УДК 517.535

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

МАКСИМАЛЬНЫЕ И γ-ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. II*

§ 4. Построение γ-достаточного множества с помощью рядов Лагранжа. Всюду далее предполагается, что $B = F = \boldsymbol{C}$; $E_{(0)} = H(\boldsymbol{C})$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta = 1$. Пусть $h(z)$ — функция относительно медленного роста, удовлетворяющая дополнительным условиям:

$$\lim_{z\to\infty} h(z) = \infty; \ \lim_{\substack{z\to 0\\ \lambda\to\infty}} \frac{h(\lambda z)}{h(\lambda)} = 0 \ \ (\lambda, z \in \boldsymbol{C}); \tag{1}$$

$$\forall \eta > 0 \ \varliminf_{\lambda\to\infty} \inf_{\frac{\eta}{2}<|z|<\eta} \frac{h(\lambda z)}{h(\lambda)} > 0; \tag{2}$$

$$\forall R < \infty \ \inf_{|\lambda|<R} h(\lambda) > 0, \ \sup_{|\lambda|<R} h(\lambda) < +\infty. \tag{3}$$

Совокупность всех этих предположений будем коротко называть условиями $\mathscr{A}$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $\mathscr{A}$; $\gamma \in (0, 1]$ *и существует 1-маркировочная функция* $L(z)$ *с простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и 0-маркировочная функция* $a(z)$ *такие, что*

---

* В настоящей статье, являющейся продолжением работы [1], используются те же определения и обозначения.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{h(\lambda_n)}\ln\left|\frac{a(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+\gamma\right]\leqslant 0. \qquad (4)$$

Пусть, наконец,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{h(\lambda_n)}=0. \qquad (5)$$

Тогда $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *γ-достаточное множество для* $E^1(h)$.

Доказательство. Всюду далее ради кратности положим $E^1(h)=E(h)$. Пусть $y\in E(h)$, $d\in[0,\gamma)$ и $y\in E_d^{\Lambda}$. Положим $\Phi_1(\lambda)=a(\lambda)\times y(\lambda)L(\lambda z)$. В силу условий (1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \exists R<\infty:|L(\lambda z)|\leqslant\exp\varepsilon h(z)$, $\forall z:|z|\leqslant\delta$, $\forall\lambda:|\lambda|\geqslant R$. Если $\varepsilon\in\left(0,\frac{1-H(y)}{4}\right)$, то $\Phi_1\in E(h)$, причем $H(\Phi_1)\leqslant H(y)+\varepsilon<\frac{1+H(y)}{2}$. Пусть Q — исключительное множество для 1-маркировочной функции $L(\lambda)$. Так как Q имеет нулевую линейную плотность, всегда можно указать такую последовательность $r_n\uparrow\infty$, что $Q\cap C_n=\varnothing$, $n=1,2,\ldots$, где $C_n=\{\lambda:|\lambda|=r_n\}$. Тогда $\forall n\geqslant 1$

$$a(\lambda)y(\lambda)L(\lambda z)-\frac{L(\lambda)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{a(t)\,y(t)\,L(tz)\,dt}{L(t)\,(t-\lambda)}=\sum_{|\lambda_k|<r_n}\frac{a(\lambda_k)\,y(\lambda_k)\,L(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)\,(\lambda-\lambda_k)}L(\lambda). \qquad (6)$$

При этом $\forall\varepsilon>0\exists N<\infty:|L(t)|\geqslant\exp(1-\varepsilon)h(t)$, $\forall t\in C_n$, $\forall n\geqslant N$.

Если еще $|z|\leqslant\delta$, где δ выбрано указанным выше образом по ε, то $|a(t)y(t)L(tz)|\leqslant M\exp[2\varepsilon+H(y)]h(t)\leqslant M\exp(1-2\varepsilon)h(t)$, $\forall t\in C_n$, $\forall n\geqslant N_1$. Отсюда следует, что при $n\to\infty$ интеграл в левой части при любых фиксированных z, $|z|\leqslant\delta$ и $\lambda\notin\Lambda$ стремится к нулю:

$$a(\lambda)y(\lambda)L(\lambda z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_k|<r_n}\frac{a(\lambda_k)\,y(\lambda_k)\,L(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)\,(\lambda-\lambda_k)}L(\lambda).$$

