Communications et procès-verbaux de la société mathématique de Kharkow. Année 1887, I-re livraison (XVII du commencement de l'édition).

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1887 года.

I.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1887.

Отдѣльные оттиски изъ «Записокъ Императорскаго Харьковскаго Университета».

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія:

TABLE DES MATIÈRES

Extraits des procès-verbaux:

Communications:

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

20-го февраля 1887 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, В. Л. Кирпичевъ, А. М. Ляпуновъ, И. К. Шейдтъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. В. Гречаниновъ, А. А. Клюшниковъ, В. П. Алексѣевскій, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. ***Н. Д. Пильчиковъ*** доложилъ свою статью — «Объ одной теоремѣ геометрической оптики».

2. М. А. Тихомандрицкій изложилъ содержаніе статьи ***А. Н. Коркина*** — «О кривизнѣ поверхностей».

3. ***Г. Хазинъ*** сообщилъ свою статью — «О рѣшеніи уравненій 4-ой степени».

4. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:
   1) Физико-математическія науки. Т. II, № 2, за 1886.
   2) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. №№ 11 и 12 (1886); №№ 13 и 14 (1887).
   3) Mathesis. № 12, 1886, и № 1, 1887.
   4) Journal de mathématiques élémentaires. № 12, 1886.
   5) Journal de mathématiques spéciales. № 12, 1886.

6) Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, pelo F. Gomes Teixeira. Vol. VII, № 3.

7) *Lerch*, Contributions à la théorie des fonctions. Prague. 1886 (отъ автора).

8) *Imchenetsky*, Sur la transformation d'une équation différentielle de l'ordre pair (отъ автора).

9) Bulletin de la société de naturalistes de Moscou. № 3, 1886.

10) Журналъ русскаго физико-химическаго общества. Т. XVIII, вып. 8 и 9 (1886).

11) Записки новороссійскаго общества естествоиспытателей. 1886. № 4.

12) Записки новороссійскаго общества естествоиспытателей. Математическое отдѣленіе. 1886. № 3.

13) Математическій сборникъ, вып. 2, Т. XIII, 1887.

14) Кіевскія университетскія извѣстія. № 11, 1886.

О КРИВИЗНѢ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

А. Н. Коркина.

(Извлеченіе изъ письма къ профессору Н. В. Бугаеву).

Выраженіе мѣры кривизны поверхности въ произвольныхъ на ней координатахъ представляетъ теорему на столько важную, что, какъ въ интересѣ самаго предмета, такъ и въ виду облегчить преподаваніе, желательно имѣть по возможности болѣе разнообразныхъ ея доказательствъ.

Предлагая новое аналитическое доказательство этой теоремы, мы начнемъ съ рѣшенія одной задачи на измѣненіе перемѣнныхъ независимыхъ.

Пусть будутъ E, F, G три заданныя функціи перемѣнныхъ независимыхъ t и u, а ξ и η двѣ новыя перемѣнныя, изъ коихъ каждая есть нѣкоторая функція отъ t и u.

Предполагается, что, обратно, t и u могутъ быть выражены въ ξ и η.

Выраженія ξ и η въ t и u не даны, но задано только соотношеніе

$$\lambda d\xi d\eta = Edt^2 + 2Fdt\,du + Gdu^2, \qquad (1)$$

гдѣ λ также не заданная функція ξ и η, но такая, что, подставивъ въ первую часть этого уравненія вмѣсто ξ и η ихъ величины въ t и u, мы обратимъ его въ тождество.

Задача, которую мы рѣшимъ сначала, состоитъ въ преобразованіи выраженія

$$k = -\frac{2}{\lambda}\frac{\partial^2 \lg\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

такимъ образомъ, что вмѣсто λ должны войти три коэффиціента E, F, G и вмѣсто второй производной по ξ и η производныя по t и u.

Замѣтимъ, что уравненіе (1) допускаетъ безчисленное множество различныхъ ξ и η при однихъ и тѣхъ же t и u. Дѣйствительно, имѣя нѣкоторыя ξ, η, удовлетворяющія уравненію (1), мы можемъ сдѣлать $\xi = \varphi(\xi_1)$, $\eta = \psi(\eta_1)$, разумѣя подъ $\varphi(\xi_1)$ и $\psi(\eta_1)$ совершенно произвольныя функціи, и положить $\lambda_1 = \lambda\varphi'(\xi_1).\psi'(\eta_1)$, послѣ чего уравненіе (1) будетъ удовлетворяться величинами ξ_1, η_1 и λ_1, то есть будетъ

$$\lambda_1\, d\xi_1\, d\eta_1 = E dt^2 + 2F dt\, du + G du^2.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, вмѣсто ξ, η взять ξ_1, η_1.

Не смотря, однако, на разнообразныя зависимости, которыя можно установить между ξ, η съ одной стороны и t, u съ другой, выраженіе k, какъ мы увидимъ, будетъ содержать совершенно опредѣленнымъ образомъ перемѣнныя t и u, то есть будетъ свободно отъ этихъ зависимостей.

Начиная преобразованіе величины k, мы напишемъ уравненіе (1) въ видѣ

$$\lambda d\xi d\eta = E(dt - \omega\, du)(dt - \Omega\, du), \tag{2}$$

гдѣ

$$\omega = \frac{-F + \sqrt{-1}.\sqrt{EG - F^2}}{E}, \quad \Omega = \frac{-F - \sqrt{-1}.\sqrt{EG - F^2}}{E}.$$

Замѣнимъ теперь dt и du ихъ величинами

$$dt = t'_\xi d\xi + t'_\eta d\eta, \quad du = u'_\xi d\xi + u'_\eta d\eta,$$

гдѣ для сокращенія письма сдѣлано

$$t'_\xi = \frac{\partial t}{\partial \xi},\ t'_\eta = \frac{\partial t}{\partial \eta},\ u'_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi},\ u'_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

тогда во второй части должны исчезнуть члены съ $d\xi^2$ и $d\eta^2$, то есть члены

$$E(t'_\xi - \omega u'_\xi)(t'_\xi - \Omega u'_\xi)\,d\xi^2 \text{ и } E(t'_\eta - \omega u'_\eta)(t'_\eta - \Omega u'_\eta)\,d\eta^2.$$

Это же обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только въ двухъ случаяхъ, а именно, когда

$$t'_\xi - \Omega u'_\xi = 0,\ \ t'_\eta - \omega u'_\eta = 0,$$

или же когда

$$t'_\xi - \omega u'_\xi = 0,\ \ t'_\eta - \Omega u'_\eta = 0.$$

Дѣйствительно, нельзя положить разомъ

$$t'_\xi - \omega u'_\xi = 0 \text{ и } t'_\eta - \omega u'_\eta = 0,$$

ибо тогда функціональный опредѣлитель $t'_\xi u'_\eta - t'_\eta u'_\xi$ будетъ нуль и, слѣдовательно, t будетъ функціей отъ u, что невозможно, такъ какъ t и u перемѣнныя независимыя.

На томъ же основаніи нельзя сдѣлать въ одно и то же время

$$t'_\xi - \Omega u'_\xi = 0 \text{ и } t'_\eta - \Omega u'_\eta = 0.$$

Поэтому остаются возможными только два упомянутые случая; они сводятся къ одному. Въ самомъ дѣлѣ, различить одинъ случай отъ другого значитъ установить, которую изъ двухъ перемѣнныхъ, входящихъ въ первую часть уравненія (2), назвать буквою ξ и которую буквою η. Такъ какъ это для насъ безразлично, то мы можемъ выбрать любой изъ двухъ случаевъ, напримѣръ, первый. Сдѣлаемъ же, слѣдовательно,

$$t'_\xi = \Omega u'_\xi,\ t'_\eta = \omega u'_\eta. \tag{3}$$

Тогда уравненіе (2) напишется такъ:

$$\lambda d\xi d\eta = E(t'_\xi - \omega u'_\xi)\, d\xi . (t'_\eta - \Omega u'_\eta)\, d\eta,$$

или, на основаніи уравненій (3),

$$\lambda d\xi d\eta = -E(\omega - \Omega)^2 u'_\xi u'_\eta d\xi d\eta.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\lambda = -E(\omega - \Omega)^2 u'_\xi u'_\eta.$$

На основаніи этой величины λ выраженіе k напишется такъ:

$$k = \frac{2}{E(\omega - \Omega)^2 u'_\xi u'_\eta}\left[\frac{\partial^2 \lg E(\omega - \Omega)^2}{d\xi\, d\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{d\xi\, d\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\eta}{d\xi\, d\eta}\right].$$

Для рѣшенія нашей задачи о преобразованіи k нужно преобразовать три члена, стоящіе подъ скобками.

Съ этою цѣлію означимъ черезъ V какую угодно функцію отъ ξ и η. Ее можно разсматривать вмѣстѣ съ тѣмъ и какъ функцію отъ t и u, что произойдетъ, когда мы ξ и η замѣнимъ ихъ величинами въ t и u.

Общія формулы дифференціальнаго исчисленія намъ даютъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial t} t'_\xi + \frac{\partial V}{\partial u} u'_\xi, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial t} t'_\eta + \frac{\partial V}{\partial u} u'_\eta.$$

На основаніи уравненій (3) отсюда получаемъ

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\Omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right) u'_\xi, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right) u'_\eta. \qquad (4)$$

Далѣе, имѣя въ виду уравненія (4), мы находимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right) u'_\eta\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + u'_\eta \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + u'_\xi u'_\eta \left[\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\omega + \frac{\partial V}{\partial u}\right)\right].$$

Выполняя указанныя здѣсь дифференцированія, получимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(\omega\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial u}\right)+$$

$$+u'_\xi u'_\eta\left[\left(\Omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\frac{\partial V}{\partial t}+\omega\Omega\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(\omega+\Omega)\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right]. \qquad (5)$$

Съ другой стороны, составляя производныя $\frac{\partial t'_\xi}{\partial\eta}$ и $\frac{\partial t'_\eta}{\partial\xi}$, которыя равны одной и той же величинѣ $\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\,\partial\eta}$, мы на основаніи уравненій (3) и (4) получаемъ

$$\frac{\partial t'_\xi}{\partial\eta}=\Omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+u'_\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}=\Omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+u'_\xi u'_\eta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\omega+\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial t'_\eta}{\partial\xi}=\omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+u'_\eta\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=\omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+u'_\xi u'_\eta\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\Omega+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right).$$

Уравнивая между собою $\frac{\partial t'_\xi}{\partial\eta}$ и $\frac{\partial t'_\eta}{\partial\xi}$, мы найдемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=-Pu'_\xi u'_\eta, \qquad (6)$$

гдѣ

$$P=\frac{1}{\omega-\Omega}\left(\Omega\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial(\alpha+\Omega)}{\partial t}+\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}=$$

$$=\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}. \qquad (7)$$

Послѣ подстановки вмѣсто $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$ его величины изъ уравненія (6) въ (5) мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta} = u'_\xi u'_\eta \Big[\Big(\Omega \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial u} - P\omega\Big)\frac{\partial V}{\partial t} - P\frac{\partial V}{\partial u} +$$

$$+ \omega\Omega \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (\omega + \Omega)\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\Big]. \tag{8}$$

Сдѣлавъ здѣсь

$$V = \lg E(\omega - \Omega)^2 = \lg E + 2\lg(\omega - \Omega),$$

мы получимъ преобразованное выраженіе перваго изъ трехъ упомянутыхъ членовъ.

Далѣе, уравненіе (6) по раздѣленіи его на u'_ξ даетъ

$$\frac{\partial \lg u'_\xi}{\partial\eta} = -Pu'_\eta,$$

а отсюда имѣемъ

$$\frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{\partial\xi\,\partial\eta} = -P\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - u'_\eta \frac{\partial P}{\partial\xi}.$$

Это равенство въ силу уравненій (4) и (6) перейдетъ въ слѣдующее

$$\frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{\partial\xi\,\partial\eta} = P^2 u'_\xi u'_\eta - u'_\xi u'_\eta \Big(\frac{\partial P}{\partial t}\Omega + \frac{\partial P}{\partial u}\Big) = \Big(P^2 - \frac{\partial P}{\partial t}\Omega - \frac{\partial P}{\partial u}\Big) u'_\xi u'_\eta. \tag{9}$$

Это есть преобразованное выраженіе втораго изъ упомянутыхъ членовъ.

