0$$

и

$$A_2x''^2+B_2x''y''+C_2y''^2+D_2'x''+E_2'y''+F_2'=0,$$

гдѣ D_1', E_1', F_1' суть извѣстныя выраженія, составленныя изъ коэффиціентовъ перваго изъ уравненій (1) и координатъ p и q, а D_2', E_2', F_2' такія же выраженія изъ коэффиціентовъ второго изъ уравненій (1) и координатъ p' и q' (см. стр. 137 и 138).

Если назовемъ буквами r_1 и r_2 радіусы векторы, соединяющіе двѣ какія-нибудь соотвѣтственныя точки кривыхъ съ центрами подобія, то будемъ имѣть, вслѣдствіе параллельности осей координатъ,

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{r_2}{r_1}.$$

Послѣднее отношеніе по самому опредѣленію подобія имѣетъ величину постоянную. Обозначая ее черезъ m, будемъ имѣть

$$x''=mx' \quad \text{и} \quad y''=my',$$

вслѣдствіе чего второму изъ уравненій (1) можно будетъ дать видъ

$$A_2m^2x'^2+B_2m^2x'y'+C_2m^2y'^2+D_2'mx'+E_2'my'+F_2'=0.$$

Такъ какъ здѣсь x' и y' имѣютъ то же геометрическое значеніе, какъ и въ первомъ изъ уравненій (1), то и сами уравненія должны имѣть одно и то же геометрическое значеніе, а потому ихъ коэффиціенты должны быть пропорціональны.

Изъ пропорціональности коэффиціентовъ трехъ первыхъ членовъ заключаемъ, что

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

И такъ, если двѣ линіи второго порядка подобны и подобно расположены, то въ уравненіяхъ ихъ относительно какой-либо прямолинейной системы координатъ коэффиціенты членовъ второго измѣренія должны быть пропорціональны.

347. Чтобы убѣдиться въ обратномъ, замѣтимъ прежде всего, что изъ пропорціональности (2) слѣдуетъ, что

$$\frac{B_2^2-4A_2C_2}{B_1^2-4A_1C_1}=\frac{B_2^2}{B_1^2},$$

т. е. что разности

$$B_1^2-4A_1C_1 \qquad \text{и} \qquad B_2^2-4A_2C_2$$

имѣютъ одинаковые знаки или одновременно равняются нулю. Это значитъ, что при условіи (2) обѣ кривыя второго порядка (1) будутъ одного и того же рода, и если онѣ параболы, то направленіе ихъ діаметровъ одно и то же.

Положимъ сперва, что кривыя, выражаемыя уравненіями (1), при условіи (2), суть центральныя. Въ такомъ случаѣ, перенеся для каждой кривой систему координатъ такъ, чтобы начало совпадало съ центромъ, а направленіе осей оставалось то же самое, преобразуемъ уравненія (1) въ

$$\left.\begin{array}{r} A_1x'^2+B_1x'y'+C_1y'^2+K_1=0 \\ \text{и}\qquad A_2x''^2+B_2x''y''+C_2y''^2+K_2=0 \end{array}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Называя при этомъ полудіаметры обѣихъ кривыхъ, проведенныхъ въ одномъ и томъ же направленіи, черезъ ϱ_1 и ϱ_2, будемъ имѣть, вслѣдствіе параллельности осей координатъ,

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Изъ этихъ соотношеній и соотношеній (2) находимъ

$$\frac{A_2x''^2+B_2x''y''+C_2y''^2}{A_1x'^2+B_1x'y'+C_1y'^2}=\frac{A_2\varrho_2^2}{A_1\varrho_1^2}.$$

Но изъ уравненій (3) видно, что первая часть этого послѣдняго равенства равняется отношенію постоянныхъ членовъ K_2 и K_1. Слѣдовательно,

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{A_1 K_2}{A_2 K_1} = \text{пост.},$$

а это и доказываетъ, что разсматриваемыя кривыя подобны и подобно расположены и что центры ихъ суть центры подобія.

Если обѣ разсматриваемыя кривыя суть параболы, то, выбирая для каждой изъ нихъ новую систему координатъ такъ, чтобы оси ординатъ были параллельныя между собою касательныя, а оси абсциссъ проходящія черезъ ихъ точки прикосновенія діаметры (см. стр. 143—147), дадимъ уравненіямъ (1) видъ

$$y'^2 = 2p_1 x' \quad \text{и} \quad y''^2 = 2p_2 x''.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{y''^2}{y_1^2} = \frac{p_2 x''}{p_1 x'}.$$

Называя же черезъ ρ_1 и ρ_2 длины двухъ прямыхъ, проведенныхъ въ одномъ и томъ же направленіи изъ началъ координатъ до пересѣченія съ кривыми, будемъ имѣть

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

вслѣдствіе чего предыдущая пропорція обращается въ

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{p_2 \rho_2}{p_1 \rho_1}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \text{пост.},$$

что и доказываетъ, что параболы подобны и подобно расположены.

Изъ всего сказаннаго видимъ, что необходимымъ и вполнѣ достаточнымъ условіемъ, чтобы двѣ какія бы ни было линіи второго порядка, отнесенныя къ одной и той же прямолинейной системѣ координатъ, были подобны и подобно расположены, служитъ пропорціональность въ ихъ уравненіяхъ коэффиціентовъ трехъ членовъ второго измѣренія.

348. Мы видѣли (см. стр. 106), что уравненіе, которое получимъ, приравнявши нулю сумму трехъ членовъ второго измѣренія въ урав-

неніи кривой второго порядка, выражаетъ совокупность двухъ прямыхъ (дѣйствительныхъ или мнимыхъ), встрѣчающихъ эту кривую въ безконечности. Принимая во вниманіе указанное сейчасъ условіе, мы заключаемъ, что для двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ кривыхъ эти прямыя однѣ и тѣ же и, наоборотъ, тождественность этихъ прямыхъ есть достаточное условіе для того, чтобы кривыя были подобны и подобно расположены.

