## КЪ ВОПРОСУ

### О ПРЕДѢЛЬНЫХЪ ЗНАЧЕНІЯХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ИЛИ СУММЪ.

*К. А. Поссе.*

---

Въ мемуарѣ П. Л. Чебышева «Sur les valeurs limites des intégrales» (Journal de Liouville, 1874) намѣченъ вопросъ о разысканіи предѣльныхъ значеній интеграловъ или суммъ, состоящій въ слѣдующемъ:

Даны значенія интеграловъ

$$\int_a^b f(y)\,dy, \quad \int_a^b yf(y)\,dy, \ldots\ldots \int_a^b y^\mu f(y)\,dy,$$

гдѣ $f(y)$ неизвѣстная функція, остающаяся положительною въ предѣлахъ интегрированія, $a$ и $b$ — данныя числа, и требуется найти maximum и minimum интеграла $\int_0^x f(y)\,dy$, гдѣ $x$ — данное число, лежащее между $a$ и $b$.

Вопросъ этотъ рѣшенъ А. А. Марковымъ въ сочиненіи его «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей» (С.-Петербургъ, 1884). Изучая это сочиненіе, я пришелъ къ тому заключенію, что изложеніе полученныхъ имъ результатовъ въ 3-й главѣ сочиненія можетъ быть существенно упрощено и въ нѣкоторомъ отношеніи дополнено. Я считаю не безполезнымъ указать въ настоящей замѣткѣ эти упрощенія и дополненія, причемъ стараюсь изложить предметъ такимъ образомъ, чтобы содержаніе моей замѣтки было понятно читателю и незнакомому съ содержаніемъ 3-й главы сочиненія А. А. Маркова.

Не нарушая общности вопроса, положимъ нижній предѣлъ интеграловъ равнымъ 0, верхній обозначимъ черезъ $l$; будемъ разсматривать элементы интеграла $\int_0^l f(y)dy$ какъ массы точекъ на прямой $AC$, длина которой $= l$, различныя значенія $y$ въ предѣлахъ интегрированія какъ разстоянія этихъ точекъ отъ $A$, длину $AB$ обозначимъ черезъ $x$ и поставимъ вопросъ слѣдующимъ образомъ

$A \qquad\qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad\qquad C$

**На прямой $AC = l$ неизвѣстнымъ образомъ распредѣлена масса, величина которой $\alpha_0 = \int_0^l f(y)dy$ дана; даны также суммы произведеній массъ различныхъ точекъ на первыя, вторыя,.... $\mu$-ыя степени соотвѣтственныхъ разстояній отъ $A$, т. е. даны**

$$\alpha_0 = \int_0^l f(y)dy\,,\ \alpha_1 = \int_0^l yf(y)dy\,,\ \alpha_2 = \int_0^l y^2 f(y)dy, \ldots.$$

$$\ldots.\alpha_\mu = \int_0^l y^\mu f(y)dy.$$

**Требуется найти maximum и minimum массы отрѣзка $AB$ данной длины $x$, т. е. интеграла $\int_0^x f(y)dy$.**

**I *случай.* $\mu =$ четному числу $2n$.**

**Представимъ себѣ, что вся масса концентрирована въ нѣсколькихъ отдѣльныхъ точкахъ, въ числѣ которыхъ находится и данная точка $B$, и предложимъ себѣ опредѣлить разстоянія этихъ точекъ $x_1, x_2, \ldots x_k$ и соотвѣтствующія имъ массы $m_1, m_2, \ldots m_k$**

такъ, чтобы всѣ данныя сохранили свои значенія, т. е. подъ условіями

$$\sum_1^k m_i = \alpha_0, \sum_1^k m_i x_i = \alpha_1, \ldots \ldots \sum_1^k m_i x_i^{2n} = \alpha_{2n}.$$

Легко видѣть, что существуютъ только двѣ концентраціи, въ которыхъ число неизвѣстныхъ равно числу условныхъ уравненій.

1) Концентрація въ точкѣ $B$ и еще $n$ другихъ точкахъ, въ которой неизвѣстныя будутъ $m_x$ — масса точки $B$ и $n$ паръ неизвѣстныхъ $x_i$ и $m_i$, опредѣляющихъ разстоянія и массы остальныхъ точекъ, а всего $2n+1$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n+1$ уравненій

$$x^k m_x + \sum_1^n m_i x_i^k = \alpha_k \; (k = 0, 1, 2, \ldots 2n).$$

2) Концентрація въ точкахъ $A$, $B$, $C$ и еще $n-1$ другихъ точкахъ, въ которой неизвѣстныя будутъ $m_0$ — масса точки $A$, $m_x$ — масса точки $B$, $m_l$ — масса точки $C$ и $n-1$ паръ неизвѣстныхъ $x_i$ и $m_i$, опредѣляющихъ разстоянія и массы остальныхъ точекъ, а всего $2n+1$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n+1$ уравненій

$$\left.\begin{aligned} & m_0 + m_x + m_l + \sum_1^{n-1} m_i = \alpha_0 \\ & x^k m_x + l^k m_l + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i = \alpha_k \; (x = 1, 2, \ldots . 2n) \end{aligned}\right| \quad (2)$$

II *случай.* $\mu =$ нечетному числу $2n-1$.