Из условия (5) следует, что $\forall n\geqslant 1\ \exists\tau_n\geqslant 0:\tau_n\to 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp[-\tau_n\times h\times(\lambda_n)]<\infty$. Положим $U_k=\{\lambda:|\lambda-\lambda_k|\leqslant\exp[-\tau_k h(\lambda_k)]\}$, $k=1,2,\ldots$; $U=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}U_k$. Если $\lambda\notin U$; $\varepsilon_1\in\left(0,\frac{\gamma-d}{3}\right)$; $|z|\leqslant\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)$, то $\exists M<\infty:\forall k\geqslant 1$

$$|a(\lambda_k)|\leqslant M\,|L'(\lambda_k)|\exp(-\gamma+\varepsilon_1)\,h(\lambda_k);$$
$$|y(\lambda_k)|\leqslant|y|_d^{\Lambda}\exp dh(\lambda_k);\ \ |L(\lambda_k z)|\leqslant M\exp\varepsilon_1 h(\lambda_k).$$

Тогда $\forall\lambda\notin U$, $\forall z\in K_1=\{t:|t|\leqslant\delta_1\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a(\lambda_k)\,y(\lambda_k)\,L(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)\,(\lambda-\lambda_k)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant M^2|y|_d^{\Lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\exp[(-\gamma+d+2\varepsilon_1+\tau_k)\,h(\lambda_k)]=M_1|y|_d^{\Lambda}.$$

существенно, что числа δ_1 и M_1 зависят от γ и δ, но не зависят от (λ), лишь бы $y \in E_d^{\Lambda}$. При этом ряд в правой части (6) при любом фиксированном $\lambda \notin \Lambda$ сходится абсолютно и равномерно (по z) в K_1, его сумма аналитична в круге $|z| < \delta_1$.

Так как любая часть равенства (6) — целая функция по z при любом фиксированном λ, и равенство (6) имеет место при $|z| \leqslant \delta$, то оно справедливо и при $|z| \leqslant \delta_1$. Итак, если $|z| \leqslant \delta_1$ и $\lambda \notin U$, то $\forall y \in E_d^{\Lambda}$

$$|y(\lambda)\, a(\lambda)\, L(\lambda z)| \leqslant M_1 |L(\lambda)|\, |y|_d^{\Lambda}.$$

Пусть Q — исключительное множество для $a(\lambda)$ и $U_0 = Q \cup U$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M_2 = M_2(\varepsilon) : \forall \lambda \notin Q_1$

$$|y(\lambda)| \sup_{|z| < \delta_1} |L(\lambda z)| \leqslant M_2 |L(\lambda)|\, |y|_d^{\Lambda} \exp[-\varepsilon h(\lambda)].$$

Выберем число R_1 так, чтобы $\sum\limits_{r_j < R} r_j < \frac{R}{4}$, $\forall R > R_1$, где r_j — радиусы кружков $|z - \mu_j| < r_j$, составляющих исключительное множество Q функции $L(\lambda)$. Тогда $\forall \lambda : |\lambda| > R_1$ найдется $z_\lambda : \frac{\delta_1}{2} \leqslant |z_\lambda| \leqslant \delta_1$ и $\lambda z_\lambda \notin Q$. Действительно, в противном случае имели бы $\sum\limits_{r_j < \delta_1 |\lambda|} r_j \geqslant |\lambda| \delta_1/2$, что невозможно. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists R_2$:

$$\forall \lambda,\ |\lambda| > R_2\ \exists z_\lambda : \frac{\delta_1}{2} \leqslant |z_\lambda| \leqslant \delta_1;\ |L(\lambda z_\lambda)| \geqslant \exp(1 - \varepsilon)\, h(\lambda z_\lambda).$$

Учитывая условие (2), получаем, что $\exists R_3 < \infty \;\; \exists \tau > 0$:

$$\sup_{|z| < \delta_1} |L(\lambda z)| \geqslant \exp \tau h(\lambda),\ \ \forall \lambda : |\lambda| \geqslant R_3.$$

Таким образом, $\forall \lambda \notin Q_1,\ |\lambda| \geqslant R_3$:

$$|y(\lambda)| \leqslant M_3 |y|_d^{\Lambda} \exp[h(\lambda)(1 - \tau)].$$

Согласно [2], множество Q_1 можно погрузить в множество Q_2 нулевой линейной плотности, состоящее из попарно не пересекающихся кружочков. Используя принцип максимума модуля и относительно медленный рост $h(\lambda)$, получим, что $\exists M_4 < \infty : \forall \lambda,\ |\lambda| \geqslant R_3$:

$$|y(\lambda)| \leqslant M_4 |y|_d^{\Lambda} \exp\left[\left(1 - \frac{\tau}{2}\right) h(\lambda)\right].$$

Привлекая вновь принцип максимума модуля и соотношения (3), получим, что $\exists M_5 : \forall \lambda \in \boldsymbol{C}$:

$$|y(\lambda)| \leqslant M_5 |y|_d^{\Lambda} \exp\left[\left(1 - \frac{\tau}{2}\right) h(\lambda)\right].$$

При этом постоянная M_5 зависит не от конкретной функции $y(z)$ (лишь бы $y \in E_d^\Lambda$), а от d и γ. Таким образом, $E_d^\Lambda \hookrightarrow E_{1-\frac{\tau}{2}}$ и по теореме 1 Λ — γ-достаточное множество для $E(h)$.