Слѣдовательно, можно сказать, что подобными и подобно расположенными кривыми второго порядка называются такія, которыя имѣютъ общія (дѣйствительныя или мнимыя) безконечно удаленныя точки.

Сказанное приводитъ также къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Всякіе два круга суть линіи подобныя и подобно расположенныя.

Два эллипса подобны и подобно расположены, когда ихъ оси пропорціональны и соотвѣтственно параллельны.

Двѣ гиперболы подобны и подобно расположены, когда ихъ ассимптоты и дѣйствительныя оси параллельны.

Всякія двѣ параболы подобны и подобно расположены, если только оси ихъ параллельны и одинаково направлены.

Эксцентриситеты подобныхъ кривыхъ равны.

349. Если двѣ кривыя (1) подобны, но не подобно расположены, то, повернувши систему координатъ на постоянный уголъ, который составляютъ радіусы векторы, проведенные изъ двухъ центровъ подобія къ двумъ какимъ-нибудь соотвѣтственнымъ точкамъ кривыхъ, мы преобразуемъ уравненіе второй кривой въ

$$A_3x^2 + B_3xy + C_3y^2 + D_3x + E_3y + F_3 = 0\,,$$

при чемъ должно быть

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_3}{C_1} = k\,,$$

откуда

$$A_3 = kA_1\,, \quad B_3 = kB_1\,, \quad C_3 = kC_1\,.$$

Но, какъ извѣстно (см. стр. 141), при названномъ преобразованіи координатъ между коэффиціентами двухъ уравненій второй кривой должны имѣть мѣсто соотношенія

$$A_2 + C_2 - B_2\cos\omega = A_3 + C_3 - B_3\cos\omega$$

и

$$B_2^2 - 4A_2C_2 = B_3^2 - 4A_3C_3\,,$$

гдѣ ω есть уголъ между осями координатъ.

Подставивъ сюда предыдущія выраженія коэффиціентовъ A_3, B_3; C_3, получимъ

$$A_2 + C_2 - B_2 \cos\omega = k(A_1 + C_1 - B_1 \cos\omega)$$

и

$$B_2{}^2 - 4A_2C_2 = k^2(B_1{}^2 - 4A_1C_1),$$

откуда, исключивъ k, получимъ соотношеніе

$$\frac{B_2{}^2 - 4A_2C_2}{(A_2 + C_2 - B_2\cos\omega)^2} = \frac{B_1{}^2 - 4A_1C_1}{(A_1 + C_1 - B_1\cos\omega)^2},$$

имѣющее мѣсто, когда кривыя (1) подобны, хотя бы и не были подобно расположены.

ГЛАВА ОДИНАДЦАТАЯ.

СОКРАЩЕННЫЙ СПОСОБЪ ВЪ ПРИМѢНЕНІИ КЪ ЛИНІЯМЪ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Пучки линій второго порядка.

350. Пусть уравненія двухъ какихъ-нибудь линій второго порядка относительно прямолинейной системы координатъ будутъ

$$S_1 = 0 \quad \text{и} \quad S_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно (см. стр. 71), уравненіе

$$S_1 - kS_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

при данномъ опредѣленномъ k выражаетъ линію того же порядка, проходящую черезъ всѣ точки (дѣйствительныя или мнимыя), общія даннымъ линіямъ. Если же k есть величина неопредѣленная, то этимъ уравненіемъ выражается пучекъ линій второго порядка, имѣющихъ четыре общія точки.

Всякая линія второго порядка, принадлежащая данному пучку, вполнѣ опредѣляется одною ея точкою, ибо по координатамъ этой точки постоянное k въ уравненіи пучка можетъ быть найдено.

Если положимъ, что S_1' и S_2' суть результаты подстановки въ первыя части уравненій (1) координатъ данной точки, то уравненіе кривой, принадлежащей пучку (2) и проходящей черезъ эту точку, очевидно, будетъ

$$S_1 S_2' - S_2 S_1' = 0 \, .$$

Въ частномъ случаѣ одно или оба уравненія (1) могутъ выражать совокупности прямыхъ.

Если положимъ, напримѣръ, что многочленъ S_2 разлагается на два множителя U_2 и V_2 первой степени, то уравненіе (2) обращается въ

$$S_1 - kU_2V_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и выражаетъ пучекъ кривыхъ второго порядка, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія кривой $S' = 0$ съ прямыми $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$.

Если и многочленъ S_1 разлагается на два множителя первой степени U_1 и V_1, то уравненіе (2) обращается въ

$$U_1 V_1 - k U_2 V_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

и выражаетъ всѣ возможныя кривыя, проходящія черезъ четыре дѣйствительныя точки пересѣченія прямыхъ $U_1 = 0$ и $V_1 = 0$ съ прямыми $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$, которыя представляютъ, слѣдовательно, двѣ пары противоположныхъ сторонъ четыреугольника, вписаннаго въ каждую изъ этихъ кривыхъ.

Такъ какъ кривыя или прямыя линіи, черезъ точки пересѣченія которыхъ проходитъ данная кривая, могутъ быть взяты произвольно, то въ видахъ (2), (3) и (4) можетъ быть представлено уравненіе всякой кривой второго порядка.

351. Если одна изъ прямыхъ

$$U_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad V_2 = 0$$

есть касательная къ кривой, выражаемой уравненіемъ

$$S_1 = 0,$$

то очевидно, что уравненіе (3) будетъ представлять кривыя, касающіяся этой прямой въ той же точкѣ, какова бы ни была другая прямая.