Въ этомъ случаѣ единственныя концентраціи, въ которыхъ число неизвѣстныхъ равно числу условныхъ уравненій, будутъ:

1) Концентрація въ точкахъ $A$, $B$ и $n-1$ другихъ точкахъ; неизвѣстныя будутъ $m_0$, $m_x$ — массы точекъ $A$, $B$ и $n-1$ паръ неизвѣстныхъ $x_i$ и $m_i$, соотвѣтствующихъ остальнымъ точкамъ, а всего $2n$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n$ уравненій

$$\left.\begin{aligned} & m_0 + m_x + \sum_1^{n-1} m_i = \alpha_0 \\ & x^k m_x + \sum_1^{n-1} x_i{}^k m_i = \alpha_k \ \ (k=1, 2, \ldots\ldots 2n-1). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

2) Концентрація въ точкахъ $B$, $C$ и $n-1$ другихъ точкахъ; неизвѣстныя будутъ $m_x$, $m_l$ — массы точекъ $B$, $C$ и $(n-1)$ паръ неизвѣстныхъ $x_i$ и $m_i$, а всего $2n$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n$ уравненій

$$l^k m_l + x^k m_x + \sum_1^{n-1} x_i{}^k m_i = \alpha_k, (k=0, 1, 2, \ldots 2n-1). \quad (4)$$

---

Для того, чтобы указанныя концентраціи были возможны, необходимо и достаточно, чтобы всѣ величины $x_i$, удовлетворяющія соотвѣтствующимъ системамъ уравненій, были $>0$ и $<l$ и чтобы всѣ числа $m_0$, $m_x$, $m_l$ и $m_i$ были $>0$.

Рѣшеніе системы (1) и условія возможности 1-ой концентраціи въ I случаѣ.

Составляемъ цѣлую функцію $n+1$ степени

$$\varphi(z) = A_0(z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots\ldots(z-x_n)$$

удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0, \qquad (\alpha)$$

гдѣ $\theta_{n-1}(y)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію степени $n-1$.

Обозначая черезъ $\Omega(y)$ какую угодно цѣлую функцію степени не выше $2n$, будемъ имѣть

$$\Omega(y) = \varphi(y)\,\omega(y) + \frac{\Omega(x)\varphi(y)}{(y-x)\,\varphi'(x)} + \sum_1^n \frac{\Omega(x_i)\,\varphi(y)}{(y-x_i)\,\varphi'(x_i)},$$

гдѣ $\omega(y)$ — цѣлая функція степени не выше $n-1$; а отсюда, полагая

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

получаемъ, въ силу условія $(\alpha)$, формулу

$$\int_0^l f(y)\,\Omega(y)\,dy = -\Omega(x)\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^n \Omega(x_i)\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $\Omega(y) = 1,\ y,\ y^2, \ldots\ y^{2n}$, получимъ слѣдующій рядъ равенствъ

$$\int_0^l f(y)\,y^k\,dy = x^k\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^n x_i^k\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},\ (k = 0, 1, 2, \ldots 2n,$$

изъ сравненія которыхъ съ системою уравненій (1) находимъ слѣдующія выраженія искомыхъ массъ

$$m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}, \quad m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Величины же $x_i$ опредѣляются какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{z-x} = 0,$$

гдѣ $\varphi(z)$ опредѣляется условіями

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0.$$

Функція эта $\varphi(z)$ легко можетъ быть составлена при помощи данныхъ величинъ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$.

Обозначая черезъ $U_n^0(z)$ знаменателя $n$-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,dy}{z-y},$$

а черезъ $U_n^l(z)$ знаменателя $n$-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)(l-y)\,dy}{z-y},$$

очевидно, можемъ положить

$$\varphi(z) = Az\,U_n^0(z) + B(l-z)\,U_n^l(z), \qquad (\beta)$$

гдѣ $A$ и $B$ — постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе $(\beta)$ даетъ цѣлую функцію $n+1$ степени, удовлетворяющую условію $(\alpha)$, потому что

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-1}(y)\,dy =$$

$$= A\int_0^l f(y)\, y\, U_n^0(y)\theta_{n-1}(y)\,dy +$$

$$+ B\int_0^l f(y)\,(l-y)\,U_n^l(y)\theta_{n-1}(y)\,dy$$

обращается въ 0, въ силу извѣстныхъ свойствъ функцій $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$.