Совершенно также, дѣля уравненіе (6) на u'_η и пользуясь уравненіями (4), мы выведемъ

$$\frac{\partial^2 \lg u'_\eta}{\partial\xi\,\partial\eta} = \Big(P^2 - \frac{\partial P}{\partial t}\,\omega - \frac{\partial P}{\partial u}\Big) u'_\xi u'_\eta. \tag{10}$$

Подставимъ же въ уравненіе

$$\frac{1}{2}kE(\omega - \Omega)^2 = \frac{1}{u'_\xi u'_\eta}\Big[\frac{\partial \lg E(\omega - \Omega)^2}{\partial\xi\,d\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\eta}{\partial\xi\,\partial\eta}\Big]^2$$

вмѣсто трехъ членовъ въ скобкахъ ихъ величины изъ уравненій (8), гдѣ $V=\lg E(\omega-\Omega)^2$, (9) и (10); тогда произведеніе $u'_\xi u'_\eta$ сократится и останется въ результатѣ выраженіе, зависящее только отъ коэффиціентовъ E, F, G и ихъ производныхъ перваго и втораго порядка по t и u.

Имѣя въ виду выраженіе (7) величины P и замѣчая, что

$$\Omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}-P\omega=\frac{1}{\omega-\Omega}\left(\omega\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\Omega\frac{\partial\omega}{\partial u}+\omega^2\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\Omega^2\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial u}-\omega\Omega\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega\Omega}\right)}{\partial t},$$

мы послѣ нѣкоторыхъ приведеній окончательно получимъ

$$\frac{1}{2}kE(\omega-\Omega)^2=\omega\Omega\frac{\partial^2\lg E}{\partial t^2}+(\omega+\Omega)\frac{\partial^2\lg E}{\partial t\,\partial u}+\frac{\partial^2\lg E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(\omega+\Omega)}{\partial t\,\partial u}+$$

$$+\frac{\partial^2(\omega\Omega)}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial u}+\omega\Omega\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega\Omega}\right)}{\partial t}\right]\frac{\partial\lg E}{\partial t}-$$

$$-\left[\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}\right]\frac{\partial\lg E}{\partial u}-$$

$$-\left[\frac{\partial(\omega\Omega)}{\partial t}\,\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial t}+\frac{\partial(\omega+\Omega)}{\partial t}\,\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}\right].\qquad(11)$$

Если вмѣсто ω и Ω мы пожелаемъ ввести F и G, то должны здѣсь сдѣлать

$$\omega+\Omega=-\frac{2F}{E},\quad\omega\Omega=\frac{G}{E},\quad\omega-\Omega=\frac{2\sqrt{-1}\sqrt{EG-F^2}}{E},$$

$$\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}=-\frac{\sqrt{-1}\sqrt{EG-F^2}}{F},\quad\frac{\omega-\Omega}{\omega\Omega}=\frac{2\sqrt{-1}\sqrt{EG-F^2}}{G}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе (11) рѣшаетъ нашу задачу о преобразованіи выраженія

$$k=-\frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial^2\lg\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta}.\qquad(12)$$

Чтобы перейти теперь къ мѣрѣ кривизны поверхностей, мы замѣтимъ, что въ прямоугольныхъ координатахъ квадратъ линейнаго элемента ds на поверхности выражается такъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dx\,dy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2.$$

Положивъ въ уравненіи (11)

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,\quad F = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y},\quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,\quad t = x,\quad u = y,$$

мы увидимъ, что производныя третьяго порядка сократятся и останется

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}.$$

Это есть извѣстное и прежде всего доказываемое выраженіе мѣры кривизны.

Итакъ, въ формулѣ (11) k есть мѣра кривизны, которая и получается въ какихъ угодно координатахъ t и u на поверхности.

Можно также поступать иначе, доказавъ сначала выраженіе (12) мѣры кривизны и затѣмъ преобразуя, какъ мы это сдѣлали, формулу (12).

Въ самомъ дѣлѣ, весьма легко получить k въ координатахъ α и β, для которыхъ

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)\,*$$

и затѣмъ перейти къ перемѣннымъ ξ и η, полагая

$$\xi = \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \eta = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Тогда для мѣры кривизны и получится выраженіе (12).

---

* *M. Bertrand,* Traité de calcul différentiel, page 763.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРІЯ ТРЕНІЯ

ХОРОШО СМАЗАННАГО ШИПА ВЪ ПОДШИПНИКѢ.

А. В. Гречанинова.

§ 1. Прежде чѣмъ приступить къ изученію явленія тренія шипа въ подшипникѣ примемъ слѣдующія положенія:

1) Радіусъ цилиндрической поверхности шипа долженъ быть менѣе радіуса круглой цилиндрической поверхности подшипника.

2) Цилиндрическая поверхность шипа эксцентрична по отношенію къ цилиндрической поверхности подшипника.

3) Шипъ и подшипникъ абсолютно твердыя тѣла.

4) При вращеніи шипа образуется между цилиндрическими поверхностями шипа и подшипника слой смазывающей жидкости, благодаря внѣшнему и внутреннему тренію жидкости. Не будь тренія, невозможно было бы образованіе этого слоя, а при покоющемся шипѣ было бы непосредственное прикосновеніе металла шипа о металлъ подшипника.

5) Геометрическія оси шипа и подшипника параллельны.

6) Принимается гипотеза Ньютона о гидравлическомъ треніи.

7) Допустимъ гипотезу, по которой частицы жидкаго слоя перемѣщаются по нѣкоторымъ круговымъ траекторіямъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ геометрическимъ осямъ шипа и подшипника.

8) Если мысленно разсѣчемъ шипъ и подшипникъ плоскостью, перпендикулярною къ ихъ геометрическимъ осямъ, и соединимъ

центры полученныхъ круговыхъ сѣченій прямою, то эта линія эксцентриситета представитъ собою геометрическое мѣсто центровъ круговыхъ траекторій частицъ жидкаго слоя, находящихся въ сѣкущей плоскости.

9) Гидравлическія сопротивленія на основаніи гипотезы Ньютона, провѣренной многочисленными изслѣдованіями надъ истеченіемъ жидкостей изъ капиллярныхъ трубокъ, выражаются такими же функціями относительныхъ скоростей, какими функціями перемѣщеній выражаются нормальныя и касательныя напряженія въ изотропно-упругомъ тѣлѣ.

§ 2. Обусловивъ вышесказаннымъ вращеніе шипа въ подшипникѣ, перейдемъ къ аналитическому изслѣдованію вопроса о треніи.

Предполагая движеніе частицъ жидкаго слоя установившимся, на основаніи пункта 9, § 1, становится вполнѣ возможнымъ воспользоваться общими уравненіями равновѣсія силъ упругости для изотропно-упругаго тѣла, замѣняя въ нихъ перемѣщенія относительными скоростями частицъ жидкости и коэффиціентъ упругости коэффиціентомъ внутренняго тренія жидкости. Такое пользованіе уравненіями значительно обобщаетъ изслѣдуемый вопросъ и имѣетъ полное за собою основаніе, если принять въ соображеніе, что законы сложенія скоростей и перемѣщеній одни и тѣ же.

Пренебрежемъ ничтожнымъ вѣсомъ слоя жидкости между поверхностями шипа и подшипника сравнительно съ нагрузкою, дѣйствующею на шипъ. Тогда общія уравненія равновѣсія силъ упругости въ полуполярной системѣ координатъ примѣнительно къ данному вопросу дадутъ слѣдующія два уравненія:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} p_{r2} + \frac{p_{r1} - p_{t2}}{r} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{t1} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} p_{t2} + \frac{p_{t1} + p_{r2}}{r} = 0. \quad (2)$$

Значки r и t указываютъ направленіе дѣйствія силъ, а именно значекъ r — направленіе по радіусу круглой траекторіи и значекъ t направленіе по перпендикуляру къ радіусу или по касательной къ траекторіи. Значки 1 и 2 указываютъ, къ какой координатной поверхности приложена сила, а именно — значекъ 1 указываетъ цилиндрическую поверхность, а значекъ 2 плоскость, проходящую черезъ ось цилиндрической поверхности.

Такимъ образомъ p_{r1} и p_{t2} суть нормальныя силы, а p_{r2} и p_{t1} — касательныя.

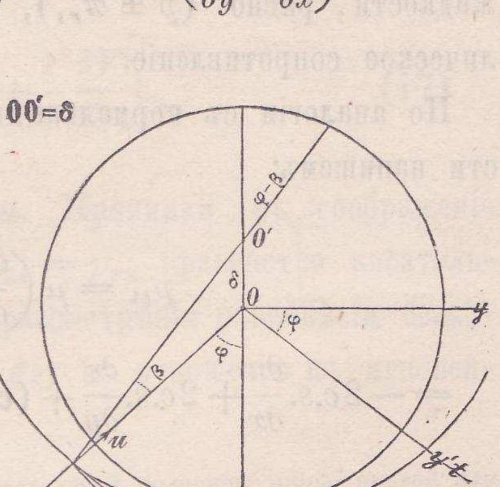
Принимая въ соображеніе пункты 7 и 8, обозначимъ черезъ u и v проекціи скорости частицы жидкости на оси x и y, а черезъ u' и v' проекціи той же скорости q, направленной по касательной, на прямоугольныя оси x' или r и y' или t.

Между частными производными скоростей въ двухъ координатныхъ системахъ найдемъ слѣдующую, извѣстную въ механикѣ, зависимость:

$$\frac{du'}{dx'} = c^2.\frac{du}{dx} + s^2.\frac{dv}{dy} + c.s\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{dv'}{dy'} = s^2.\frac{du}{dx} + c^2.\frac{dv}{dy} - c.s\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'} = -2c.s\frac{du}{dx} + 2c.s\frac{dv}{dy} + (c^2 - s^2)\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right), \qquad (4)$$



гдѣ s и c суть синусы и косинусы угла φ. Разлагая скорость q по направленію радіуса-вектора и по направленію къ нему перпендикулярному и обозначая эти слагающія черезъ U и V, найдемъ:

$$u = cU - sV\ ;\ v = sU + cV,$$

откуда, дифференцируя, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = c.\frac{\partial U}{\partial r} - s.\frac{\partial V}{\partial r} \quad (5) \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -U.s + c.\frac{\partial U}{\partial \varphi} - V.c - s.\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = s.\frac{\partial U}{\partial r} + c.\frac{\partial V}{\partial r} \quad (7) \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = U.c + s.\frac{\partial U}{\partial \varphi} - V.s + c.\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (8)$$

Замѣнимъ теперь въ частныхъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ перемѣнныя x и y новыми независимыми перемѣнными r и φ; найдемъ[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c.\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{s}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (9) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = s.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = c.\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{s}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad (11) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = s.\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{c}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Обозначимъ черезъ p гидродинамическое давленіе, дѣйствующее по направленіи внутренней нормали къ поверхности шипа. Эта величина p неизвѣстная пока функція r и φ. Гидродинамическое давленіе p_{r_1}, дѣйствующее по направленію внутренней нормали въ поверхности произвольнаго безконечно тонкаго слоя жидкости, равно $(p \pm \pi_{r_1})$, гдѣ π_{r_1} есть нормальное гидравлическое сопротивленіе.

По аналогіи съ нормальными и касательными силами упругости напишемъ:

$$p_{t1} = \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}\right) =$$

$$= -2c.s.\frac{\partial u}{\partial x} + 2c.s.\frac{\partial v}{\partial y} + (c^2 - s^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (13)$$

[1] На основаніи $x = rc$, $y = r.s$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Вставляя выраженія (5), (6), (7), (8) въ выраженія (9), (10), (11) и (12) и подставляя полученныя величины въ выраженіе (13), найдемъ:

$$p_{t1} = \pm \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right]. \qquad (14)$$

Тѣмъ же путемъ найдемъ:

$$\Theta = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U}{r} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \qquad (15)$$

гдѣ Θ — измѣненіе единицы объема, которое, по условію несжимаемости жидкости вообще, равно нулю. Это условіе составляетъ, такъ называемое въ гидравликѣ, условіе неразрывности струекъ.