Слѣдовательно, полагая, что намъ дана линія второго порядка, выражаемая уравненіемъ $S = 0$, и допуская, что $T = 0$ есть уравненіе касательной къ ней въ данной точкѣ (x_1, y_1), мы будемъ имѣть въ уравненіи

$$S - T(mx + ny + p) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

общее выраженіе всѣхъ линій второго порядка, имѣющихъ съ данною въ этой точкѣ соприкосновеніе перваго порядка.

Если случится, что прямая

$$mx + ny + p = 0$$

проходитъ черезъ точку (x_1, y_1), то, какъ было показано выше (см. стр. 253), соприкосновеніе будетъ второго порядка.

Слѣдовательно, уравненіе

$$S - T(mx + ny - mx_1 - ny_1) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

при неопредѣленныхъ m и n, выражаетъ всѣ возможныя кривыя второго порядка, имѣющія съ кривой $S = O$ въ точкѣ (x_1, y_1) соприкосновеніе второго порядка.

Постоянныя m и n могутъ быть опредѣляемы по какимъ-нибудь дополнительнымъ условіямъ, напр. по условію, чтобы кривая, выражаемая уравненіемъ (6), была кругъ. Такимъ образомъ получается уравненіе соприкасающагося круга.

Если прямая

$$mx + ny + p = 0$$

сама есть касательная въ точкѣ (x_1, y_1), такъ что уравненіе это отличается отъ уравненія $T = 0$ только произвольнымъ постояннымъ множителемъ, то уравненіе (5) обращается въ

$$S - kT^2 = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (7)$$

и выражаетъ пучекъ кривыхъ втораго порядка, имѣющихъ въ точкѣ (x_1, y_1) соприкосновеніе третьяго порядка.

352. Если прямыя $U_2 = 0$ и $V_2 = 0$ совпадаютъ, то и точки ихъ пересѣченія съ кривой $S_1 = 0$ совпадаютъ между собою по двѣ, такъ что уравненіе (3) представляетъ въ этомъ случаѣ кривыя втораго порядка, соприкасающіяся съ кривой $S_1 = 0$ въ двухъ точкахъ.

Уравненіе

$$S - kU^2 = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8)$$

есть, слѣдовательно, общее выраженіе пучка линій втораго порядка, имѣющихъ двойное соприкосновеніе.

Точки прикосновенія всѣхъ этихъ линій суть двѣ точки, въ которыхъ кривая $S = 0$ пересѣкается прямой $U = 0$. Понятно, что онѣ могутъ быть какъ дѣйствительныя, такъ и мнимыя. Въ томъ случаѣ, когда онѣ совпадаютъ, мы возвращаемся къ уравненію (7) линій, имѣющихъ соприкосновеніе третьяго порядка.

Если положимъ, что

$$T_1 = 0 \quad \text{и} \quad T_2 = 0$$

суть уравненія касательныхъ къ кривой $S = 0$ въ точкахъ ея пересѣченія съ прямою $U = 0$, то уравненіе (8), при неопредѣленномъ k, равнозначуще съ

$$T_1 T_2 - kU^2 = 0 \, .$$

353. Можетъ случиться, что одна изъ прямыхъ, уравненія которыхъ входятъ въ составъ уравненій (3) или (4), есть безконечно удаленная.

Припоминая, что уравненіе первой степени

$$mx + ny + p = 0$$

представляетъ такую прямую, когда въ немъ $m=0$ и $n=0$ (см. стр. 37), мы можемъ заключить, что уравненіе

$$S-kU=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ U какой угодно многочленъ первой степени, выражаетъ всевозможныя кривыя, имѣющія общія съ кривой $S=0$ безконечно удаленныя точки. Это суть, какъ мы видѣли (см. стр. 262), кривыя подобныя и подобно расположенныя. Очевидно, что въ уравненіяхъ ихъ коэффиціенты членовъ второго измѣренія одни и тѣ же.

Если прямая $U=0$ сама есть безконечно удаленная, то уравненіе (9) дѣлается равнозначущимъ съ (8) и обращается въ

$$S-k=0.$$

Такое уравненіе выражаетъ, слѣдовательно, кривыя второго порядка, имѣющія съ кривой $S=0$ двойное соприкосновеніе въ безконечности. Безконечно удаленныя точки прикосновенія могутъ быть, конечно, какъ дѣйствительными, такъ и мнимыми.

Такъ какъ въ послѣднемъ уравненіи, при различныхъ значеніяхъ k, коэффиціенты всѣхъ членовъ кромѣ постояннаго одни и тѣ же, то выражаемыя имъ кривыя имѣютъ одинъ и тотъ же центръ. Слѣдовательно, эти кривыя не только суть подобныя и подобно расположенныя, но и концентрическія. На такія кривыя нужно поэтому смотрѣть, какъ на соприкасающіяся въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ. Такъ всякіе два концентрическіе круга соприкасаются между собою въ циклическихъ безконечно удаленныхъ точкахъ.

На основаніи сказаннаго уравненіе

$$UV-k=0$$

выражаетъ всякую линію, касающуюся въ безконечности прямыхъ $U=0$ и $V=0$, т. е. всѣ гиперболы, для которыхъ эти прямыя суть ассимптоты.

Частный случай этого уравненія представляетъ уравненіе $xy=m^2$ гиперболы, отнесенной къ ея ассимптотамъ.

Если въ уравненіи (9) положимъ $S=V^2$, то оно обратится въ

$$V^2-kU=0$$

и будетъ выражать, при всякомъ k, кривую, касающуюся безконечно удаленной прямой, т. е. параболу. Частный случай этого уравненія представляетъ простѣйшее уравненіе параболы $y^2=2px$.