Условіе $\varphi(x) = 0$ служитъ затѣмъ для опредѣленія отношенія постоянныхъ $A$ и $B$ и даетъ

$$Ax\,U_n^0(x) + B(l-x)\,U_n^l(x) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\frac{A}{(l-x)\,U_n^l(x)} = \frac{B}{-x\,U_n^0(x)}. \qquad (\gamma)$$

Функціи же $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ вполнѣ опредѣляются данными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$, до постояннаго множителя, какъ это видно изъ разложеній

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,dy}{z-y} = \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \ldots$$

$$\int_0^l \frac{f(y)\,(l-y)\,dy}{z-y} = \frac{l\alpha_0 - \alpha_1}{z} + \frac{l\alpha_1 - \alpha_2}{z^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{l\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}}{z^{2n}} + \ldots\ldots$$

Переходя къ выходу условій возможности 1-ой концентраціи для I случая, т. е. къ выводу условій, при которыхъ будутъ соблюдены требованія:

1) чтобы всѣ числа $x_i$ лежали между 0 и $l$ и

2) чтобы всѣ $m_i$ и $m_x$ были $> 0$,

замѣчаемъ, что первое требованіе сводится къ тому, чтобы

$$\varphi(l) \text{ и } (-1)^{n+1}\varphi(0)$$

были одного знака, а второе выполняется безусловно.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что корни уравненій $U_n^0(z)=0$ и $U_n^l(z)=0$ всѣ лежатъ между 0 и $l$, и что, въ силу выраженія ($\beta$), корни уравненія $\varphi(z)=0$ будутъ перемежаться какъ съ корнями уравненія $zU_n^0(z)=0$, такъ и съ корнями уравненія $U_n^l(z)\,(l-z)=0$, мы видимъ, что только одинъ изъ корней уравненія $\varphi(z)=0$ можетъ лежать внѣ предѣловъ 0 и $l$. Для того, чтобы и этотъ корень попалъ въ промежутокъ между 0 и $l$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^{n+1}\varphi(0)$ и $\varphi(l)$ были одинаковаго знака. [Къ тому-же заключенію, впрочемъ, приводитъ и формула ($\alpha$)].

По формулѣ ($\beta$) будемъ имѣть

$$(-1)^{n+1}\varphi(0)=(-1)^{n+1}Bl\,U_n^l(0),\ \varphi(l)=Al\,U_n^0(l).$$

Коэффиціенты при $z^n$ въ $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ можемъ всегда взять положительными, а тогда, очевидно, будемъ имѣть

$$U_n^0(l)>0 \text{ и } (-1)^n U_n^l(0)>0$$

и наше условіе сводится къ тому, чтобы $A$ и $(-B)$ были одинаковыхъ знаковъ или, на основаніи формулы ($\gamma$), чтобы $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ были одинаковыхъ знаковъ.

Для того же, чтобы убѣдиться въ безусловномъ выполненіи 2-го требованія, замѣчаемъ, что если $u$ есть корень уравненія $\varphi(z)=0$, то

$$\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}=1+(y-u)\,\omega(y),$$

гдѣ $\omega(y)$ —цѣлая функція $n-1$ степени, откуда

$$\left(\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\right)^2=\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}+\frac{\varphi(y)\,\omega(y)}{\varphi'(u)},$$

а потому, въ силу формулы ($\alpha$), будемъ имѣть

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)\,dy}{(y-u)\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\left(\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\right)^2 dy>0,$$

откуда и слѣдуетъ, что $m_x=\dfrac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$ и $m_i=\dfrac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ будутъ $>0$.

И такъ, единственное условіе возможности первой концентраціи въ I случаѣ состоитъ въ томъ, что числа $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ должны быть одинаковыхъ знаковъ.

---

## Рѣшеніе системы (2) и условія возможности второй концентраціи въ I случаѣ.

Составляемъ цѣлую функцію степени $n+2$

$$\varphi(z)=A_0 z(z-l)(z-x)(z-x_1)\ldots\ldots(z-z_{n-1}),$$

удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy=0,$$

гдѣ $\theta_{n-2}(y)$ обозначаетъ произвольную цѣлую функцію $n-2$ степени.

Обозначая черезъ $\Omega(y)$ какую угодно цѣлую функцію степени не выше $2n$ и полагая

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

получаемъ, подобно предыдущему, формулу

$$\int_0^l f(y)\Omega(y)\,dy = \Omega(0)\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} + \Omega(l)\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} + \\ + \Omega(x)\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^{n-1}\Omega(x_i)\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $\Omega(y) = 1, y, y^2, \ldots y^{2n}$, получаемъ рядъ равенствъ, изъ сравненія котораго съ системою уравненій (2) получимъ слѣдующія выраженія искомыхъ массъ:

$$m_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)},\; m_l = \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)},\; m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},\; m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Величины же $x_i$ опредѣлятся какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-l)(z-x)} = 0,$$

гдѣ функція $\varphi(z)$ степени $n+2$ опредѣляется условіями

$$\varphi(x) = 0,\; \varphi(0) = 0,\; \varphi(l) = 0 \text{ и}$$

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0.$$

Функцію эту легко выразить при помощи данныхъ.

