

Полную энтропию тела можно написать в четырехмерном виде как интеграл

$$\int \sigma_i dS_i,$$

взятый по гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство (см. § 28). В § 29 мы видели, что условием сохранения такого интеграла являлось бы уравнение $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$. Из приведенного в § 29 вывода видно, что условием его монотонного возрастания является уравнение

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \geq 0. \quad (35,6)$$

Это уравнение и выражает собой закон возрастания энтропии. Интеграл $\int \sigma_i dS_i$, взятый по некоторой гиперповерхности, меньше (или равен) такого же интеграла, взятого по любой гиперповерхности, не пересекающей данной и лежащей от нее в положительном направлении оси времени.

У идеальной жидкости в (35,6) стоит знак равенства. Соответственно этому при рассмотрении возрастания энтропии нельзя писать просто $\sigma_i = n\sigma_i$ (где σ — энтропия, отнесенная к одной частице), а необходимо учитывать также и наличие потока тепла. Именно, в системе отсчета, где данный элемент потока покоится, поток энтропии надо положить равным потоку тепла, деленному на температуру.

ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ ПОЛЕ

§ 36. Закон Кулона ✓

Для постоянного электрического или, как говорят, электростатического поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (36,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (36,2)$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через один только скалярный потенциал посредством соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (36,3)$$

Подставляя (36,3) в (36,1), мы находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (36,4)$$

Это уравнение носит название уравнения Пуассона. В частности, в пустоте, т. е. там, где $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (36,5)$$

Из последнего уравнения следует, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того, чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть выполнено (36,5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиусу-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e . Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (36,1) в интегральной форме (30,5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R , проведенную вокруг заряда e , равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда мы находим

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

В векторном виде поле $\mathbf{E}$ можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \quad (36,6)$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния от этого заряда. Это — так называемый закон Кулона. Потенциал этого поля есть, очевидно,

$$\varphi = \frac{e}{R}. \quad (36,7)$$

Если мы имеем систему зарядов, то поле, создаваемое этой системой, равно согласно принципу суперпозиции сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{R_A},$$

где R_A — расстояние от заряда e_A до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ρ , то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (36,8)$$

где R — расстояние от элемента объема dV до данной точки.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36,4) значений ρ и φ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ и $\varphi = e/R$. Мы находим тогда

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (36,9)$$

§ 37. Электростатическая энергия зарядов

Рассмотрим систему зарядов и определим ее энергию. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (31,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

где E есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда $E = -\text{grad } \varphi$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int E \text{ grad } \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(E\varphi) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{div } E dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от $E\varphi$ по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл $\text{div } E = 4\pi\rho$ (36,1), находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV. \quad (37,1)$$

Для системы точечных зарядов e_A можно вместо интеграла написать сумму по зарядам

$$U = \frac{1}{2} \sum_A e_A \varphi_A, \quad (37,2)$$

где φ_A — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд e_A .

Согласно закону Кулона, если применить полученную формулу к одной элементарной заряженной частице (скажем электрону) и полю, производимому им самим, мы приходим к выводу, что заряд должен обладать некоторой „собственной“ потенциальной энергией, равной $e\varphi/2$, где φ — потенциал производимого заряда поля в месте, где он сам находится. Но мы знаем (см. § 8), что в теории относительности всякую элементарную частицу надо рассматривать как точечную. Потенциал же $\varphi = e/R$ его поля в точке $R=0$ обращается в бесконечность. Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной „собственной“ энергией, а следовательно, и бесконечной массой (равной энергии, деленной на c^2). Физическая бессмысленность этого результата указывает на то, что уже основные принципы самой электродинамики приводят к тому, что ее применимость должна быть ограничена определенными пределами.

Заметим, что в виду бесконечности получающихся из электродинамики „собственной“ энергии и массы в электродинамике нельзя поставить вопроса о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией частицы).

Поскольку возникновение не имеющей физического смысла бесконечной собственной энергии элементарной частицы связано с тем, что такую частицу надо рассматривать как точечную, мы можем заключить, что электродинамика теряет свою применимость при переходе к очень малым размерам. Можно поэтому поставить вопрос о том, до расстояний какого порядка величины применима электродинамика. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить значение порядка величины энергии покоя mc^2 .

Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами R_0 , то его собственная потенциальная энергия была бы порядка e^2/R_0 . Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка, $e^2/R_0 \sim mc^2$, находим

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (37,3)$$

Эти размеры (их называют „радиусом“ электрона) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов. Надо, впрочем, иметь в виду, что в действительности пределы излагаемой здесь электродинамики (ее обычно называют „классической“) лежат еще гораздо выше благодаря квантовым явлениям.

Вернемся снова к формуле (37,2). Стоящие в ней потенциалы φ_A , согласно закону Кулона, равны

$$\varphi_A = \sum \frac{e_B}{R_{AB}}, \quad (37,4)$$

где R_{AB} — расстояние между зарядами e_A , e_B . Выражение для энергии (37,2) состоит из двух частей. Во-первых, оно содержит бесконечную постоянную — „собственную“ энергию зарядов, — не зависящую от их взаимного расположения. Вторая часть есть энергия взаимодействия зарядов, зависящая от их расположения. Только эта часть и имеет, очевидно, физический интерес. Она равна

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_A \varphi'_A, \quad (37,5)$$

где

$$\varphi'_A = \sum_{A \neq B} \frac{e_B}{R_{AB}} \quad (37,6)$$

есть потенциал в точке нахождения e_A , создаваемый всеми зарядами, кроме e_A . Иначе можно написать

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} \quad (37,7)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \quad (37,8)$$

§ 38. Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое зарядом e , движущимся равномерно со скоростью V . Неподвижную систему отсчета будем называть системой K ; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, — системой K' . Пусть заряд находится в начале координат системы K' ; система K' движется относительно K параллельно оси X ; оси Y и Z параллельны Y' и Z' . В момент времени $t = 0$ начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе K , следовательно, суть $x = Vt$, $y = z = 0$. В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом A' и скалярным, равным $\varphi' = e/R'$, где $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. В системе K согласно (22,1) при $A' = 0$:

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (38,1)$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x , y , z в системе K . Согласно формулам преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

и отсюда

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (38,2)$$

Подставляя это в (38,1), находим

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \quad (38,3)$$

где введено обозначение

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \quad (38,4)$$

Векторный потенциал в системе K [см. (22,1)] равен

$$A = \frac{eV}{cR^*}. \quad (38,5)$$

В системе K' магнитное поле H' отсутствует, а электрическое

$$E' = \frac{eR'}{R'^3}.$$

По формулам (22,5) находим

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя сюда R' , x' , y' , z' , выраженные через x , y , z , находим

$$E = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{eR}{R^{*3}}, \quad (38,6)$$

где R — радиус-вектор от заряда e к точке с координатами x, y, z , где мы ищем поле (его компоненты равны $x - Vt, y, z$).

Это выражение для E можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиусом-вектором R . Очевидно, что $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$, и потому R^{*2} (38,4) можно написать в виде

$$R^{*2} = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right). \quad (38,7)$$

Тогда для E имеем

$$E = \frac{eR}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}. \quad (38,8)$$

Магнитное поле в системе K равно $H = \frac{1}{c} [VE]$ [см. (22,8)]. Для скоростей $V \ll c$ имеем приближенно из (38,6) $E = \frac{eR}{R^3}$, и потому

$$H = \frac{e}{c} \frac{[VR]}{R^3}. \quad (38,9)$$

§ 39. Движение в кулоновском поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле, создаваемом другим зарядом e' ; мы предполагаем, что масса этого другого заряда настолько больше массы m , что его можно считать неподвижным. Тогда задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметрическом электрическом поле с потенциалом $\varphi = e'/r$.

Энергия (полная) $\mathcal{E}$ частицы равна [см. (23,5)]:

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{ee'}{r}.$$

Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения частицы, то для импульса можно, как известно из механики, написать $p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$, где p_r — радиальная компонента импульса, а M — постоянный момент импульса частицы. Тогда

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2 c^2} + \frac{ee'}{r}. \quad (39,1)$$

Выясним вопрос о том, может ли частица при своем движении приближаться сколь угодно близко к центру. Прежде всего очевидно, что это во всяком случае невозможно, если заряды e и e' отталкиваются, т. е. e и e' — одного знака. Далее, в случае притяжения (e и e' имеют различные знаки) неограниченное приближение к центру невозможно, если $Mc > |ee'|$; действительно, в этом случае первый член в (39,1) всегда больше второго, и при $r \rightarrow 0$ правая сторона этого уравнения стремилась бы к бесконечности. Напротив, если $Mc < |ee'|$, то при

$r \rightarrow 0$ это выражение может оставаться конечным (при этом, конечно, стремиться к бесконечности p_r). Таким образом, если

$$cM < |ee'|, \quad (39,2)$$

то частица при своем движении „падает“ на притягивающий ее заряд, — в противоположность тому, что в нерелятивистской механике такое падение вообще невозможно (за исключением только случая $M=0$, когда частица e летит прямо на частицу e').

Задачи

1. Определить траекторию заряда e , движущегося в кулоновском поле с потенциалом e'/r .

Решение: Выберем полярные координаты r, φ в плоскости движения. Уравнение Гамильтона-Якоби (23,9) имеет вид

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{ee'}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Ищем S в виде

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + f(r),$$

где $\mathcal{E}$ и M — постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы. В результате находим

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - \frac{a}{r}}{c} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} \cdot dr,$$

где $a = ee'$. Траектория определяется уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}$. Интегрирование приводит к следующим результатам:

а) если $Mc > |a|$:

$$(c^2 M^2 - a^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - a^2)} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 M^2} - \mathcal{E}a};$$

б) если $Mc < |a|$:

$$(a^2 - c^2 M^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2 c^2 (a^2 - M^2 c^2)} \operatorname{ch} \varphi \sqrt{\frac{a^2}{c^2 M^2} - 1 + \mathcal{E}a};$$

с) если $Mc = |a|$:

$$\frac{2\mathcal{E}a}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 - \varphi^2 \left(\frac{\mathcal{E}a}{cM} \right)^2.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы при рассеянии частиц кулоновским полем.

Решение: Эффективное сечение $d\sigma$ есть отношение числа частиц, рассеянных (в 1 сек.) в данный элемент do телесного угла к плотности рассеиваемого потока частиц (т. е. к числу частиц, проходящих в 1 сек. через 1 см² площади поперечного сечения пучка частиц).

Поскольку угол χ отклонения частицы при ее пролетании через поле определяется „прицельным расстоянием“ ρ (т. е. расстоянием от центра до прямой, по которой двигался бы заряд в отсутствии поля), то

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{d\chi}{\sin \chi},$$

где $do = 2\pi \sin \chi d\chi$. Угол отклонения (если он мал) можно считать равным отношению приращения импульса к его первоначальному значению. Приращение импульса равно интегралу по времени от силы, действующей на заряд.

Компонента этой силы, перпендикулярная к направлению движения, приближенно равна $\frac{a}{r^2} \frac{\rho}{r}$. Таким образом, имеем

$$\chi = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \rho dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{a}{\rho v}$$

(v — скорость частиц). Отсюда находим эффективное сечение для малых χ :

$$d\sigma = 4 \left(\frac{a}{\rho v} \right)^2 \frac{d\omega}{\chi^4}.$$

§ 40. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях от этой системы, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с расстояниями между отдельными зарядами системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиусы-векторы отдельных зарядов пусть будут $\mathbf{r}_A$. Определим потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиусом-вектором $\mathbf{R}_0$. Согласно результатам § 36 потенциал этого поля равен

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|} \quad (40,1)$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ суть радиусы-векторы от зарядов e_A к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших $\mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_A$). Для этого разложим (40,1) в ряд по степеням $\mathbf{r}_A/\mathbf{R}_0$, воспользовавшись формулой

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \cdot \text{grad } f(\mathbf{R}_0)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца вектора $\mathbf{R}_0$). С точностью до членов первого порядка

$$\varphi = \frac{\sum e_A}{R_0} - \sum e_A \mathbf{r}_A \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0}. \quad (40,2)$$

Сумма

$$\mathbf{d} = \sum e_A \mathbf{r}_A \quad (40,3)$$

носит название дипольного момента системы зарядов. Существенно отметить, что если сумма $\sum e_A$ всех зарядов равна нулю, то дипольный момент $\mathbf{d}$ не зависит от выбора начала координат. Действительно, радиусы-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}'_A$ одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом посредством соотношения

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор. Поэтому, если $\sum e_A = 0$, то дипольный момент в обеих системах

$$\mathbf{d}' = \sum e_A \mathbf{r}'_A = \sum e_A \mathbf{r}_A + \mathbf{a} \sum e_A = \mathbf{d}.$$

Если обозначить посредством e_A^+ , r_A^+ и $-e_A^-$, r_A^- положительные и отрицательные заряды системы и их радиусы-векторы, то можно написать дипольный момент в виде

$$\mathbf{d} = \sum e_A^+ \mathbf{r}_A^+ - \sum e_A^- \mathbf{r}_A^- = \mathbf{R}^+ \sum e_A^+ - \mathbf{R}^- \sum e_A^-, \quad (40,4)$$

где

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_A^+ \mathbf{r}_A^+}{\sum e_A^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_A^- \mathbf{r}_A^-}{\sum e_A^-} \quad (40,5)$$

суть радиусы-векторы „центров зарядов“ — положительных и отрицательных. Если $\sum e_A^+ = \sum e_A^- = e$, то

$$\mathbf{d} = e \mathbf{R}_{+-}, \quad (40,6)$$

где $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ есть радиус-вектор от центра отрицательных к центру положительных зарядов. В частности, если имеются всегда два заряда, то $\mathbf{R}_{+-}$ есть радиус-вектор между ними.

Если сумма $\sum e_A = 0$, то потенциал поля такой системы на больших расстояниях выглядит, как

$$\varphi = \frac{dR_0}{R_0^3} \quad (40,7)$$

(мы подставляем $\text{grad} \frac{1}{R_0} = -\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}$). Зная потенциал, можно найти поле $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi = -\text{grad} \frac{dR_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \text{grad} (dR_0) - (dR_0) \text{grad} \frac{1}{R_0^3}.$$

Согласно формуле $\text{grad} (dR_0) = \mathbf{d}$ и замечая, что $\text{grad} \frac{1}{R_0^3} = -\frac{3\mathbf{R}_0}{R_0^5}$, находим для поля $\mathbf{E}$ выражение

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{R}_0 \mathbf{d}) R_0 - R_0^2 \mathbf{d}}{R_0^5}. \quad (40,8)$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой зарядов с $\sum e_A = 0$, обратно пропорционален квадрату расстояния от системы, а напряженность поля — кубу расстояния.

§ 41. Мультipoльный момент

В разложении потенциала по степеням $1/R_0$

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} + \dots$$

член $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^n$. Мы видели, что первый член $\varphi^{(1)}$ определяется суммой всех зарядов; второй $\varphi^{(2)}$, называемый иногда дипольным потенциалом системы, определяется дипольным моментом системы.

Третий член разложения $\varphi^{(3)}$ равен, очевидно,

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}, \quad (41,1)$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α — компоненты вектора $\mathbf{r}$, а X_α — вектора $\mathbf{R}_0$.

Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(3)}$.

В выражение (41,1) входит шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \frac{\partial^2}{\partial X_\beta^2} \frac{1}{R_0} = 0.$$

Это равенство можно написать в виде

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0.$$

Мы можем, поэтому, написать $\varphi^{(3)}$ в виде

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (41,2)$$

называется квадрупольным моментом системы.