Следствие 1. *Пусть $u(z)$ — неотрицательная субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям* (9) *из* [1] *и* (1)—(3). *Пусть, далее, существуют 1-маркировочная функция $L(z)$ с простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и 0-маркировочная функция $a(z)$ такие, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{u(\lambda_n)}\ln\left|\frac{a(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+\gamma\right]\leqslant 0 \quad (\gamma\in(0, 1]).$$

Пусть, наконец, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{u(\lambda_n)}=0$. Тогда:

1) $\forall y\in E(h)\ \varlimsup\limits_{z\to\infty}\dfrac{\ln|y(z)|}{u(z)}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln|y(\lambda_n)|}{u(\lambda_n)}+1-\gamma$;

2) если $\gamma>\frac{1}{2}$, то $\forall y\in E(h)\ \sup\limits_{z\in C}|y(z)|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|y(\lambda_n)|$.

Следствие 2. *Пусть $\gamma\in(0, 1]$; $\rho(r)$ — уточненный порядок; $\rho(r)\to\rho>0$; $g(\theta)\in T_\rho$; $g(\theta)>0$; $L(\lambda)$ — целая функция нормального типа при порядке $\rho(r)$ вполне регулярного роста с индикатором $g(\theta)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что для некоторой отличной от тождественного нуля целой функции $a(z)$ из класса $[\rho(r), 0$*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}}\ln\left|\frac{a(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+\gamma g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \qquad (7)$$

Тогда

$$1)\ \forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda)|}{|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}g(\arg\lambda)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}+1-\gamma;$$

2) *если* $\gamma>\frac{1}{2}$, *то* $\forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))\ \sup\limits_{z\in C}|y(z)|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|y(\lambda_n)|$. Заметим, что, как легко проверить, $\forall y\in[\rho(r), \infty)$

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda)|}{|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}g(\arg\lambda)}=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{h_y(\theta)}{g(\theta)},$$

где $h_y(\theta)$ — индикатор $y(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ (это равенство отмечалось в [3, 4]).

Следует отметить, что в случае $\gamma=1$, $h(\lambda)=|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}g(\arg\lambda)$, где $g(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклая 2π-периодическая ограниченная функция (не обязательно положительная), результат, аналогичный теореме 6, был получен ранее А. В. Абаниным и доложен на симпозиуме по теории функций в Уфе в 1987 г.

§ 5. Оценка сверху индикатора функций из $[\rho(r), \infty)$. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — целые функции из класса $[\rho(r), \infty)$, где $\rho(r)\to\rho>0$ и $\rho(r)$ —

уточненный порядок. Пусть, далее, $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$ — индикаторы f_1 и f_2 (при уточненном порядке $\rho(r)$), причем известно, что

$$g_1(\theta_j) < g_2(\theta_j), \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n < 2\pi, \ 0 \leqslant \theta_{j+1} - \theta_j < \frac{\pi}{\rho}, \ \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi. \tag{9}$$

Следует ли из неравенств (8), что $g_1(\theta) < g(\theta)$ уже для всех θ? Простые примеры показывают, что в общей ситуации ответ на этот вопрос отрицателен. Поэтому для того чтобы из неравенства (8) следовало бы, что $g_1(\theta) < g(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, нужны еще какие-то дополнительные предположения. В этом параграфе будет показано, что в качестве такого дополнительного предположения можно использовать наличие оценки сверху роста $f_1(z)$ на некотором множестве точек.