Полагая $\varphi(z) = z(z-l)\Phi(z)$, гдѣ $\Phi(z)$— цѣлая функція $n$-ой степени, для опредѣленія $\Phi(z)$ будемъ имѣть условія

$$\int_0^l f(y)\,y(l-y)\,\Phi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0 \qquad (\alpha)^*$$

и

$$\Phi(x) = 0.$$

Условію $(\alpha)^*$, очевидно, удовлетворимъ, положивъ

$$\Phi(z) = AU_n^0(z) + BU_n^l(z), \qquad (\beta)^*$$

гдѣ $A$ и $B$ постоянныя, а $U_n^{\circ}(z)$ и $U_n^{l}(z)$ имѣютъ вышеуказанныя значенія.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\int_0^l f(y)\, y(l-y)\, \Phi(y)\, \theta_{n-2}(y)\, dy =$$

$$= A\int_0^l f(y)\, y\, U_n^{\circ}(y)\, (l-y)\, \theta_{n-2}(y)\, dy +$$

$$+ B\int_0^l f(y)\, (l-y)\, U_n^{l}(y)\, y\, \theta_{n-2}(y)\, dy$$

обращается въ 0, въ силу извѣстныхъ свойствъ функцій $U_n^{\circ}(z)$ и $U_n^{l}(z)$.

Условіе $\Phi(x) = 0$ дастъ затѣмъ

$$\frac{A}{U_n^{l}(x)} = \frac{B}{-U_n^{\circ}(x)} \qquad (\gamma)^*$$

---

Переходя къ выводу условій возможности второй концентраціи, т. е. условій, при которыхъ выполняются требованія:

1) чтобы всѣ $x_i$ были въ предѣлахъ 0 и $l$ и

2) чтобы $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}, \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)}, \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}, \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ были $> 0$,

замѣчаемъ, что первое требованіе, какъ видно изъ формулы $(\beta)^*$, будетъ выполнено при условіи, что $(-1)^n\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковаго знака, а второе — при выполненіи условій $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0$, $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, такъ-какъ $\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$ и $\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$, при выполненіи перваго требованія, будутъ безусловно положительными. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $u$ любой корень уравненія $\Phi(z)=0$, будемъ имѣть, по формулѣ $\varphi(z)=z(z-l)\,\Phi(z)$

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)}{(y-u)\,\varphi'(u)}\,dy=$$

$$=\int_0^l f(y)\frac{y(l-y)}{u(l-u)}\,\frac{\Phi(y)}{(y-u)\,\Phi'(u)}\,dy$$

$$=\int_0^l f(y)\frac{y(l-y)}{u(l-u)}\left(\frac{\Phi(y)}{(y-u)\,\Phi'(u)}\right)^2 dy,$$

въ силу условія $(\alpha)$*. Отсюда и видимъ, что для $0<u<l$,

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}>0.$$

Остаются, слѣдовательно, условія

a) $(-1)^n\,\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковыхъ знаковъ

b) $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$, c) $\frac{\psi(l)}{\varphi(l)}>0$.

Замѣчая, что

$$(-1)^n\,\Phi(0)=(-1)^n\,[A U_n{}^0(0)+B U_n{}^l(0)]$$

$$\Phi(l)=A U_n{}^0(l)+B U_n{}^l(l)$$

и припоминая, что всегда можемъ распорядиться такъ, чтобы

$$(-1)^n\,U_n{}^0(0),\,(-1)^n\,U_n{}^l(0),$$

$$U_n{}^0(l),\,U_n{}^l(l)\ \text{были}>0,$$

видимъ, что условіе a) выполнено, если $A$ и $B$ — одинаковыхъ знаковъ, т. е., на основаніи $(\gamma)$*, когда $U_n{}^0(x)$ и $U_n{}^{\cdot}(x)$ — противоположныхъ знаковъ.