354. Извѣстно, что, подставляя въ многочленъ U, составляющій первую часть уравненія прямой $U=0$, координаты различныхъ точекъ

плоскости, мы будемъ получать величины, пропорціональныя разстояніямъ этихъ точекъ отъ этой прямой. Имѣя это въ виду, мы изъ возможности представить уравненіе всякой линіи второго порядка въ видѣ

$$U_1 V_1 - kU_2 V_2 = 0$$

заключаемъ слѣдующее:

Произведеніе разстояній всякой точки кривой второго порядка отъ двухъ противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ эту кривую четыреугольника находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію разстояній той же точки отъ двухъ другихъ противоположныхъ сторонъ этого четыреугольника.

Подобнымъ же образомъ уравненію

$$T_1 T_2 - kU^2 = 0,$$

представляющему какую угодно кривую второго порядка, касающуюся прямыхъ $T_1 = 0$ и $T_2 = 0$ въ точкахъ ихъ пересѣченія съ прямою $U = 0$, можно дать слѣдующее геометрическое истолкованіе:

Произведеніе разстояній всякой точки кривой второго порядка отъ двухъ ея касательныхъ находится въ постоянномъ отношеніи къ квадрату разстоянія этой точки отъ хорды ихъ прикосновенія.

355. Всякая линія второго порядка имѣетъ двойное соприкосновеніе съ безчисленнымъ множествомъ круговъ, центры которыхъ находятся на ея осяхъ.

Это показываетъ, что уравненіе какой угодно линіи второго порядка можетъ быть представлено въ видѣ

$$C - kU^2 = 0,$$

гдѣ C означаетъ многочленъ, составляющій первую часть уравненія круга.

Припоминая, что результатъ подстановки въ такой многочленъ координатъ какой-нибудь точки плоскости означаетъ квадратъ длины касательной къ кругу изъ этой точки (см. стр. 153), мы выводимъ изъ послѣдняго уравненія слѣдующее заключеніе:

Всякая линія второго порядка есть геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ данному кругу находятся въ постоянномъ отношеніи къ разстояніямъ ихъ отъ данной прямой.

Это есть обобщеніе свойства кривыхъ второго порядка относительно фокусовъ, ибо очевидно, что въ случаѣ, когда радіусъ круга $C = 0$ равняется нулю, этотъ кругъ обратится въ фокусъ кривой, а прямая $U = 0$ будетъ ея директрисой.

356. Положимъ, что намъ даны два пучка прямыхъ линій

$$U_1 - k_1 V_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_2 - k_2 V_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

связанные проективнымъ соотвѣтствіемъ (см. стр. 95—97), и требуется найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей этихъ пучковъ.

Мы видѣли, что зависимость между величинами k_1 и k_2, опредѣляющими въ разсматриваемыхъ пучкахъ соотвѣтственные лучи, выражается уравненіемъ

$$Ak_1k_2+Bk_1+Ck_2+D=0\,.$$

Уравненіе искомаго геометрическаго мѣста получается, слѣдовательно, какъ результатъ исключенія неопредѣленныхъ постоянныхъ k_1 и k_2 изъ этого послѣдняго уравненія и уравненій (10) пучковъ.

Это будетъ, очевидно, уравненіе

$$AU_1U_2+BU_1V_2+CU_2V_1+DV_1V_2=0\,.$$

Такъ какъ оно второй степени, то заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть линія второго порядка. При неопредѣленныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ A, B, C, D и при произвольномъ выборѣ центровъ пучковъ, т. е. точекъ пересѣченія прямыхъ $U_1=0$ и $V_1=0$, а также прямыхъ $U_2=0$ и $V_2=0$, это уравненіе можетъ, очевидно, выражать какую угодно кривую второго порядка.

И такъ, всякая линія второго порядка можетъ быть опредѣляема, какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей двухъ проективныхъ пучковъ.

На основаніи этого опредѣленія линіи второго порядка разсматриваются въ Проективной Геометріи.

357. Положимъ, что стороны треугольника должны проходить черезъ три данныя точки и двѣ его вершины должны находиться на двухъ данныхъ прямыхъ. Такъ какъ этими условіями треугольникъ не опредѣляется вполнѣ, то геометрическимъ мѣстомъ третьей вершины будетъ нѣкоторая линія.

Легко видѣть, что, въ силу самыхъ условій, стороны треугольника, пересѣкающіяся въ третьей вершинѣ, образуютъ при своемъ перемѣщеніи два проективно соотвѣтственные пучка. Поэтому заключаемъ изъ сказаннаго, что геометрическое мѣсто этой вершины есть, вообще говоря, линія второго порядка.

Выше были указаны тѣ частные случаи, когда это геометрическое мѣсто есть прямая линія (см. стр. 56 — 59).

§ 2. Сѣти линій второго порядка.

358. Если намъ даны три линіи второго порядка, уравненія которыхъ суть:

$$S_1 = 0\,,\quad S_2 = 0\,,\quad S_3 = 0\,, \quad \ldots\ldots \qquad (1)$$

то уравненіе

$$S_1 - kS_2 - lS_3 = 0\,, \quad \ldots\ldots \qquad (2)$$

въ которомъ k и l суть нѣкоторыя опредѣленныя постоянныя величины, выражаетъ также нѣкоторую линію второго порядка.

Если же k и l имѣютъ неопредѣленныя значенія, то послѣднимъ уравненіемъ выражается цѣлая система линій, называемая *сѣтью* кривыхъ второго порядка.

Обозначая многочленъ $S_1 - kS_2$ чрезъ T, мы можемъ представить уравненіе (2) въ видѣ

$$T - lS_3 = 0\,.$$

Отсюда видимъ, что сѣти, выражаемой этимъ уравненіемъ, принадлежитъ всякая кривая второго порядка, проходящая черезъ точки пересѣченія одной изъ кривыхъ (1) съ какою бы ни было кривою, проходящею черезъ точки пересѣченія двухъ другихъ.