Теорема 7. *Пусть $\rho(r) \to \rho > 0$ — уточненный порядок и числа θ_j удовлетворяют соотношениям* (9). *Пусть, далее, $L(z)$ — целая функция нормального типа вполне регулярного роста при показателе $\rho(r)$ с ограниченным положительным индикатором $g(\theta)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$; в классе $[\rho(r), 0]$ имеется функция $a(z)$, отличная от тождественного нуля и такая, что при некотором $\gamma \in (0, 1]$ справедливо соотношение* (7). *Предположим еще, что $\Phi(z) \in [\rho(r), \infty)$ и индикатор $h_\Phi(\theta)$ функции Φ таков, что*

$$a := \sup_{1 < j < n} \frac{h_\Phi(\theta_j)}{g(\theta_j)} < 1. \tag{10}$$

Пусть, наконец,

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)} \ln |\Phi(\lambda_n)|}{g(\arg \lambda_n)} = \nu < \gamma. \tag{11}$$

Тогда

1) $\nu \leqslant \sup\limits_{\theta \in [0, 2\pi]} \dfrac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)} \leqslant \nu + 1 - \gamma;$

2) *если* $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, *то* $\sup\limits_{\lambda \in C} |\Phi(\lambda)| = \sup\limits_{n > 1} |\Phi(\lambda_n)|$.

Доказательство. Пусть $0 < d \leqslant b$, где $b = \min\{1 - a, \gamma - \nu\}$. Построим в классе $[\rho(r), \infty)$ целую функцию $F(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $dg(\varphi)$ при показателе $\rho(r)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\lambda(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(\lambda_n)\Phi(\lambda_n)F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)(z - \lambda_n)}$ и положим $C_\Lambda = C \setminus \Lambda = \{z \in C : z \neq \lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots\}$. Если $z \in C_\Lambda$, то $\exists \delta = \delta(z) > 0 : |z - \lambda_k| \geqslant \delta$, $\forall k \geqslant 1$. Из соотношений (7), (11) следует: $\exists M < \infty \ \exists \eta > 0 : \forall n \geqslant 1$

$$\left| \frac{a(\lambda_n)\Phi(\lambda_n)F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| \leqslant M \exp[-\eta |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}].$$

Если $|t-z| \leqslant \frac{\delta}{2}$, то $|t-\lambda_n| \geqslant \frac{\delta}{2}$, $\forall n \geqslant 1$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(t-\lambda_n)}$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t-z| < \frac{\delta}{2}$. Таким образом, $\lambda(z) \in H(C_\Lambda)$ (как обычно, $H(G)$ — множество всех аналитических в области G функций).

Выберем последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $\eta_n \downarrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp[-\eta_n \times$ $\times |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}] < \infty$. Пусть $U_n = \{z : |z-\lambda_n| \leqslant \exp[-\eta_n |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}]\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем N так, чтобы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| \exp[\eta_n |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем, далее, число $R_0 < \infty$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(z-\lambda_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |z| > R_0.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 < \infty$: $|\lambda(z)| < \varepsilon$, если $|z| > R_0$ и $z \notin U$. Положим $\lambda_1(z) = \frac{a(z)\,\Phi(z)\,F(z)}{L(z)}$; $\mu(z) = \lambda(z) - \lambda_1(z)$. Функции $\lambda_1(z)$ и $\mu(z)$ — мероморфные и могут иметь разве лишь простые полюсы в точках λ_k, $k = 1, 2, \ldots$. При этом $\operatorname{Res} \mu(z)|_{z=\lambda_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\mu(z)$ — целая функция. Так как $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, (см. [5]) существует множество V кружков нулевой линейной плотности такое, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists q > 0$

$$\forall \lambda \notin V\ |L(\lambda)| \geqslant q \exp\left[g(\arg\lambda) - \frac{\varepsilon}{2}\right] |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}.$$

Так как U также имеет нулевую линейную плотность, в силу цитированного выше результата И. Ф. Красичкова—Терновского из [2], множество кружков $U \cup V$ можно погрузить в множество W попарно не пересекающихся кружков нулевой линейной плотности. При этом

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M_1 < \infty\ \forall z \notin W\ |\lambda(z)| \leqslant M_1;$$

$$|\lambda_1(z)| \leqslant M_1 \exp[h_\Phi(\arg z) - g(\arg z) + d(\arg z) + \varepsilon]\,|z|^{\rho(|z|)}. \quad (12)$$

Из последних неравенств с помощью принципа максимума модуля стандартными рассуждениями показываем, что $\mu(z) \in [\rho(r), \infty)$. Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-a-d}{3}\right)$. В силу условия (10) найдется число $\tau > 0$ такое, что $h_\Phi(\theta) < (a+\varepsilon)\,g(\theta)$, когда $\theta_k - \tau \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \tau$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