Далѣе

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(0)}\,dy=\int_0^l f(y)\,\frac{(l-y)\,\Phi(y)\,dy}{l\,\Phi(0)}=$$

$$=\int_0^l \frac{f(y)\,(l-y)\,[A\,U_n^0(y)+B\,U_n^l(y)]}{l\,[A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)]}\,dy=$$

$$=\frac{A}{A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)}\int_0^l f(y)\,U_n^0(y)\,dy,$$

въ силу того, что

$$\int_0^l f(y)\,(l-y)\,U_n^l(y)\,dy=0 \text{ и } \int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,dy=0;$$

умножая и раздѣляя на $U_n^0\,(0)$, получаемъ

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\frac{1}{1+\dfrac{B\,U_n^l(0)}{A\,U_n^0(0)}}\cdot\int_0^l f(y)\,\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy.$$

Замѣчая, что $\int_0^l f(y)\,\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy>0$, потому, что

$$\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}=1+y\omega(y), \text{ гдѣ } \omega(y)\text{ — степени } n-1$$

и

$$\int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,\omega(y)\,dy=0,$$

откуда $\int_0^l f\,(y)\left(\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\right)^2 dy=\int_0^l f(y)\,\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy>0,$

тотчасъ заключаемъ, что $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$ при $A$ и $B$ — одинаковыхъ знаковъ т. е. при томъ же условіи, которое имѣли для (a).

Совершенно тѣмъ же путемъ убѣждаемся, что и $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)}>0$ при выполненіи этого условія.

Итакъ, единственное условіе возможности второй концентраціи состоитъ въ томъ, чтобы $U_n^0\ (x)$ и $U_n^l\ (x)$ были противоположныхъ знаковъ. Условіе это какъ разъ противоположно условію возможности первой концентраціи. Вышеизложенное заключаетъ въ себѣ, какъ видимъ, весьма простое доказательство теоремы, найденной А. А. Марковымъ и приведенной имъ на стр. 130 его сочиненія.

Рѣшеніе системы (3) и условія возможности первой концентраціи во II случаѣ.

Составляемъ функцію $\varphi(z)=A_0 z(z-x)\ (z-x_0)\ldots(z-x_{n-1})$ цѣлую $(n+1)$ степени, удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy=0, \qquad (\delta)$$

гдѣ $\theta_{n-2}(y)$ произвольная цѣлая функція $(n-2)$ степени, и, полагая

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy$$

совершенно также, какъ сдѣлано было выше, убѣждаемся, что искомыя массы будутъ

$$m_0=\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)},\quad m_x=\frac{\psi\ (x)}{\varphi'(x)},\ m_i=\frac{\psi\ (x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

а величины $x_i$ опредѣляются какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi\ (z)}{z(z-x)}=0,$$

гдѣ $\varphi(z)$ опредѣляется условіями $(\delta)$ и $\varphi(x)=0$.

Чтобы выразить эту функцію $\varphi(z)$ при помощи данныхъ величинъ $\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots\ldots\alpha_{2n-1}$, полагаемъ

$$\varphi(z)=z\Phi(z),$$

гдѣ $\Phi(z)$ цѣлая функція $n$-ой степени, опредѣляемая условіями

$$\int_0^l f(y)y\Phi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy = 0 \text{ и } \Phi(x) = 0.$$

Первому изъ этихъ условій, очевидно, удовлетворимъ, полагая

$$\Phi(z) = A\varphi_n(z) + B(z-l)V_{n-1}(z) \qquad (\varepsilon)$$

гдѣ $A$ и $B$ постоянныя, $\varphi_n(z)$ — знаменатель $n$-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y},$$

а $V_{n-1}(z)$ — знаменатель $(n-1)$-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)y(l-y)\,dy}{z-y}.$$

Условіе $\Phi(x) = 0$ даетъ затѣмъ

$$\frac{A}{(l-x)V_{n-1}(x)} = \frac{B}{\varphi_n(x)}. \qquad (\lambda)$$

Функціи $\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$ опредѣляются данными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \ldots \alpha_{2n-1}$, до постояннаго множителя, какъ это видно изъ разложеній

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1}}{z^{2n}} + \ldots\ldots$$

$$\int_0^l \frac{f(y)y(l-y)\,dy}{z-y} = \frac{l\alpha_1 - \alpha_2}{z} + \frac{l\alpha_2 - \alpha_3}{z^2} + \ldots + \frac{l\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}}{z^{2n-2}} + \ldots$$

Условія возможности этой концентраціи приводятся къ двумъ

a) $(-1)^n\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковыхъ знаковъ,

b) $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0.$

Замѣчая, что $(-1)^n \Phi(0) = (-1)^n A\varphi_n(0) +$

$$+ B(-1)^{n-1} V_{n-1}(0)\, l \text{ и } \Phi(l) = A\varphi_n(l),$$

находимъ, что условіе a) выполняется, когда $A$ и $B$ одинаковыхъ знаковъ, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ одинаковыхъ знаковъ, такъ какъ всегда можемъ такъ распорядиться коэффиціентами при высшихъ степеняхъ $z$ въ $\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$, чтобы $(-1)^n\varphi_n(0)$ и $(-1)^{n-1}V_{n-1}(0)$ были $> 0$.