Из определения $D_{\alpha\beta}$ вытекает, что сумма его диагональных компонент

$$D_{\alpha\alpha} = 0. \quad (41,3)$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет поэтому всего пять независимых компонент. С помощью $D_{\alpha\beta}$ можно написать

$$\varphi^{(3)} = D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \quad (41,4)$$

Совершенно аналогично можно было бы написать следующие члены разложения φ . n -ый член определяется тензором n -го ранга, составленным из зарядов и компонент их радиусов-векторов; эти тензоры называют мультипольными моментами системы.

§ 42. Система зарядов во внешнем поле ✓

Мы рассмотрим теперь систему зарядов $e_1, e_2, \dots$, находящуюся во внешнем электрическом поле. Посредством φ_A мы будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля в точке, где находится заряд e_A . Потенциальная энергия каждого из зарядов есть $e_A \varphi_A$; полная

потенциальная энергия системы

$$U = \sum e_A \varphi_A.$$

Выберем опять систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор заряда e_A в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням $\mathbf{r}_A$. В этом разложении

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

первый член есть

$$U^{(1)} = \varphi_0 \sum e_A, \quad (42,1)$$

где φ_0 — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке (в начале координат).

Второй член разложения

$$U^{(2)} = \text{grad } \varphi_0 \cdot \sum e_A \mathbf{r}_A.$$

$\text{grad } \varphi_0$ есть значение градиента потенциала в начале координат; поскольку $\text{grad } \varphi = -\mathbf{E}$, то это есть не что иное, как напряженность $\mathbf{E}_0$ поля в начале координат. Вводя дипольный момент $\mathbf{d}$ системы, имеем

$$U^{(2)} = -\mathbf{d} \mathbf{E}_0. \quad (42,2)$$

Для однородного поля выражение $U^{(2)}$ вытекает также и непосредственно из выражения (17,3) для потенциала.

Следующий член разложения $U^{(3)}$ равен

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Здесь мы, как и в § 41, опустили индексы, указывающие номер заряда; $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ — значения вторых производных от потенциала в начале координат; но потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Поэтому мы можем написать $U^{(3)}$ в виде

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e (x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2),$$

или

$$U^{(3)} = D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (42,3)$$

где $D_{\alpha\beta}$ — компоненты квадрупольного момента (см. § 41).

Предположим, что мы имеем две системы зарядов с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.

Их взаимное расстояние при этом велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциальную энергию U их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -d_2 E_1,$$

где E_1 — поле первой системы. Подставляя для E_1 выражение (40,8), находим

$$U = \frac{(d_1 d_2) R^2 - 3(d_1 R)(d_2 R)}{R^3}, \quad (42,4)$$

где R — вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна e), получаем аналогичным образом

$$U = e \frac{dR}{R^3}, \quad (42,5)$$

где R — вектор, направленный от диполя (системы с равной нулю суммой зарядов) к заряду (системе с суммой зарядов, равной e). Мы не будем выводить аналогичных выражений для взаимодействия квадруполя (системы с равными нулю полным зарядом и дипольным моментом) с зарядом, диполем и квадруполем; укажем только, что соответствующие потенциальные энергии обратно пропорциональны 3-й, 4-й и 5-й степеням расстояния R .

§ 43. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими стационарное движение. Под этим подразумевается, что заряды при своем движении не приходят из бесконечности и не уходят в бесконечность, а движутся все время в некоторой конечной области пространства. Кроме того, предположим, что импульсы всех зарядов тоже остаются все время конечными. Тогда все величины меняются только в конечных интервалах своих значений, и представляет интерес рассматривать средние (по времени) их значения. В частности, мы можем рассмотреть среднее магнитное поле $\bar{H}$, создаваемое зарядами, которое будет теперь уже функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того, чтобы найти уравнения, определяющие среднее поле H , усредним по времени уравнения Максвелла $\operatorname{div} H = 0$ и $\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j$. Первое из них дает просто

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0. \quad (43,1)$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\frac{\partial E}{\partial t}$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале,

равно нулю¹⁾. Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (43,2)$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле $\bar{\mathbf{H}}$.

Введем средний векторный потенциал $\bar{\mathbf{A}}$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{H}}.$$

Подставим это в уравнение (43,2). Поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$, мы находим

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} - \Delta \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определен неоднозначно, и поэтому на него можно наложить любое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал $\bar{\mathbf{A}}$ так, чтобы

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0. \quad (43,3)$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (43,4)$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (43,4) вполне аналогично уравнению Пуассона (36,4) для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причем вместо плотности заряда ρ стоит плотность тока $\bar{\mathbf{j}}/c$. По аналогии с решением (36,6) уравнения Пуассона мы можем непосредственно написать

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV, \quad (43,5)$$

где R — расстояние от точки, в которой мы ищем $\bar{\mathbf{A}}$ до элемента объема dV .

В формуле (43,5) можно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо $\bar{\mathbf{j}}$ произведение $\rho \mathbf{v}$ и помня, что все заряды точечные. При этом необходимо иметь в виду, что в интеграле (43,5) R является просто переменной интегрирования и потому, конечно, не подвергается

¹⁾ Пусть f есть такая величина. Тогда среднее значение производной $\frac{df}{dt}$ за некоторый интервал времени T есть

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Поскольку $f(t)$ меняется только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении T среднее значение $\frac{df}{dt}$ действительно стремится к нулю.

усреднению. Если же написать вместо интеграла $\int \frac{\mathbf{j}}{R} dV$ сумму $\sum \frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}$, то R_A здесь являются радиусами-векторами отдельных частиц, меняющихся при движении зарядов. Поэтому надо писать

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}}, \quad (43,6)$$

где усредняется все выражение, стоящее под чертой.

Зная $\mathbf{A}$, можно найти и магнитное поле

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}} = \text{rot } \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV.$$

Операция rot производится по координатам точки, в которой мы ищем поле. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать $\mathbf{j}$ постоянным. Применяя известную формулу

$$\text{rot } f\mathbf{a} = f \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } f, \mathbf{a}],$$

где f и $\mathbf{a}$ — любые скаляр и вектор, к произведению $\bar{\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{R}$, находим

$$\text{rot } \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} = \left[\text{grad } \frac{1}{R}, \bar{\mathbf{j}} \right] = \frac{[\bar{\mathbf{j}}, \mathbf{R}]}{R^3},$$

и, следовательно,

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\bar{\mathbf{j}}, \mathbf{R}]}{R^3} dV \quad (43,7)$$

(радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку, где определяется поле). Это так называемый закон Био и Савара.

§ 44. Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с размерами самой системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали в § 39. Обозначим опять радиусы-векторы отдельных зарядов посредством $\mathbf{r}_A$, а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, посредством $\mathbf{R}_0$. Тогда $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ есть радиус-вектор от заряда e_A к точке, где определяется поле. Согласно (43,6) мы имеем для векторного потенциала:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|}}. \quad (44,1)$$

Как и в § 40, разложим это выражение по степеням $\mathbf{r}_A$. С точностью до членов первого порядка (опуская для краткости индекс A).

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c R_0} \sum e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e \mathbf{v} \left(\mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right).$$

В первом члене можно написать

$$\sum e \bar{v} = \frac{d}{dt} \sum e r.$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины $\sum e r$ равно нулю (см. § 43). Таким образом, для $\bar{A}$ остается выражение

$$\bar{A} = \frac{1}{cR_0^3} \sum e v (r R_0)$$

(мы подставили сюда $\nabla \frac{1}{R_0} = -\frac{R_0}{R_0^3}$).

Это выражение преобразуем следующим образом. Замечая, что $v = \dot{r}$, мы можем написать (помня, что R_0 есть постоянный вектор)

$$\sum e (R_0 r) v = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e r (r R_0) + \frac{1}{2} \sum e [v (r R_0) - r (v R_0)].$$

При подстановке этого выражения в $\bar{A}$ среднее значение от первого члена (с производной по времени) опять обратится в нуль, и мы получим

$$\bar{A} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e [v (r R_0) - r (v R_0)].$$

Введем вектор

$$m = \frac{1}{2c} \sum e [rv], \quad (44,2)$$

называемый магнитным моментом системы. Тогда для $\bar{A}$ мы получим выражение

$$\bar{A} = \frac{[m R_0]}{R_0^3}. \quad (44,3)$$

Зная векторный потенциал, легко найти магнитное поле. С помощью формулы

$$\text{rot } [ab] = (b \nabla) a - (a \nabla) b + a \text{ div } b - b \text{ div } a$$

находим

$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A} = \text{rot } \left[\frac{m R_0}{R_0^3} \right] = m \text{ div } \frac{R_0}{R_0^3} - (m \nabla) \frac{R_0}{R_0^3}.$$

Далее,

$$\text{div } \frac{R_0}{R_0^3} = R_0 \text{ grad } \frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3} \text{ div } R_0 = 0$$

и

$$(m \nabla) \frac{R_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (m \nabla) R_0 + R_0 \left(m \nabla \frac{1}{R_0^3} \right) = \frac{m}{R_0^3} - \frac{3 R_0 (m R_0)}{R_0^5}.$$

Таким образом,

$$\bar{H} = \frac{3 R_0 (\bar{m} R_0) - \bar{m} R_0^2}{R_0^5}. \quad (44,4)$$

Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, как электрическое поле через дипольный момент [см. (40,8)].

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc} \sum m [\mathbf{rv}].$$

Если скорости всех зарядов $v \ll c$, то mv есть импульс $\mathbf{p}$ заряда, и мы получаем

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc} \sum [\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}, \quad (44,5)$$

где $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/2mc$.

В § 17 мы видели, что функция Лагранжа для заряда в постоянном магнитном поле есть

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c} [\mathbf{Hr}] v = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c} [\mathbf{rv}] \mathbf{H}$$

[см. (17,6)]. Таким образом, дополнительный член L_H в функции Лагранжа, обусловленный постоянным магнитным полем, есть

$$L_H = \mathbf{mH}, \quad (44,6)$$

где $\mathbf{m}$ — магнитный момент заряда. Такой же вид он имеет, очевидно, и для системы зарядов, где тогда $\mathbf{m}$ будет магнитным моментом всей системы. Обращаем внимание на аналогию с электрическим полем — в однородном электрическом поле функция Лагранжа системы зарядов с общим зарядом, равным нулю, содержит член

$$L_E = \mathbf{dE}$$

($\mathbf{d}$ — дипольный момент), являющийся в этом случае потенциальной энергией системы зарядов, взятой с обратным знаком (см. § 42).

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 45. Уравнение д'Аламбера

Электромагнитное поле в пустоте определяется уравнениями Максвелла, в которых надо положить $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Выпишем эти уравнения еще раз:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (45,1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (45,2)$$

Эти уравнения могут иметь отличное от нуля решение. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов.

Электромагнитные поля, существующие в пустоте в отсутствии зарядов, называют электромагнитными волнами. Мы займемся теперь исследованием свойств таких полей.

Раньше всего отметим, что такие электромагнитные поля в отсутствии зарядов необходимо должны быть переменными. Действительно, в противном случае $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ и уравнения (45,1—2) переходят в уравнения (36,1—2) и (43,1—2) постоянного поля, в которых, однако, теперь $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Но решения этих уравнений, определенные формулами (36,8) и (43,5), при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ обращаются в нуль.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы электромагнитных волн.

Как мы уже знаем, в силу неоднозначности потенциалов всегда можно наложить на них некоторое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциалы электромагнитных волн так, чтобы для скалярного потенциала осуществлялось равенство

$$\varphi = 0. \quad (45,3)$$

Тогда $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Подставляя оба эти выражения в первое из уравнений (45,2), находим

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (45,4)$$

Несмотря на то, что мы уже наложили одно дополнительное условие на потенциалы, потенциал $\mathbf{A}$ все же еще не вполне однозначен. Именно, к нему можно прибавить градиент любой не зависящей от времени функции (без изменения при этом φ). В частности, можно выбрать потенциал электромагнитной волны таким образом, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (45,5)$$

Действительно, подставляя $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ в $\text{div } \mathbf{E} = 0$, имеем $\text{div } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = 0$, т. е. $\text{div } \mathbf{A} = \text{const.}$ Эту постоянную всегда можно сделать равной нулю прибавлением к $\mathbf{A}$ градиента от соответствующей не зависящей от времени функции.

Уравнение (45,4) приобретает теперь вид

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (45,6)$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы электромагнитных волн. Оно называется уравнением д'Аламбера или волновым уравнением.

Применяя к этому уравнению операции rot и $\frac{\partial}{\partial t}$, можно убедиться в том, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют таким же самым волновым уравнениям.

Оператор $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют оператором д'Аламбера и обозначают посредством знака $\square$:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (45,7)$$

так что волновое уравнение можно написать в виде

$$\square f = 0, \quad (45,8)$$

где f есть любая из компонент **A**, **E** или **H**. Оператор д'Аламбера можно написать в четырехмерном виде; очевидно, что

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (45,9)$$

§ 46. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, при котором поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются плоскими. В этом случае уравнения поля приобретают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (46,1)$$

где под f подразумевается или любая компонента векторов **E** или **H**.

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

так что уравнение для f приобретает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , находим

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя еще раз, находим $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$f = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (46,2)$$

Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $f = f_1(x - ct)$. Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const.}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x .

Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const.}$, т. е.

$$x = \text{const.} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке x пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси X от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси X со скоростью, равной скорости света c .

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси X . Легко сообразить, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном направлении оси X .

В § 45 было показано, что можно потенциал электромагнитной волны выбрать так, чтобы $\varphi = 0$, причем $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом. Условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$ дает в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$$

поскольку все величины не зависят от y и z . Имея также в виду, что A_x содержит время t только в комбинации $x \pm ct$ с координатой x , мы видим отсюда, что $A_x = \text{const.}$, причем постоянная может всегда быть выбрана равной нулю, так как аддитивные постоянные в потенциалах вообще не имеют значения (см. § 16).

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси X , т. е. по направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси X ; в такой волне все величины, в частности и $\mathbf{A}$, являются функциями только от $x - ct$. Из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

мы находим поэтому

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}(x - ct)] = [\nabla(x - ct) \mathbf{A}'] = [n \mathbf{A}'], \quad (46,3)$$

где штрих обозначает дифференцирование по $x - ct$, а n — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое равенство во второе, находим

$$\mathbf{H} = [n \mathbf{E}]. \quad (46,4)$$

Мы видим [из $\mathbf{E} = \mathbf{A}'$ и (46,4)], что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют поперечными. Из (46,4) видно, далее, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу.

Кроме того, из того же уравнения (46,4) следует, что электрическое и магнитное поля плоской волны равны друг другу по абсолютной величине.

Найдем еще поток энергии в плоской волне, т. е. ее вектор Пойнтинга. Имеем:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} [n\mathbf{E}]],$$

и поскольку $\mathbf{E}n = 0$, то

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 n = \frac{c}{4\pi} H^2 n.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ есть плотность энергии волны, то можно написать

$$\mathbf{S} = cWn, \quad (46,5)$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

§ 47. Монохроматическая плоская волна

Весьма важным частным случаем электромагнитных волн является волна, в которой поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической.

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси X) поле является функцией только от $x - ct$. Поэтому, если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией от $x - ct$.

Векторный потенциал такой волны можно наиболее просто написать в виде действительной части комплексного выражения

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\} \quad (47,1)$$

(Re обозначает действительную часть). Здесь $\mathbf{A}_0$ есть некоторый постоянный комплексный вектор, ω — некоторая постоянная. Очевидно, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ такой волны будут иметь аналогичный вид:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}, \quad \mathbf{H} = \text{Re} \left\{ \mathbf{H}_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}$$

с той же постоянной ω .

