

Кільця формальних степеневих рядів і кільце многочленів

Лекції для студентів ММФ ХНУ.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Щугайло О.М

Травень — 2015

1 Визначення рядів, многочленів і дій з ними

Означення 1.1 *Формальним степеневим рядом від змінної x з коефіцієнтами із кільця R (або, іншими словами, над кільцем R , над кільцем коефіцієнтів R) є вираз вигляду*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad a_i \in R, \quad i = 0, 1, \dots$$

Числа $a_i \in R$ називають коефіцієнтами ряду. Коефіцієнт a_0 називають вільним членом. За домовленість вважається $x^0 = 1$, $a_0x^0 = a_0$.

Два ряди збігаються тоді і тільки тоді (за визначенням), коли у них однакові відповідні коефіцієнти.

Доданки ряду з нульовими коефіцієнтами можна не писати. Якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю, то ряд позначають символом 0.

Приклад 1.1 *Запис (вираз)*

$$2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$$

є формальним степеневим рядом з вільним членом 2. Коефіцієнтом при x^{24} є 26.

Приклад 1.2 *Запис (вираз)*

$$2 + 3x + 4x^2 + 0x^3 + 0x^4 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, \quad a_n = 0 \text{ при } n \geq 3$$

є формальним степеневим рядом з вільним членом 2 і лише трьома ненульовими доданками.

Означення 1.2 Поліномами (чи многочленами) називають формальні степеневі ряди, що мають лише скінченну кількість ненульових доданків (коефіцієнтів).

Многочлен $f(x)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in R, \quad a_n \neq 0$$

має вільний член a_0 , старший член a_nx^n , старший коефіцієнт $a_n \neq 0$ і степінь $\deg f = n$. Степенем нульового многочлена вважають $-\infty$ — так зручно у багатьох випадках.

Степенями поліномів $x, x^2 + 1, -5 + 2x^{10}$, відповідно, є числа 1, 2, 10.

Доданки $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ називають одночленами або мономами.

Приклад 1.3 Вираз

$$1 + 5x + 25x^2 + 125x^3 + \dots + 5^n x^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} 5^i x^i$$

є степеневим рядом над кільцем цілих чисел з вільним членом 1. Цей ряд не є многочленом, оскільки в ньому нескінченно багато ненульових доданків. $125x^3$ є одним із одночленів цього ряду.

Ряд

$$x^2 - 7x^3 - 12x^7$$

є многочленом над кільцем цілих чисел степеня 7 з нульовим вільним членом, старшим членом (мономом, одночленом, доданком) $-12x^7$ і старшим коефіцієнтом -12.

2 Дії з рядами та многочленами

На множині формальних степеневих рядів над кільцем визначені операції додавання та множення наступним чином:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)x^i, \quad (1)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k. \quad (2)$$

Теорема 2.1 (про властивості додавання та множення рядів)

Нехай ϵ комутативне кільце з одиницею R . Формальні степеневі ряди над R з операціями додавання та множення, що визначені за допомогою (1), (2) утворюють комутативне кільце з одиницею. Многочлени утворюють підкільце кільця рядів.

Доведення. В цьому переконуємося прямою перевіркою. Отже, потрібно уміти перевіряти асоціативність множення та додавання рядів, комутативність додавання та множення, потрібно уміти перевіряти, що ряд 0 є нулем (нейтральним елементом за додаванням), ряд 1 є одиницею, нейтральним елементом за множенням, потрібно уміти доводити існування протилежного ряду. Також потрібно уміти доводити, що так визначені додавання та множення рядів підкоряються дистрибутивному закону. При доведенні потрібно використовувати виконання відповідних аксіом в кільці коефіцієнтів.

На іспиті потрібно вміти додати усі аксіоми кільця в кільці рядів. На лекції наводимо приклади перевірки тільки кількох.

Перевіряємо аксіому існування ряду, що протилежний даному.