Далѣе имѣемъ

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(0)}dy = \int_0^l f(y)\frac{\Phi(y)}{\Phi(0)}dy =$$

$$= \frac{1}{A\varphi_n(0) - Bl V_{n-1}(0)}\int_0^l f(y)\,[A\varphi_n(y) + B(y-l)V_{n-1}(y)]\,dy =$$

$$= \frac{-B V_{n-1}(0)}{A\varphi_n(0) - Bl V_{n-1}(0)}\int_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy\,.$$

Здѣсь $\int_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy > 0$, потому-что

$$\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)} = 1 + y\,\omega(y), \text{ гдѣ } \omega(y) \text{ — степени } (n\text{-}2).$$

Отсюда

$$(l-y)\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\right)^2 = (l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)} + y(l-y)\frac{V_{n-1}(y)\,\omega(y)}{V_{n-1}(0)}$$

и, по извѣстному свойству функціи $V_{n-1}(y)$,

$$\int_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy = \int_0^l f(y)(l-y)\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\right)^2 dy > 0.$$

Припоминая еще, что $\varphi_n(0)$ и $V_{n-1}(0)$ — противоположныхъ знаковъ, видимъ, что $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0$, когда $A$ и $B$ одинаковыхъ знаковъ, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — одинаковыхъ знаковъ.

Рѣшеніе системы (4) и условія возможности второй концентраціи во II случаѣ.

Составляемъ функцію $\varphi(z) = A_0(z-l)(z-x)(z-x_1)\ldots.. (z-x_{n-1})\ldots.$ степени $n+1$, удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0, \qquad (\delta)^*$$

гдѣ $\theta_{n-2}(y)$ — произвольная цѣлая функція $(n-2)$ степени, и, полагая

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

находимъ для искомыхъ массъ выраженія

$$m_l = \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)},\ m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},\ m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

а величины $x_i$ опредѣлятся какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{(z-x)(z-l)} = 0.$$

Функція $\varphi(z)$, опредѣляемая условіями $\varphi(x)=0$, $\varphi(l)=0$ и $(\delta)^*$, очевидно, можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\varphi(z) = (z-l)\,\Phi(z),$$

гдѣ

$$\Phi(z) = [A\varphi_n(z) + BzV_{n-1}(z)]; \qquad (\varepsilon)^*$$

$\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$ имѣютъ вышеуказанныя значенія, а $A$ и $B$ постоянныя, для которыхъ условіе $\Phi(x)=0$ даетъ

$$\frac{A}{x V_{n-1}(x)} = \frac{B}{-\varphi_n(x)}. \qquad (\lambda)^*$$

Условія возможности второй концентраціи будутъ

a) $(-1)^n \Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковыхъ знаковъ

b) $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$

$$(-1)^n \Phi(0) = (-1)^n A\varphi_n(0),\ \Phi(l) = A\varphi_n(l) + Bl\,V_{n-1}(l),$$

откуда видно, что условіе (a) выполняется, когда $A$ и $B$ — одинаковыхъ знаковъ, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — противоположныхъ знаковъ.

При томъ-же условіи и $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, потому что

$$\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{(y-l)\varphi'(l)}\,dy = \int_0^l f(y)\frac{\Phi(y)}{\Phi(l)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{A\varphi_n(l) + Bl\,V_{n-1}(l)}\int_0^l f(y)\left[A\varphi_n(y) + ByV_{n-1}(y)\right]dy =$$

$$= \frac{B\,V_{n-1}(l)}{A\varphi_n(l) + Bl\,V_{n-1}(l)}\int_0^l f(y)\,y\,\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\,dy,$$

гдѣ

$$\int_0^l f(y)\,y\,\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\,dy = \int_0^l f(y)\,y\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\right)^2 dy > 0;$$

Слѣдовательно $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, при $A$ и $B$ — одинаковыхъ знаковъ.

И такъ, условіе возможности второй концентраціи состоитъ въ томъ, чтобы $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ были противоположныхъ знаковъ, и это условіе какъ разъ противоположно условію возможности первой концентраціи.

Такимъ образомъ доказана и теорема, приведенная А. А. Марковымъ на стр. 102 его сочиненія.

Что же касается того, что указанныя выше концентраціи даютъ maximum и minimum массы отрѣзка $AB$, смотря по тому, причислимъ ли мы точку $B$ къ $AB$ или $BC$, то это слѣдуетъ прямо изъ неравенствъ П. Л. Чебышова, обобщенныхъ А. А. Марковымъ во 2-й главѣ его сочиненія, что имъ самимъ и указано.