Далѣе найдемъ: $\pi_{r1} = \lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial r}$.

$$p_{r1} = (p \pm \pi_{r_1}) = p \pm 2\mu \frac{\partial U}{\partial r}.^{1} \qquad (16)$$

$$\pi_{t2} = \lambda\Theta + 2\mu . \frac{\partial v'}{\partial y'} = 2\mu \left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right]$$

$$p_{t2} = p \pm 2\mu \left(\frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^{1} \qquad (17)$$

λ и μ постоянные коэффиціенты. Принимая въ соображеніе эти значенія и замѣчая, что $p_{t1} = p_{r2}$ [равенство касательныхъ натяженій, вытекающее изъ разсмотрѣнія равновѣсія безконечно малаго объема $(r. \partial r. \partial\varphi. \partial z)$ по отношенію къ мгновен-

[1] Знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, для какой половины шипа, правой или лѣвой по отношенію оси x, разсматривается сопротивленіе при выбранномъ направленіи p и q.

ной оси, проходящей черезъ его центръ тяжести], подставимъ эти величины въ первыя два основныя уравненія, найдемъ:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] - \frac{(p_{r1} - p_{t2})}{r}$$

Такъ какъ $-(p_{r1} - p_{t2}) = 2\mu\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right]$, то

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + \frac{2\mu}{r}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] - \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{2.\partial V}{\partial r}\right] +$$

$$+ \frac{2\mu}{r}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right].$$

На основаніи выраженія (15) найдемъ:

$$-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right] = -\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[U + r\frac{\partial U}{\partial r}\right].$$

На основаніи того же

$$\frac{2\mu}{r}\left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}\right] = -\frac{2\mu}{r}\frac{2\partial U}{\partial r} = -\frac{4\mu}{r}\frac{\partial U}{\partial r},$$

сумма послѣднихъ двухъ выраженій, дастъ $2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$ и первое основное уравненіе представится въ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{r1} = \frac{\partial p}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right] + 2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

или окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right].$$

Второе основное уравненіе дастъ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}p_{t2}=-\frac{2p_{t1}}{r}-\frac{\partial p_{t1}}{\partial r}$$

или
$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=-\frac{2\mu}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right].$$

На основаніи выраженія (15):

$$-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right]=-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[-\frac{\partial U}{\partial r}\right]=\frac{2\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r.\partial\varphi},$$

$$\frac{2\mu}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial r}\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]=$$

$$=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]+\frac{2\mu}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right]+\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=$$

$$=\mu\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}\right]=$$

$$=\frac{\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}\right].$$

Замѣчая, что

$$\frac{\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=-\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right]+\frac{2\mu}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi},$$

найдемъ окончательно

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}-\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right].$$

Такимъ образомъ первыя два основныя уравненія представятся въ видѣ слѣдующихъ двухъ:

$$\left.\begin{array}{r} -\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Theta=\frac{\partial p}{\partial r} \\[2ex] \mu\frac{\partial}{\partial r}\Theta=\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{array}\right\} \text{ гдѣ } \Theta'=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}-\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}. \qquad \begin{array}{r}(18)\\[2ex](19)\end{array}$$

Исключая изъ этихъ уравненій p найдемъ $r\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial\Theta}{\partial r}=0$

— — — — Θ — $r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial p}{\partial r}=0.$

Такъ что p и Θ суть интегралы одного и того же уравненія

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial r}=0.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ
$w=c+a\lg r+b\varphi+\psi(k)$, гдѣ $k=\lg r\pm\sqrt{-1}.\varphi$ а ψ произвольная функція. Для того, чтобы $w_1=p$ и $w_2=\Theta$ удовлетворяли исходнымъ нашимъ уравненіямъ (18) и (19), необходимо и достаточно, чтобы было

$$p=\alpha\mu\left[c+b\lg r-a\varphi\mp\sqrt{-1}.\psi(k)\right]$$

и
$$\Theta=-\alpha\left[c'+a\lg r+b\varphi+\psi(k)\right],$$

гдѣ a, b, c, α и c' суть произвольныя постоянныя. Отсюда

$$\left[\frac{p}{\alpha\mu}+a\varphi-b\lg r-c\right]^2+\left[\frac{\theta}{\alpha}+b\varphi+a\lg r+c'\right]^2=0$$

и
$$p=(b\alpha\mu\lg r-a\alpha\mu\varphi+c\alpha\mu) \tag{20}$$

$$\theta=-(a\alpha\lg r+b\alpha\varphi+c'\alpha). \tag{21}$$

Отсюда усматриваемъ, что гидродинамическое давленіе увеличивается по мѣрѣ углубленія внутрь смазывающаго слоя и уменьшается съ увеличеніемъ угла φ.

§ 3. Въ случаѣ концентрическаго слоя жидкости уголъ $\beta=0$ (см. черт.) для всякаго безконечно-тонкаго слоя, заключающагося въ конечно-тонкомъ слоѣ жидкости между шипомъ и подшипникомъ, и для всякаго мѣста на его поверхности, что влечетъ за собою $U=0$, $V=q$ и уравненіе (18) дастъ $\frac{\partial p}{\partial r}=0$ или $\frac{b\alpha\mu}{r}=0$ (на основаніи выраженія 20), что возможно при $\alpha=0$ или $b=0$. Если принять $\alpha=0$, тогда $p=0$ и уравненіе (19) дастъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}=0.$$

При $b=0$, $p=(c\alpha\mu-a\alpha\mu\varphi)$, $\theta=-(c'\alpha+a\alpha\lg r)$,

$$\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}=c'\alpha+a\alpha\lg r \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}=\frac{a\alpha}{r}. \tag{22}$$

Уравненіе (22), въ случаѣ концентричнаго съ подшипникомъ шипа, безъ сомнѣнія, удовлетворяетъ условію вопроса. Въ этомъ случаѣ $p = c\alpha\mu - a\alpha\mu\varphi$, какъ видно гидродинамическое давленіе не равно нулю[1].

Уравненіе (22), какъ относящееся къ чисто идеальному случаю концентричнаго шипа, не можетъ все-таки удовлетворить вполнѣ экспериментатора, ибо не соотвѣтствуетъ дѣйствительному явленію. Необходимо узнать, какое вліяніе имѣетъ эксцентриситетъ шипа на величину тренія и возможно ли пренебречь этимъ вліяніемъ.

§ 4. Обратимся къ этому послѣднему случаю, поставленному въ пунктѣ (2) § 1. Замѣтимъ при этомъ, что по смыслу вопроса r и φ суть перемѣнныя независимыя; уголъ β (см. черт.) измѣняется съ измѣненіемъ положенія частицы жидкости на ея траекторіи и съ переходомъ отъ одного безконечно-тонкаго слоя къ другому смежному на основаніи пункта (8) § 1. Такъ что $\beta = f(r, \varphi)$.

Замѣчая, что $U = q.\mathrm{sn}\,\beta$ и $V = q.\mathrm{cs}\,\beta$, найдемъ

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \mathrm{sn}\,\beta . \frac{\partial q}{\partial \varphi} + q . \mathrm{cs}\,\beta . \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}\ ; \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \mathrm{cs}\,\beta . \frac{\partial q}{\partial r} - q . \mathrm{sn}\,\beta . \frac{\partial \beta}{\partial r} .$$

По условію несжимаемости жидкости на основаніи выраженія (15) имѣемъ

$$-\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r}(U.r) = \frac{\partial}{\partial r}(q.r.\mathrm{sn}\,\beta).$$

Съ другой стороны

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mathrm{cs}\,\beta \cdot \frac{\partial q}{\partial \varphi} - \mathrm{sn}\,\beta .' q . \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} .$$

---

[1] Уравненіе (22) было доложено мною еще въ февралѣ мѣсяцѣ 1886 года математическому обществу при харьковскомъ университетѣ.

Въ виду интереса, который въ настоящее время пріобрѣтаетъ вопросъ о треніи хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ, я рѣшился напечатать свою замѣтку.

Изъ сравненія этихъ производныхъ найдемъ

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \operatorname{tg}\beta.q.\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} - q.r.\frac{\partial \beta}{\partial r} - \operatorname{tg}\beta\left(r.\frac{\partial q}{\partial r} + q\right).$$

Подставляя найденныя значенія производныхъ въ выраженіе

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} = \theta = -\left(a\alpha \lg r + b\alpha\varphi + c'\alpha\right),$$

найдемъ слѣдующее простое уравненіе, относящееся къ случаю эксцентрическаго шипа:

$$\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r}\left(1 - \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}\right) = \operatorname{cs}\beta\left(a\alpha \lg r + b\alpha\varphi + c'\alpha\right). \qquad (23)$$

Обозначимъ черезъ s' толщину слоя по оси x,

— s'_φ — — по радіусу-вектору r,

— r' радіусъ цилиндрич. поверхности шипа,

— ϱ' — — — подшипника,

— δ' эксцентриситетъ шипа и подшипника.

Тѣ же буквы безъ значковъ будутъ имѣть значенія, относящіяся къ произвольному безконечно-тонкому слою жидкости, заключенному между поверхностью шипа и подшипника. Такъ, r означаетъ радіусъ-векторъ кругового сѣченія безконечно тонкаго слоя, радіусъ котораго ϱ, центръ на линіи эксцентриситета шипа и подшипника, полюсъ въ точкѣ O — центрѣ кругового сѣченія шипа, а δ эксцентриситетъ сѣченія слоя по отношенію къ точкѣ O.

Изъ чертежа находимъ[1]

$$\operatorname{cs}\beta = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - \delta_1^2 \operatorname{sn}^2\varphi}}{\rho'}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = \frac{\delta' \operatorname{cs}\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 - \delta_1^2 \operatorname{sn}^2\varphi}},$$

[1] То же самое нашли бы изъ уравненія $r\operatorname{cs}\beta + \delta\operatorname{cs}(\varphi - \beta) = \rho$ и уравненія окружности, имѣющей полюсъ въ точкѣ O: $\rho^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta r \operatorname{cs}\varphi$.

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}=\frac{\delta' \mathrm{cs}\varphi}{\rho' \mathrm{cs}\beta}.$$

Но $\frac{\delta''}{\rho'}=\frac{\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}\varphi}$, слѣдоват. $\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\varphi}$ и $1-\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}=\frac{\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\varphi}=\frac{\mathrm{sn}(\varphi-\beta)}{\mathrm{cs}\beta.\mathrm{sn}\varphi}$.

Замѣтимъ, что $\mathrm{tg}\beta=\frac{\delta' \mathrm{sn}(\varphi-\beta)}{r}$ съ точностью до величинъ третьяго порядка малости относительно β.

Тогда $1-\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}=\frac{r.\mathrm{tg}\beta}{\delta' \mathrm{cs}\beta.\mathrm{sn}\varphi}=\frac{r.\mathrm{sn}\beta}{\delta' \mathrm{cs}^2\beta.\mathrm{sn}\varphi}$. Подставляя найденное значеніе въ уравненіи (23) и умножая обѣ части равенства на $\mathrm{cs}^2\beta$, найдемъ $\frac{\partial q}{\partial r}\cdot\mathrm{cs}^2\beta+\frac{q.\mathrm{sn}\beta}{\delta.\mathrm{sn}\varphi}=\mathrm{cs}^2\beta.A$,

гдѣ $$A=a\alpha\lg r+\beta\alpha\varphi+c'\alpha.$$

Принимая $\mathrm{cs}^2\beta=1$ (съ точностью до величины четвертаго порядка малости относительно β), найдемъ

$$\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{q.\mathrm{sn}\beta}{\delta.\mathrm{sn}\varphi}=A. \tag{24}$$

Замѣтивъ, что $\frac{\mathrm{sn}\beta}{\mathrm{sn}\varphi}=\frac{\delta}{\rho}$, найдемъ окончательно

$$\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{q}{\rho}=A, \tag{25}$$

уравненіе, относящееся къ произвольному безконечно-тонкому слою. На основаніи пункта (8) § 1 центры сѣченій этихъ безконечно-тонкихъ слоевъ распредѣлены равномѣрно по линіи эксцентриситета шипа и подшипника, а тогда $\frac{\delta}{s}=\frac{\delta'}{s'},=k$, гдѣ k нѣкоторое постоянное число. Затѣмъ далѣе для простоты вычисленій примемъ $\varrho = r + \delta . cs\varphi$ вмѣсто величины ϱ, опредѣляемой изъ уравненія окружности сѣченія безконечно тонкаго слоя, имѣющей полюсъ въ центрѣ сѣченія шипа:

$$\varrho^2 = r^2 + \delta^2 + 2\delta r . cs\varphi \,;\; \varrho = \sqrt{r^2 + \delta^2 + 2\delta r cs\varphi} = r + \delta . cs\varphi.$$

На основаніи послѣдняго выраженія найдемъ, что при углѣ $\varphi = 0$

$$\varrho' = r' + s' + \delta' \text{ или } \varrho' - r' = s' + \delta',$$

а при произвольномъ углѣ φ

$$\varrho' = r' + s'_\varphi + \delta' . cs\varphi;$$

откуда

$$s'_\varphi = \varrho' - r' - \delta' . cs\varphi = s' + \delta' - \delta' . cs\varphi = s' - \delta'(1 - cs\varphi)$$

или

$$s'_\varphi = s'(1 - \frac{\delta'}{s'}(1 - cs\varphi)) = s'(1 + k(1 - cs\varphi)).$$

Отсюда $$\frac{\delta'}{s'_\varphi} = \frac{\delta'}{s'} \cdot \frac{1}{1 + k(1 - cs\varphi)}.$$

Замѣчая, что $$\frac{\delta'}{s'} = \frac{\delta}{s} = k,$$

найдемъ $$\frac{\delta}{s_\varphi} = \frac{k}{1 + k(1 - cs\varphi)},$$

гдѣ s_φ толщина слоя, считаемая отъ поверхности шипа по радіусу-вектору r, для любого угла φ, до поверхности произвольнаго безконечно тонкаго слоя жидкости.