359. Если кривая, выражаемая уравненіемъ (2), проходитъ черезъ данную точку (x', y'), то, называя чрезъ S_1', S_2', S_3' результаты подстановки въ первыя части уравненій (1) координатъ этой точки, будемъ имѣть

$$S_1' - kS_2' - lS_3' = 0\,.$$

Вслѣдствіе этого уравненію (2) можно дать видъ

$$(S_1S_3' - S_3S_1') - k(S_2S_3' - S_3S_2') = 0 \quad \ldots\ldots \qquad (3)$$

и такъ какъ оно содержитъ только одно неопредѣленное постоянное, то выражаетъ пучекъ кривыхъ.

И такъ, всѣ кривыя второго порядка, принадлежащія сѣти и проходящія черезъ данную точку, составляютъ пучекъ.

Если кривая (2) должна проходить черезъ двѣ данныя точки, то, обозначая чрезъ S_1'', S_2'', S_3'' результаты подстановки въ первыя части уравненій (1) координатъ второй изъ этихъ точекъ, мы изъ условій

$$S_1' - kS_2' - lS_3' = 0$$

и

$$S_1'' - kS_2'' - lS_3'' = 0$$

найдемъ для каждой изъ величинъ k и l единственное значеніе.

Отсюда заключаемъ, что черезъ двѣ данныя точки проходитъ, вообще говоря, единственная и опредѣленная линія второго порядка, принадлежащая данной сѣти.

Уравненіе этой линіи будетъ, очевидно,

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ S_1', & S_2', & S_3' \\ S_1'', & S_2'', & S_3'' \end{vmatrix} = 0$$

или

$$S_1(S_2'S_3''-S_3'S_2'')+S_2(S_3'S_1''-S_1'S_3'')+S_3(S_1'S_2''-S_2'S_1'')=0.$$

Оно не будетъ имѣть опредѣленнаго геометрическаго значенія только тогда, когда каждая изъ разностей

$$(S_2'S_3''-S_3'S_2''),\quad (S_3'S_1''-S_1'S_3''),\quad (S_1'S_2''-S_2'S_1'')$$

равняется нулю.

Изъ уравненія (3) видно, что это можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда одна изъ данныхъ точекъ принадлежитъ къ числу точекъ пересѣченія кривыхъ, проходящихъ черезъ другую.

360. Умножая уравненіе (2) на какое-нибудь постоянное m и обозначая $-mk$ черезъ n, а $-ml$ черезъ p, мы можемъ дать ему слѣдующій видъ:

$$mS_1+nS_2+pS_3=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Обратимъ особенное вниманіе на нѣкоторые частные виды этого уравненія.

Если положимъ $S_1=UV$, $S_2=UW$ и $S_3=VW$, гдѣ U, V и W суть многочлены первой степени, то будемъ имѣть

$$mUV+nUW+pVW=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Этимъ уравненіемъ выражается, очевидно, всякая кривая второго порядка, проходящая черезъ вершины треугольника, стороны котораго суть:

$$U=0,\quad V=0,\quad W=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Возьмемъ на кривой (5) двѣ точки (x',y') и (x'',y'') и пусть результаты подстановки координатъ этихъ точекъ въ многочлены U, V, W будутъ послѣдовательно U', V', W' и U'', V'', W''.

Въ такомъ случаѣ уравненіе

$$m(U-U')(V-V'')+n(U-U'')(W-W')+p(V-V')(W-W'')=$$
$$=mUV+nUW+pVW$$

будетъ представлять прямую, проходящую чрезъ эти двѣ точки, такъ какъ оно первой степени и удовлетворяется ихъ координатами.

Если положимъ, что точки (x', y') и (x'', y'') совпадаютъ и, слѣдовательно,

$$U' = U'', \quad V' = V'', \quad W' = W'',$$

то это уравненіе, по раскрытіи скобокъ и сокращеніи, обратится въ

$$m(UV' + VU') + n(UW' + WU') + p(VW' + WV) = 0$$

или

$$U'(mV + nW) + V'(mU + pW) + W'(nU + pV) = 0$$

и будетъ выражать касательную къ кривой (5) въ точкѣ (x', y').

Когда точка (x', y') совпадаетъ съ точкою пересѣченія какихъ-нибудь двухъ изъ прямыхъ (6), то послѣднее уравненіе обращается въ одно изъ слѣдующихъ:

$$mV + nW = 0, \quad mU + pW = 0, \quad nU + pV = 0. \quad . \quad . \quad (7)$$

Это суть, слѣдовательно, касательныя къ кривой (5) въ вершинахъ треугольника, образуемаго прямыми (6).

Точка пересѣченія прямой $U = 0$ съ первою изъ этихъ касательныхъ удовлетворяетъ, очевидно, уравненію

$$mnU + mpV + npW = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Этому же уравненію удовлетворяетъ и точка пересѣченія прямой $V = 0$ со второю изъ касательныхъ (7), а также и прямой $W = 0$ съ третьей.

Такъ какъ уравненіе (8) первой степени, то заключаемъ, что *точки пересѣченія сторонъ треугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, съ касательными въ противоположныхъ вершинахъ лежатъ на одной прямой.*

361. Прямыя (7), будучи касательными, составляютъ треугольникъ, описанный около кривой (5).

Обозначая первыя части уравненій (7) послѣдовательно черезъ Z_1, Z_2, Z_3, будемъ имѣть тождественно

$$pZ_1 - nZ_2 = m(pV - nU)$$
$$nZ_2 - mZ_3 = p(nW - mV)$$
$$mZ_3 - pZ_1 = n(mU - pW).$$

Отсюда видимъ, что уравненія

$$pV - nU = 0, \quad nW - mV = 0, \quad mU - pW = 0$$

выражаютъ три прямыя, соединяющія точки пересѣченія касательныхъ (7) съ ихъ точками прикосновенія.