Величина ω называется циклической частотой волны; частотой волны называют величину

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (47,2)$$

ν определяет, очевидно, сколько раз в течение единицы времени в заданной точке пространства поле приобретает одинаковое значение. Величина

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (47,3)$$

называется длиной волны; она равна расстоянию между двумя ближай-

шими точками вдоль оси X , в которых в один и тот же момент времени поле одинаково. A_0 называется комплексной амплитудой вектор-потенциала.

Пользование комплексными выражениями оказывается очень удобным в виду линейности уравнений Максвелла. Именно, благодаря этому можно все операции производить не над тригонометрическими, а над более простыми экспоненциальными выражениями и только потом переходить к действительной их части. В дальнейшем мы будем часто пользоваться комплексной формой. При этом всегда будет подразумеваться действительная часть соответствующего комплексного выражения.

Если ввести единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении распространения волны, то (47,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ A_0 e^{-i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{r} \right)} \right\}.$$

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \quad (47,4)$$

называется волновым вектором. Мы имеем, следовательно,

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ A_0 e^{i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)} \right\} \quad (47,5)$$

и аналогичные выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно согласно (46,3) выразить через $\mathbf{A}$; для монохроматической волны получаем из этих формул

$$\mathbf{E} = i c \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i [\mathbf{k} \mathbf{A}]. \quad (47,6)$$

Четырехмерным волновым вектором называется вектор k_i с компонентами

$$k_{1,2,3} = k_{x,y,z}, \quad k_4 = \frac{i\omega}{c}. \quad (47,7)$$

Вводя этот вектор, мы можем написать (47,5) в виде

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ A_0 e^{i k_i x_i} \right\}. \quad (47,8)$$

Квадрат волнового 4-вектора

$$k_i^2 = 0. \quad (47,9)$$

Это соотношение вытекает непосредственно из определений (47,4) и (47,7), а также, если подставить (47,8) в уравнение д'Аламбера:

$$\square \mathbf{A} = 0.$$

Пользуясь волновым 4-вектором, легко вывести формулы преобразования ω и $\mathbf{k}$ из одной системы координат в другую. Общие формулы (6,2) преобразования 4-векторов дают

$$k_4 = \frac{k_4' + i \frac{V}{c} k_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

или, подставляя значения компонент k_i ,

$$\omega = \frac{\omega' + V k'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

но $k_x = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, где α — угол между направлением $\mathbf{k}$ и осью X . Таким образом, мы находим:

$$\omega = \omega' \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (47,10)$$

Это есть точная формула для эффекта Допплера. При $V \ll c$ она переходит в

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right).$$

Для $k_1 = k_x$ имеем

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{V}{c^2} \omega'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

или, подставляя $k_x = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}.$$

Эта формула совпадает с ранее выведенной в § 5 формулой для абберации.

ЗАДАЧА

Определить движение заряда в поле плоской монохроматической волны $A = A_0 \cos \omega(x - ct)$.

Решение: Выбираем ось Y по направлению $\mathbf{A}$; уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c} A_0 \cos \omega(x - ct)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Будем искать S в виде

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma(x + ct) + f(x - ct),$$

где α, β, γ — постоянные, а $f(x - ct)$ — неизвестная функция. В результате находим

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma(x + ct) - \frac{1}{4\gamma} \left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2} \right) (x - ct) + \\ + \frac{aeA_0}{2\gamma\omega} \sin \omega(x - ct) - \frac{e^2 A_0^2}{16\gamma\omega c} \sin 2\omega(x - ct).$$

Для определения движения надо приравнять производные $\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \frac{\partial S}{\partial \beta}, \frac{\partial S}{\partial \gamma}$ некоторым постоянным, которые могут быть выбраны равными нулю путем соот-

ветствующего выбора начала координат и начала отсчета времени. Вводя величину $\eta = \omega(x - ct)$, находим тогда уравнения, определяющие движение в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{8\gamma^2\omega} \left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2} \right) \eta + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2\omega c} \sin \eta - \frac{e^2 A_0^2}{32\gamma^2\omega c^2} \sin 2\eta, \\ y &= \frac{\alpha}{2\gamma\omega} \eta - \frac{e A_0}{2\gamma\omega c} \sin \eta, \quad z = \frac{b}{2\gamma\omega} \eta, \\ ct &= -\frac{1}{8\gamma^2\omega} \left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2} \right) \eta - \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2\omega c} \sin \eta - \frac{e^2 A_0^2}{32\gamma^2\omega c^2} \sin 2\eta. \end{aligned}$$

§ 48. Поляризация

Рассмотрим электрическое поле плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}$$

(все, что будет нами сказано, относится в той же мере и к магнитному полю). $\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор; его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Очевидно, $\mathbf{E}_0$ можно всегда представить в виде

$$\mathbf{E}_0 = b e^{i\alpha},$$

причем выбрать α таким образом, чтобы вектор $\mathbf{b}$ (вообще говоря, тоже комплексный) имел действительный квадрат. Электрическое поле приобретает тогда вид

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ b e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha)} \}. \quad (48,1)$$

Напишем $\mathbf{b}$ в виде $\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2$, где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — два действительных вектора. Поскольку $b^2 = b_1^2 - b_2^2 - 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ должно быть действительным, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, т. е. векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно перпендикулярны. Выберем систему координат с осями Y и Z , параллельными $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ (ось X — по направлению распространения волны). Тогда из (48,1) мы находим

$$\left. \begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha), \\ E_z &= b_2 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (48,2)$$

Заметим, что коэффициенты b_1 и b_2 называются амплитудами волны; выражение, стоящее как аргумент у $\cos$ или $\sin$, называется фазой волны.

Из (48,2) непосредственно следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (48,3)$$

Из этих формул мы видим, что в каждой точке пространства вектор электрического поля такой волны вращается в плоскости, параллельной плоскости YZ , причем его конец описывает эллипс (48,3). Такая волна называется эллиптически поляризованной. Если $b_1 = b_2$,

то эллипс (48,3) превращается в круг, т. е. вектор вращается, оставаясь постоянным по абсолютной величине. В этом случае говорят, что волна поляризована по кругу.

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае прямолинейно поляризованной или поляризованной в плоскости. Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух плоско поляризованных.

§ 49. Спектральное разложение

Всякую волну можно представить в виде наложения ряда монохроматических волн с различными частотами. Математически это означает разложение переменного поля волны в ряд или интеграл Фурье. Такое разложение называют еще спектральным разложением.

Однако, для того, чтобы функцию можно было разложить в ряд Фурье, она должна быть периодична, а для того, чтобы ее можно было разложить в интеграл Фурье, она должна обращаться в нуль в бесконечности. Поэтому, например, разложить в интеграл Фурье по времени (т. е. по частотам) можно только волну, поле которой обращается в нуль при $t = \pm \infty$. Аналогично, разложить в интеграл Фурье по координатам (т. е. по волновым векторам) можно только волну, имеющую конечные размеры в пространстве (точнее, обращющуюся в нуль в бесконечности).

Часто приходится иметь дело со стационарными полями, не меняющимися со временем существенным образом своего характера (в частности, не исчезающими при $t = \infty$) и в то же время не строго периодическими. Будем обозначать посредством f какую-либо из величин, описывающих поле, — любую из компонент векторов A , E , H .

Обычное разложение f в интеграл Фурье по времени теперь невозможно, так как интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t} dt$ расходятся. Однако, и такое поле можно разложить на монохроматические волны следующим образом.

Рассмотрим величину f в некотором большом промежутке времени от $t = -T$ до $t = +T$. В этом промежутке ее можно разложить в ряд Фурье в виде:

$$f(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}} \right\}. \quad (49,1)$$

Если бы мы написали ряд Фурье, как это обычно делается, в виде

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i \frac{k n t}{T}}, \text{ то коэффициенты } f_n \text{ были бы, как известно, равны}$$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f e^{i \frac{\pi n t}{T}} dt. \text{ Поскольку мы вместо этого суммируем по } n \text{ только}$$

от 0 до ∞ и берем затем действительную часть, надо, как легко сообразить, писать коэффициенты f вдвое большими, т. е.

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f e^{i \frac{\pi n t}{T}} dt \quad (49,2)$$

(исключение составляет f_0 , в котором попрежнему надо писать $1/2T$, а не $1/T$; однако, как мы увидим ниже, это обстоятельство не играет роли).

Определим теперь среднюю интенсивность волны (под интенсивностью волны понимают величину, пропорциональную плотности потока энергии в ней; очевидно, что интенсивность определяется квадратом поля), т. е. величину

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f^2 dt.$$

Подставляя сюда (49,1), находим (* обозначает комплексно сопряженную величину):

$$\begin{aligned} \bar{f}^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{4} \sum_{n, m} \operatorname{Re} \left\{ f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}} \right\} \operatorname{Re} \left\{ f_m e^{-i \frac{\pi m t}{T}} \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{4} \sum_{n, m} \left(f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}} + f_n^* e^{i \frac{\pi n t}{T}} \right) \left(f_m e^{-i \frac{\pi m t}{T}} + f_m^* e^{i \frac{\pi m t}{T}} \right) dt. \end{aligned}$$

Но каждый из интегралов $\int_{-T}^T e^{2\pi \frac{t}{T} i n} dt = \frac{T}{2\pi i} (e^{2\pi i n} - e^{-2\pi i n}) = 0$, если $n \neq 0$, и равен $2T$, если $n = 0$. Поэтому мы получаем

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2} \sum_n |f_n|^2 \quad (49,3)$$

[строго говоря, в этой сумме член $|f_0|^2$ не должен иметь коэффициента $1/2$; однако, величиной $\frac{1}{2} |f_0|^2$ можно пренебречь по сравнению с суммой остальных членов в (49,3)].

Введем вместо n переменную $\omega = \pi n/T$. В виду того, что T очень велико, можно тогда заменить в (49,3) суммирование по n интегрированием по ω :

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty |f|^2 \frac{T}{\pi} d\left(n \frac{\pi}{T}\right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty |f|^2 \frac{T}{\pi} d\omega.$$

Наконец, вводя

$$f_\omega = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T}^{+T} f e^{i\omega t} dt, \quad (49,4)$$

получаем окончательно

$$\overline{f^2} = \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega. \quad (49,5)$$

Таким образом, средняя интенсивность представлена в виде суммы (интеграла) интенсивностей монохроматических компонент. Формула (49,4) дает возможность вычислить интенсивность в любом бесконечно малом интервале $d\omega$ частот.

При $T \rightarrow \infty$, $\overline{f^2}$, очевидно, стремится к некоторому конечному пределу; поэтому и f_{ω} стремится к конечному пределу. В виду этого и из выражения (49,4) для f_{ω} видно, что интеграл $\int_{-T}^{+T} f e^{i\omega t} dt$ при стремлении T к бесконечности растет как $\sqrt{T}$.

§ 50. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Но существующие в природе волны не бывают, конечно, строго монохроматическими, — их спектральное разложение всегда содержит частоты в некотором конечном интервале. Волна может быть в лучшем случае лишь почти монохроматической, если она содержит частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$. Рассмотрим такую волну и пусть ω есть некоторая средняя ее частота. Тогда ее поле (в заданной точке пространства) можно написать в виде $\text{Re} \{A_0(t) e^{-i\omega t}\}$, где комплексная амплитуда $A_0(t)$ является некоторой функцией времени (у строго монохроматической волны было бы $A_0 = \text{const.}$). Поскольку A_0 определяет поляризацию волны (см. § 48), то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем; такую волну называют частично поляризованной. В частных случаях, впрочем, зависимость $A_0(t)$ от времени может быть такой, что волна все же является вполне поляризованной; для этого необходимо, чтобы оставалось неизменным со временем отношение обеих компонент A_0 , т. е. отношение (действительных) амплитуд двух взаимно перпендикулярных компонент поля волны и разность их фаз.

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально, посредством пропускания исследуемого света через различные материальные тела¹⁾, после чего измеряется интенсивность прошедшего через тело света. Интенсивность света, как мы знаем, пропорциональна квадрату его поля в данном месте. С другой стороны, поле прошедшего через тело света является, в силу линейности уравнений Максвелла, линейной функцией от поля исходного исследуемого света. Таким образом, при исследовании поляризации света всегда измеряется некоторая квадратичная форма $\alpha_{ik} A_i A_k^*$, где α_{ik} — некоторый тензор, характеризующий оптическую систему, с помощью ко-

1) Например, николевы призмы (николи).

торой исследуется поляризация, а A_i — компонента поля, например, векторного потенциала (* означает комплексно сопряженную). В случае частично поляризованного света, как уже указывалось, комплексная амплитуда A_0 зависит от времени: для наблюдения интересны, очевидно, только средние (по времени) значения наблюдаемого эффекта, т. е. $\alpha_{ik} A_{0i} A_{0k}^*$. Отсюда мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{ik} = \overline{A_{0i} A_{0k}^*}. \quad (50,1)$$

Поскольку вектор A_0 всегда лежит в плоскости, перпендикулярной направлению волны, то тензор J_{ik} имеет всего четыре компоненты ($i, k = 1, 2$). Из определения J_{ik} видно, что между компонентами этого тензора имеется соотношение

$$J_{ik} = J_{ki}^*. \quad (50,2)$$

Приведем тензор J_{ik} к простейшему виду. Пусть n_i есть „единичный“ комплексный вектор, нормированный так, что $n_i n_i^* = 1$. Определим n_i так, чтобы

$$J_{ik} n_k = \lambda n_i, \quad (50,3)$$

аналогично тому, как это делается при приведении симметричного тензора к главным осям. Уравнение (50,3) можно написать в виде

$$(J_{ik} - \lambda \delta_{ik}) n_k = 0.$$

Для того, чтобы эта система однородных алгебраических уравнений первой степени (по n_k) имела отличные от нуля решения, необходимо, как известно, чтобы детерминант

$$|J_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0, \quad (50,4)$$

откуда определяются два значения λ , которые мы обозначим через λ_1 и λ_2 ; подставляя эти значения поочередно в уравнения (50,3), мы определим из них два вектора $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$.

Легко показать ¹⁾, что величины λ_1 и λ_2 действительны, а векторы $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$ взаимно перпендикулярны, т. е. удовлетворяют условию

$$n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0. \quad (50,5)$$

¹⁾ Умножая (50,3) с обеих сторон на n_i^* , имеем

$$\lambda n_i n_i^* = \lambda = J_{ik} n_i^* n_k.$$

Но $\lambda_{ik} n_i^* n_k$, а потому и λ в силу (50,2) есть величина действительная, так как

$$(J_{ik} n_i^* n_k)^* = J_{ik}^* n_i n_k^* = J_{ki} n_i n_k^* = J_{ik} n_k n_i^*.$$

Для доказательства (50,5) напомним уравнения

$$J_{ik} n_k^{(1)} = \lambda_1 n_i^{(1)}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} = \lambda_2 n_i^{(2)}$$

Мы можем теперь написать тензор J_{ik} в виде

$$J_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)*} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)*}. \quad (50,6)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что это выражение действительно удовлетворяет уравнению (50,3).

Если свет вполне поляризован, то $A_0 = \text{const.}$ и J_{ik} равно просто $A_{0i} A_{0k}^*$ (без усреднения). Но каждый из двух членов в (50,6) имеет именно такой вид — простого произведения двух компонент постоянного вектора и его комплексно сопряженного (соответственно, $\sqrt{\lambda_1} n_i^{(1)}$ и $\sqrt{\lambda_2} n_i^{(2)}$). Другими словами, каждый из этих членов можно рассматривать как вполне поляризованную (вообще говоря, эллиптически) волну. Далее, мы видим, что в (50,6) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе волны можно рассматривать, как физически независимые друг от друга, или, как говорят, некогерентные. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}}$ равно произведению $\overline{A_i^{(1)}} \overline{A_k^{(2)}}$ средних значений $\overline{A_i^{(1)}}$ и $\overline{A_k^{(2)}}$, и поскольку каждое из них равно нулю, то и $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}} = 0$.