Тогда

$$\frac{\delta . cs\varphi}{s_\varphi} = \frac{k . cs\varphi}{1 + k(1 - cs\varphi)}, \quad r = r' + s_\varphi$$

и $dr = ds_\varphi = ds(1+k(1-\mathrm{cs}\varphi))$; $\varsigma = r + \delta\mathrm{cs}\varphi = r' + \delta\mathrm{cs}\varphi + s_\varphi =$
$= r' + s_\varphi\left[1 + \frac{\delta\,\mathrm{cs}\,\varphi}{s\varphi}\right] = r' + s_\varphi\left[1 + \frac{k.\mathrm{cs}\,\varphi}{1+k(1-\mathrm{cs}\,\varphi)}\right].$

Обозначая для краткости $1+k(1-\mathrm{cs}\,\varphi)$ чрезъ λ и замѣчая, что $s_\varphi = s.\lambda$, найдемъ окончательно

$$\varrho = r' + s.\lambda\left(1 + \frac{k.\mathrm{cs}\,\varphi}{\lambda}\right) =$$
$$= r' + s.\lambda + s.k.\mathrm{cs}\varphi = r' + s(\lambda + k.\mathrm{cs}\varphi) \text{ или } \varrho = r' + s(1+k).$$

Уравненіе (25) представится въ видѣ:

$$\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{q}{r'+s(1+k)} = A = a\alpha\lg(r'+s\lambda) +$$
$$+ b\alpha\varphi + c'\alpha. = a\alpha\lg r' + b\alpha\varphi + c'\alpha + \frac{a\alpha\lambda s}{r'}. \qquad (26)$$

Опредѣлимъ значеніе коэффиціента $a\alpha$. Взявъ абсолютную величину гидродинамическаго давленія независимо отъ направленія его, найдемъ, что

при $\varphi = 0$, $\qquad p_1 = b\alpha\mu\lg r + c\alpha\mu$
и при $\varphi = \varphi'$, $\qquad p_0 = b\alpha\mu\lg r + c\alpha\mu - a\alpha\mu.\varphi'$.

Вычитая находимъ $p_1 - p_0 = p' = a\alpha\mu.\varphi$, откуда $a\alpha = \frac{p'}{\mu'\varphi'}$ (p_0 атмосферное давленіе p', слѣдовательно,— избытокъ гидродинамическаго давленія надъ атмосфернымъ).

Принимая въ соображеніе, что величина p' доходитъ до 90 атмосферъ, будемъ считать $a\alpha = \frac{p'}{\mu\varphi'}$ за величину порядка $\frac{1}{s^2}$, а потому въ уравненіи (26) членами, содержащими величину s, пренебречь нельзя.

Обозначивъ для краткости $a\alpha \lg r' + b\alpha\varphi + c'\alpha$ черезъ A' и интегрируя уравненіе (26), найдемъ общій интегралъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$q = A'r' + a\alpha\,.\,\lambda s - a\alpha r' + \frac{C}{e^{\left(\frac{\lambda \lg r}{1+k}\right)}\,.\,e^{\left(\frac{s\lambda}{r'}\right)}},$$

гдѣ C новое произвольное постояноое, а e основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Опредѣлимъ величину A' изъ условій, относящихся къ предѣламъ жидкаго слоя на поверхности шипа и подшипника. Тогда, при $s=0$, $q=q'$, гдѣ q' скорость на окружности шипа, и при $s=s'$, $q=0$, т. е. примемъ для простоты, что коэффиціентъ внутренняго тренія весьма малъ сравнительно съ коэффиціентомъ внѣшняго тренія, а тогда скорость частицъ жидкости на поверхности подшипника почти равна нулю[1]. При этихъ условіяхъ:

$$q' = A'r' - a\alpha r' + \frac{C}{e^{\frac{\lambda.\lg r'}{1+k}}e},$$

откуда

$$0 = A'r' + a\alpha\lambda s' - a\alpha r' + \frac{C}{e^{\left(\frac{\lambda.\lg r'}{1+k}\right)}e^{\left(\frac{s'\lambda}{r'}\right)}},$$

откуда

$$A' = -\frac{q'r'}{s'\lambda r' - s_1{}^2.\lambda^2} - \frac{a\alpha s'\lambda}{r'} - \frac{a\alpha s_1{}^2\lambda^2}{r_1{}^2}$$

или, пренебрегая $s_1{}^2\lambda^2$ въ знаменателѣ,

$$= -A'\frac{q'}{s'\lambda} - \frac{p'.s'\lambda}{\mu.\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1{}^2\lambda^2}{\mu.\varphi'.r_1{}^2}. \qquad (27)$$

[1] Какъ это было сдѣлано въ опытахъ Пуазейля съ трубками.

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ

$$A' = a\alpha \lg r' + b\alpha\varphi + c'\alpha = \frac{p'.\lg r'}{\mu.\varphi'} + b\alpha\varphi + c'\alpha$$

при углахъ φ, равныхъ нулю и нѣкоторому φ', опредѣлимъ $b\alpha$ и $c'\alpha$.

При $\varphi = 0, \lambda = 1, A' = \frac{p'\lg r'}{\mu\varphi'} + c'\alpha = -\frac{q'}{s'} - \frac{p'.s'}{\mu\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi'.r_1^2}$,

откуда

$$c'\alpha = -\frac{q'}{s'} - \frac{p'.s'}{\mu\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi'.r_1^2} - \frac{p'.\lg r'}{\mu\varphi'}.$$

При $\varphi = \varphi'$, $\lambda = \lambda'$ (если $\varphi = \varphi' = \frac{\pi}{2}$, $\lambda' = 1 + k$),

$$A' = \frac{p'\lg r'}{\mu\varphi'} + b\alpha\varphi' + c'\alpha = -\frac{q'}{s'\lambda'} - \frac{p'.s'\lambda'}{\mu\varphi'.r'} - \frac{p'.s_1^2\lambda_1^2}{\mu\varphi'.r_1^2},$$

откуда

$$b\alpha = \frac{q'}{s'\varphi'}\left[1 - \frac{1}{\lambda'}\right] - \frac{p'.s'}{\mu\varphi'.r'.\varphi'}[\lambda' - 1] - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi_1^2 r_1^2}[\lambda_1^2 - 1]. \quad (28)$$

Тогда

$$A' = -\frac{q'}{s'}\left[1 - \frac{\lambda' - 1}{\lambda'\varphi'}.\varphi\right] -$$

$$-\frac{p's'}{r'\varphi'\mu}\left[1 + \frac{\lambda' - 1}{\varphi'}.\varphi\right] - \frac{p'.s_1^2}{\mu\varphi'.r'}\left[\frac{1}{r'} + \frac{\lambda_1^2 - 1}{\varphi' r'}.\varphi\right]. \quad (29)$$

Замѣтимъ теперь слѣдующее. Для простоты вычисленій было положено $cs\beta = 1$, слѣдовательно $V = q$. Сличая выраженіе (14) съ выраженіемъ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}-\frac{\partial q}{\partial r}-\frac{q}{r}=-A$$

найдемъ

$$p_{t1}=\mu\left(2.\frac{\partial q}{\partial r}-A\right)_{s=0} \quad \text{или} \quad p_{t1}=\mu\left(2.\frac{\partial q}{\partial r}\right)_{s=0}-A'.\mu.$$

Изъ уравненія (25) находимъ

$$\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)_{s=0}=A'-\frac{q'}{r'},$$

посему
$$p_{t1}=\mu\,.\,A'-\frac{2\mu\,.\,q'}{r'}$$

Пренебрегая для простоты въ выраженіи (29) послѣднимъ членомъ, какъ очень малою величиной, найдемъ абсолютную величину тренія (на единицу поверхности шипа)

$$p_{t1}=\frac{\mu q'}{s'}\left[1-\frac{\lambda'-1}{\lambda'\varphi'}.\varphi\right]+\frac{p's'}{r'.\varphi'}\left[1+\frac{\lambda'-1}{\varphi'}.\varphi\right]+\frac{2\mu q'}{r'}. \tag{30}$$

Изъ выраженія (20) находимъ: $\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{b\alpha\mu}{r}$. Если теперь для простоты допустить, что гидродинамическое давленіе p не измѣняется на протяженіи толщины слоя, который достигаетъ 0,001 миллиметра, то такое допущеніе приведетъ къ погрѣшности, величина коей будетъ порядка не менѣе s^2, а такими величинами условимся пренебрегать. Тогда $\frac{\partial p}{\partial r}=0$, что возможно, когда $b\alpha=0$. На основаніи сего изъ выраженія (28) находимъ:

$$\frac{q'}{s'\varphi'}\frac{(\lambda'-1)}{\lambda'}=\frac{p'.s'(\lambda'-1)}{\mu.\varphi'.r'.\varphi'}, \text{ откуда } s'=\sqrt{\frac{\mu.q'.r'\varphi'}{p'.\lambda'}}^{\,*}=\sqrt{\frac{\mu q'\sigma}{p'.\lambda'}}.$$

---

* Профессоръ Н. П. Петровъ нашелъ опытнымъ путемъ $s'=\frac{c}{\sqrt{p_1}}$, гдѣ

*

Обозначивъ дугу $r'\varphi'$ черезъ σ и подставивъ выраженіе s' въ уравненіе (30), найдемъ окончательно

$$p_{t1} = \sqrt{\frac{p'q'\lambda'.\mu}{\sigma}} \cdot \left[1 + \frac{1}{\lambda'}\right] + \frac{2\mu.q'}{r'} \cdot \qquad (31)$$

Замѣтимъ, что, напр., для сурѣпнаго масла при температурѣ въ $30°C_1$, $\mu = 0{,}0015$ килограмма на квадратный сантиметръ при скорости въ одинъ метръ. Отсюда понятно, что, при небольшихъ скоростяхъ и большихъ радіусахъ шиповъ, послѣдній членъ имѣетъ мало вліянія на треніе.

Для того, чтобы наглядно показать, какое вліяніе имѣетъ эксцентриситетъ шипа на величину тренія, сдѣлаемъ слѣдующее сравненіе. Полагая эксцентриситетъ равнымъ нулю, найдемъ

$$\lambda' = 1. \; ; \; p_{t1} = 2\sqrt{\frac{\mu . p'q'}{\sigma}}.$$

Допустимъ затѣмъ, что s' есть толщина слоя жидкости при эксцентриситетѣ равномъ нулю, а s'' толщина слоя жидкости при эксцентриситетѣ равномъ 0,1 миллиметра.

Въ такомъ случаѣ при $s' = 0{,}01$ миллим., найдемъ изъ уравненія

$$s'' = \frac{s'}{\sqrt{\lambda''}} = \frac{s'\sqrt{s''}}{\sqrt{s'' + \delta'}},$$

что

$$s'' = 0{,}001^{mm}.$$

При этихъ значеніяхъ

$$k = \frac{\delta'}{s'} = 100 \; ; \; \lambda'' = 1 + k = 101;$$

и вычисляя p_{t1}, приблизительно получимъ

C постоянное. См. «Описаніе и результаты опытовъ надъ треніемъ жидкостей и машинъ». *Н. Петровъ.*

$$p_{t_1} = 10\sqrt{\frac{\mu \cdot p' q'}{\sigma}},$$

т. е. треніе увеличилось въ пять разъ. Понятно, что въ точныхъ опытахъ надъ треніемъ смазанныхъ шиповъ невозможно упускать изъ виду вліяніе эксцентриситета.