---

Формулы $(\beta)$ и $(\beta)^*$, $(\varepsilon)$ и $(\varepsilon)^*$, дающія выраженія функцій, къ составленію которыхъ приводится рѣшеніе системъ (1), (2), (3) и (4) и при помощи которыхъ, какъ мы видѣли, весьма просто получаются условія возможности разсматриваемыхъ концентрацій, даютъ также возможность весьма просто показать распредѣленіе корней этихъ функцій.

Ограничимся разсмотрѣніемъ случая I-го ($\mu = 2n$), такъ какъ II-й можетъ быть разобранъ совершенно аналогичнымъ указанному ниже путемъ.

Удерживая прежнія обозначенія, докажемъ прежде всего, что корни уравненій $U_n{}^0(z) = 0$ и $U_n{}^l(z) = 0$ перемежаются, т. е. что между каждыми двумя корнями одного изъ этихъ уравненій лежитъ одинъ и только одинъ корень другаго.

Положимъ $F(z) = zU_n{}^0(z)$, $\Pi(z) = (z-l)\,U_n{}^l(z)$.

Обозначимъ корни функціи $F(z)$ черезъ $z_0, z_1, z_2, \ldots . z_n$, расположивъ ихъ въ возрастающемъ порядкѣ величинъ, такъ что $z_0 = 0$ и $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots . . < z_n < l$.

Корни функціи $\Pi(z)$ обозначимъ черезъ $z', z'' \ldots z^{(n)}, z^{(n+1)}$ и можемъ положить $0 < z' < z'' < \ldots < z^{(n)} < z^{(n+1)}$, $z^{(n+1)} = l$.

Функція $F(z)$, очевидно, удовлетворяетъ условію

$$\int_0^l f(y)\,F(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0, \tag{5}$$

гдѣ $\theta_{n-1}(y)$ — произвольная цѣлая функція $(n-1)$ степени.

По этому, обозначая черезъ $\Omega(y)$ какую угодно цѣлую функцію степени не выше $2n$, замѣчая, что $F(y)$ есть цѣлая функція $n+1$ степени, и полагая $\Psi(z) = \int f(y) \frac{F(y)-F(z)}{y-z} dy$, будемъ имѣть

$$\int_0^l f(y)\Omega(y)\,dy = \sum_{i=0}^{i=n} \Omega(z_i) \frac{\Psi(z_i)}{F'(z_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ

$$\Omega(y) = \Pi(y)\theta_{n-1}(y),$$

гдѣ $\theta_{n-1}(y)$ — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$, и замѣчая, что

$$\int_0^l f(y)\Pi(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0,$$

получаемъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} \Pi(z_i)\theta_{n-1}(z_i) \frac{\Psi(z_i)}{F'(z_i)} = 0. \qquad (6)$$

Полагая въ этой формулѣ

$$\theta_{n-1}(y) = \frac{F(y)}{(y-z_k)(y-z_{k+1})},$$

находимъ

$$\theta_{n-1}(z_k) = \frac{F'(z_k)}{z_k - z_{k+1}},\ \theta_{n-1}(z_{k+1}) = \frac{F'(z_{k+1})}{z_{k+1} - z_k}$$

и при $i$ не $= k$ или $k+1$, $\theta_{n-1}(z_i) = 0$, а потому формула (6) даетъ

$$\Pi(z_k)\Psi(z_k) = \Pi(z_{k+1})\Psi(z_{k+1}). \qquad (7)$$

Замѣчая же, что числа $\frac{\Psi(z_k)}{F'(z_k)} > 0$, потому что, въ силу формулы (5), можемъ написать (какъ уже нѣсколько разъ было показано)

$$\frac{\Psi(z_k)}{F'(z_k)} = \int_0^l f(y)\frac{F(y)}{(y-z_k)F'(z_k)}dy = \int_0^l f(y)\left(\frac{F(y)}{(y-z_k)F'(z_k)}\right)^2 dy,$$

заключаемъ изъ предыдущаго, что числа

$\Pi(z_k)\,F'(z_k)$ и $\Pi(z_{k+1})\,F'(z_{+1})$ —одинаковыхъ знаковъ, откуда и слѣдуетъ, что между двумя корнями функціи $F(z)$ лежитъ одинъ и только одинъ корень функціи $\Pi(z)$.