огда из (12) следует, что $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_k\setminus W}} |\lambda_1(z)| = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, $\Gamma_k = \{z:$ $\theta_k - \tau \leqslant \arg z \leqslant \theta_k + \tau\}$. Как было показано выше, $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\notin W}} |\lambda(z)| = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_k\setminus W}} |\mu(z)| = 0$; отсюда $\alpha_k := \sup\limits_{z\in\Gamma_k\setminus W} |\mu(z)| < \infty$. Множество W можно записать в такой форме:

$$W = \{D_m\}_{m=1}^{\infty},\ \text{где}\ D_m = \{z : |z - a_m| < r_m\}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} |a_m| = \infty;\ \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{|a_n|} = 0. \tag{13}$$

Пусть $\Gamma_k^1 = \left\{z : \theta_k - \frac{\tau}{2} \leqslant \arg z \leqslant \theta_k + \frac{\tau}{2}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В силу условий (13) те кружки D_m из W, которые пересекаются с сектором Γ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ или содержатся в нем, при всех $n \geqslant n_0$ лежат строго внутри Γ_k. Так как $\alpha_k < \infty$, используя принцип максимума модуля, находим, что для такого кружка D_m $\sup\{|\mu(z)| : z \in D_m\} \leqslant \alpha_k$. Отсюда получаем, что $\forall k \leqslant n$ $\sup\{|\mu(z)| : z \in \Gamma_k^1\} < \infty$. Можно всегда считать, что $\tau < \min\limits_{k\leqslant n} (\theta_{k+1} - \theta_k)$. Применяя теорему Фрагмена — Линделефа к функции $\mu(z)$ в угле $\theta_k + \frac{\tau}{2} \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1} - \frac{\tau}{2}$ раствора $< \frac{\pi}{\rho}$, заметим, что $\mu(z)$ ограничена в этом угле. Отсюда следует, что $\mu(z)$ ограничена во всей плоскости и потому $\mu(z) \equiv c$. Но тогда $\mu(z) \equiv 0$, так как $\forall k \leqslant n$ $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_k\setminus W}} \mu(z) = 0$. Следовательно, $\forall z \in \boldsymbol{C}$:

$$a(z)\,\Phi(z)\,F(z) = L(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)(z - \lambda_n)}.$$

Пусть $B(z) = a(z)\,\Phi(z)\,F(z)$. Имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q < \infty$ $\forall z \in \boldsymbol{C}$ $\forall n \geqslant 1$

$$\left|\frac{L(z)}{z - \lambda_n}\right| \leqslant Q \exp\{[g(\arg z) + \varepsilon]\,|z|^{\rho(|z|)}\}.$$

Далее, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right| = Q_1 < \infty$. Отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_2 < \infty$ $\forall z \in \boldsymbol{C}$ $|B(z)| \leqslant Q_2 \exp\{[g(\arg z) + \varepsilon]\,|z|^{\rho(|z|)}\}$. Таким образом, $B \in [\rho(r), \infty)$, причем если $h_B(\theta)$ — индикатор B при показателе $\rho(r)$, то $h_B(\theta) \leqslant g(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. С другой стороны, так как $a(z) \in [\rho(r), 0]$, а F имеет вполне регулярный рост и индикатор $dg(\varphi)$ при показателе $\rho(r)$, то $h_B(\theta) = h_\Phi(\theta) + dg(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Следовательно, $h_\Phi(\theta) \leqslant (1 - d)\,g(\theta)$ и $\Phi \in [\rho(r),\ g(\theta))$. Для завершения доказательства остается применить следствие 2 теоремы 6 и замечание к ней.

Отметим еще, что всегда $\sup\limits_{\theta\in[0,\,2\pi]} \dfrac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)} \geqslant \sup\limits_{1<k<n} \dfrac{h_\Phi(\theta_k)}{g(\theta_k)}$. Поэтому при выполнении всех предположений теоремы справедливы неравенства $a \leqslant \nu + 1 - \gamma < 1$.

Следствие 1. *Пусть $\rho(r)$, ρ, θ_j — те же, что в теореме 7. Пусть, далее, $L(\lambda)$ — целая функция нормального типа вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$ с положительным индикатором $g(\theta)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\exists\gamma\in(0,1]$:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+\gamma g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \tag{14}$$

Пусть, наконец, $\Phi(z)\in[\rho(r),\infty)$ и выполняются соотношения (10), (11). Тогда справедливы утверждения 1), 2) теоремы 7.