Въ противномъ случаѣ, другимъ величинамъ, какъ напр. коэффиціенту внѣшняго тренія, теплопроводности, температурѣ, входящимъ косвеннымъ образомъ въ функцію, опредѣляющую величину μ, можно приписать такія значенія и такую степень важности, какихъ на самомъ дѣлѣ онѣ, можетъ быть, не оказываютъ на величину тренія шипа.

Изъ выраженій (16) и (20), опредѣляющихъ абсолютную величину гидродинамическаго давленія, усматриваемъ, что для лѣвой половины шипа оно увеличивается при возрастаніи абсолютной величины угла φ, а для правой, наоборотъ, уменьшается. По этому, какъ ни малъ эксцентриситетъ, шипъ долженъ нѣсколько *набѣжать* на подшипникъ, пока не установится равновѣсіе. Отсюда понятно, что при изнашиваніи шипа или подшипника увеличивается эксцентриситетъ, а, слѣдоват., и величина тренія должна значительно возрастать *даже при усиленной смазкѣ.* Улучшеніе конструкціи буксъ и въ особенности удачный выборъ металла для вкладышей подшипниковъ помогли бы дѣлу экономіи въ такихъ учрежденіяхъ, какъ желѣзныя дороги, на нашъ взглядъ, не менѣе чѣмъ исключительный выборъ вещества смазки, полезное вліяніе качества и количества которой можетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ значительно уменьшаться другими обстоятельствами, въ числѣ коихъ эксцентриситетъ, какъ видно, играетъ не маловажную роль. Нечего и говорить при этомъ о громадномъ значеніи надлежащаго техническаго надзора и разумнаго ремонта трущихся частей.

Примѣчаніе къ стр. 18.

Интегрированіе уравненія

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial r}=0$$

было предложено профессоромъ М. Ѳ. Ковальскимъ въ томъ же засѣданіи, когда сообщалась статья А. В. Гречанинова.

О ДВИЖЕНІИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ,

заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями.

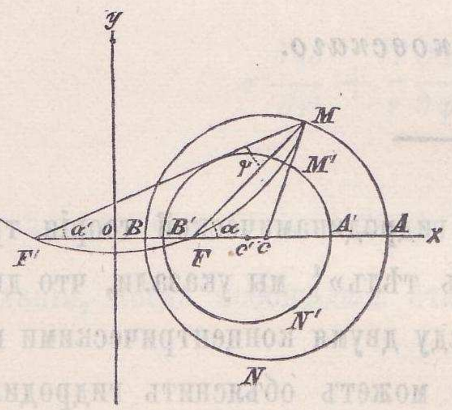
Н. Е. Жуковскаго.

§ 1. Въ нашей замѣткѣ «О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ»[1] мы указали, что движеніе жидкости съ треніемъ между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями не можетъ объяснить гидродинамическій напоръ, который необходимъ для уравновѣшиванія силы давленія шипа на подшипникъ, и замѣтили, что подобный напоръ можно бы ожидать при движеніи вязкой жидкости между двумя эксцентрическими поверхностями круглыхъ цилиндровъ. Намъ удалось теперь найти рѣшеніе задачи о движеніи весьма вязкой жидкости, заключенной между поверхностями двухъ эксцентрическихъ круглыхъ цилиндровъ, вращающихся около своихъ осей, не стѣсняя ее малою разностью радіусовъ цилиндровъ, причемъ оказалось, что при такомъ движеніи дѣйствительно является сила дѣйствія жидкости на внутренній цилиндръ, направленная перпендикулярно плоскости, проходящей чрезъ оси цилиндровъ.

[1] Журналъ Русскаго физико-химическаго общества, Т. XVIII, стр. 209.

Но, къ сожалѣнію, найденный нами интегралъ еще не представляетъ полнаго рѣшенія вопроса, такъ какъ въ немъ устанавливается нѣкоторая связь между скоростями вращенія цилиндровъ. Вслѣдствіе этого мы рѣшаемъ задачу профессора Петрова только въ предположеніи, что шипъ и подшипникъ вращаются съ равными скоростями въ противоположныя стороны. Кромѣ того мы прилагаемъ наше рѣшеніе еще къ одному частному случаю, интересному съ теоретической стороны.

Начинаемъ изложеніе съ напоминанія теоріи Неймановыхъ координатъ, которая легла въ основаніе нашей работы.



§ 2. Отложивъ на оси OX прямоугольныхъ Декартовыхъ координатъ точки F и F' (фиг. 1) на разстояніяхъ $+a$ и $-a$ отъ начала координатъ, выразимъ параметры ϑ и φ разсматриваемой изотермической системы криволинейныхъ координатъ съ помощію положенія:

$$-\vartheta+\varphi i=\lg\frac{x-a+yi}{x+a+yi}. \tag{2}$$

Если r и r' суть разстоянія точки плоскости M отъ F и F', а α и α'—углы, образуемые этими радіусами съ осью OX, то

$$x-a=r\,\mathrm{cs}\,\alpha,\ y=r\,\mathrm{sn}\,\alpha,\ x+a=r'\,\mathrm{cs}\,\alpha',\ y=r'\,\mathrm{sn}\,\alpha',$$

такъ что

$$-\vartheta+\varphi i=\lg\frac{r}{r'}+(\alpha-\alpha')i$$

и

$$\vartheta=\lg\frac{r'}{r},\ \varphi=\alpha-\alpha'. \tag{3}$$

Вторая изъ форм. (3) показываетъ, что, φ есть уголъ, заключенный между радіусами r и r', такъ что семейство координатныхъ линій $\varphi = \text{const}$. представляетъ окружности, опирающіяся на хорду FF'. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что, идя по какому-нибудь замкнутому контуру $AMBN$, пересѣкающему хорду FF', въ направленіи обратномъ часовой стрѣлкѣ, мы получаемъ такое измѣненіе угла φ: отъ A до B φ измѣняется отъ 0 до π, а отъ B до A — отъ π до 2π.

Первое изъ равенствъ (3) показываетъ, что второе семейство криволинейныхъ координатъ, ортогональное первому и имѣющее уравненіе $\vartheta = \text{const}$, представляетъ тоже окружности, центры которыхъ расположены по оси OX внѣ хорды FF'. Дѣйствительно, проведя чрезъ точку M прямую MC такъ, чтобы

$$\angle FMC = \angle CF'M,$$

найдемъ изъ $\Delta FMC \backsim \Delta F'MC$, что

$$\frac{F'C}{MC} = \frac{r'}{r}, \quad \frac{FC}{MC} = \frac{r}{r'},$$

откуда

$$MC = \frac{2a}{\dfrac{r'}{r} - \dfrac{r}{r'}}, \quad OC = a\,\frac{\dfrac{r'}{r} + \dfrac{r}{r'}}{\dfrac{r'}{r} - \dfrac{r}{r'}}.$$

Положивъ здѣсь $MC = \varrho$, $OC = \delta$ и пользуясь обозначеніями гиперболическихъ функцій, найдемъ по формулѣ (3), что

$$\varrho = \frac{a}{\operatorname{sn}h\vartheta}, \quad \delta = a\operatorname{ctg}h\vartheta. \tag{4}$$

Такимъ образомъ при постоянномъ ϑ величины ϱ и δ постоянны, что доказываетъ желаемое.

Составимъ первый дифференціальный параметръ найденной системы координатъ. Для этого опредѣлимъ x и y черезъ ϑ и φ. Изъ формулы (2) имѣемъ:

$$x - a + yi = e^{-\vartheta}(\mathrm{cs}\varphi + i\mathrm{sn}\varphi)(x + a + yi).$$

Сравнивая здѣсь дѣйствительную и мнимую часть и рѣшая полученныя уравненія относительно x и y, находимъ:

$$x = a\frac{\mathrm{sn}h\vartheta}{\mathrm{cs}h\vartheta - \mathrm{cs}\varphi},$$

$$y = a\frac{\mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{cs}h\vartheta - \mathrm{cs}\varphi}. \qquad (5)$$

Теперь мы можемъ составить первый дифференціальный параметръ H пользуясь функціею x или y. Воспользуемся послѣднею функціей:

$$\frac{dy}{d\varphi} = a\frac{\mathrm{cs}\varphi\,\mathrm{cs}h\vartheta - 1}{(\mathrm{cs}h\vartheta - \mathrm{cs}\varphi)^2},$$

$$\frac{dy}{d\vartheta} = -a\frac{\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{sn}h\vartheta}{(\mathrm{cs}h\vartheta - \mathrm{cs}\varphi)^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\mathrm{H}^2} = \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 = a^2\frac{\mathrm{cs}^2\varphi\,\mathrm{cs}h^2\vartheta + (1 - \mathrm{cs}^2\varphi)(\mathrm{cs}h^2\vartheta - 1) - 2\mathrm{cs}\varphi\,\mathrm{cs}h\vartheta + 1}{(\mathrm{cs}h\vartheta - \mathrm{cs}\varphi)^4}$$

откуда

$$\mathrm{H} = \frac{1}{a}(\mathrm{cs}h\vartheta - \mathrm{cs}\varphi). \qquad (7)$$

§ 3. Переходимъ къ нашей задачѣ. Воображаемъ (фиг. 1), что круги AMB и $A'M'B'$ представляютъ перпендикулярныя сѣченія двухъ цилиндровъ, вращающихся около своихъ осей C и C', и изслѣдуемъ движеніе вязкой жидкости, заключенной между ними. Предположивъ, что жидкость имѣетъ небольшую плотность и весьма значительную вязкость, мы будемъ (какъ это дѣлается въ большинствѣ изъ рѣшенныхъ задачъ по движенію вязкой жидкости) пренебрегать силами инерціи передъ силами тренія и писать уравненія гидродинамики въ видѣ[1]:

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

$$\frac{dp}{dy} = \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2}\right),$$

гдѣ p гидродинамическое давленіе, μ коэффиціентъ внутренняго тренія, а u и v проекціи скорости жидкости на оси OX и OY. Называя чрезъ ω вращеніе частицы жидкости, напишемъ:

$$2\omega = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \tag{8}$$

и замѣтимъ, что на основаніи условія несжимаемости

$$\frac{d2\omega}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2},$$

$$\frac{d2\omega}{dy} = -\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Подставляя это въ вышенаписанныя уравненія движенія жидкости найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d2\omega}{dx} &= \frac{1}{\mu}\,\frac{dp}{dy},\\ \frac{d2\omega}{dy} &= -\frac{1}{\mu}\,\frac{dp}{dx}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

[1] Если бы на жидкость дѣйствовали внѣшнія силы, имѣющія силовую функцію, то онѣ бы не повліяли на движеніе, а только измѣнили бы давленіе p, прибавляя къ нему соотвѣтственное гидростатическое давленіе.

Эти уравненія будутъ удовлетворены всякій разъ, какъ 2ω и $\frac{p}{\mu}$ явятся дѣйствительною и мнимою частью нѣкоторой произвольной функціи отъ $x+yi$. Такъ какъ по формулѣ (2) $x+yi$ есть функція отъ

$$-i(-\vartheta+\varphi i)=\varphi+\vartheta i,$$

то попробуемъ удовлетворить задачѣ положеніемъ:

$$2\omega+\frac{p}{\mu}i=m+ni+l\,\mathrm{cs}(\varphi+\vartheta i),$$

гдѣ m, n, l нѣкоторыя постоянныя величины.

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, найдемъ:

$$2\omega=m+l\,\mathrm{cs}\varphi\,\mathrm{cs}h\vartheta,$$

$$\frac{p}{\mu}=n-l\,\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{sn}h\vartheta. \tag{10}$$

Извѣстно, что функція ω опредѣляетъ до произвольнаго постояннаго теченіе жидкости въ двухъ измѣреніяхъ внутри даннаго контура, найдемъ это теченіе.

Называя чрезъ ψ нѣкоторую функцію x и y, удовлетворимъ условію несжимаемости положеніемъ:

$$u=-\frac{d\psi}{dy},\quad v=\frac{d\psi}{dx} \tag{11}$$

и найдемъ, что

$$\psi=\mathrm{const.}$$

представитъ семейство линій тока искомаго теченія.