Беремо довільний ряд $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ і розглядаємо ряд $g = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_i) x^i$. Елементи $-a_i$ існують в R тому, що R — кільце, а в кільці для кожного елемента є протилежний. Далі додаємо

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + (-a_i)) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} 0 x^i = 0.$$

Отже $g = -f$ і доведення існування протилежного ряду ми довели (конструктивно, ми точно вказали цей протилежний ряд).

Перевіряємо асоціативність множення рядів. Нехай є три ряди

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad h = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

Потрібно довести рівність $(fg)h = f(gh)$. Позначимо $fg = U$, $gh = V$, $S = Uh$, $T = fV$ і

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i, \quad V = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x^i, \quad S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i, \quad T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^i,$$

Два ряди збігаються тоді і тільки тоді, коли у них однакові коефіцієнти (за визначенням). Отже, нам потрібно довести рівність $T = S$ і ми це доведемо, коли перевіримо рівність $t_i = s_i$ для будь-якого $i = 0, 1, 2, \dots$

Беремо певне натуральне число чи 0, позначаємо його через i і обчислюємо (знаючи визначення множення рядів) коефіцієнти s_i, t_i .

$$s_i = \sum_{\varepsilon+\gamma=i} u_\varepsilon c_\gamma, \quad t_i = \sum_{\alpha+\delta=i} a_\alpha v_\delta.$$

Подібним чином

$$u_\varepsilon = \sum_{\alpha+\beta=\varepsilon} a_\alpha b_\beta, \quad v_\delta = \sum_{\beta+\gamma=\delta} b_\beta c_\gamma,$$

Тепер підставляємо значення u_ε та v_δ у вирази для s_i, t_i .

$$\begin{aligned} s_i &= \sum_{\varepsilon+\gamma=i} \left(\sum_{\alpha+\beta=\varepsilon} a_\alpha b_\beta \right) c_\gamma = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} (a_\alpha b_\beta) c_\gamma, \\ t_i &= \sum_{\alpha+\delta=i} a_\alpha \left(\sum_{\beta+\gamma=\delta} b_\beta c_\gamma \right) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} a_\alpha (b_\beta c_\gamma) \end{aligned}$$

Далі користуємося тим, що в кільці коефіцієнтів множення асоціативне і при будь-яких α, β, γ виконується рівність

$$(a_\alpha b_\beta) c_\gamma = a_\alpha (b_\beta c_\gamma).$$

Отже, всі доданки в сумі для s_i збігаються із відповідними доданками в сумі для t_i , суми збігаються і доведення рівності $s_i = t_i$ закінчене. Тому закінчене також доведення асоціативності множення рядів. ■

Приклад 2.1 Візьмемо ряди

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} x^i, \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i, \quad h = \sum_{i=0}^{\infty} (2i-3)x^i$$

і обчислимо f^2, fg, gh, fgh .

$$f^2 = (1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots) = 1+2x+3x^2+\dots = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i.$$

$$fh = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i, \quad \alpha_i = \sum_{p+q=i} (2p-3) =$$

$$= \sum_{p=0}^i (2p-3) = i(i+1)-3(i+1) = i^2-2i-3. \quad fg = \sum_{i=0}^{\infty} (i^2-2i-3)x^i.$$

$$gh = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i, \quad \beta_i = \sum_{p+q=i} (2p-3)(-1)^q =$$

$$= \sum_{p=0}^i (2p-3)(-1)^{i-p} = (-1)^i \sum_{p=0}^i (2p-3)(-1)^p = i+1-2(1+(-1)^i),$$

$$gh = \sum_{i=0}^{\infty} (i-1-(-1)^i \cdot 2)x^i.$$

$$fg = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i x^i, \quad \gamma_i = \sum_{p+q=i} (-1)^q = \frac{1+(-1)^i}{2}, \quad fg = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^i}{2} x^i.$$

$$f \cdot (gh) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i x^i, \quad \delta_i = \sum_{p+q=i} (p-1-2 \cdot (-1)^p) = \sum_{p=0}^i (p-1-2 \cdot (-1)^p).$$

Оскільки

$$\sum_{p=0}^i p = \frac{1}{2}i(i+1), \quad \sum_{p=0}^i (-1)^p = -1(i+1),$$

$$\sum_{p=0}^i (-2) \cdot (-1)^p = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ -2, & \text{якщо } i \text{ непарне,} \end{cases}$$