Изъ того, что сумма произведеній первыхъ частей этихъ уравненій на коэффиціенты m, p, n тождественно равняется нулю, заключаемъ, что прямыя эти проходятъ черезъ одну точку.

И такъ, *прямыя, соединяющія вершины треугольника, описаннаго около кривой второго порядка, съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

362. Положимъ теперь, что въ уравненіи (4)

$$S_1 = U^2, \quad S_2 = V^2, \quad S_3 = W^2,$$

гдѣ U, V и W суть, какъ и прежде, многочлены первой степени.

Въ такомъ случаѣ это уравненіе, принимая видъ

$$mU^2 + nV^2 + pW^2 = 0,$$

будетъ имѣть дѣйствительное значеніе только тогда, когда два изъ коэффиціентовъ m, n и p имѣютъ знакъ, противоположный знаку третьяго. Вслѣдствіе этого, не нарушая общности значеній этого уравненія, мы можемъ разсматривать его въ видѣ

$$mU^2 + nV^2 - pW^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ m, n, p суть величины положительныя.

Такъ какъ мы можемъ представить его еще въ видѣ

$$pW^2 - nV^2 = mU^2$$

или

$$(W\sqrt{p} + V\sqrt{n})(W\sqrt{p} - V\sqrt{n}) = mU^2,$$

то заключаемъ, что выражаемая имъ кривая касается прямыхъ

$$W\sqrt{p} + V\sqrt{n} = 0 \quad \text{и} \quad W\sqrt{p} - V\sqrt{n} = 0$$

въ точкахъ ихъ пересѣченія съ прямою $U = 0$.

Это значитъ, что послѣдняя прямая, будучи хордою прикосновенія, есть поляра точки пересѣченія двухъ первыхъ, которая есть въ то же время точка пересѣченія прямыхъ

$$V = 0 \quad \text{и} \quad W = 0.$$

Такимъ же точно образомъ, представивъ уравненіе (9) въ видѣ

$$pW^2 - mU^2 = nV^2$$

или

$$(W\sqrt{p} + U\sqrt{m})(W\sqrt{p} - U\sqrt{m}) = nV^2,$$

убѣждаемся, что прямая $V = 0$ есть поляра точки пересѣченія прямыхъ $U = 0$ и $W = 0$.

Отсюда же заключаемъ, что и прямая $W=0$ должна быть полярою точки пересѣченія прямыхъ $U=0$ и $V=0$.

Итакъ, треугольникъ, стороны котораго суть $U=0$, $V=0$, $W=0$, есть полярный относительно кривой (9).

При неопредѣленныхъ коэффиціентахъ m, n, p уравненіе (9) выражаетъ, слѣдовательно, сѣть линій второго порядка, имѣющихъ общій полярный треугольникъ.

363. Въ справедливости этого заключенія можно убѣдиться еще слѣдующимъ образомъ.

Если положимъ, что (x', y') и (x'', y'') суть двѣ точки, лежащія на кривой (9), то будемъ имѣть, что уравненіе

$$m(U-U')(U-U'')+n(V-V')(V-V'')-p(W-W')(W-W'')=$$
$$=mU^2+nV^2-pW^2,$$

въ которомъ U', V', W', U'', V'', W'' суть результаты подстановки координатъ этихъ точекъ въ многочлены U, V, W, выражаетъ сѣкущую.

Въ предположеніи же

$$U'=U'',\quad V'=V'',\quad W'=W'',$$

что соотвѣтствуетъ совпаденію точекъ (x', y') и (x'', y''), мы получимъ изъ него уравненіе касательной къ кривой (9) въ видѣ

$$mUU'+nVV'-pWW'=0.$$

Но извѣстно, что тѣмъ же самымъ уравненіемъ выражается поляра точки (x', y'), когда эта точка дана какъ-нибудь на плоскости.

При совпаденіи точки (x', y'), съ точкою пересѣченія какихъ-либо двухъ прямыхъ $U=0$, $V=0$, $W=0$, послѣднее уравненіе обращается, очевидно, въ уравненіе третьей прямой, а это и значитъ, что треугольникъ, образуемый этими прямыми, есть полярный.

364. Частные виды уравненія (9) представляютъ уравненія эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ. Слѣдовательно, для всякой центральной кривой второго порядка два сопряженные діаметра и безконечно удаленная прямая составляютъ полярный треугольникъ.

Точно также къ виду уравненія (9) принадлежитъ уравненіе

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+k)^2,$$

выражающее, какъ мы видѣли, относительно прямоугольной системы координатъ всякую линію второго порядка, для которой α и β суть координаты фокуса, а

$$mx + ny + k = 0$$

уравненіе соотвѣтствующей директрисы.

Это показываетъ, что директриса и двѣ какія-нибудь перпендикулярныя между собою прямыя, проходящія черезъ фокусъ, составляютъ полярный треугольникъ.

Отсюда заключаемъ, что фокусъ кривой второго порядка характеризуется еще тѣмъ свойствомъ, что всякія двѣ проходящія черезъ него взаимно перпендикулярныя прямыя суть сопряженныя.

§ 3. Теоремы Паскаля и Бріаншона.

365. Посредствомъ сокращеннаго способа доказываются очень просто два замѣчательныя предложенія о кривыхъ второго порядка, извѣстныя подъ названіемъ теоремъ Паскаля и Бріаншона. Первая изъ нихъ выражаетъ свойство всякаго шестиугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка (hexagrammum mysticum), а вторая—свойство шестиугольника, описаннаго около кривой второго порядка.

Положимъ сперва, что намъ даны три линіи второго порядка, имѣющія общую хорду. Пусть $S = 0$ будетъ уравненіе одной изъ этихъ линій и $U = 0$ уравненіе общей хорды.