Подставивъ формулы (11) въ формулу (8), найдемъ, что

$$2\omega=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2},$$

а, переходя къ Неймановымъ координатамъ и пользуясь формулою (7), получимъ:

$$2\omega = \frac{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}{a^2}\left(\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right). \qquad (12)$$

Такимъ образомъ отысканіе функціи ψ приводится на основаніи формулъ (10) и (12) къ интеграціи уравненія съ частными производными:

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = a^2\,\frac{m + l\operatorname{cs}\varphi\operatorname{cs}h\vartheta}{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}. \qquad (13)$$

Чтобы найти интегралъ уравненій (13), удовлетворяющій граничнымъ условіямъ нашей задачи, сдѣлаемъ подстановку:

$$\psi = \frac{\theta}{\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi}, \qquad (14)$$

гдѣ θ есть функція одного ϑ. Найдемъ:

$$\frac{1}{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}\left\{\frac{d^2\theta}{d\vartheta^2}(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi) - 2\operatorname{sn}h\vartheta\frac{d\theta}{d\vartheta} + (\operatorname{cs}h\vartheta + \operatorname{cs}\varphi)\theta\right\} =$$

$$= a^2\,\frac{m + l\operatorname{cs}\varphi\operatorname{cs}h\vartheta}{(\operatorname{cs}h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)^2}.$$

Сокращая знаменателя и сравнивая между собою члены, содержащіе и несодержащіе $\operatorname{cs}\varphi$, придемъ къ заключенію, что θ должна удовлетворить двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\operatorname{cs}h\vartheta\frac{d^2\theta}{d\vartheta^2} - 2\operatorname{sn}h\vartheta\frac{d\theta}{d\vartheta} + \operatorname{cs}h\vartheta\,\theta = a^2 m,$$

$$-\frac{d^2\theta}{d\vartheta^2} + \theta = a^2 l\operatorname{cs}h\vartheta. \qquad (15)$$

Общій интегралъ перваго изъ этихъ уравненій будетъ:

$$\theta = a^2 \left\{ \left(k - \frac{l'\vartheta}{2}\right) \operatorname{sn} h\vartheta + \frac{m+l'}{2} \operatorname{cs} h\vartheta \right\},$$

гдѣ k и l' произвольныя постоянныя; подставляя его во второе уравненіе, найдемъ, что

$$a^2 l' \operatorname{cs} h\vartheta = a^2 l \operatorname{cs} h\vartheta,$$

такъ что при $l' = l$ удовлетворяемъ обоимъ уравненіямъ (15). Такимъ образомъ мы удовлетворимъ уравненіе (13), представляя уравненіе (14) въ видѣ:

$$\psi = \frac{a^2(m+l)\left(\frac{2k - l\vartheta}{m+l} \operatorname{sn} h\vartheta + \operatorname{cs} h\vartheta\right)}{2(\operatorname{cs} h\vartheta - \operatorname{cs}\varphi)}. \quad (16)$$

Для того, чтобы наши граничные круги $AMBN$ и $A'M'B'N'$, параметры которыхъ назовемъ чрез ϑ_1 и ϑ_2, были линіями токовъ, необходимо, чтобы при $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$ функція ψ не зависѣла отъ φ, т. е., чтобы числитель ея при этихъ значеніяхъ обращался въ нуль. Для удовлетворенія этому условію мы должны выбрать постоянныя m, l, k такъ, чтобы

$$\frac{l}{m+l} = \frac{\operatorname{ctg} h\vartheta_2 - \operatorname{ctg} h\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1},$$

$$\frac{2k}{m+l} = \frac{\vartheta_1 \operatorname{ctg} h\vartheta_2 - \vartheta_2 \operatorname{ctg} h\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}. \quad (17)$$

Найдя функцію ψ, мы можемъ теперь легко опредѣлить проекціи w и q скорости точекъ жидкости на касательныя къ координатнымъ линіямъ $\vartheta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. Считая эти касательныя направленными въ тѣ стороны, въ которыя параметры возрастаютъ, найдемъ, что онѣ образуютъ съ осями углы, выражаемые косинусами:

$$\text{H}\frac{dy}{d\vartheta},\quad -\text{H}\frac{dx}{d\vartheta},$$

$$-\text{H}\frac{dy}{d\varphi},\quad \text{H}\frac{dx}{d\varphi};$$

вслѣдствіе этого по формулѣ (11) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\text{H}\frac{d\psi}{d\vartheta}, \\ q &= \text{H}\frac{d\psi}{d\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Подставляя сюда ψ изъ формулы (16), получимъ:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{a(m+l)}{2}\left\{\frac{2k-l\vartheta}{m+l}\operatorname{cs}h\vartheta+\operatorname{sn}h\vartheta-\frac{l}{m+l}\operatorname{sn}h\vartheta\right\} \\ &\quad+\frac{a(m+l)\left\{\frac{2k-l\vartheta}{m+l}\operatorname{sn}h\vartheta+\operatorname{cs}h\vartheta\right\}\operatorname{sn}h\vartheta}{2(\operatorname{cs}h\vartheta-\operatorname{cs}\varphi)}, \quad (19) \\ q &= \frac{-a(m+l)\left\{\frac{2k-l\vartheta}{m+l}\operatorname{sn}h\vartheta+\operatorname{cs}h\vartheta\right\}\operatorname{sn}\varphi}{2(\operatorname{cs}h\vartheta-\operatorname{cs}\varphi)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что величина q обращается въ нуль при $\vartheta=\vartheta_1$ и $\vartheta=\vartheta_2$; что же касается w, то при этихъ значеніяхъ она не зависитъ отъ φ, такъ какъ второй членъ первой изъ формулы (19) обращается при нихъ въ нуль. Если теперь назовемъ чрезъ w_1 и w_2 скорости на окружностяхъ нашихъ вращающихся цилиндровъ $AMBN$ и $A'M'B'N'$ и примемъ коэффиціентъ внѣшняго тренія неизмѣримо большимъ коэффиціента внутренняго, то для удовлетворенія всѣмъ граничнымъ условіямъ остается только положить:

$$w_1 = \frac{a(m+l)}{2} \operatorname{sn} h\vartheta_1 \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn} h^2 \vartheta_1} + \frac{\operatorname{ctg} h\vartheta_2 - \operatorname{ctg} h\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right\},$$

$$w_2 = \frac{a(m+l)}{2} \operatorname{sn} h\vartheta_2 \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn} h^2 \vartheta_2} + \frac{\operatorname{ctg} h\vartheta_2 - \operatorname{ctg} h\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right\}. \tag{20}$$

Такъ какъ изъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ m и l вслѣдствіе формулы (17) произвольнымъ остается только одно, то изъ двухъ скоростей w_1 и w_2 мы можемъ принять одну произвольною, но ее нельзя положить равною нулю.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію силъ дѣйствія жидкости на внутренній цилиндръ и замѣнимъ ихъ нѣкоторою силою P, проходящею чрезъ точку C', и парою съ моментомъ L, причемъ ту и другую относимъ къ единицѣ длины цилиндра. Понятно, что на внѣшній цилиндръ жидкость будетъ дѣйствовать съ противоположною силою и парою. Назовемъ чрезъ N и T нормальную и тангенціальную составляющую силы дѣйствія жидкости на элементъ поверхности внутренняго цилиндра, отнесенныя къ единицѣ площади. Силу N будемъ считать положительной по направленію къ центру цилиндра, а T — по направленію движенія часовой стрѣлки. По извѣстнымъ формуламъ найдемъ:

$$N = p - 2\mu e, \quad T = 2\mu\sigma, \tag{21}$$

гдѣ e есть коэффиціентъ удлиненія по направленію радіуса внутренняго цилиндра, а σ есть коэффиціентъ скошенія прямаго угла между этимъ радіусомъ и касательною къ кругу $A'M'B'N'$, направленною по движенію часовой стрѣлки.

Такъ какъ скорость w на поверхности внутренняго цилиндра постоянна, то линія тока, безконечно близкая кругу $A'M'B'N'$, будетъ представлять концентрическій съ нимъ кругъ, и потому

$e=0$. Что же касается σ, то простое геометрическое соображеніе показываетъ[1], что

$$2\sigma = \frac{w_2}{\varrho_2} + \left(\mathrm{H}\frac{dw}{d\vartheta}\right)_2,$$

гдѣ ϱ_2 радіусъ внутренняго цилиндра, а значекъ (2) во второмъ членѣ показываетъ, что надо положить $\vartheta = \vartheta_2$. Пользуясь формулой (4) и (19) найдемъ:

$$2\sigma = \frac{w_2 \operatorname{sn} h\vartheta_2}{a} + l \operatorname{cs} h\vartheta_2 (\operatorname{cs} h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi) - \frac{w_2 \operatorname{sn} h\vartheta_2}{a}.$$

Подставляемъ въ формулы (21) найденныя значенія e и σ, а также величину p изъ формулы (10):

$$\left.\begin{aligned} N &= n\mu - l\mu \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h\vartheta_2, \\ T &= \mu l \operatorname{cs} h\vartheta_2 (\operatorname{cs} h\vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Теперь уже легко опредѣлить P и L. Такъ какъ для точекъ цилиндра, имѣющихъ координаты φ и $2\pi - \varphi$, перемѣнныя части силы N равны по величинѣ, но противоположны по знаку, а перемѣнныя части силы T равны и по величинѣ и по знаку, то сила P будетъ параллельна оси OY. Если условимся эту силу считать положительной вверхъ на фиг. 1, то

$$P = -l\mu a \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sn} h\vartheta_2 \operatorname{sn}\varphi \frac{dy}{d\vartheta} - \operatorname{cs} h\vartheta_2 \operatorname{cs}\varphi \frac{dy}{d\varphi} \right) d\varphi$$

или по формуламъ (6)

---

[1] Смотр. сочиненіе автора «О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородною капельною жидкостью». Журналъ Русскаго физико-химическаго общества, Т. XVII, стр. 254.

$$P = l\mu a \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sn} h^2 \vartheta_2 \operatorname{sn}^2\varphi + \operatorname{cs} h^2 \vartheta_2 \operatorname{cs}^2\varphi - \operatorname{cs} h \vartheta_2 \operatorname{cs}\varphi}{(\operatorname{cs} h \vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi)^2} d\varphi$$

$$= 2l\mu a \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\operatorname{cs} h \vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi} + 2l\mu \int_0^{\pi} \frac{a(\operatorname{cs}\varphi \operatorname{cs} h \vartheta_2 - 1)}{(\operatorname{cs} h \vartheta_2 - \operatorname{cs}\varphi)^2} d\varphi .$$

Подъинтегральная функція послѣдняго интеграла, какъ видно изъ формулы (6), есть dy и потому этотъ интегралъ между данными предѣлами обращается въ нуль; первый же интегралъ легко берется, и мы получаемъ:

$$P = \frac{4l\mu a}{\operatorname{sn} h \vartheta_2} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\operatorname{cs} h \vartheta_2 + 1}{\operatorname{cs} h \vartheta_2 - 1}} . \qquad (23)$$

Моментъ L равнодѣйствующей пары по второй формулѣ (22) найдется весьма легко:

$$\frac{L}{\rho_2} = 2\pi\mu l a \operatorname{cs} h \vartheta_2 . \qquad (24)$$

Мы видимъ, что P и L будутъ положительны, если l положителенъ, а это на основаніи формулъ (17) и (20) имѣетъ мѣсто, когда w_2 положителенъ, т. е. внутренній цилиндръ вращается противъ часовой стрѣлки.