Следствие 2. *Пусть $\rho(r)$, ρ, θ_j — те же, что в теореме 7; $L(\lambda)$ — целая функция нормального типа при порядке $\rho(r)$ вполне регулярного роста с положительным индикатором $g(\theta)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \tag{15}$$

Пусть, далее, $\Phi(z)\in[\rho(r),\infty)$ и выполнены условия (10), (11) (при $\gamma=1$). Тогда

$$\sup\left\{\frac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)}:\theta\in[0,2\pi]\right\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}\ln|\Phi(\lambda_n)|}{g(\arg\lambda_n)}.$$

Следствие 3. *Пусть $\rho(r)$, ρ, $g(\theta)$, $L(\lambda)$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — те же, что и в следствии 2, и справедливо неравенство (15). Пусть, далее, $\Phi(z)\in[\rho(r),\infty)$, имеет место соотношение (10) и $\sup\limits_{n\geqslant 1}|\Phi(\lambda_n)|<\infty$. Тогда $\Phi(z)\equiv\mathrm{const}$.*

В полученных выше результатах важную роль играло условие (14), обеспечивающее γ-достаточность множества $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых нулей функции $L(\lambda)$ вполне регулярного роста. Для применения результатов, в которых участвовало условие (14), было бы полезно дать другую, легче проверяемую форму этого условия. Такая задача при $\gamma=1$ была решена в работе [6]. Пользуясь методикой указанной работы, мы приведем одно из таких условий, эквивалентных (14).

Будем предполагать до конца этого параграфа, что $L(z)$ — целая функция вполне регулярного роста нормального типа с индикатором $g(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из леммы 2 работы [6, с. 455] легко получить такой результат, который неоднократно использовался в [6] (хотя и не сформулирован там явно).

Лемма 1. *Пусть $a(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором $g(\theta)$ нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$ и нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольной кратности. Тогда (при $\theta_n = \arg\lambda_n$)*

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\ln|a(\lambda_n+\delta|\lambda_n|e^{i\varphi})|}{h(|\lambda_n|)}d\varphi-g(\theta_n)\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\underline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\ln|a(\lambda_n+\delta|\lambda_n|e^{i\varphi})|}{h(|\lambda_n|)}d\varphi-g(\theta_n)\right]=0 \qquad (16)$$

здесь и всюду далее в этом параграфе $h(r)=r^{\rho(r)}$.

Обозначим символом $n_t^{\Lambda}(z)$ число точек из множества $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ простых нулей функции $L(z)$, лежащих в круге $\{z:|z-t|\leqslant r\}$, и положим $\forall b>0$ $N_t^{\Lambda}(b)=\int_0^b\frac{n_t^{\Lambda}(r)-1}{r}dr$.

Лемма 2. *Условие (14) эквивалентно следующему:*

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{N_{\lambda_n}^{\Lambda}(\delta|\lambda_n|)}{h(|\lambda_n|)}-(1-\gamma)g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \qquad (17)$$

Лемма 2 при $\gamma=1$ получена ранее тем же методом (в более общей форме) в работе [6]. Сочетая ее с теоремами 6, 7, найдем

Теорема 8. *Пусть* $\rho(r)$ *— уточненный порядок,* $\rho(r)\to\rho>0$; $L(\lambda)$ *— целая функция нормального типа вполне регулярного роста с положительным индикатором* $g(\theta)$ *при уточненном порядке* $\rho(r)$ *с простыми нулями* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что при некотором* $\gamma\in(0,1]$ *справедливо неравенство (17). Тогда*

1) Λ *— γ-достаточное множество для* $[\rho(r),\ g(\theta))$;

2) $\forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}\leqslant\sup_{0<\theta<2\pi}\frac{h_y(\theta)}{g(\theta)}\leqslant$

$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}+1-\gamma$;

3) *если* $\gamma>\frac{1}{2}$, *то* $\forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))$ $\sup_{z\in C}|y(z)|=\sup_{n\geqslant 1}|y(\lambda_n)|$.

Теорема 9. *Пусть* $\rho(r)$, ρ, $g(\theta)$, $L(\lambda)$ *и* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— те же, что и в теореме 8, причем имеет место соотношение (17). Пусть, далее,* $\theta_k\in[0,\ 2\pi]$, $k=1,2,\ldots,n$ *и выполнены условия (9). Пусть, наконец,* $\Phi(z)\in[\rho(r),\ \infty)$ *и функция* $\Phi(z)$ *удовлетворяет условиям (10), (11). Тогда справедливы утверждения 1), 2) теоремы 7.*

§ 6. Теорема Левинсона и ее обобщения. Применим теоремы 7 и 8 к одной более конкретной ситуации.