Въ такомъ случаѣ уравненія двухъ другихъ кривыхъ могутъ быть представлены въ видѣ

$$S - kUV = 0 \quad \text{и} \quad S - lUW = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ k и l суть нѣкоторыя постоянныя, а V и W два многочлена первой степени. При этомъ очевидно, что уравненія

$$V = 0 \quad \text{и} \quad W = 0$$

будутъ представлять двѣ другія общія хорды, которыя кривая $S = 0$ имѣетъ послѣдовательно съ двумя кривыми (1).

Вычитая уравненіе (1) одно изъ другого, получимъ уравненіе

$$U(kV - lW) = 0\,,$$

выражающее совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки пересѣченія этихъ кривыхъ между собою. Слѣдовательно, уравненіе

$$kV + lW = 0$$

выражаетъ общую хорду этихъ двухъ кривыхъ.

Такъ какъ она, очевидно, проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $V = 0$ и $W = 0$, то убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія:

Если три кривыя второго порядка имѣютъ общую хорду, то три другія общія хорды каждыхъ двухъ изъ этихъ кривыхъ проходятъ черезъ одну точку.

Частный случай этого предложенія представляетъ свойство трехъ круговъ, состоящее въ томъ, что три ихъ радикальныя оси проходятъ черезъ одну точку, ибо всѣ круги имѣютъ, какъ извѣстно, общую безконечно удаленную хорду.

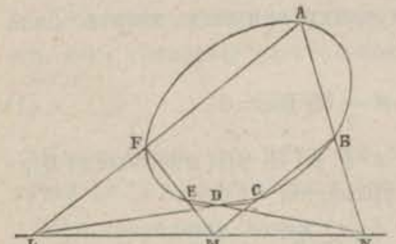
Изъ того же предложенія получается, какъ слѣдствіе, слѣдующее:

Если черезъ двѣ точки данной линіи второго порядка проходятъ такія же линіи, составляющія пучекъ, то общія хорды каждой изъ этихъ послѣднихъ линій съ данною также составляютъ пучекъ.

366. Теорема Паскаля доказывается также, какъ слѣдствіе изъ предыдущаго предложенія. Она состоитъ въ слѣдующемъ:

Три точки, въ которыхъ пересѣкаются противоположныя стороны шестиугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, лежатъ на одной прямой.

Положимъ, что въ кривую второго порядка вписанъ шестиугольникъ $ABCDEF$ (фиг. 90). Точки пересѣченія его противоположныхъ сторонъ суть: L, M и N.



Фиг. 90.

Если совокупность двухъ прямыхъ AB и CD будемъ разсматривать, какъ линію второго порядка и точно также совокупность двухъ прямыхъ AF и ED, то точки A и D будутъ общими у этихъ двухъ линій и у кривой, въ которую вписанъ шестиугольникъ. Прямая AD будетъ, слѣдовательно, общею хордою всѣхъ трехъ линій. Въ силу предыдущаго предложенія три другія общія хорды, которыя имѣютъ эти линіи между собою попарно, должны проходить черезъ одну точку. Эти общія хорды суть: BC, EF и LN. Слѣдовательно, точка M пересѣченія двухъ первыхъ лежитъ на третьей, что и доказываетъ теорему.

367. Теорема Паскаля даетъ весьма простой способъ построенія точекъ линіи второго порядка въ какомъ угодно числѣ, когда извѣстны пять ея точекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что даны пять точекъ: A, B, C, D и E (фиг. 90). Проведемъ черезъ точку A въ произвольномъ направленіи прямую до встрѣчи въ точкѣ L съ прямою CD. Затѣмъ соединимъ прямою линіей эту точку съ точкою N пересѣченія прямыхъ AB и DE и найдемъ точку M ея пересѣченія съ прямою BC. Проведя, наконецъ, прямую черезъ точки M и E, получимъ при пересѣченіи ея съ прямою AL шестую точку F линіи второго порядка, проходящей черезъ пять данныхъ точекъ.

Измѣняя направленіе прямой AL, можно такимъ же точно образомъ построить сколько угодно точекъ той же кривой и притомъ сколь угодно близкихъ между собою.

368. Свойство, выражаемое теоремой Паскаля, не зависитъ отъ расположенія на кривой шести точекъ, составляющихъ вершины шестиугольника. Слѣдовательно, она имѣетъ мѣсто и тогда, когда нѣкоторыя изъ этихъ точекъ совпадаютъ. Въ такихъ случаяхъ стороны шестиугольника, соединяющія эти точки, обращаются въ касательныя.

Отсюда заключаемъ, что стороны четыреугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, и двѣ касательныя въ его вершинахъ составляютъ шестиугольникъ, вписанный въ эту кривую. Поэтому, на основаніи теоремы Паскаля, приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Двѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четыреугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, и двѣ точки пересѣченія касательныхъ въ противоположныхъ вершинахъ этого четыреугольника лежатъ на одной прямой.

Точно также частный случай теоремы Паскаля представляетъ доказанное выше предложеніе о точкахъ пересѣченія сторонъ треугольника, вписаннаго въ кривую второго порядка, съ касательными въ противоположныхъ вершинахъ (см. стр. 272).

369. Положимъ теперь, что намъ даны три кривыя второго порядка, имѣющія двойное соприкосновеніе съ четвертой. Пусть $S=0$ будетъ уравненіе послѣдней изъ этихъ кривыхъ, а $U=0$, $V=0$, $W=0$ уравненія трехъ хордъ прикосновенія.

Въ такомъ случаѣ уравненія трехъ первыхъ кривыхъ будутъ

$$S-kU^2=0\,,\quad S-lV^2=0\,,\quad S-mW^2=0\,.\quad .\quad .\quad .\qquad (2)$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго, получимъ уравненіе

$$kU^2-lV^2=0\,,$$

выражающее совокупность двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки пересѣченія первой и второй кривой, т. е. совокупность двухъ общихъ хордъ этихъ кривыхъ.