В § 48 мы видели, что можно всегда выбрать комплексную амплитуду так, что из двух взаимно перпендикулярных компонент одна была чисто действительная, а другая — чисто мнимая; их абсолютные величины определяют тогда амплитуды соответствующих колебаний.

Таким образом, мы можем написать

$$n_x^{(1)} = b_1, \quad n_y^{(1)} = ib_2, \quad (50,7)$$

где b_1 и b_2 действительны (и в силу условия нормировки $n_i^{(1)} n_i^{(1)*} = 1$ связаны соотношением $b_1^2 + b_2^2 = 1$). Тогда $n_i^{(2)}$ напишется в виде

$$n_x^{(2)} = ib_2, \quad n_y^{(2)} = b_1 \quad (50,8)$$

(так, чтобы было $n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0$). Эти выражения показывают, что эллипсы обоих эллиптически поляризованных колебаний подобны (имеют одина-

и умножим первое из них на $n_i^{(2)*}$, а второе на $n_i^{(1)*}$:

$$J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)*}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} n_i^{(1)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)*}.$$

Возьмем комплексно сопряженную от второго уравнения, воспользовавшись тем, что $J_{ik}^* = J_{ki}$:

$$J_{ik}^* n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ki} n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)},$$

после чего вычтем его почленно из первого уравнения; мы находим тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0,$$

откуда и следует (50,5).

ковые отношения осей), причем каждый из них повернут на прямой угол относительно другого.

Таким образом, мы приходим к результату, что всякую частично поляризованную волну можно представить, как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны.

Полная интенсивность J света пропорциональна просто квадрату поля, т. е. сумме диагональных компонент тензора J_{ik} :

$$J = J_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (50,9)$$

Отношение же

$$\rho = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (50,10)$$

меньшей из величин λ к большей называется степенью деполаризации света. Если свет полностью поляризован, то одна из величин, λ_1 или λ_2 , равна нулю; очевидно, что тогда $\rho = 1$. Противоположным случаем является свет, у которого $\lambda_1 = \lambda_2$, так что $\rho = 1$; такой свет называется неполяризованным или естественным. Тот факт, что уравнение (50,3) имеет в этом случае всего один корень для λ , означает, что тензор J_{ik} имеет вид

$$J_{ik} = \lambda_0 \delta_{ik}, \quad (50,11)$$

где λ_0 есть общее значение λ_1 и λ_2 . Для вектора n_i эти уравнения дают теперь бесконечное множество значений. Другими словами, естественный свет можно рассматривать как наложение двух поляризованных волн с одинаковой интенсивностью, оси поляризации которых расположены любым образом (в плоскости, перпендикулярной к направлению света).

§ 51. Разложение электростатического поля

Поле, созданное зарядами, тоже можно формально разложить по плоским волнам (в интеграл Фурье). Это разложение, однако, весьма существенно отличается от разложения электромагнитных волн в пустоте. Действительно, поле зарядов не удовлетворяет однородному уравнению д'Аламбера (45,7), а потому и каждый член разложения этого поля не удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $k^2 = \omega^2 c^2$, которое имеет место для плоских монохроматических электромагнитных волн.

В частности, можно формально представить электростатическое поле в виде наложения плоских волн. „Частота“ этих волн, однако, будет, очевидно, равна нулю, так как рассматриваемое поле не зависит от времени; волновые же векторы, конечно, отличны от нуля.

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом e , находящимся в начале координат. Потенциал φ этого поля определяется уравнением (см. § 36)

$$\Delta \varphi = -4\pi e \delta(r). \quad (51,1)$$

Разложим φ в интеграл Фурье, т. е. представим его в виде наложения плоских волн вида $\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$:

$$\varphi = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}} dk_x dk_y dk_z. \quad (51,2)$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор Лапласа, находим

$$\Delta\varphi = - \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}} dk_x dk_y dk_z,$$

так что компонента Фурье $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$ от выражения $\Delta\varphi$ есть

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, можно найти $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (51,1),

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi e\delta(r) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dx dy dz = -\frac{e}{2\pi^2}.$$

Сравнивая оба полученные выражения для $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, находим

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2} \frac{1}{k^2}. \quad (51,3)$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

Аналогично потенциалу φ можно разложить и поле

$$\mathbf{E} = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk_x dk_y dk_z. \quad (51,4)$$

С помощью (51,2) имеем

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk_x dk_y dk_z = - \int \int \int i\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk_x dk_y dk_z.$$

Сравнивая с (51,4), находим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \frac{e}{2\pi^2}. \quad (51,5)$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоновское поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

§ 52. Собственные колебания поля

Рассмотрим электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства. Для упрощения дальнейших вычислений мы предполагаем, что этот объем обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A , B , C . Мы

можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трем координатам). Векторный потенциал поля, например, будет иметь теперь вид

$$A = \sum_k a_k e^{i k r}. \quad (52,1)$$

Суммирование производится по всем возможным значениям вектора k , компоненты которого пробегает, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \quad (52,2)$$

где n_x, n_y, n_z — положительные и отрицательные целые числа. Коэффициенты a_k должны удовлетворять соотношениям

$$a_{-k} = a_k^*, \quad (52,3)$$

поскольку A должно быть действительным. Векторы a_k являются, конечно, функциями от времени; каждый из них лежит в плоскости, перпендикулярной к соответствующему k .

Отдельные волны, входящие в состав (52,1), называют собственными колебаниями поля в данном объеме. Если размеры A, B, C этого объема достаточно велики, то соседние значения k_x, k_y, k_z (у которых n_x, n_y, n_z отличаются на единицу) почти равны друг другу. В этом случае мы можем говорить о числе собственных колебаний поля в небольшом интервале $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ значений волнового вектора k_x, k_y, k_z .

Поскольку соседние значения, скажем k_z , соответствуют значениям n_z , отличающимся на единицу, то число собственных колебаний в интервале Δk_x (т. е. число возможных значений k_x в этом интервале) равно просто соответствующему интервалу Δn_x значений n_x . Таким образом, мы находим

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z. \quad (52,4)$$

Полное число Δn собственных колебаний в интервалах $\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$ равно числу колебаний значений компонент волнового вектора в этих интервалах. Поэтому оно равно произведению $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, т. е.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (52,5)$$

где $V = ABC$ есть объем поля.

Легко определить отсюда число собственных колебаний поля с волновыми векторами с абсолютной величиной в интервале Δk и направлениями в элементе телесного угла $\Delta\omega$. Для этого надо только перейти к сферическим координатам в „пространстве“ k_x, k_y, k_z и написать $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ элемент объема в этом пространстве. Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta\omega. \quad (52,6)$$

Наконец, полное число собственных колебаний с абсолютными величинами k в интервале Δk и всеми направлениями $\mathbf{k}$ равно (пишем 4π вместо $\Delta\phi$)

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \quad (52,7)$$

Выразим теперь функцию Лагранжа для рассматриваемого поля в объеме V через величины $\mathbf{a}_k$. Потенциалы поля мы опять выбираем так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю (что всегда возможно для плоских волн). Подставляя $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ в функцию Лагранжа (27,6) $L = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV$, имеем

$$L = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}^2 - (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right\} dV.$$

Сюда надо подставить для $\mathbf{A}$ разложение (52,1). Имеем

$$\dot{\mathbf{A}} = \sum_k \dot{\mathbf{a}}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \sum_k i [\mathbf{k}\mathbf{a}_k] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

При нахождении квадратов этих сумм надо иметь в виду, что все произведения членов с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, такими, что $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, дают нуль при интегрировании по всему объему. Это видно из того, что такие произведения содержат множители $e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, а интеграл, например,

$$\int_0^A e^{i \frac{2\pi}{A} n_x x} dx$$

с целым, отличным от нуля n_x равен нулю. Произведения же с $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ не зависят от $\mathbf{r}$; интегрирование по dV дает в этих случаях просто объем V . Таким образом, мы находим (заменяя $\mathbf{a}_k$ на $\mathbf{a}_k^*$):

$$L = \frac{V}{8\pi} \sum_k \left(\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{a}}_k \dot{\mathbf{a}}_k^* - [\mathbf{k}\mathbf{a}_k] [\mathbf{k}\mathbf{a}_k^*] \right).$$

Поскольку значения $\mathbf{k}$, отличающиеся только знаком, дают одинаковые члены в сумме, можно написать

$$L = \frac{V}{4\pi} \sum'_k \left(\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{a}}_k \dot{\mathbf{a}}_k^* - [\mathbf{k}\mathbf{a}_k] [\mathbf{k}\mathbf{a}_k^*] \right), \quad (52,8)$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем значениям $\mathbf{k}$, кроме отличающихся только знаком.

Наконец, введем вместо комплексных векторов $\mathbf{a}_k$ действительные векторы α_k и β_k согласно соотношению

$$\mathbf{a}_k = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{V}} (\alpha_k + i\beta_k). \quad (52,9)$$

Каждый из векторов α_k и β_k перпендикулярен к волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты.

Подставляя это в (51,8), находим искомую функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_k' \{ (\dot{\alpha}_k^2 - c^2 k^2 \alpha_k^2) + (\dot{\beta}_k^2 - c^2 k^2 \beta_k^2) \}. \quad (52,10)$$

Направления векторов α_k и β_k определяют направления поляризации соответствующих волн. Обозначив две компоненты вектора α_k посредством α_{k1} и α_{k2} , имеем $\alpha_k^2 = \sum_{j=1}^2 \alpha_{kj}^2$ и аналогично для β_k . Тогда

$$L = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k' \{ (\dot{\alpha}_{kj}^2 - c^2 k^2 \alpha_{kj}^2) + (\dot{\beta}_{kj}^2 - c^2 k^2 \beta_{kj}^2) \}. \quad (52,11)$$

Мы видим, что функция Лагранжа распадается на сумму независимых членов одинакового вида, каждый из которых содержит только по одной из величин α_{kj} или β_{kj} . Каждый такой член $\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_{kj}^2 - c^2 k^2 \alpha_{kj}^2)$ или $\frac{1}{2}(\dot{\beta}_{kj}^2 - c^2 k^2 \beta_{kj}^2)$ соответствует, как известно из механики, однородному гармоническому колебанию, или, как говорится, осциллятору.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{\alpha}_{kj} + c^2 k^2 \alpha_{kj} = 0, \quad \ddot{\beta}_{kj} + c^2 k^2 \beta_{kj} = 0$$

и дают для α_{kj} и β_{kj} , как следовало ожидать, периодические решения типа $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ с частотой $\omega = ck$.

§ 53. Черное излучение

Рассмотрим электромагнитное излучение, находящееся в состоянии статистического (теплого) равновесия; такое излучение называют черным. Необходимо отметить, что электромагнитное излучение в пустоте не может само по себе притти в состояние теплового равновесия. Действительно, установление равновесия требует наличия некоторого взаимодействия между отдельными частями системы, — в данном случае, между отдельными собственными колебаниями поля. Но эти колебания не взаимодействуют друг с другом. Поэтому для установления теплового равновесия необходимо наличие зарядов, с которыми поле могло бы взаимодействовать. Тогда через посредство этого взаимодействия различные собственные колебания могут обмениваться друг с другом энергией.

В предыдущем параграфе мы видели, что электромагнитное поле, находящееся в конечном объеме, можно представить в виде совокупности гармонических осцилляторов. С другой стороны, из статистики известно, что на каждую степень свободы системы, совершающей гармонические колебания, в нашем случае на каждый осциллятор поля, приходится энергия, равная $\frac{1}{2}kT$, где k — постоянная Больцмана, а T — температура системы (закон равнораспределения). Далее, каждым двум собственным колебаниям поля с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ соответ-

ствуют в сумме (52,10) два члена (с α_k и β_k), т. е., учитывая две возможные независимые поляризации, четыре осциллятора в сумме (52,11).

Таким образом, число осцилляторов вдвое больше числа собственных колебаний поля. Воспользовавшись формулой (52,5), мы находим теперь, что энергия $\Delta \mathcal{E}$ поля, приходящаяся на собственные колебания в интервале $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$, равна

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi TV}{4\pi^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (53,1)$$

Эта формула называется формулой Рэля-Джинса. Напишем еще выражение для энергии, приходящейся на собственные колебания в интервале Δk абсолютных значений k . С помощью (52,7) имеем

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi TV}{\pi^2} k^2 \Delta k = \frac{\pi TV}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta \omega, \quad (53,2)$$

где $\omega = ck$ есть частоты волн.

Если бы мы вычислили отсюда полную энергию поля, то получили бы бесконечность, так как интеграл $\int_0^\infty \omega^2 d\omega$ расходится. Поскольку полная энергия поля в конечном объеме должна быть в действительности конечной, то это означало бы, что тепловое равновесие поля вообще не может установиться, — должен был бы происходить непрерывный переход энергии к собственным колебаниям с большей частотой, а температура должна была бы непрерывно падать, приближаясь к нулю.

Опыт, однако, показывает, что в действительности излучение вовсе не обнаруживает подобных свойств и может находиться в тепловом равновесии при конечной температуре. Это разногласие теории с опытом связано с квантовыми явлениями. При этом оказывается, что отклонения классической электродинамики возрастают с частотой излучения. Поэтому формула Рэля-Джинса применима к той части черного излучения, которая обладает достаточно малыми частотами. При этом интервал применимости формулы Рэля-Джинса суживается с уменьшением температуры.

ГЛАВА VII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

§ 54. Геометрическая оптика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы. Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

Однако, в большом числе случаев электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, отличаются тем свойством, что в каждом небольшом участке пространства их можно рассматривать как плоские. Для

этого, очевидно, необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые волновые поверхности, т. е. поверхности, во всех точках которых фаза волны (в данный момент времени) одинакова. Волновые поверхности плоской волны представляют собою, очевидно, плоскости, перпендикулярные к направлению распространения волны. В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно ввести понятие лучей — линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет геометрической оптики. Геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \rightarrow 0$.

Займемся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики — уравнения, определяющего направление лучей. Пусть f есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$). В плоской монохроматической волне f имеет вид

$$f = ae^{i(kr - \omega t + \alpha)} = ae^{i(k_i x_i + \alpha)} \quad (54,1)$$

(мы опускаем знак Re ; везде подразумевается действительная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \quad (54,2)$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза ψ , называемая также эйконалом, не имеет простого вида, как в (54,1). Существенно, однако, что эйконал ψ является большой величиной. Это видно непосредственно из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \rightarrow 0$.

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемом участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат). Сравнивая это выражение с (54,1), мы можем написать

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \psi, \quad \omega = - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (54,3)$$

что и соответствует тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую. В четырехмерном виде соотношения (54,3) напишутся как

$$k_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (54,4)$$

где k_i — волновой 4-вектор.

Мы видели в § 47, что между компонентами 4-вектора k_i имеется соотношение $k_i^2 = 0$. Подставляя сюда (54,4), находим уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \quad (54,5)$$

Это уравнение, называемое уравнением эйконала, является основным уравнением геометрической оптики.

Уравнение эйконала можно вывести также и при помощи непосредственного предельного перехода $\lambda \rightarrow 0$ в волновом уравнении. Поле f удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Подставляя сюда $f = ae^{i\psi}$, находим

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} e^{i\psi} + if \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 f = 0. \quad (54,6)$$

Но эйконал ψ , как было выше указано, есть большая величина; поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по сравнению с четвертым, и мы приходим снова к уравнению (54,5).