Теорема 10. *Пусть* $0<\lambda_n,\ \mu_n<\infty$; $\lim_{n\to 8}\frac{n}{\lambda_n}=D_1$; $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}=D_2$; $0<D_1,\ D_2<\infty$; $L_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$; $L_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$. *Предположим, что выполняются условия:* $\exists\gamma\in[0,\ 1]$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|L_1'(\pm\lambda_n)|}+(\gamma-1)\pi D_2\right]\leqslant 0; \tag{18}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\mu_n|}\ln\frac{1}{|L_2'(\pm i\mu_n)|}+(\gamma-1)\pi D_1\right]\leqslant 0. \tag{19}$$

Пусть, далее, $\Phi(z)$ — *целая функция экспоненциального типа степени* $\sigma_\Phi<\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$, *причем*

$$\alpha_1:=\max\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|\Phi(\lambda_n)|,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|\Phi(-\lambda_n)|\right]<\gamma\pi D_2; \tag{20}$$

$$\alpha_2:=\max\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\Phi(i\mu_n)|,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\Phi(-i\mu_n)|\right]<\gamma\pi D_1.$$

Тогда $\Phi\in[1,\ g(\theta))$ *и*

$$\nu\leqslant\sup_\theta\frac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)}\leqslant\nu+1-\gamma, \tag{21}$$

где $g(\theta)=\pi(D_1|\sin\theta|+D_2|\cos\theta|)$, $\nu=\max\left\{\frac{\alpha_1}{\pi D_2},\ \frac{\alpha_2}{\pi D_1}\right\}$.

Если еще $\gamma\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$, *то*

$$\sup_{z\in C}|\Phi(z)|=\max\{\sup_{n\geqslant 1}|\Phi(\pm\lambda_n)|,\ \sup_{n\geqslant 1}|\Phi(\pm i\mu_n)|\}.$$

Доказательство. Как известно (см., например, [7, с. 57—58]), $L_1(z)$ и $L_2(z)$ — целые функции экспоненциального типа вполне регулярного роста с индикаторами соответственно $\pi D_1|\sin\theta|$ и $\pi D_2|\cos\theta|$. Тогда $L(\lambda):=L_1(\lambda)L_2(\lambda)$ — также целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста и ее индикатор равен $g(\theta)$. При этом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|L_2(\pm\lambda_n)|=\pi D_2;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|L_1(\pm i\mu_n)|=\pi D_1.$$

Из условий (18), (19) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+\gamma g(0)\right]\leqslant 0;\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|L'(-\lambda_n)|}+\gamma g(\pi)\right]\leqslant 0;$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\mu_n|}\ln\frac{1}{|L'(i\mu_n)|}+\gamma g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\leqslant 0;\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\mu_n|}\ln\frac{1}{|L'(-i\mu_n)|}+\right.$$

$$\left.+\gamma g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\leqslant 0.$$

Таким образом, условие (14) выполнено. Легко проверить далее, что $\max_\theta g(\theta)$ равен $\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ и достигается при $\theta_{1,2}=\pm\operatorname{arctg}\frac{D_1}{D_2}$ и при $\theta_{3,4}=\theta_{1,2}+\pi$. Угол между любыми соседними из четверки лучей θ_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ меньше π. Так как $\sigma_\Phi=\max_\theta h_\Phi(\theta)$, то $h_\Phi(\theta_j)<g(\theta_j)$, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$, и условие (10) также выполнено. Наконец, в силу (20) справедливо и соотношение (11). Остается применить теорему 7.

Замечание. В силу леммы 2 условия (18), (19) равносильны следующим:

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N^{\Lambda}_{\lambda_n}(\delta\,|\,\lambda_n\,|)}{|\,\lambda_n|}\leqslant(2-\gamma)\,\pi D_2;$$

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N^{\mathrm{M}}_{i\mu_n}(\delta\,|\,\mu_n\,|)}{|\,\mu_n|}\leqslant(2-\gamma)\,\pi D_1,$$

где $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathrm{M}=\{i\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Следствие 1. *Пусть*

$$0<\lambda_n,\ \mu_n<\infty;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D_1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}=D_2;$$

$$0<D_1D_2<\infty;\ \lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N^{\Lambda}_{\lambda_n}(\delta\,|\,\lambda_n\,|)}{|\,\lambda_n\,|}\leqslant\pi D_2;$$

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N^{\mathrm{M}}_{i\mu_n}(\delta\,|\,\mu_n\,|)}{|\,\mu_n\,|}\leqslant\pi D_1.$$

Пусть, далее, $\Phi\in[1,\ \infty)$, *тип* σ_Φ *функции* Φ *меньше, чем* $\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ *и выполняются условия (20) (с* $\gamma=1$*).*