§ 4. Приложимъ найденное рѣшеніе къ изслѣдованію вращенія шипа $A'M'B'N'$ въ подшипникѣ $AMBN$, предполагая, что первый вращается противъ часовой стрѣлки, а второй съ такою же скоростью вращается въ обратную сторону. Принимая разность $\vartheta_2 - \vartheta_1$ весьма малою, поставимъ въ первую формулу (17) и вторую формулу (20)

$$\operatorname{ctg} h \vartheta_1 = \operatorname{ctg} h(\vartheta_2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1)) = \operatorname{ctg} h \vartheta_2 +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sn} h^2 \vartheta_2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{\operatorname{cs} h \vartheta_2}{\operatorname{sn} h^3 \vartheta_2} (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + \ldots .$$

найдемъ:

$$\frac{l}{m+l}=\frac{1}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2},\quad w_2=\frac{a(m+l)}{2}\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2}(\vartheta_2-\vartheta_1),$$

откуда

$$w_2=\frac{al}{2}\operatorname{cs}h\vartheta_2(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Исключимъ отсюда $\vartheta_2-\vartheta_1$ съ помощію формулы (4), изъ которой слѣдуетъ, что

$$\Delta\varrho=\varrho_1-\varrho_2=a\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2}{\operatorname{sn}h^2\vartheta_2}(\vartheta_2-\vartheta_1)$$

или

$$a\Delta\varrho=\varrho^2{}_2\operatorname{cs}h\vartheta_2(\vartheta_2-\vartheta_1);$$

получимъ:

$$w_2=\frac{a^2\Delta\rho l}{2\rho_2{}^2},$$

такъ что

$$l=\frac{2\rho_2{}^2w_2}{a^2\Delta\rho}.$$

Подставляемъ эту величину l въ формулу (23) и формулу (24), причемъ первую преобразуемъ по формулѣ (4):

$$P=\frac{8\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\operatorname{cs}h\vartheta_2+1}{\operatorname{cs}h\vartheta_2-1}},$$

$$\frac{L}{\rho_2}=\frac{4\pi\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho_2}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}\operatorname{cs}h\vartheta_2. \tag{25}$$

Сила P, направленная по вертикальной линіи снизу вверхъ, уравновѣситъ силу давленія шипа на подшипникъ, которой мы припишемъ противоположное направленіе. Принимая эту силу весьма большою сравнительно съ силою тренія, должны будемъ считать дробь $\frac{a}{\rho_2}$ за очень малую величину, а это по формулѣ (4) показываетъ, что параметръ ϑ_2 весьма малъ.

На основаніи этого замѣчанія найденныя формулы могутъ быть представлены въ слѣдующемъ простомъ видѣ:

$$P = \frac{4\pi\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho_2}\right)^2\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}, \quad \frac{L}{\rho_2} = \frac{4\pi\mu w_2}{\left(\frac{a}{\rho_2}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)}. \qquad (26)$$

Если исключимъ изъ второй формулы $\frac{a}{\rho_2}$ съ помощью первой, то найдемъ

$$\frac{L}{\rho_2} = 2\sqrt{\frac{\pi\mu w_2 P}{\frac{\Delta\rho}{\rho_2}}}. \qquad (27)$$

Легко указать значеніе дроби

$$\frac{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2 + 1}{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2 - 1},$$

фигурирующей въ формулѣ (25). Если по формулѣ (5) составить $\frac{dx}{d\vartheta}$ и взять отрицательное отношеніе этихъ производныхъ для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, то найдемъ для нашего смазывающаго слоя отношеніе

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2 + 1}{\operatorname{cs}h\,\vartheta_2 - 1}.$$

Это отношеніе при очень маломъ ϑ_2 весьма велико, что показываетъ намъ, что шипъ почти прикасается къ подшипнику въ точкѣ B.

§ 5. Какъ второй примѣръ разсмотримъ случай $\vartheta_1 = 0$. Для этого сначала подставимъ величину $(m+l)$ изъ первой формулы (17) въ формулы (20):

$$w_1 = -\frac{al}{2}\left\{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\operatorname{sn} h\,\vartheta_1(\operatorname{ctg} h\,\vartheta_1 - \operatorname{ctg} h\,\vartheta_2)} - \operatorname{sn} h\,\vartheta_1\right\},$$

$$w_1 = \frac{al}{2}\left\{\operatorname{sn} h\,\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\operatorname{sn} h\,\vartheta_2(\operatorname{ctg} h\,\vartheta_1 - \operatorname{ctg} h\,\vartheta_2)}\right\};$$

потомъ слѣлаемъ положеніе $\vartheta_1 = 0$:

$$w_1 = -\frac{al\,\vartheta_2}{2},$$

$$w_2 = \frac{al \operatorname{sn} h\,\vartheta_2}{2},$$

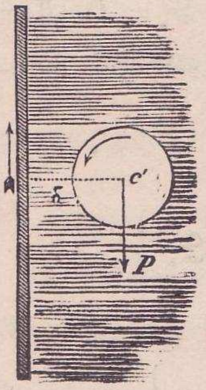
Опредѣляемъ изъ второй формулы l и подставляемъ его величину въ первую формулу, а также въ формулы (23) и (24):

$$w_1 = -\frac{\vartheta_2}{\operatorname{sn} h\,\vartheta_2}\,w_2 \tag{28}$$

$$P = \frac{8\mu w_2}{\operatorname{sn} h^2\,\vartheta_2} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\operatorname{cs} h\,\vartheta_2 + 1}{\operatorname{cs} h\,\vartheta_2 - 1}} \tag{29}$$

$$\frac{L}{\varrho_2} = 4\pi\mu w_2 \operatorname{ctg} h\,\vartheta_2. \tag{30}$$

Замѣтивъ, что при $\vartheta_1 = 0$, кругъ $AMBN$ на фиг. 1-й обращается въ ось OY, находимъ, что полученныя формулы даютъ намъ слѣдующій интересный случай движенія вязкой жид-



кости. Имѣемъ (фиг. 2) тяжелый горизонтальный цилиндръ, который, вращаясь въ вязкой жидкости со скоростью w_2 противъ часовой стрѣлки, помѣщенъ передъ вертикальною пластинкой, бѣгущею снизу вверхъ со скоростью w_1. Если вѣсъ P цилиндра въ жидкости и скорость w_1 опредѣляются по формуламъ (29) и (28), гдѣ ϑ_2 по радіусу цилиндра ϱ_2 и разстоянію δ_2 его оси отъ пластинки (на основаніи формулы (4)) выражается чрезъ

$$\operatorname{cs}h\vartheta_2 = \frac{\delta_2}{\varrho_2},$$

то ось цилиндра будетъ неподвижна; моментъ же $-L$ пары, вращающій цилиндръ, выразится по формулѣ (30). Сообщивъ всей системѣ внизъ поступательное движеніе со скоростью w_1, будемъ имѣть тяжелый цилиндръ, который, вращаясь передъ неподвижною стѣной, опускается равномѣрно внизъ.

ОБЪ ИНТЕГРИРУЮЩЕМЪ

МНОЖИТЕЛѢ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. С. Флорова.

Въ составъ перваго тома «Математическаго Сборника» входятъ два мемуара, изъ которыхъ одинъ цѣликомъ, а другой отчасти посвящаются обнаруженію взаимной связи между даннымъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ и тѣмъ, посредствомъ котораго опредѣляется его интегрирующій множитель. Одинъ изъ этихъ мемуаровъ принадлежитъ Юрьеву, другой написанъ Урусовымъ. Въ предлагаемой замѣткѣ читатель найдетъ упрощеніе анализа поименованныхъ авторовъ и приложеніе этого анализа къ вычисленію интеграла линейнаго уравненія съ правою частью по интегралу того-же уравненія безъ правой части.

Пусть уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n}+\alpha_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots.+\alpha_{n-1}\frac{du}{dx}+\alpha_n u=\beta \qquad (1)$$

будетъ даннымъ. Если обѣ его части умножимъ на vdx и проинтегрируемъ* результатъ, то, положивъ

$$\frac{d^n v}{dx^n}-\frac{d^{n-1}\alpha_1 v}{dx^{n-1}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d\alpha_{n-1}v}{dx}+(-1)^n\alpha_n v=0, \quad (2)$$

* Эту мысль заимствуемъ изъ сочиненія академика *Имшенецкаго* — «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера...».

получимъ

$$p_0 u^{n-1} + p_1 u^{n-2} + \ldots + p_{n-1} u = \int \beta v dx + \text{const},$$

гдѣ p_i означаетъ линейную функцію количествъ

$$v,\ v',\ v'',\ldots\ldots v^i.$$

Такъ какъ порядокъ предыдущаго уравненія относительно u есть $n-1$, то функція v, опредѣляемая условіемъ (2), есть интегрирующій множитель уравненія (1). Пусть n значеній этого множителя будутъ

$$v_1,\ v_2,\ldots\ldots v_n.$$

Обозначивъ черезъ $p_i^{(r)}$ ту функцію, въ которую обращается p_i посредствомъ замѣны v на v_r, найдемъ

$$p_0^{(r)} u^{n-1} + p_1^{(r)} u^{n-2} + \ldots + p_{n-1}^{(r)} u = \int \beta v_r dx + C_r.$$

Здѣсь C_r означаетъ постоянную произвольную, которую для краткости письма можно разумѣть въ интегралѣ $\int \beta v_r dx$. Сообщивъ въ предыдущемъ равенствѣ числу r всѣ значенія отъ единицы до n, получимъ n уравненій вполнѣ достаточныхъ для исключенія $n-1$ функцій

$$u',\ u''\ldots\ldots u^{n-1}.$$

Произведя это исключеніе на самомъ дѣлѣ и принявъ во вниманіе отмѣченную выше связь между p и v, найдемъ

$$\begin{vmatrix} v_1, & v'_1, & \ldots\ldots uv_1^{n-1} - \int \beta v_1 dx \\ v_2, & v'_2, & \ldots\ldots uv_2^{n-1} - \int \beta v_2 dx \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n, & v'_n, & \ldots\ldots uv_n^{n-1} - \int \beta v_n dx \end{vmatrix} = 0.$$

Такъ выражается полный интегралъ уравненія (1) посредствомъ n значеній его интегрирующаго множителя.

Если положимъ $\beta = 0$ и если частные интегралы уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{du}{dx} + \alpha_n u = 0 \qquad (3)$$

назовемъ черезъ

$$u_1,\ u_2, \ldots \ldots u_n,$$

то полный его интегралъ можно будетъ выразить двояко: съ одной стороны, посредствомъ нумерованныхъ u, а съ другой посредствомъ нумерованныхъ v. Сравнивъ эти двѣ формы полнаго интеграла уравненія (3) и положивъ

$$\omega = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & \ldots v_n \\ v'_1, & v'_2, & \ldots v'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{\,n-1}, & v_2^{\,n-1}, & \ldots v_n^{\,n-1} \end{vmatrix},$$

получимъ

$$(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n)\,\omega =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & \ldots C_n \\ v_1, & v_2, & \ldots v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{\,n-2}, & v_2^{\,n-2}, & \ldots v_n^{\,n-2} \end{vmatrix}.$$

Это равенство, путемъ сравненія коэффиціентовъ при постоянныхъ произвольныхъ помѣченныхъ одинаковыми нумерами, даетъ возможность вычислить частные интегралы уравненія (3) въ частныхъ интегралахъ уравненія (2). Имъ же можно воспользоваться и для вычисленія нумерованныхъ v посредствомъ нумерованныхъ u. Въ самомъ дѣлѣ, написавъ v^i вмѣсто C, найдемъ:

$$u_1 v_1^{\,i} + u_2 v_2^{\,i} + \ldots + u_n v_n^{\,i} = 0,$$
$$u_1 v_1^{\,n-1} + u_2 v_2^{\,n-1} + \ldots + u_n v_n^{\,n-1} = 1,$$

гдѣ i любое число ряда $0, 1, 2 \dots n-2$. Изъ этихъ равенствъ путемъ послѣдовательнаго дифференцированія легко получить:

$$u_1^r v_1^i + u_2^r v_2^i + \dots + u_n^r v_n^i = 0,$$

$$u_1^k v_1^{n-k-1} + u_2^k v_2^{n-k-1} + \dots + u_3^k v_3^{n-k-1} = (-1)^k.$$

Здѣсь r и i суть цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія неравенству $r + i < n - 1$, а k любое число ряда $0, 1, 2 \dots$ $\dots n-1$. Изъ предыдущаго вытекаетъ существованіе слѣдующей системы n уравненій:

$$v_1 u_1^i + v_2 u_2^i + \dots + v_n u_n^i = 0,$$
$$v_1 u_1^{n-1} + v_2 u_2^{n-1} + \dots v_n u_n^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Разрѣшивъ эти уравненія относительно функцій

$$v_1,\ v_2, \dots v_n$$

и положивъ

$$\vartheta = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & \dots u_n \\ u'_1, & u'_2, & \dots u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{n-1}, & u_2^{n-1}, & \dots u_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

получимъ

$$(C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n)\vartheta =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & \dots C_n \\ u_1, & u_2, & \dots u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{n-2}, & u_2^{n-2}, & \dots u_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

гдѣ количества

$$C_1, C_2, \dots C_n$$

совершенно произвольны.