то

$$\delta_i = \frac{1}{2}i(i+1) - (i+1) - (1+(-1)^i),$$

тобто

$$f \cdot (gh) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i(i+1) - (i+1) - (1+(-1)^i) \right) x^i. \quad (3)$$

Для перевірки проведених обчислень підрахуємо δ_i при малих значеннях i — наприклад, при $i = 0, 1, 2$, двома способами. Один спосіб нам дає формула (3) для обчислення δ_i , а другий спосіб — це пряме перемноження рядів без використання знаків суми.

Отже за першим способом

$$\delta_0 = -3, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -2.$$

За другим способом

$$f = 1 + x + x^2 + \dots, \quad g = 1 - x + x^2 + \dots \quad h = -3 - x + x^2 + \dots$$

$$gh = -3 + 2x - x^2 + \dots \quad f(gh) = -3 - x - 2x^2 + \dots$$

Означення 2.1 Два елементи комутативного кільця з одиницею називаються взаємно оберненими (оберненими один до другого), якщо їх добуток дорівнює одиниці.

Деякі ряди в кільці рядів мають обернений ряд. Наприклад,

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots)(1 - x) = 1$$

і ряди $1 - x$ та $\sum_{i=0}^{\infty} x^n$ взаємно обернені.

Теорема 2.2 (про існування оберненого ряду) . Ряд має обернений тоді і тільки тоді, коли його вільний член має обернений в кільці коефіцієнтів.

Доведення. Нехай є ряд $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ з коефіцієнтами із кільця R : $a_i \in R$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Якщо ряд $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ обернений до ряду $f(x)$, тобто $f(x) \cdot g(x) = 1$, і, відповідно,

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\ &\dots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

то елементи a_0, b_0 взаємно обернені в кільці. Отже a_0 має обернений елемент в кільці коефіцієнтів.

Якщо ж елемент a_0 має обернений елемент в кільці коефіцієнтів, то виписана система рівнянь для знаходження коефіцієнтів ряду $g(x)$ має розв'язок і, відповідно, ряд має обернений.

Теорема доведена повністю. ■

Від рядів можна брати похідну.

Означення 2.2 Похідною від ряду $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ з коефіцієнтами із кільця R : $a_i \in R$, $i = 0, 1, 2, \dots$ називають ряд $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} (i+1) x^i$. Похідні більш високих порядків визначаються індуктивно.

Потрібно мати на увазі, що коли $a_n \in R$, і k — натуральне число, то під добутком $k \cdot a_n$ розуміють суму k доданків, кожен з яких дорівнює a_n . Тому $k \cdot a_n \in R$.

Приклад 2.2 Для прикладу візьмемо многочлени $f_1(x) = x + 2x^2 + x^5 + 2x^6 + x^7$, $f_2(x) = x^3$ над полем $\mathbb{Z}_3$. В полі $\mathbb{Z}_3$ $1+1+1 = 0$. Тому

$$f_1'(x) = 1 + 4x + 5x^4 + 12x^5 + 7x^6 = 1 + x + 2x^4 + x^6, \quad f_2' = 0.$$

Похідна від рядів має ті ж властивості, що і похідна від функції дійсного аргумента:

Теорема 2.3

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + g'f.$$

Доведення. Доведення здійснюється прямою перевіркою і лишається для самостійної роботи. ■

Кільце многочленів над кільцем R від змінної x будемо позначати $R[x]$. Кільце формальних степеневих рядів над кільцем R від змінної x будемо позначати $R[[x]]$.

Показчик

добуток
рядів, 3
додавання
рядів, 3
кільце
многочленів, 7
коефіцієнт
при степені змінної, 1
ряду, 1
многочлен, 2
ступінь, 2
множення
рядів, 5
моном, 2
одночлен, 2
поліном, 2
старший член, 2
ступінь, 2
вільний член, 2
ряд
формальний степеневий, 1
обернений до ряду, 6
протилежний, 3
сума
рядів, 3