Точно такъ же находимъ, что уравненія

$$lV^2-mW^2=0 \qquad \text{и} \qquad mW^2-kU^2=0$$

выражаютъ двѣ пары общихъ хордъ третьей изъ кривыхъ (2) съ двумя первыми.

Такимъ образомъ, всего будемъ имѣть шесть общихъ хордъ, уравненія которыхъ, взятыя въ отдѣльности, могутъ быть соединены въ слѣдующія четыре группы:

1) $U\sqrt{k}-V\sqrt{l}=0,\ V\sqrt{l}-W\sqrt{m}=0,\ W\sqrt{m}-U\sqrt{k}=0,$

2) $U\sqrt{k}-V\sqrt{l}=0,\ V\sqrt{l}+W\sqrt{m}=0,\ W\sqrt{m}+U\sqrt{k}=0,$

3) $U\sqrt{k}+V\sqrt{l}=0,\ V\sqrt{l}-W\sqrt{m}=0,\ W\sqrt{m}+U\sqrt{k}=0,$

4) $U\sqrt{k}+V\sqrt{l}=0,\ V\sqrt{l}+W\sqrt{m}=0,\ W\sqrt{m}-U\sqrt{k}=0.$

Въ каждой изъ этихъ группъ находятся уравненія трехъ хордъ, принадлежащихъ каждымъ двумъ изъ кривыхъ (2) и, какъ показываетъ самый видъ уравненій, эти три хорды проходятъ черезъ одну точку.

Такимъ образомъ, получается слѣдующее предложеніе:

Если три линіи второго порядка имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертой, то общія хорды этихъ трехъ линій пересѣкаются по три въ одной точкѣ.

370. Отсюда, какъ слѣдствіе, получается теорема Бріаншона, состоящая въ слѣдующемъ:

Прямыя линіи, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника, описаннаго около кривой второго порядка, проходятъ черезъ одну точку.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая совокупность двухъ противоположныхъ сторонъ шестиугольника, какъ линію второго порядка, имѣющую съ данной двойное соприкосновеніе, будемъ имѣть, что всѣ шесть сторонъ представляютъ три такихъ линіи. Слѣдовательно, прямыя, соединяющія противоположныя вершины, будучи общими хордами каждыхъ двухъ изъ этихъ линій, должны проходить черезъ одну точку.

371. Теорема Бріаншона, указывая на зависимость между шестью какими бы ни было касательными къ кривой второго порядка, даетъ способъ построенія касательныхъ къ кривой въ какомъ угодно числѣ, когда дано пять касательныхъ. Это построеніе аналогично съ построеніемъ точекъ кривой на основаніи теоремы Паскаля.

Въ случаѣ, когда двѣ стороны описаннаго шестиугольника совпадаютъ, ихъ точка пересѣченія, т. е. одна изъ вершинъ шестиугольника, дѣлается точкою прикосновенія. Вслѣдствіе этого изъ теоремы Бріаншона выводимъ слѣдующее заключеніе:

Двѣ прямыя, соединяющія противоположныя вершины описаннаго около кривой второго порядка четыреугольника, и двѣ прямыя, соединяющія точки прикосновенія противоположныхъ сторонъ этого четыреугольника, сходятся въ одной точкѣ.

Подобнымъ же образомъ, какъ слѣдствіе теоремы Бріаншона, получается доказанное выше предложеніе о прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника, описаннаго около кривой второго порядка, съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ (см. стр. 273).

372. Теорема Бріаншона можетъ быть сама выведена изъ теоремы Паскаля посредствомъ слѣдующихъ соображеній.

Если въ вершинахъ шестиугольника $ABCDEF$ (фиг. 90), вписаннаго въ кривую второго порядка, построимъ касательныя, то получимъ шестиугольникъ, описанный около этой кривой. Оба эти шестиугольника будутъ, очевидно, таковы, что стороны каждаго суть, по отношенію къ кривой, поляры вершинъ другого. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя, соединяющія противоположныя вершины описаннаго шестиугольника, суть поляры точекъ L, M, N пересѣченія противоположныхъ сторонъ вписаннаго. Слѣдовательно, эти три прямыя должны проходить черезъ одну точку, именно черезъ полюсъ прямой LMN.

373. Двѣ какія бы то ни было фигуры, находящіяся между собою въ такой зависимости, что прямыя, принадлежащія одной, суть поляры, относительно какой-либо кривой второго порядка, точекъ, принадлежащихъ другой, называются *взаимными полярами*. Таковы въ приведенныхъ соображеніяхъ вписанный и описанный шестиугольники.

Способъ доказательства, состоящій, подобно предыдущему, въ заключеніи о свойствахъ одной изъ взаимныхъ поляръ по свойствамъ другой, называется *методомъ взаимныхъ поляръ*. Въ сущности онъ представляетъ лишь болѣе конкретную форму примѣненія закона двойственности, о которомъ мы говорили выше (см. стр. 88).

Основываясь на этомъ законѣ, мы могли бы самое аналитическое доказательство теоремы Бріаншона представить совершенно въ такомъ же видѣ, какъ и доказательство теоремы Паскаля, или обратно. Для этого нужно было бы только за элементъ, опредѣляемый координатами, принимать не точку, а прямую линію.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
32	13 снизу	Путь	Пусть
33	5 сверху	неизмѣлемость	неизмѣняемость
46	1 снизу	$M'H - N'K$	$M'H = N'K$
67	2 снизу	$(1+u_1u_2)-(u_1+u_2)\cos\omega$	$(1+u_1u_2)+(u_1+u_2)\cos\omega$
68	5 и 8 сверху	$(A+C)+B\cos\omega$	$(A+C)-B\cos\omega$
119	6 и 15 сверху	$+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$	$=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F.$