Тогда $\Phi(z)\in[1,\ g(\theta)|$, *причем* $\sup\limits_{\theta}\frac{h_\varphi(\theta)}{g(\theta)}=\max\left\{\frac{\alpha_1}{\pi D_2},\ \frac{\alpha_2}{\pi D_1}\right\}$ *и, кроме того,* $\sup\limits_{z\in C}|\,\Phi(z)\,|=\max\{\sup\limits_{n\geqslant 1}|\,\Phi(\pm\lambda\ )\,|,\ \sup\limits_{n\geqslant 1}|\,\Phi(\pm i\mu_n)\,|\,\}$.

Следствие 2. *Пусть* λ_n *и* μ_n *— такие же, как и в следствии 1. Пусть, далее,* $\Phi(z)\in[1,\ \infty)$, $\sigma_\Phi<\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\,\lambda_n|}\ln|\,\Phi(\lambda_n)\,|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\,\lambda_n|}\ln|\,\Phi(-\lambda_n)\,|=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\,\Phi(i\mu_n)\,|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\,\Phi(-i\mu_n)\,|=0.$$

Тогда $\Phi\in[1,\ 0]$ *(т. е.* $\sigma_\Phi=0$*) и, кроме того,*

$$\sup_{z\in C}|\,\Phi(z)\,|=\max\{\sup_{n\geqslant 1}|\,\Phi(\pm\lambda_n)\,|,\ \ \sup_{n\geqslant 1}|\,\Phi(\pm i\mu_n)\,|\,\}.$$

Следствие 3. *Пусть числа* λ_n *и* μ_n *— такие же, как в следствии 1, и пусть* $\Phi(z)$ *— целая функция экспоненциального типа степени* $\sigma_\Phi<\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$*, ограниченная на множестве* $\{\pm\lambda_n,\ \pm i\mu_n\}$. *Тогда* $\Phi(z)\equiv\mathrm{const}$.

Как легко убедиться, следствие 3 содержит в себе известную теорему Левинсона (см., например, [5, с. 267]).

Приведем в заключение один пример, к которому применимо следствие 3. Пусть, как выше, $0<\lambda_n,\ \mu_n<\infty$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D_1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}=D_2.$$

Положим $\lambda^1_{2n} = \lambda_{2n}$; $\lambda^1_{2n-1} = \lambda_{2n} - \varepsilon_n$; $\mu^1_{2n} = \mu_{2n}$; $\mu^1_{2n-1} = \mu_{2n} - \eta_n$, где $n = 1, 2, \ldots$; $\varepsilon_n > 0$; $\eta_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda^1_n} = D_1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\mu^1_n} = D_2$. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda^1_n\}^{\infty}_{n=1}$; $M_1 = \{\mu^1_n\}^{\infty}_{n=1}$. Как легко подсчитать,

$$\lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N^{\Lambda_1}_{\lambda^1_n}(\delta\,|\,\lambda^1_n\,|)}{|\,\lambda^1_n\,|} = 0; \quad \lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N^{M_1}_{\mu_n}(\delta\,|\mu^1_n\,|)}{|\,\mu^1_n\,|} = 0.$$

Согласно следствию 3, если $\Phi(z) \in [1, \infty)$ и $\sigma_\Phi < \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ и если $\Phi(z)$ ограничена на множестве $\Gamma = \{\pm\lambda^1_n, \pm i\mu^1_n : n = 1, 2, \ldots\}$, то $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$. Если же мы будем применять обычную теорему Левинсона, то получим «вдвое худший» результат (информация об ограниченности $\Phi(z)$ в точках $\pm\lambda^1_{2n-1}$ и $\pm i\mu^1_{2n-1}$ остается при этом неиспользованной): если $\Phi \in [1, \infty)$, $\sigma_\Phi < \frac{\pi}{2}\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ и $\Phi(z)$ ограничена на множестве Γ, то $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$.

Список литературы: 1. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1990. Вып. 54. С. 2. Красичков—Терновский И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. 1978. **24.** № 4. С. 531—546. 3. *Абанин А. В.* Некоторые представляющие системы в ρ-выпуклых областях // М., 1979. С. 47. Деп. в ВИНИТИ 01.10.79, № 2571—79, 47 с., РЖМат, 1979, 10Б197 ДЕП. 4. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. **36,** вып. 1. С. 73—126. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 6. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. **48,** № 2. С. 452—475. 7. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983. С. 3—180.

Поступила в редколлегию 20.09.89