На основаніи доказаннаго можемъ, слѣдовательно, написать слѣдующія неравенства

$$0 < z' < z_1 < z'' < z_2 < \ldots\ldots < z^{(n)} < z^n < l.$$

Припомнимъ теперь, что, разсматривая первую концентрацію въ точкѣ $B$ и еще $n$ точкахъ и рѣшая систему уравненій (1), мы нашли, что разстоянія искомыхъ точекъ и данная величина $x$ будутъ корнями уравненія

$$\varphi(z) = 0,$$

гдѣ $\varphi(z) = AzU_n{}^0(z) + B(l-z)\,U_n{}^l(z)$ $\qquad(\beta)$

и $$\frac{A}{(l-x)\,U_n{}^l(x)} = \frac{B}{-x\,U_n{}^0(x)}.$$

Формула ($\beta$), очевидно, показываетъ, что корни функціи $\varphi(z)$ перемежаются какъ съ корнями функціи $F(z) = z\,U_n{}^0(z)$, такъ и съ корнями функціи $\Pi(z) = (z-l)\,U_n{}^l(z)$; кромѣ того, условіе возможности первой концентраціи, состоящее въ томъ, что $U_n{}^0\,x$ и $U_n{}^l(x)$ должны быть одинаковыхъ знаковъ, показываетъ, что данное число $x$ должно лежать въ одномъ изъ слѣдующихъ промежутковъ между . . . . . . . . . . . .

$$0 \text{ и } z', \; z_1 \text{ и } z'', \ldots z_k \text{ и } z^{(k+1)}, \ldots z_n \text{ и } l.$$

Поэтому, если обозначимъ черезъ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}$ корни функціи $\varphi(z)$, расположенные въ возрастающемъ порядкѣ величинъ, причемъ данная величина $x$ будетъ совпадать съ однимъ изъ этихъ корней, то, на основаніи вышесказаннаго, можемъ написать въ разсматриваемомъ случаѣ слѣдующія неравенства

$$0 < x_1 < z' < z_1 < x_2 < z'' < \ldots.$$
$$\ldots. < z_k < x_{k+1} < z^{(k+1)} < \ldots < z^{(n)} < z_n < x_{n+1} < l.$$

Припомнимъ далѣе, что, рѣшая систему уравненій (2), соотвѣтствующую второй концентраціи въ $A$, $B$, $C$ и еще $n-1$ другихъ точкахъ, мы нашли, что разстоянія этихъ точекъ отъ $A$ будутъ корнями уравненія

$$\varphi(z) = z(z-l)\,\Phi(z) = 0,$$

гдѣ
$$\Phi(z) = A\,U_n{}^0(z) + B\,U_n{}^l(z) \qquad (\beta)^*$$

и
$$\frac{A}{U_n{}^l(x)} = \frac{B}{-U_n{}^0(x)},$$

и что условіе возможности второй концентраціи состоитъ въ томъ, чтобы $U_n{}^0(x)$ и $U_n{}^l(x)$ были различныхъ знаковъ. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ данное число $x$ должно лежать въ одномъ изъ слѣдующихъ промежутковъ между

$$z' \text{ и } z_1, \; z'' \text{ и } z_2, \ldots. z^{(k)} \text{ и } z_k, \ldots\ldots z^{(n)} \text{ и } z_n,$$

а потому, обозначая черезъ $x', x'', \ldots. x^{(n)}$ корни функціи $\Phi(z)$, причемъ одинъ изъ нихъ совпадаетъ съ даннымъ числомъ $x$, можемъ написать слѣдующія неравенства

$$0 < z' < x' < z_1 < z'' < x'' < z_2 < \ldots\ldots$$
$$\ldots. < z^{(k)} < x^{(k)} < z_k < \ldots. < z^{(n)} < x^{(n)} < z_n < l.$$

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ окончательно слѣдующій результатъ.

Если данное число $x$ совпадаетъ съ $x_{k+1}$, т. е. если $z_k < x < z^{(k+1)}$, то уравненіе

$$\varphi(z) = \begin{vmatrix} zU_n^{\circ}(z), (l-z)\, U_n^{l}(z) \\ xU_n^{\circ}(x), (l-x)\, U_n^{l}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A)}$$

имѣетъ $k$ корней $x_1, x_2, \ldots \ldots x_k$ меньшихъ $x$ и предѣльныя значенія интеграла

$$\int_0^x f(y)\,dy \text{ будутъ } M = \frac{\psi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} + \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$$

и

$$M - \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},$$

гдѣ

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}\,dy.$$

Если-же $x$ лежитъ между $z^{(k)}$ и $z_k$, то уравненіе

$$\varphi(z) = z(z-l) \begin{vmatrix} U_n^{\circ}(z), \; U_n^{l}(z) \\ U_n^{\circ}(x), \; U_n^{l}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(B)}$$

имѣетъ $k$ корней $0, x', x'', \ldots\ldots x^{(k-1)}$ меньшихъ $x$

и предѣльныя значенія интеграла $\int_0^x f(y)\,dy$ будутъ

$$M_1 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} + \frac{\psi(x')}{\varphi'(x')} + \ldots\ldots + \frac{\psi(x^{(k-1)})}{\varphi'(x^{(k-1)})} + \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$$

и $$M_1 - \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},$$

гдѣ $\varphi(z)$ составляется по формулѣ (B), а

$$\text{(A)} \qquad \psi(z) = \int_0^1 f(y)\,\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy.$$

1-го февраля 1885.