Мы приведем здесь еще ряд соотношений, которые, однако, в применении к распространению света в пустоте приводят только к вполне очевидным результатам. Тем не менее мы приводим их здесь, имея в виду, что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах.

Из формы уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц. Движение материальной частицы определяется уравнением Гамильтона-Якоби (23,8):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i\right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка и второй степени. Как известно, действие S связано с импульсом $\mathbf{p}$ и функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ частицы посредством соотношений

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (54,3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота — роль функции Гамильтона, т. е. энергии частицы. Абсолютная величина k волнового вектора связана с частотой посредством формулы $k = \omega/c$. Мы видим, что это соотношение аналогично соотношению $p = \mathcal{E}/c$ между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

В виду указанной аналогии мы можем непосредственно написать аналогичное уравнение для лучей

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (54,7)$$

В пустоте $\omega = ck$, так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения), т. е., как и должно быть, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью c .

Продолжая аналогию, можно установить для геометрической оптики принцип, аналогичный принципу наименьшего действия в механике. Однако, его при этом нельзя будет написать в гамильтоновской форме, $\delta \int L dt = 0$, так как оказывается невозможным ввести для лучей функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц. Действительно, функция Лагранжа L частицы связана с функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ посредством $L = \mathbf{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \mathcal{H}$. Заменяя функцию Гамильтона частотой ω , а импульс — волновым вектором $\mathbf{k}$, мы должны были бы написать для функции Лагранжа в оптике $\mathbf{k} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega$. Но это выражение равно нулю, поскольку $\omega = ck$. Невозможность введения функции Лагранжа для лучей видна, впрочем, и непосредственно из указанного выше обстоятельства, что распространение лучей аналогично движению частиц с массой, равной нулю.

Если волна обладает определенной постоянной частотой ω , то зависимость ее поля от времени определяется множителем вида $e^{-i\omega t}$. Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать

$$\psi = -\omega t + \psi'(x, y, z), \quad (54,8)$$

где ψ' — функция только от координат. Уравнение эйконала (54,5) принимает теперь вид

$$(\text{grad } \psi')^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (54,9)$$

Как известно, в случае, когда энергия постоянна, принцип наименьшего действия для частицы можно написать также и в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{l} = 0,$$

где интегрирование производится по траектории частицы между двумя заданными ее положениями. Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и дифференциалов координат частицы. Аналогичный принцип для лучей называется принципом Ферма. В этом случае мы можем написать по аналогии

$$\delta \psi = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{l} = 0. \quad (54,10)$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ и мы получаем ($d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \quad (54,11)$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

§ 55. Интенсивность

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать, как пучок лучей. Рассмотрим вопрос о распределении интенсивности света в таком пучке. Выделим на какой-нибудь из волновых поверхностей рассматриваемого пучка (т. е. на поверхности $\psi = \text{const.}$) бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря различных, главных

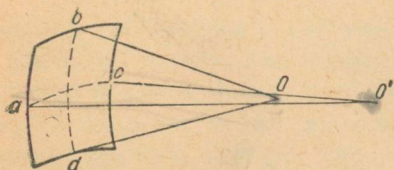


Рис. 6.

радиуса кривизны. Пусть ac и bd (см. рис. 6) есть элементы главных кругов кривизны, проведенные на данном элементе волновой поверхности. Тогда лучи, являющиеся нормальными к волновой поверхности и проходящие через точки a и c , пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O' , а лучи, проходящие через b и d , пересекутся в другом центре кривизны O .

При данных углах раствора лучей, исходящих из O и O' , длины отрезков ac и bd пропорциональны, очевидно, соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т. е. длинам $O'a$ и Ob); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd , т. е. пропорциональна $R_1 R_2$. Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченной определенным рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально $R_1 R_2$.

С другой стороны, интенсивность, т. е. поток энергии через единицу поверхности, обратно пропорциональна площади поверхности, через которую проходит данное количество световой энергии. Таким образом, мы приходим к выводу, что интенсивность

$$J = \frac{\text{const.}}{R_1 R_2}. \quad (55,1)$$

Эта формула определяет изменение интенсивности света вдоль направления лучей; R_1 и R_2 суть при этом радиусы кривизны той волновой поверхности, которую пересекает в рассматриваемой точке данный луч. Подчеркиваем, что эта формула непригодна для сравнения интенсивности в разных точках одной и той же волновой поверхности.

Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля поля, то для изменения самого поля вдоль луча мы можем написать

$$f = \frac{\text{const.}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \quad (55,2)$$

где в фазовом множителе e^{ikR} под R может подразумеваться как R_1 , так и R_2 ; величины e^{ikR_1} и e^{ikR_2} отличаются друг от друга только постоянным (для данного луча) множителем, поскольку разность $R_1 - R_2$ — расстояние между обоими центрами кривизны — постоянна.

Если оба радиуса кривизны волновой поверхности совпадают, то (55,1) и (55,2) имеют вид:

$$J = \frac{\text{const.}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const.}}{R} e^{ikR}. \quad (55,3)$$

Это имеет место, в частности, всегда в тех случаях, когда свет испускается точечным источником (волновые поверхности являются тогда концентрическими сферами, а R — расстоянием до источника света).

Из (55,1) мы видим, что интенсивность обращается в бесконечность в точках $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, т. е. в центрах кривизны волновой поверхности. Применяя это ко всем лучам в пучке, находим, что интенсивность света в данном пучке обращается в бесконечность, вообще говоря, на двух поверхностях — геометрическом месте всех центров кривизны волновой поверхности. Заметим, что эти поверхности носят название каустик.

В частном случае сферической волновой поверхности обе каустики вырождаются в одну точку — источник света (или фокус).

§ 56. Угловой эйконал

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального. Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы. Оказывается, однако, возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела. При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика. Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, оптическими системами.

В силу указанной в § 54 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся сначала прямолинейно в пустоте, затем проходящих через какое-нибудь электромагнитное поле и снова выходящих из этого поля в пустоту. Для определенности, мы будем, однако, ниже говорить все время о распространении лучей света.

Мы видели в предыдущем параграфе, что уравнение эйконала, определяющее распространение лучей, может быть написано в виде (54,9): $(\nabla\psi)^2 = \omega^2/c^2$ (для света с определенной частотой). Ниже мы будем для удобства обозначать посредством ψ эйконал, деленный на постоянную величину ω/c . Тогда основное уравнение геометрической оптики будет иметь вид

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \quad (56,1)$$

Каждое решение этого уравнения описывает собой определенный пучок лучей, причем направление луча, проходящего через данную точку пространства, определяется градиентом ψ в этой точке. Для наших целей, однако, такое описание недостаточно, поскольку мы ищем общие соотношения, определяющие прохождение через оптические системы не какого-либо одного определенного пучка лучей, а соотно-

шения, относящиеся к любым лучам. Поэтому мы должны пользоваться эйконалом, взятым в таком виде, в котором он описывал бы все вообще возможные лучи света, т. е. лучи, проходящие через любую пару точек в пространстве. В обычной своей форме эйконал $\psi(\mathbf{r})$ есть фаза луча из некоторого пучка, проходящего через точку $\mathbf{r}$. Теперь же мы должны ввести эйконал как функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ координат двух точек ($\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ — радиусы-векторы начальной и конечной точек луча). Через всякую пару точек $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ можно провести луч, и $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз (или, как говорят, оптическая длина пути) этого луча между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Ниже мы будем везде подразумевать под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиусы-векторы точек на луче соответственно перед и после его прохождения через оптическую систему.

Если в $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ один из радиусов-векторов, скажем $\mathbf{r}'$, считать заданным, то ψ как функция от $\mathbf{r}$ будет описывать определенный пучок лучей, а именно пучок лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}'$. Тогда ψ должно удовлетворять уравнению (56,1), в котором дифференцирование производилось бы по компонентам $\mathbf{r}$. Аналогично, считая $\mathbf{r}$ заданным, находим еще одно уравнение для $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, так что

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi)^2 = 1, \quad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2 = 1. \quad (56,2)$$

Направление луча определяется, как мы знаем из предыдущего параграфа, градиентом его фазы. Поскольку $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз в точках $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то направление луча в точке $\mathbf{r}'$ определяется вектором $\mathbf{n}' = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}$, а в точке $\mathbf{r}$ — вектором $\mathbf{n} = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}$. Из (56,2) видно, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ — единичные:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \quad (56,3)$$

Четыре вектора $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ связаны между собой некоторым соотношением, поскольку два из них ($\mathbf{n}, \mathbf{n}'$) являются производными по двум другим ($\mathbf{r}, \mathbf{r}'$) от некоторой функции ψ . Что касается самой функции ψ , то она удовлетворяет дополнительным условиям — уравнениям (56,2).

Для нахождения соотношения между $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ удобно ввести вместо ψ другую величину, на которую бы не налагалось никаких дополнительных условий (т. е. которая не должна была бы удовлетворять каким-либо дифференциальным уравнениям). Это можно сделать следующим образом. В функции ψ независимыми переменными являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, так что для дифференциала $d\psi$ имеем

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = -\mathbf{n} d\mathbf{r} + \mathbf{n}' d\mathbf{r}'.$$

Применим теперь преобразование Лежандра к независимым переменным $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т. е. напомним

$$d\psi = -d(\mathbf{n}\mathbf{r}) + \mathbf{r} d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}' d\mathbf{n}',$$

откуда, вводя функцию

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{n}\mathbf{r} - \psi, \quad (56,4)$$

имеем

$$d\chi = -\mathbf{r} d\mathbf{n} + \mathbf{r}' d\mathbf{n}'. \quad (56,5)$$

Функцию χ называют угловым эйконалом; как видно из (56,5), независимыми переменными в нем являются $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. На χ не налагается уже никаких дополнительных условий. Действительно, уравнения (56,3) выражают теперь только, что $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1$, а это — условия, относящиеся к независимым переменным. Из этих условий видно, что из трех компонент n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогично для $\mathbf{n}'$) только две являются независимыми. Мы будем ниже в качестве независимых переменных пользоваться компонентами n_y, n_z, n'_y, n'_z и тогда

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n'^2_y - n'^2_z}.$$

Подставляя эти выражения в

$$d\chi = -x dn_x - y dn_y - z dn_z + x' dn'_x + y' dn'_y + z' dn'_z,$$

находим для дифференциала $d\chi$:

$$\begin{aligned} d\chi = & -\left(y - \frac{n_y}{n_x} x\right) dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x} x\right) dn_z + \\ & + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x} x'\right) dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x} x'\right) dn'_z. \end{aligned}$$

Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y - \frac{n_y}{n_x} x &= -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, & y' - \frac{n'_y}{n'_x} x' &= \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}, \\ z - \frac{n_z}{n_x} x &= -\frac{\partial \chi}{\partial n_z}, & z' - \frac{n'_z}{n'_x} x' &= \frac{\partial \chi}{\partial n'_z}, \end{aligned} \right\} \quad (56,6)$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}, \mathbf{r}'$. Функция χ характеризует конкретные свойства тела, через которые проходят лучи (или свойства поля — в случае движения заряженных частиц).

§ 57. Тонкие пучки лучей

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые гомоцентрические пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим, т. е. после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какой-нибудь одной точке. Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь пересекаются все в одной точке — изображении светящейся точки ¹⁾.

¹⁾ Точка пересечения может лежать или на самих лучах, или на линии их продолжения; в зависимости от этого изображения называются, соответственно, действительными или мнимыми.

Можно показать (см. § 58), что единственным случаем, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему гомоцентрическими, есть случай тождественного отображения, т. е. случай такой оптической системы, которая для любого предмета дает тождественное с ним по форме и размерам изображение (другими словами, изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого).

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкого изображения предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения¹⁾. Возможно только приближенное не вполне резкое осуществление не тождественного изображения протяженных предметов.

Наиболее важным случаем перехода гомоцентрических пучков в гомоцентрические же являются достаточно тонкие пучки (т. е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи определенного (для данной оптической системы) направления. Это направление называется оптической осью оптической системы.

Необходимо при этом отметить, что даже бесконечно узкие пучки лучей (в трехмерном пространстве) в общем случае не являются гомоцентрическими; мы видели в § 55, что и в таком пучке различные лучи пересекаются в различных точках (это явление называется астигматизмом). Исключение представляют те точки волновой поверхности, в которых оба ее главных радиуса кривизны равны друг другу, — вблизи такой точки малый участок поверхности можно рассматривать как сферический, и соответствующий тонкий пучок лучей является гомоцентрическим.

Будем рассматривать оптические системы, обладающие аксиальной симметрией. Ось симметрии такой системы является в то же время ее оптической осью. Действительно, волновая поверхность пучка лучей, идущего вдоль этой оси, тоже имеет, очевидно, аксиальную симметрию; поверхности же вращения имеют, как известно, в точках своего пересечения с осью симметрии два равных друг другу радиуса кривизны. Поэтому тонкий пучок, идущий в этом направлении, остается гомоцентрическим. То же самое относится и к достаточно тонким пучкам, идущим в направлениях, образующих достаточно малые углы с оптической осью.

Для нахождения общих количественных соотношений, определяющих отображения с помощью тонких пучков, проходящих через аксиально-симметрические оптические системы, воспользуемся общими уравнениями (56,6), определив предварительно вид функции χ в рассматриваемом случае.

Поскольку пучки лучей тонкие и идут вблизи оптической оси, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ для каждого пучка направлены почти вдоль этой оси. Если выбрать оптическую ось в качестве оси X , то компоненты n_y, n_z, n'_y, n'_z будут малы по сравнению с единицей. Что касается компонент

¹⁾ Такое отображение может быть осуществлено с помощью плоских зеркал.

n_x, n'_x , то $n_x \approx 1$, а n'_x может быть равным или $+1$ или -1 . В первом случае лучи продолжают идти почти в прежнем направлении, попадая в пространство по другую сторону оптической системы, которую в этом случае называют линзой. Во втором случае лучи изменяют направление на почти противоположное; такая оптическая система называется зеркалом.

Воспользовавшись малостью n_y, n_z, n'_y, n'_z , разложим угловой эйконал $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ в ряд и ограничимся первыми членами. В силу аксиальной симметрии всей системы χ должно быть инвариантно по отношению к поворотам системы координат вокруг оптической оси. Отсюда видно, что членов первого порядка, пропорциональных первым степеням y - и z -компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, в разложении χ не может быть, — эти члены не обладали бы требуемой инвариантностью. Из членов второго порядка требуемым свойством обладают квадраты $\mathbf{n}^2$ и $\mathbf{n}'^2$ и скалярное произведение $\mathbf{nn}'$. Таким образом, с точностью до членов второго порядка угловой эйконал для аксиально симметрической оптической системы имеет вид

$$\chi = \text{const.} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n'^2_y + n'^2_z), \quad (57,1)$$

где f, g, h — постоянные.

Мы будем рассматривать сейчас для определенности случай линзы, в связи с чем положим $n'_x \approx 1$; для зеркал, как будет ниже указано, все формулы имеют аналогичный вид. Подставляя теперь выражение (57,1) в общие уравнения (56,6), находим:

$$\left. \begin{aligned} n_y(x-g) - fn'_y &= y, & fn_y + n'_y(x'+h) &= y', \\ n_z(x-g) - fn'_z &= z, & fn_z + n'_z(x'+h) &= z'. \end{aligned} \right\} \quad (57,2)$$

Рассмотрим гомоцентрический пучок, исходящий из точки x, y, z ; точка x', y', z' пусть будет той, в которой пересекаются все лучи пучка после прохождения через линзу. Если бы первая и вторая пары уравнений (57,2) были независимы, то эти четыре уравнения при заданных x, y, z, x', y', z' определили бы одну определенную систему значений n_y, n_z, n'_y, n'_z , т. е. всего только один из лучей, выходящих из точки x, y, z , прошел бы через точку x', y', z' . Для того, чтобы все лучи, выходящие из x, y, z , прошли бы через x', y', z' , необходимо, следовательно, чтобы уравнения (57,2) не были независимы, т. е. чтобы одна пара этих уравнений была следствием другой. Необходимым для такой зависимости условием является, очевидно, пропорциональность коэффициентов одной пары уравнений коэффициентам другой пары (тогда одна пара получается из другой просто почленным умножением на постоянную). Таким образом, должно быть

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}; \quad (57,3)$$

в частности,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \quad (57,4)$$

Полученные уравнения определяют искомую зависимость координат точки изображения от координат предмета при отображении с помощью тонких пучков.