Такимъ образомъ, взаимная связь между уравненіями (2) и (3) опредѣлена и главная цѣль, ради которой эта замѣтка составлена, достигнута.

Остается сказать, что если въ соотношеніе

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n +$$
$$+ u_1 \int \beta v_1 \, dx + u_2 \int \beta v_2 \, dx + \dots + u_n \int \beta v_n \, dx,$$

выше найденное, поставимъ на мѣсто нумерованныхъ v ихъ выраженія въ нумерованныхъ u, то получимъ формулу, выражающую полный интегралъ уравненія (1) въ частныхъ интегралахъ уравненія (3); это — та самая формула, которая обыкновенно выводится путемъ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ.

Примѣчаніе 1. Порядокъ уравненія (1) можно понизить на столько единицъ, сколько извѣстно значеній его интегрирующаго множителя.

Примѣчаніе 2. Уравненія (2) и (3) взаимны между собою въ томъ отношеніи, что интегралъ одного изъ нихъ есть интегрирующій множитель другого.

Примѣчаніе 3. Если детерминанты, обозначенные черезъ ω и ϑ, перемножимъ между собою, то найдемъ

$$\omega\vartheta = (-1)^{n-1},$$

что согласно съ теоремой Ліувилля:

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \alpha_1 \vartheta = 0.$$

Протоколъ засѣданія 27 февраля.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, В. Л. Кирпичевъ, А. В. Гречаниновъ, Н. Д. Пильчиковъ, М. С. Косенко, А. А. Клюшниковъ, В. П. Алексѣевскій, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Докладъ статьи г. *Букрѣева* (изъ Кіева), прочитанный М. А. Тихомандрицкимъ.

2. Сообщеніе г. *Хазина*, прочитанное авторомъ, подъ заглавіемъ — «О новомъ методѣ изслѣдованія вопроса о рѣшеніи уравненій въ радикалахъ».

3. Сообщеніе *А. П. Грузинцева* — «О minimum'ѣ отклоненія луча призмой», прочитанное авторомъ.

4. Докладъ г. предсѣдателя о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Кіевскія университетскія извѣстія. № 12, 1886 г.

2) Физико-математическія науки. Т. II, №№ 5 и 6.

3) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. № 15, 1887.

О MINIMUM-Ѣ

ОТКЛОНЕНІЯ СВѢТОВАГО ЛУЧА ПРИЗМОЮ.

А. П. Грузинцева.

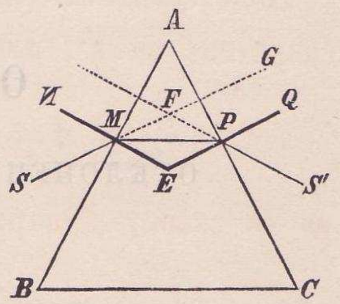
Существуетъ много элементарныхъ способовъ вывода условій minimum-а отклоненій свѣтоваго луча призмой. Всѣ эти способы могутъ быть раздѣлены на два рода: 1) пріемы геометрическіе и 2) пріемы аналитическіе.

Предложенные до сихъ поръ геометрическіе пріемы вывода условій для наименьшаго отклоненія луча, при всей своей точности, для изучающихъ начальную физику трудны, такъ-какъ требуютъ предварительнаго изученія хода преломленныхъ лучей въ прозрачныхъ срединахъ при помощи нѣкоторыхъ геометрическихъ построеній, которыя обыкновенно не излагаются въ начальныхъ курсахъ. Остаются такимъ образомъ аналитическіе способы; изъ нихъ самыми лучшими считаются способы Барри и Эйзенлора въ той или другой редакціи, но, какъ будетъ ниже показано, эти пріемы заключаютъ въ себѣ одинъ пунктъ, который для элементарнаго изложенія крайне неудобенъ по своей трудности. Заинтересованный этимъ вопросомъ, я пересмотрѣлъ, на сколько былъ въ состояніи, всѣ извѣстные способы рѣшенія нашего вопроса и пришелъ къ заключенію, что изъ всѣхъ аналитическихъ элементарныхъ способовъ самый лучшій это — Шелльбаха, данный имъ въ 1881 году[1].

[1] Анналы *Видемана,* т. XIV, стр. 367.

Единственный недостатокъ его — нѣкоторая длиннота, но за то онъ вполнѣ убѣдителенъ для ученика.

Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ пріемъ, изложенный со всѣми подробностями.



Пусть ABC будетъ главное сѣченіе призмы; $SMPS'$ ходъ луча; NE и QE перпендикуляры къ передней и задней гранямъ призмы. Обозначимъ буквами i и i' углы вхожденія и выхожденія луча; r и r' внутренніе углы (преломленія на 1-й грани и паденія на 2-й); преломляющій уголъ призмы A и отклоненіе луча или уголъ GFP буквой δ, тогда, какъ извѣстно, имѣемъ:

$$r + r' = A$$
$$\delta = (i + i') - A.$$

Такъ-какъ A количество постоянное, то, слѣдовательно, δ будетъ minimum, когда $(i + i')$ — minimum. Такимъ образомъ задача объ отысканіи minimum-а величины δ сводится къ вопросу объ отысканіи такихъ значеній угловъ i и i', при которыхъ ихъ сумма $(i + i')$ пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Эту послѣднюю задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ треугольникъ MPE; онъ даетъ по извѣстной теоремѣ тригонометріи

$$MP^2 = ME^2 + PE^2 + 2ME.\,PE.\,\mathrm{cs}\,A \qquad (1)$$

такъ-какъ

$$\angle MEP = 180^\circ - A.$$

Далѣе, на основаніи теоремы синусовъ имѣемъ:

$$\frac{MP}{\mathrm{sn}\,A} = \frac{ME}{\mathrm{sn}\,r'} = \frac{PE}{\mathrm{sn}\,r};$$

обозначивъ на-время это общее отношеніе буквой k, получимъ:

$$MP = k\,\mathrm{sn}\,A,\quad ME = k\,\mathrm{sn}\,r',\quad PE = k\,\mathrm{sn}\,r.$$

Подставивъ значенія MP, ME, PE въ равенство (1) и сокративъ на k^2, получимъ:

$$\mathrm{sn}^2 A = \mathrm{sn}^2 r + \mathrm{sn}^2 r' + 2\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,r'\,\mathrm{cs}\,A;$$

но по закону Декарта имѣемъ:

$$\mathrm{sn}\,r = \frac{\mathrm{sn}\,i}{n},\quad \mathrm{sn}\,r' = \frac{\mathrm{sn}\,i'}{n},$$

поэтому предъидущее равенство даетъ:

$$n^2\,\mathrm{sn}^2 A = \mathrm{sn}^2 i + \mathrm{sn}^2 i' + 2\,\mathrm{sn}\,i\,\mathrm{sn}\,i'\,\mathrm{cs}\,A. \qquad (2)$$

Изъ тригонометріи мы знаемъ, что

$$\mathrm{sn}^2 i = \frac{1-\mathrm{cs}\,2i}{2},\quad \mathrm{sn}^2 i' = \frac{1-\mathrm{cs}\,2i'}{2}$$

$$2\,\mathrm{sn}\,i\,\mathrm{sn}\,i' = \mathrm{cs}(i-i')\,\mathrm{cs}(i+i').$$

Подставляя все это въ равенство (2), имѣемъ, по замѣнѣ суммы

$$\mathrm{cs}\,2i + \mathrm{cs}\,2i'$$

ея значеніемъ

$$2\,\mathrm{cs}(i+i')\,\mathrm{cs}(i-i'),$$

слѣдующее:

$$n^2\mathrm{sn}^2 A = 1 - \mathrm{cs}(i+i')\,\mathrm{cs}(i-i') + [\mathrm{cs}(i-i') - \mathrm{cs}(i+i')]\,\mathrm{cs}\,A.$$

Опредѣлимъ отсюда $\mathrm{cs}\,(i+i')$; найдемъ:

$$\mathrm{cs}(i+i') = \frac{1 - n^2\mathrm{sn}^2 A + \mathrm{cs}(i-i')\,\mathrm{cs}\,A}{\mathrm{cs}\,A + \mathrm{cs}(i-i')}.$$

Но

$$1=\operatorname{sn}^2 A+\operatorname{cs}^2 A;$$

подставляя вмѣсто единицы это ея значеніе, получимъ по сокращеніи:

$$\operatorname{cs}(i+i')=\operatorname{cs}A-\frac{(n^2-1)\operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs}A+\operatorname{cs}(i-i')}. \qquad (3)$$

Это соотношеніе и рѣшаетъ вопросъ. Въ правой его части только $\operatorname{cs}(i-i')$ перемѣнная величина, всѣ остальныя постоянныя, поэтому очень легко изслѣдовать эту формулу.

При измѣненіи угловъ i и i' величина $\operatorname{cs}(i-i')$ тоже мѣняется; она достигаетъ, какъ извѣстно изъ тригонометріи, своего наибольшаго значенія, именно единицы, когда $i-i'=0$, но тогда дробь

$$\frac{(n^2-1)\operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs}A+\operatorname{cs}(i-i')}$$

пріобрѣтетъ свое наименьшее значеніе, а вся разность

$$\operatorname{cs}A-\frac{(n^2-1)\operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs}A+\operatorname{cs}(i-i')}$$

пріобрѣтетъ наибольшее значеніе, ибо вычитаемое—положительное количество; но эта разность равна $\operatorname{cs}(i+i')$, слѣдовательно при $i-i'=0$ величина $\operatorname{cs}(i+i')$ пріобрѣтаетъ свое наибольшее значеніе, а значитъ, уголъ $(i+i')$—наименьшее.

Итакъ, при $i-i'=0$ или, что то-же, при

$$i=i'$$

сумма $(i+i')$ дѣлается наименьшею и слѣдовательно

$$\delta=(i+i')-A$$

тоже становится наименьшею, ч. и т. д.

Формула (3) даетъ возможность знать это наименьшее значеніе; оно будетъ опредѣляться изъ формулы:

$$\mathrm{cs}(\delta+A)=\mathrm{cs}A-\frac{(n^2-1)\,\mathrm{sn}^2 A}{1+\mathrm{cs}A}.$$

Вотъ доказательство Шелльбаха.

Въ заключеніе замѣтимъ, что способы Барри и Эйзенлора приводятъ къ формуламъ:

$$\mathrm{cs}\,\frac{1}{2}(\delta+A)=n\,\mathrm{cs}\frac{A}{2}\cdot\frac{\mathrm{sn}\frac{1}{2}(r-r')}{\mathrm{sn}\frac{1}{2}(i-i')}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\delta+A)=\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(i-i')}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(r-r')}.$$

При условіи $i=i'$ также будетъ $r=r'$, слѣдовательно правыя части обѣихъ этихъ формулъ обращаются въ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, раскрытіе котораго потребуетъ добавочнаго изслѣдованія.

Протоколъ засѣданія 30 апрѣля.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, В. И. Альбицкій, В. Л. Кирпичевъ, А. М. Ляпуновъ, А. В. Гречаниновъ, А. А. Клюшниковъ, М. Ѳ. Ковальскій, М. С. Косенко, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. А. М. Ляпуновъ изложилъ содержаніе статьи проф. *Жуковскаго* — «О движеніи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями».

2. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ и журналовъ:

1) Mathesis 1887 г. №№ 2, 3 и 4.
2) Кіевскія университетскія извѣстія за 1887 г. №№ 1, 2.
3) Jornal de sciencias math. Vol. VII, № 4, 1886 г.
4) American Journal of Math. Vol. IX, № 3, 1887 г.
5) Протоколы засѣданій казанскаго математическаго общества №№ 56 — 61.
6) Proceedings of the Canadian Institute. Toronto, Nov. 1886.

7) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. №№ 1 и 4, за 1887 г.

8) Bulletin de la société math. de France. T. XIV, № 5; T. XV, № 2.

9) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики за 1887 г. №№ 16—19.

10) *Bredichin, Th.* Sur les grandes comètes de 1886 an.

11) *Порѣцкій П. С.* Рѣшеніе общей задачи теоріи вѣроятностей при помощи математической логики. 3 экземпляра.

Послѣднія двѣ книги присланы авторами библіотекѣ математическаго общества.