Точки $x=g$, $x=-h$ на оптической оси называются главными фокусами оптической системы. Рассмотрим пучки лучей, параллельных оптической оси. Точка испускания такого луча находится, очевидно, в бесконечности на оптической оси, т. е. $x=\infty$. Из (57,3) видно, что в этом случае $x'=-h$. Таким образом, параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему пересекается в главном фокусе. Наоборот, пучок лучей, исходящий из главного фокуса, становится после прохождения через систему параллельным.

В уравнении (57,3) координаты x и x' отсчитываются от одного и того же начала координат, лежащего на оптической оси. Удобнее, однако, отсчитывать координаты предмета и изображения от разных начал координат, выбрав их соответственно в главных фокусах. В качестве положительного направления отсчета координат выберем направления от соответствующего фокуса в сторону, направленную по ходу луча. Обозначая новые координаты предмета и изображения большими буквами, имеем

$$X=x-g, X'=x'+h, Y=y, Y'=y', Z=z, Z'=z'.$$

Уравнения отображения (57,3) и (57,4) принимают в новых обозначениях вид

$$XX'=-f^2, \quad (57,5)$$

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{Z'}{Z}=\frac{f}{X}=-\frac{X'}{f}. \quad (57,6)$$

Величину f называют главным фокусным расстоянием системы.

Отношение Y'/Y называется боковым увеличением. Что касается изображения, то, поскольку координаты не просто пропорциональны друг другу, его следует писать в дифференциальном виде, сравнивая элемент длины предмета (в направлении оси) с элементом длины изображения. Из (57,5) пишем для „продольного увеличения“

$$\left| \frac{dX'}{dX} \right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y} \right)^2. \quad (57,7)$$

Мы видим отсюда, что даже для бесконечно малых предметов нельзя получить геометрически подобного изображения. Продольное увеличение никогда не равно поперечному (за исключением тривиального случая тождественного отображения).

Пучок, вышедший из точки $X=f$ на оптической оси, пересекается вновь в точке $X'=-f$ на той же оси; эти две точки называются главными. Из уравнений (57,2) ($n_y X - f n'_y = Y$, $n_z Y - f n'_z = Z$) видно, что в этом случае ($X=f$, $Y=Z=0$) имеют место равенства $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. Таким образом, всякий луч, выходящий из главной точки, пересекает вновь оптическую ось в другой главной точке в направлении, параллельном первоначальному.

Если координаты предмета и его изображения отсчитывать от главных точек (а не от главных конусов), то для этих координат ξ и ξ' мы имеем

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Подставляя это в (57,5), легко получаем уравнение отображения в виде

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \quad (57,8)$$

Можно показать, что у оптических систем с малой шириной (например, у зеркала, узкой линзы) обе главные точки почти совпадают. В этом случае в особенности удобно уравнение (57,8), так как в нем ξ и ξ' отсчитываются тогда практически от одной и той же точки.

Если фокусное расстояние положительно, то предметы, находящиеся спереди (по ходу луча) от фокуса ($X > 0$), отображаются прямо ($Y'/Y > 0$); такие изображения называются собирательными. Если же $f < 0$, то при $X > 0$ имеем $Y'/Y < 0$, т. е. предмет отображается обратным образом; такие изображения называются рассеивающими.

Существует один предельный случай отображения, который не содержится в формулах (57,8), — это случай, когда все три коэффициента f , g , h (57,1) делаются бесконечными (т. е. оптическая система имеет бесконечное фокусное расстояние и ее главные фокусы находятся в бесконечности). Раскрывая в уравнении (57,4) скобки, деля почленно на g и переходя к пределу бесконечных f , g , h , находим

$$x' = \frac{h}{g} x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Поскольку представляет интерес только тот случай, когда предмет и его изображение находятся на конечных расстояниях от оптической системы, то f , g , h должны стремиться к бесконечности так, чтобы отношения $\frac{h}{g}$, $\frac{f^2 - gh}{g}$ были конечными. Обозначая их, соответственно, посредством α и β , имеем

$$x' = \alpha x + \beta.$$

Для двух других координат мы имеем теперь из общего уравнения (57,7) $\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \sqrt{\alpha}$. Наконец, отсчитывая опять координаты x и x' от разных начал координат, именно, соответственно от произвольной точки на отражаемой оси и от изображения этой точки, получаем окончательно уравнения отображения в простом виде

$$X' = \alpha X, \quad Y' = \pm \sqrt{\alpha} Y, \quad Z' = \pm \sqrt{\alpha} Z. \quad (57,9)$$

Таким образом, продольные и поперечные увеличения постоянны (все же изображение не геометрически подобно предмету, поскольку эти два увеличения не равны друг другу). Рассмотренный случай отображения называется телескопическим. e

Все выведенные нами для линз формулы (57,5—9) в равной мере применимы и к зеркалам и даже к оптическим системам без аксиальной симметрии, если только отображение осуществляется тонкими пучками

лучей, идущими вблизи оптической оси. При этом всегда отсчет x -координат предмета и изображения должен производиться вдоль оптической оси от соответствующих точек (главных фокусов или главных точек) по направлению распространения луча. Надо иметь в виду при этом, что у оптических систем, не обладающих аксиальной симметрией, направления оптической оси перед и за системой не лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА

Определить фокусное расстояние для отображения с помощью двух аксиально симметрических оптических систем с совпадающими оптическими осями.

Решение: Пусть f_1 и f_2 — фокусные расстояния обеих систем. Для каждой системы в отдельности имеем

$$X_1 X'_1 = -f_1^2, \quad X_2 X'_2 = -f_2^2.$$

Поскольку изображения, даваемые первой системой, являются предметом для второй, то, обозначая посредством l расстояние между задним главным фокусом первой системы и передним фокусом второй, имеем $X_2 = X'_1 - l$; выражая X'_2 через X_1 , находим

$$X'_2 = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + l X_1},$$

или

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right) \left(X'_2 - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

откуда видно, что главные фокусы составной системы находятся в точках

$$X_1 = -\frac{f_1^2}{l}, \quad X'_2 = \frac{f_2^2}{l}, \quad \text{а фокусное расстояние равно}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(для выбора знака в этом выражении надо написать соответствующее уравнение для поперечного увеличения).

В случае, если $l = 0$, фокусное расстояние $f = \infty$, т. е. составная система дает телескопическое отображение. В этом случае имеем $X'_2 = X_1 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$, т. е.

параметр α в общей формуле (57,9) равен: $\alpha = \frac{f_2^2}{f_1^2}$.

§ 58. Отображения широкими пучками лучей

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с помощью тонких пучков лучей является приближенным; оно тем точнее (т. е. резче), чем более узки эти пучки. Перейдем теперь к вопросу о том, насколько возможно осуществление точного отображения предметов, т. е. отображения пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, которые можно осуществить с любой оптической системой (обладающей аксиальной симметрией), отображение широкими пучками возможно

только с помощью определенным образом построенных оптических систем. Даже с этим ограничением, возможно, как уже указывалось в § 57, отображение далеко не всех точек пространства.

Мы рассмотрим здесь два основных случая отображения широкими пучками, а именно, отображение самой оптической оси и плоскости, к ней перпендикулярной, и найдем условия, которым должен удовлетворять ход лучей в оптической системе для того, чтобы дать возможность такого отображения.

При отображении оптической оси из соображений симметрии очевидно, что ее изображение будет расположено вдоль нее самой. Соответственно этому в общих уравнениях (56,6) надо положить $y = y' = z = z' = 0$, так что

$$x = \frac{n_x}{n_y} \frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \quad x' = -\frac{n'_x}{n'_y} \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}.$$

Вторую пару уравнений (56,6) можно не рассматривать; в силу аксиальной симметрии они будут автоматически выполняться, если выполняется первая их пара. В соответствии с этим достаточно рассматривать только лучи, идущие в плоскости XY , т. е. положить $n_z = n'_z = 0$. Замечая, что тогда $n_x = \sqrt{1 - n_y^2}$, $n'_x = \sqrt{1 - n'^2_y}$, мы можем переписать полученное уравнение в виде

$$x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_x}, \quad x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_x}$$

или

$$d\chi = -x dn_x + x' dn'_x. \quad (58,1)$$

Все лучи, выходящие из произвольной точки оптической оси, после прохождения через оптическую систему должны вновь пересечься в одной и той же точке этой оси. Это значит, что координата x' пересечения с оптической осью луча, вышедшего из точки x и прошедшего через систему, должна быть функцией только от x . Заметим, что при этом x' определяется через x по прежней формуле $XX' = -f^2$ (57,5). Действительно, среди лучей широкого пучка есть лучи, образующие тонкий пучок, идущий вблизи оптической оси; для этих лучей имеет место указанная формула, а поскольку X и X' должны быть одинаковы для всех вообще лучей, то она имеет место и для всего широкого пучка.

Чтобы найти зависимость между n_x и n'_x при рассматриваемом отображении, поступим следующим образом. С помощью (58,1) находим для дифференциала

$$d(\chi + xn_x - x'n'_x) = n_x dx - n'_x dx' = \left(n_x - n'_x \frac{dx'}{dx}\right) dx.$$

Слева стоит полный дифференциал, поэтому таковым является и выра-

жение, стоящее справа. Это значит, что коэффициент при dx должен быть функцией только от x :

$$n_x - n'_x \frac{dx'}{dx} = f(x).$$

Для определения $f(x)$ замечаем, что луч, идущий вдоль оптической оси ($n_x = 1$), в силу аксиальной симметрии системы не изменяет своего направления при прохождении через нее, т. е. $n'_x = 1$. Отсюда следует $f(x) = 1 - \frac{dx'}{dx}$ и, следовательно,

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \frac{dx'}{dx}. \quad (58,2)$$

Обозначим посредством θ и θ' углы, образуемые лучом с оптической осью в точках x и x' . Тогда

$$1 - n_x = 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2}.$$

Далее, поскольку x' есть функция от x , то и $\frac{dx'}{dx}$ зависит только от x , т. е. для заданного x является постоянной. Таким образом, для всех лучей, выходящих из данной точки изображаемой оси, должно быть одинаковым отношение

$$\frac{\sin \frac{\theta'}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \text{const.} \quad (58,3)$$

Равенство (58,2) или (58,3) и представляет собой искомое условие, которому должен удовлетворять ход лучей в оптической системе при отображении оптической оси широкими пучками.

Выведем теперь аналогичные условия для отображения широкими пучками плоскости, перпендикулярной оптической оси. Мы ограничимся при этом случаем, когда изображение тоже является плоскостью. Начало для отсчета координат предмета (плоскости) и его изображения выберем соответственно в точках их пересечения с оптической осью. Тогда $x = x' = 0$ и общие уравнения (56,6) принимают вид

$$y = -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \quad y' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}.$$

(По тем же причинам, что и выше, мы пишем только одну пару этих уравнений.)

Поступая в точности аналогично тому, как мы это делали выше найдем, что

$$n_y - n'_y \frac{dy'}{dy} = f(y). \quad (58,4)$$

Вводя опять углы θ и θ' (так что $n_y = \sin \theta$, $n'_y = \sin \theta'$), мы можем написать условие (58,4) для лучей, выходящих из данной точки изображаемой плоскости, в виде

$$\sin \theta' = \text{const.} \cdot \sin \theta + \text{const.}' \quad (58,5)$$

В частности, для лучей, исходящих из точки пересечения плоскости с оптической осью ($y=0$), в формуле (58,5) $\text{const}' = 0$, т. е.

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \text{const.} \quad (58,6)$$

(так как для таких лучей, в силу симметрии системы, должно быть $\theta' = 0$, если $\theta = 0$).

Полученные соотношения и определяют условия, которые должны выполняться при отображении плоскости широкими пучками. Мы видим, в частности, что эти условия для отображения плоскости и перпендикулярной к ней прямой не совпадают. Отсюда непосредственно следует невозможность отображения широкими пучками трехмерных тел, даже если эти тела обладают бесконечно малым объемом.

§ 59. Интерференция

Пусть два луча, поляризованных в одной и той же плоскости и вышедших из точечного источника света, посредством некоторой оптической системы (скажем, системы зеркал) приводятся в одно и то же место пространства. Если f_1 и f_2 — какая-нибудь из компонент поля первого и второго луча, то поле f в месте их наложения равно сумме $f = f_1 + f_2$. Интенсивность света в этом месте равна (с точностью до постоянного коэффициента пропорциональности)

$$J = |f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 + f_1 f_2^* = |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2\text{Re}(f_1 f_2^*).$$

Но $|f_1|^2$ и $|f_2|^2$ суть интенсивности J_1, J_2 обоих лучей, так что

$$J = J_1 + J_2 + 2\text{Re}(f_1 f_2^*). \quad (59,1)$$

Таким образом, при наложении двух лучей общая интенсивность не равна сумме интенсивностей каждого из них. Это явление называется интерференцией.

Если ввести амплитуду f_0 и фазу ψ луча, то поля f_1 и f_2 можно написать в виде:

$$f_1 = f_{01} e^{i\psi_1} = \sqrt{J_1} e^{i\psi_1}, \quad f_2 = \sqrt{J_2} e^{i\psi_2}.$$

Тогда общая интенсивность J принимает вид:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \Delta\psi, \quad (59,2)$$

где $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ есть разность фаз, т. е. оптическая разность хода обоих лучей. Разность хода лучей можно менять при помощи оптической системы, приводящей оба луча в одно место. По мере изменения разности хода суммарная интенсивность меняется в пределах от $(\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2})^2$ до $(\sqrt{J_1} - \sqrt{J_2})^2$.

При интерференции двух не монохроматических лучей интерферируют друг с другом их монохроматические компоненты с одинаковыми частотами и поляризациями. Общая интерференционная картина является суммой интерференционных картин от всех пар соответствующих монохроматических компонент.

Если два луча исходят из различных источников света, то они некогерентны, т. е. их поля независимы друг от друга, и поэтому среднее значение их произведения $\overline{f_1 f_2^*} = \overline{f_1} \overline{f_2^*} = 0$, так как каждое из $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2^*}$ равно нулю. Таким образом, лучи от разных источников света не интерферируют друг с другом.

Рассмотрим теперь интерференцию света, испускаемого источником, обладающим конечными размерами. Интерференционная картина, получающаяся от такого света, является наложением интерференционных картин, возникающих от лучей, исходящих от различных точек поверхности источника света. Пусть $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — волновые векторы двух лучей, исходящих от одной точки источника и в дальнейшем интерферирующих друг с другом. Если интерференция наблюдается на достаточно большом расстоянии от источника света, то волновые векторы двух лучей, исходящих из какой-либо другой точки источника и интерферирующих друг с другом там же, где интерферирует первая пара лучей, можно считать равными тем же $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Разность оптических длин хода обоих лучей $\mathbf{k}_1$ равна, очевидно, $\mathbf{k}_1 \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — вектор между точками выхода обоих пар лучей; аналогичная разность для лучей $\mathbf{k}_2$ равна $\mathbf{k}_2 \mathbf{a}$. Интерференционный член, описывающий интерференцию второй пары лучей, отличается, следовательно, от такого же члена для первой пары множителем $e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{a}}$.

Для того, чтобы получить полную интерференционную картину, надо сложить интерференционные картины от всех точек источника света. Другими словами, надо усреднить $e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{a}}$ по всем возможным значениям вектора $\mathbf{a}$. При этом усреднении $\mathbf{a}$ пробегает значения в интервале порядка величины размеров источника, которые мы обозначим посредством d . Если $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \ll 1/d$, то в этом интервале $e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{a}}$ является быстро переменной периодической функцией, и ее среднее значение обращается в нуль, т. е. интерференции не произойдет. С другой стороны, $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \sim k\theta \sim \theta/\lambda$, где θ — угол между интерферирующими лучами в точке их испускания источником света. Таким образом, интерференция возможна только при соблюдении условия

$$\theta \lesssim \frac{\lambda}{d}. \quad (59,3)$$

Это условие ограничивает возможность интерференции для лучей, исходящих из одного и того же источника.

§ 60. Пределы геометрической оптики

Непосредственно из определения плоской монохроматической волны видно, что в такой волне амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$. Всякая же волна с не везде и всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займемся теперь выяснением вопроса о „степени монохроматичности“ волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся функцией от времени. Другими словами, в каждой точке пространства, через которое проходит волна, амплитуда волны меняется со временем.

Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны. Тогда поле волны, например, электрическое, в данной точке имеет вид $E_0(t) e^{i\omega_0 t}$. Это поле, не являющееся, конечно, само монохроматическим, можно, однако, разложить по монохроматическим волнам, т. е. в интеграл Фурье. Амплитуда компоненты этого разложения с частотой ω пропорциональна

интегралу вида $\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$. Множитель $e^{i(\omega - \omega_0)t}$ является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю. Если бы E_0 было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех $\omega \neq \omega_0$. Если же $E_0(t)$ переменное, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка $\frac{1}{\omega - \omega_0}$, то интеграл почти равен нулю, тем точнее, чем медленнее меняется E_0 . Для того, чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы $E_0(t)$ заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка периода $\frac{1}{\omega - \omega_0}$.

Обозначим посредством Δt порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется. Из приведенных соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от ω_0 частоты, входящие в спектральное разложение одной волны, определяются из условия $\frac{1}{\omega - \omega_0} \sim \Delta t$. Если обозначить посредством $\Delta\omega$ интервал частот (вокруг средней частоты ω_0), входящих в спектральное разложение волны, то, следовательно, имеет место соотношение

$$\Delta\omega \Delta t \sim 1. \quad (60,1)$$

Чем меньше $\Delta\omega$, тем меньший интервал частот входит в спектральное разложение данной волны, т. е. тем более монохроматична эта волна. Мы видим, следовательно, что действительно волна тем более монохроматична, чем больше Δt , т. е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства ее амплитуда.

Соотношения, аналогичные (60,1), легко вывести и для волнового вектора. Пусть Δx , Δy , Δz суть порядки величин расстояний вдоль осей X , Y , Z , на которых заметно меняется амплитуда волны. В данный момент времени поле волны как функция от координаты x (при заданных y и z) имеет вид $E_0(x) e^{ik_{0x}x}$, где k_{0x} — некоторая средняя компонента волнового вектора. Совершенно аналогично выводу (53,1) можно найти интервал Δk_x значений, имеющих в разложении рассматриваемой волны в интеграл Фурье (то же самое для k_y и k_z). При этом мы находим

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \Delta k_y \Delta y \sim 1, \Delta k_z \Delta z \sim 1. \quad (60,2)$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени. Обозначим посредством Δt порядок

величины этого интервала. Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменяется за время Δt , в течение которого волна успеет целиком пройти через эту точку. На основании соотношения (60,1) мы можем теперь сказать, что „степень немонохроматичности“ такой волны $\Delta\omega$ во всяком случае не может быть меньше, чем $1/\Delta t$ (но может, конечно, быть и больше):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \quad (60,3)$$

Аналогично, если Δx , Δy , Δz суть порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового вектора, входящих в разложение волны, находим

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \quad (60,4)$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось X по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k \Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad (60,5)$$

где θ_y — порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости XY (ср. также § 63).

С другой стороны, формула (60,5) дает ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дают изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна. Для ширины Δ этого пятна имеем, согласно (60,5),

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \quad (60,6)$$

где θ — угол раствора пучка. Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету. Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера λ/θ . Соответственно этому формула (60,6) определяет предельную разрешающую силу микроскопа. Минимальное значение Δ , достигающееся при $\theta \sim 1$, есть λ в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

Задача

Найти наименьший размер светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

Решение: Обозначив размер отверстия диафрагмы через d , имеем из (60,5) для угла дифракции λ/d , откуда ширина пучка порядка $d + \frac{\lambda}{d} l$. Наименьшее значение этой величины есть $\sqrt{\lambda l}$.

§ 61. Диффракция

Законы геометрической оптики строго точны лишь в идеальном случае, когда длину волны можно рассматривать как бесконечно малую. Чем хуже выполнено это условие, тем сильнее проявляются отклонения от геометрической оптики. Явления, наблюдающиеся в результате этих отклонений, носят название явлений диффракции.

Явления диффракции можно наблюдать, если на пути распространения света ¹⁾ находятся препятствия — непрозрачные тела (будем называть их экранами) произвольной формы или, например, если свет проходит через отверстия в непрозрачных экранах. Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экранами находились бы области „тени“, резко отграниченные от областей, куда свет попадает. Диффракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света. Эти явления диффракции тем сильнее выражены, чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны.

Задача теории диффракции заключается в том, чтобы при данном расположении и форме экранов и отверстий (и расположении источников света) определить распределение света, т. е. электромагнитное поле во всем пространстве. Точное разрешение этой задачи возможно только путем решения волнового уравнения с соответствующими граничными условиями на поверхности экранов, зависящими еще к тому же и от свойств самих этих экранов (оптических свойств материала, из которого они сделаны). Такое решение обычно представляет большие математические трудности.

Однако, в большинстве случаев оказывается достаточным приближенный метод решения задачи о распространении света вблизи границы между светом и тенью. Этот метод применим в случаях слабого отклонения от геометрической оптики, т. е. тогда, когда размеры всех тел все же велики по сравнению с длиной волны.

Рассмотрим какой-нибудь экран с отверстием, через которое проходит свет от данных источников. Рис. 7 изображает этот экран в разрезе (жирная линия); свет идет слева направо. Будем обозначать посредством u любую из компонент поля $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. При этом под u мы будем подразумевать поле как функцию только от координат, т. е. без множителя $e^{-i\omega t}$, определяющего зависимость от времени. Нашей задачей является определение интенсивности света, т. е. поля u в любой точке P за экраном. При приближенном решении этой задачи в случаях, когда отклонения от геометрической оптики малы, можно считать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана. Другими сло-

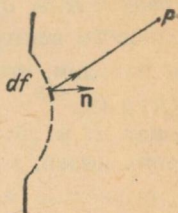


Рис. 7.

¹⁾ Мы будем ниже, говоря о диффракции, говорить для определенности о свете; все нижеследующее относится, конечно, к любым электромагнитным волнам.

вами, значения поля здесь те, которые следуют непосредственно из геометрической оптики. Во всех же точках, находящихся непосредственно за экраном, поле можно положить равным нулю. При этом, очевидно, свойства самого экрана (материала, из которого он сделан) вообще не играют роли. Очевидно также, что в рассматриваемых случаях для дифракции существенна только форма края отверстия и не существенна форма непрозрачного экрана.

Проведем какую-нибудь поверхность, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями (разрез этой поверхности на рис. 7 изображен пунктиром). Эту поверхность разобьем на участки с площадью df , размеры которых, однако, велики по сравнению с длиной волны света. Мы можем тогда рассматривать каждый из этих участков, до которых дошла световая волна, так, как будто бы он сам делается источником световой волны, распространяющейся во все стороны от этого участка. Поле в точке P мы будем рассматривать как результат наложения полей, исходящих из всех участков df поверхности, закрывающей отверстие.

Поле, создаваемое участком df в точке P , пропорционально, очевидно, значению u поля в самом участке df (напоминаем, что поле в df мы предполагаем таким, каким оно было бы при отсутствии экрана). Кроме того, оно пропорционально проекции df_n площади df на плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{n}$ луча, пришедшего из источника света в df . Это следует из того, что какой бы формой ни обладал элемент df , через него будут проходить одинаковые лучи, если только его проекция df_n будет неизменной, а потому и его действие на поле в точке P будет одинаковым.

Таким образом, поле, создаваемое в точке P участком df , пропорционально $u df_n$. Далее, надо еще учесть изменение фазы волны при ее распространении от df к точке P . Это изменение определяется расстоянием R от df до P и равно, очевидно, kR (k — абсолютная величина волнового вектора света). Поэтому $u df_n$ надо еще умножить на e^{ikR} , и мы находим, что искомое поле пропорционально $u df_n e^{ikR}$, т. е. равно $a(R) u df_n e^{ikR}$, где $a(R)$ — пока неизвестная функция от расстояния между df и точкой P . Поле в точке P , являющееся результатом наложения полей, создаваемых всеми df , равно, следовательно,

$$u_P = \int a(R) u e^{ikR} df_n, \quad (61,1)$$

где интеграл распространен по поверхности, ограниченной краем отверстия. Этот интеграл в рассматриваемом приближении не может, конечно, зависеть от формы этой поверхности. Формула (61,1) применима, очевидно, и к дифракции не от отверстия в экране, а от экрана, вокруг которого свет может свободно распространяться. В этом случае поверхность интегрирования в (61,1) простирается во все стороны от края экрана.

Для определения функции $a(R)$ рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси X ; волновые поверхности параллельны пло-

скости YZ . Пусть u есть значение поля в плоскости YZ . Тогда в точке P , которую мы выберем на оси X , поле равно $u_P = ue^{ikx}$. С другой стороны, поле в точке P можно определить, исходя из формулы (61,1), выбрав в качестве поверхности интегрирования, например, плоскость YZ . При этом в виду малости угла дифракции, т. е. малости отклонения от геометрической оптики, в интеграле существенны только точки плоскости YZ , близкие к началу координат, т. е. точки, в которых $y, z \ll x$ (x — координата точки P). Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (61,1) даст

$$u_P = \iint_{-\infty}^{+\infty} aue^{ik\left(x + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x}\right)} dy dz.$$

Здесь u есть постоянная (поле в плоскости YZ); a можно при интегрировании тоже считать постоянным, так как в виду малости y и z $R \approx x = \text{const}$. Таким образом,

$$u_P = aue^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz.$$

Оба эти интеграла, конечно, одинаковы; каждый из них подстановкой $y = \xi \sqrt{\frac{2x}{k}}$ приводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i),$$

и мы получаем

$$u_P = aue^{ikx} \frac{2i\pi x}{k}.$$

С другой стороны, $u_P = ue^{ikx}$ и, следовательно,

$$a = \frac{k}{2\pi i x} \approx \frac{k}{2\pi i R}.$$

Подставляя это в (54,1), находим окончательно решение поставленной задачи в виде

$$u_P = \int \frac{k u}{2\pi i R} e^{ikR} df_n. \quad (61,2)$$

§ 62. Диффракция Френеля

Если источник света и точка P , в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке P играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (61,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой P .

Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Диффракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название диффракционных явлений Френеля.

Рассмотрим дифракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству такой дифракции играет роль только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках край экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве оси Z край экрана (рис. 8), а ось X направим по перпендикуляру QO , опущенному из источника света Q на линию

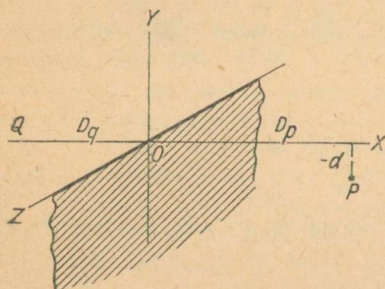


Рис. 8.

края экрана. D_q есть длина этого перпендикуляра, т. е. расстояние источника света до края экрана. Согласно геометрической оптике свет мог бы попасть только в точки, лежащие над плоскостью XZ ; область же под плоскостью XZ есть область, где согласно геометрической оптике была бы тень (область геометрической тени).

Мы определим теперь распределение интенсивности света за экраном вблизи границы геометрической тени.

При этом мы пока ограничимся только точками, лежащими в плоскости XY , т. е. в плоскости, проведенной через источник, перпендикулярно краю экрана. x -координату такой точки P обозначим посредством D_p , y -координату, т. е. расстояние до плоскости XZ , — посредством d . При этом отрицательное d означает, что P находится в области геометрической тени; d мы предполагаем малым по сравнению с D_p и D_q .

В качестве поверхности интегрирования в (61,2) выберем верхнюю полуплоскость; координаты ее точек есть $0, y, z$. Поле волны, исходящей из источника Q , на расстоянии R_q от него пропорционально множителю e^{ikR_q} . Поэтому поле u на поверхности интегрирования пропорционально

$$u \sim \exp(ik\sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2}).$$

В интеграле (61,2) для R надо теперь подставить

$$R = \sqrt{D_p^2 + z^2 + (y - d)^2}.$$

В подинтегральном выражении медленно изменяющиеся множители не существенны по сравнению с экспоненциальным. Поэтому мы можем

считать $1/R$ постоянным, а вместо df_n писать $dy dz$. Мы находим тогда, что поле в точке P

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \exp \left\{ ik \left(\sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{D_p^2 + (y-d)^2 + z^2} \right) \right\} dy dz. \quad (62,1)$$

Как мы уже говорили, в точку P попадает свет главным образом из точек плоскости интегрирования, близких к O . Поэтому в интеграле (62,1) играют роль малые y и z (по сравнению с D_q и D_p). Мы можем на этом основании написать:

$$\begin{aligned} \sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2} &\approx D_q + \frac{y^2 + z^2}{2D_q}, \\ \sqrt{D_p^2 + (y-d)^2 + z^2} &\approx D_p + \frac{(y-d)^2 + z^2}{2D_p}. \end{aligned}$$

Подставим это в (62,1). Поскольку нас интересует поле только как функция от расстояния d , то постоянный множитель $\exp \{ ik(D_p + D_q) \}$ мы опускаем; интеграл по dz тоже дает выражение, не содержащее d , которое мы также опустим. Мы находим тогда

$$u_P \sim \int_0^{\infty} \exp \left\{ ik \left(\frac{1}{2D_q} y^2 + \frac{1}{2D_p} (y-d)^2 \right) \right\} dy.$$

Это выражение можно написать и в таком виде:

$$u_P \sim \exp \left\{ -ik \frac{d^2}{2D_p} \frac{1}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} \right\} \int_0^{\infty} \exp \left\{ ik \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) y - \frac{d}{D_p} \right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} \right\} dy.$$

Интенсивность света определяется квадратом поля, т. е. квадратом модуля $|u_P|^2$. Поэтому для нахождения интенсивности стоящий перед интегралом множитель несуществен, так как при умножении на сопряженное выражение он дает единицу. В интеграле сделаем подстановку

$$\frac{k}{2} \frac{\left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) y - \frac{d}{D_p} \right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} = \eta^2.$$

Тогда мы получаем

$$u_P \sim \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta, \quad (62,2)$$

где

$$w = d \sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q + D_p)}}. \quad (62,3)$$

Таким образом, интенсивность J в точке P есть

$$J = \frac{J_0}{2} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2 = \frac{J_0}{2} \left\{ \left(C(w) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(w) + \frac{1}{2} \right)^2 \right\}, \quad (62,4)$$

где

$$C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos \eta^2 d\eta, \quad S(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin \eta^2 d\eta$$

есть так называемые интегралы Френеля. (62,4) решает поставленную задачу, определяя интенсивность света как функцию от d . J_0 есть, как легко видеть, интенсивность в освещенной области в точках, не слишком близких к краю тени, точнее при $w \gg 1$ ($C(\infty) = S(\infty) = 1/2$). При $w \rightarrow -\infty$ J стремится, как и должно быть, к нулю. На рис. 9 изображен график J/J_0 как функции от w . При положительных w , т. е.

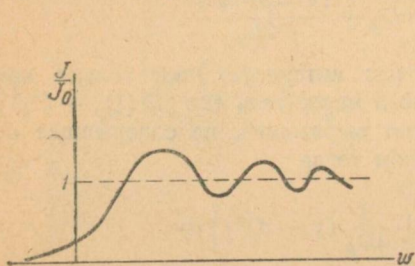


Рис. 9.

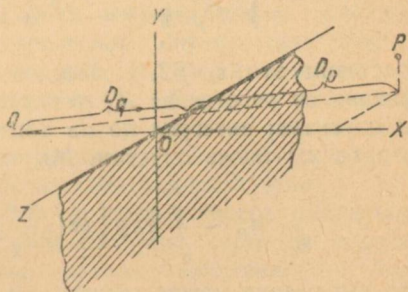


Рис. 10.

выше плоскости XZ , интенсивность J имеет ряд чередующихся минимумов и максимумов, так что отношение J/J_0 колеблется в обе стороны от единицы. Размах этих колебаний быстро уменьшается по мере увеличения w , а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом. Первый максимум несколько смещен вверх от границы геометрической точки. На самой этой границе $J = J_0/4$. В области геометрической тени интенсивность быстро монотонно падает при удалении от ее границы.

Если точка P находится вне плоскости XY (рис. 10), то совершенно аналогичное вычисление показывает, что интенсивность определяется той же самой формулой (62,4), где теперь D_n и D_q суть длины отрезков, указанных на рис. 10.

§ 63. Диффракция Фраунгофера

Существует целый ряд случаев диффракции, в которых интенсивность в точке наблюдения определяется всей волновой поверхностью; другими словами, в интеграле (61,2), определяющем u_P , существенна вся волновая поверхность, по которой происходит интегрирование. С другой стороны, мы попрежнему будем считать, что отклонение от геоме-

трической оптики мало, т. е. в точку наблюдения P доходят только те лучи, которым надо мало отклониться от пути, по которому бы они шли согласно геометрической оптике. Поэтому вся волновая поверхность имеет значение только в следующих двух случаях.

Первым случаем является тот, когда точка наблюдения находится вблизи фокуса, т. е. точки, в которой сходятся геометрические пути всех лучей света.

Вторым, наиболее важным случаем является так называемая диффракция Фраунгофера. При диффракции Фраунгофера как источник света, так и точка наблюдения P находятся на очень больших (бесконечных) расстояниях от экранов¹⁾. Лучи идут теперь из источника света к экранам параллельным пучком; то же касается лучей, идущих от экранов к точке наблюдения. Поэтому при диффракции Фраунгофера мы интересуемся только изменением направления пучка света, т. е. ищем интенсивность как функцию от угла отклонения света от первоначального направления (угла диффракции). Поскольку мы рассматриваем малые отклонения от геометрической оптики, то этот угол должен быть мал.

Выведем общую формулу, определяющую диффракцию Фраунгофера от экранов и отверстий любой формы. Пусть свет идет слева направо; выберем систему координат с началом где-нибудь слева от экрана. На рис. 11 O есть начало координат, P — точка наблюдения и df — некоторый элемент волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в формуле (61,2):

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n.$$

В падающем свете в рассматриваемом нами случае диффракции Фраунгофера все лучи имеют одинаковое направление, т. е. одинаковый волновой вектор $\mathbf{k}$ (единичный вектор в этом направлении $\mathbf{n}$). Точку наблюдения P надо представлять себе на бесконечном расстоянии от экранов; поэтому все лучи, идущие от экранов в P , тоже параллельны друг другу, т. е. имеют одинаковые волновые векторы $\mathbf{k}'$ (единичный вектор в этом направлении — $\mathbf{n}'$). Угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ есть угол диффракции ($\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ отличаются, конечно, только направлением, но не величиной).

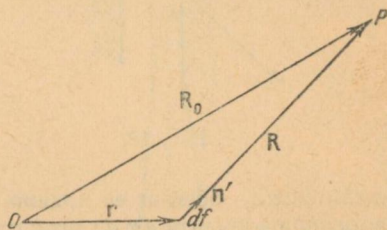


Рис. 11.

Поле на поверхности интегрирования в выражении для u_P равно $u = u_0 e^{ikr}$ (r — радиус-вектор от O к df). В подынтегральном выраже-

¹⁾ Экспериментально диффракция Фраунгофера наблюдается, конечно, не на бесконечном расстоянии, а при помощи расположенной за экраном линзы; в фокусной плоскости получается тогда диффракционная картина. Можно, однако, показать, что это обстоятельство ничего не меняет в последующих формулах (если только линза не слишком мала, так что в ней не происходит обусловленных ею самой диффракционных явлений).

нии величина $1/R$ может считаться постоянной, равной $1/R_0$. Мы находим, следовательно,

$$u_P = \frac{u_0}{2\pi i R_0} \int e^{ikr} e^{ikR} df_n.$$

Из рис. 11 видно, что $R = R_0 - r$. Умножим это равенство с обеих сторон на n' ; при бесконечно далекой точке P векторы R и R_0 параллельны, и потому $R_0 n' = R_0$. Таким образом,

$$R = R_0 - r n',$$

так что

$$e^{ikR} = e^{ikR_0} e^{-ik'r}$$

(так как $kn' = k'$). Множитель e^{ikR_0} есть постоянная. Мы получаем, следовательно, окончательно:

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i(k-k')r} df_n. \quad (63,1)$$

Эта формула и определяет интенсивность $|u_P|^2$ как функцию от угла дифракции.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от бесконечной щели с параллельными краями, прорезанной в непрозрачном экране (рис. 12). Выберем ось Z параллельно краям щели, ось Y перпендикулярно к плоскости щели (плоскость XZ).

Выберем в (63,1) в качестве поверхности интегрирования плоскость щели между обеими ее краями. Элемент интегрирования df_n равен тогда проекции элемента $dx dz$ этой плоскости на направление k . Но поскольку все падающие лучи параллельны друг другу, угол между k и элементом $dx dz$ постоянен вдоль всей плоскости щели. Поэтому мы можем в (63,1) с точностью до постоянного множителя написать вместо df_n просто $dx dz$, так что

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} e^{i(k_x - k_{x'})x} e^{i(k_z - k_{z'})z} dx dz$$

($2a$ есть ширина щели). Интеграл по dz от периодической знакопеременной функции $e^{i(k_z - k_{z'})z}$ равен нулю всегда, когда $k_z \neq k_{z'}$. Поэтому должно быть $k_z = k_{z'}$, т. е. свет отклоняется только в плоскости XY , как, впрочем, можно было ожидать из соображений симметрии. Выражение для u_P сводится, таким образом, к

$$u_P \sim \int_{-a}^{+a} e^{ik_x x} dx,$$

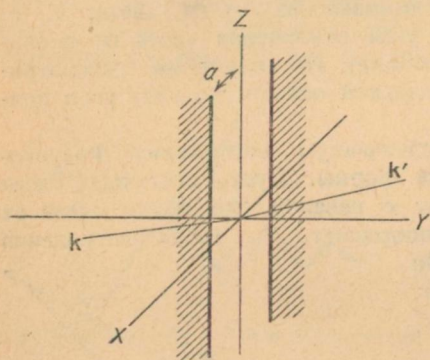


Рис. 12.

где $x = k_x - k_{x'}$ ¹⁾. Интегрируя, находим

$$u_p \sim \frac{\sin \frac{\pi x a}{\lambda}}{\frac{\pi x a}{\lambda}}.$$

Отсюда находим для интенсивности dJ света, подвергнувшегося дифракции в интервале dx значений x :

$$dJ = J_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi x a}{\lambda}}{\frac{\pi x a}{\lambda}} \right)^2 dx, \quad (63,2)$$

где постоянный множитель мы выбрали так, что J_0 есть полная интенсивность света, проходящего через щель (т. е. интеграл от dJ по всем значениям x).

$\frac{dJ}{dx}$ как функция от угла дифракции имеет вид, изображенный на рис. 13. При увеличении x в ту и другую сторону от $x=0$ интенсивность пробегает ряд чередующихся максимумов и минимумов. Высота максимумов быстро падает при увеличении x ; самый большой максимум J имеет при $x=0$. В минимумах $J=0$. Эти минимумы имеют место при

$$\pi x a = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (63,3)$$

Как уже указывалось в примечании на стр. 149, диффракция Фраунгофера наблюдается обычно при помощи системы линз. Параллельный пучок лучей, пройдя через линзу, собирается в ее главном фокусе. В плоскости, проходящей через этот фокус перпендикулярно к оптической оси линзы, поле u_p будет равно нулю везде, за исключением самого фокуса. Если же перед линзой находится какой-либо экран, то пучок лучей подвергается дифракции; соответственно этому в фокальной плоскости линзы получается теперь не точечное изображение источника света, а некоторая протяженная дифракционная картина.

Заменим теперь экран „дополнительным“, т. е. таким, который имеет отверстия там, где первый экран не прозрачен, и наоборот. Обозначим поле в фокальной плоскости линзы в обоих случаях, соответственно, посредством $u_p^{(1)}$ и $u_p^{(2)}$. Поскольку $u_p^{(1)}$ и $u_p^{(2)}$ выражаются интегралами, взятыми по отверстиям в экранах, а отверстия обоих экранов

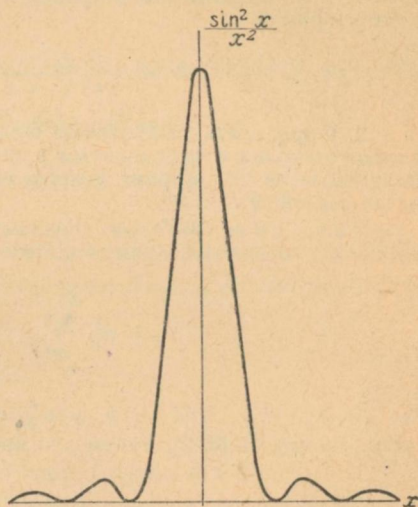


Рис. 13.

¹⁾ x может быть выражено через угол α дифракции, т. е. угол между k и k' . Именно, легко получить (для малых x и α) формулу

$$\alpha = \frac{x \sin(k, Z)}{k \cos(k, Y)},$$

где (k, Y) , (k, Z) — углы между k и осями Y и Z .

дополняют друг друга до целой плоскости, то $u_P^{(1)} + u_P^{(2)} = u_P$, где u_P — поле, получающееся в отсутствии экранов. Как было указано, $u_P = 0$ везде кроме фокуса, откуда $u_P^{(1)} + u_P^{(2)} = 0$, или для соответствующих интенсивностей

$$|u_P^{(1)}|^2 = |u_P^{(2)}|^2.$$

Таким образом, дополнительные экраны дают одинаковую дифракционную картину во всей фокальной плоскости линзы, за исключением самого фокуса (так называемый принцип Бабине).

Задачи

1. Определить дифракцию Фраунгофера от прямоугольного отверстия (со сторонами $2a$ и $2b$).

Решение аналогично определению дифракции от щели. Вводя обозначения

$$k_x - k_{x'} = \kappa_x, \quad k_z - k_{z'} = \kappa_z$$

(оси X и Z параллельны сторонам прямоугольного отверстия), находим для интенсивности

$$dJ = J_0 \frac{ab}{\pi^2} \left(\frac{\sin \kappa_x a}{\kappa_x a} \right)^2 \left(\frac{\sin \kappa_z b}{\kappa_z b} \right)^2 d\kappa_x d\kappa_z.$$

2. Определить дифракцию Фраунгофера от дифракционной решетки — плоского экрана с прорезанным в нем рядом одинаковых параллельных щелей (ширина щели $2a$, ширина непрозрачного экрана между соседними щелями $2b$, число щелей N).

Решение: Выберем плоскость решетки в качестве плоскости XZ с осью Z , параллельной щелям. Интегрирование в (63,1) дает

$$u_P = u'_P \sum_{n=0}^{N-1} e^{2in\kappa d} = u'_P \frac{1 - e^{2iN\kappa d}}{1 - e^{2i\kappa d}},$$

где $\kappa = k_x - k_{x'}$, $d = a + b$, а u'_P есть результат интегрирования по одной щели. Пользуясь (63,2), имеем для интенсивности $|u_P|^2$:

$$dJ = \frac{J_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin N\kappa d}{\sin \kappa d} \right)^2 \left(\frac{\sin \kappa a}{\kappa a} \right)^2 d\kappa.$$

(J_0 — полная интенсивность света, проходящего через все щели).

В случае большого числа щелей, т. е. $N \rightarrow \infty$, эту формулу можно написать в ином виде. При значениях $\kappa = \frac{\pi n}{d}$ (n — целое число) $\frac{dJ}{d\kappa}$ имеет максимумы; вблизи такого максимума (т. е. при $\kappa d = n\pi + \epsilon$ мало):

$$dJ = \frac{J_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \kappa a}{\kappa a} \right)^2 \frac{\sin^2 N\epsilon}{\epsilon^2} d\kappa.$$

Но при $N \rightarrow \infty$ имеет место формула ¹⁾

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} \right) = \pi \delta(x),$$

т. е. вблизи каждого максимума J имеет вид

$$J_0 a \left(\frac{\sin \chi a}{\chi a} \right)^2 \delta(\chi a - \pi n).$$

Следовательно,

$$dJ = d\chi J_0 a \left(\frac{\sin \chi a}{\chi a} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\chi a - \pi n) = J_0 a \left(\frac{\sin \chi a}{\chi a} \right)^2 \delta(\sin \chi a) d\chi.$$

3. Определить дифракцию Фраунгофера от круглого отверстия (радиуса a); свет падает перпендикулярно плоскости отверстия.

Решение: Введем цилиндрические координаты z, r, φ с осью Z , проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Обозначим пресекающую $\mathbf{k}'$ на эту плоскость посредством χ ($\chi = k\alpha$, где α — угол дифракции). Из соображений симметрии следует, что дифракция будет зависеть только от χ ; поэтому можно ограничиться рассмотрением луча, идущего в плоскости $\varphi = 0$. Тогда формула (63,1) дает

$$u_P = \frac{k u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\chi r \cos \varphi} r d\varphi dr = \frac{e^{ikR_0} k u_0}{i R_0} \int_0^a J_0(\chi r) r dr,$$

где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi$ есть функция Бесселя нулевого ранга, u_0 — поле в самом отверстии. Из теории функций Бесселя известно, что

$$\int_0^a J_0(\chi r) r dr = \frac{a J_1(a\chi)}{\chi}.$$

Интенсивность дифракции в телесный угол $d\Omega$ получается умножением $|u_P|^2$ на $R_0^2 d\Omega$. В результате находим для интенсивности dI света, подвергнувшегося дифракции,

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi \alpha^2} d\Omega$$

где I_0 — полная интенсивность падающего света.

¹⁾ Согласно формулам, известным из теории рядов Фурье

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} f(x) \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} dx \right\} = f(0),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y^2}{y^2} dy = 1.$$

Отсюда видно, что свойства функции $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} \right)$ действительно совпадают со свойствами δ -функции (см. примечание на стр. 70).