ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9 1969

О РАВНОМЕРНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Б. Л. Голинский

ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция распределения $\sigma'(\theta)$ — неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Почти всюду существующую производную $\sigma'(\theta)$ обозначим через $p(\theta)$ и назовем плотностью распределения. Пусть

$$P_n(z) = \varkappa_n z^n + \ldots; \ \varkappa_n > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

многочлены, ортонормированные на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ относительно обложения $d\sigma(\theta)$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(e^{i\theta})\,\overline{P_m}(e^{i\theta})\,d\sigma(\theta) = \delta_{mn}. \tag{0.1}$$

Обозначим

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right), \quad a_n = \frac{1}{\varkappa_{n+1}} P_{n+1}(0), \quad y_n = \frac{P_n(z)}{\varkappa_n},$$

$$n = 0, 1, 2.$$

Известно (см. [1, стр 300]), что

$$\underset{\sim}{y}^*_{n+1}(z) = y_n^*(z) - a_n y_n(z), \ |a_n| < 1, \ n = 0, 1, 2. \tag{0.2}$$

Числа $\{a_n\}_0^\infty$ называют параметрами ортогональной системы $\{P_n(z)\}_0^\infty$. В отличие от многочленов $\{P_n(z)\}_0^\infty$, которые назовем многочленами первого рода, рассмотрим многочлены второго рода

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi C_0}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,[P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)]\,d\sigma(\theta) = \lambda_n z^n + \ldots,$$

$$\lambda_n, > 0, \ \overline{\overline{C_0}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a\sigma(\theta).$$

Известно, что $\lambda_{\overline{n}} = \varkappa_n$. Многочлены $\{Q_n(z)\}_0^\infty$ ортонормированы относительно обложения $ds(\theta)$. Функция распределения $s(\theta)$ аналогична функции $\sigma(\theta)$, $s'(\theta) = q(\theta)$. Многочлены $\{Q_n(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют соотношению (0.2) с заменой d_n на $-d_n$ (см. [2]). Известно, (см. [3, гл. II]), что условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \tag{0.3'}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln p(\theta)\,d\theta > -\infty \tag{0.3}$$

эквивалентны. Поэтому при условии (0.3) такому же условию удовлетворяет и функция $q(\theta)$.

При условии (0.3) можно построить регулярные и отличные от нуля в области $|z|<1$ функции типа Г. Сеге (см. [1, стр. 286])

$$\pi(z)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln p(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt\right\},$$

$$\lambda(z)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln q(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt\right\}.$$

Как известно (см. [3]), равномерно для $|z|\leqslant r<1$

$$\lim_{n\to\infty}P_n^*(z)=\pi(z),\ \lim_{n\to\infty}Q_n^*(z)=\chi(z);\ \chi(z)=\pi(z)F(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\varkappa_n=\varkappa=\pi(0);\quad F(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t). \tag{0.4}$$

Почти всюду в $[-\pi,\ \pi]$ существуют радиальные граничные значения

$$\lim_{r\to 1-0}\pi r\overline{\alpha}(re^{i\theta})=\pi(e^{i\theta})=\frac{1}{\sqrt{p(\theta)}}\exp\{i\gamma(\theta)\},$$

$$\gamma(\theta)=\arg\pi(e^{i\theta})=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}dt=\frac{1}{2}\tilde{f}(\theta), \tag{0.5}$$

где

$$f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{\theta t}{2}dt,\ f(t)=\ln p(t)$$

и интеграл понимается в смысле главного значения.

Соотношения (0.5) имеют место в точке непрерывности $\theta=\theta_0$ функции $f(\theta)$, если в ней существует $f(\theta_0)$.

Множество точек θ на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, где существуют одновременно радиальные граничные значения $\pi(e^{i\theta})$ и $F(e^{i\theta})$, обозначим через E. Множество точек существования положительной производной $\sigma(\theta)=p(\theta)$ обозначим через E_0. Если $\varphi_0(\theta)$ — характеристическая функция множества E_0, то через $\pi_0(\theta)$ обозначим $\pi_0(\theta)=\pi(e^{i\theta})\cdot\varphi_0(\theta)$.

Введем операторы (см. [3])

$$a_n(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\theta)e^{i\theta}\overline{P_n^*}(e^{i\theta})d\sigma(\theta),$$

$$b_n(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\theta)\overline{P_n}(e^{i\theta})d\sigma(\theta),\ f_0(\theta)=\frac{\pi_0(\theta)-\pi_0(\theta_0)}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}},$$

где интегралы в (0,6) понимаются в смысле главных значений.

Если функция распределения $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна на $[\alpha,\ \beta]\in[-\pi,\ \pi]$, то запишем $\sigma(\theta)\in AC(\alpha,\ \beta]$, если при этом $[\alpha,\ \beta]=[-\pi,\ \pi)$, то $p(\theta)$ называют весом.

Класс непрерывных на $[\alpha,\ \beta]$ функций обозначим через $C[\alpha,\ \beta]$. Под нормой $\|g\|_{[\alpha,\ \beta]}$ понимаем, как обычно,

$$\|g\|_{[\alpha,\ \beta]}=\operatorname*{Max}_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|g(x)|,$$

а модуль непрерывности

$$\omega(\delta,\ g)=\operatorname*{Max}_{0\leq h\leqslant\delta\leqslant\delta_0}\|g(t+h)-g(t)\|_{[\alpha',\ \beta']\subset[\alpha,\ \beta']},\quad \delta_0=\operatorname{Min}(\alpha'-\alpha,\quad \beta-\beta').$$

При $[\alpha, \beta] = [-\pi, \pi]$, $g(t+2\pi) = g(t)$, $g(-\pi) = g(\pi)$ пишем $\Omega(\delta, g)$. Под $\|\varphi\|_\nu^\sigma$ понимаем норму функции $\varphi(x) \in L_\nu^\sigma$:

$$\|\varphi\|_\nu^\sigma = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^\nu d\sigma(t)\right\}^\nu < \infty.$$

Если $d\sigma(t) = dt$, то пишем L_ν.

Задача о нахождении условий, при которых

$$\pi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} \pi(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\lim_{n\to\infty} P_n^*(re^{i\theta}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{r\to 1-0} P_n^*(re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta})$$

равномерно на всей окружности или на ее части (задача типа таубера), была впервые решена Г. Сеге, а впоследствии Я. Л. Геронимусом, Г. Фрайдом и др., применявшими тот же метод *для случая, когда функция распределения абсолютно непрерывна в* $[-\pi, \pi]$. Это было существенно в методе Г. Сегё, так как в нем многочлены, ортонормированные относительно веса $p(\theta)$, выражаются определенным образом через многочлены, ортонормированные относительно веса $\psi(\theta) = U_\nu^{-1}\left(\theta, \frac{1}{p}\right)$, где $U_\nu\left(\theta, \frac{1}{p}\right)$ — тригонометрические суммы ν-го порядка, осуществляющие равномерное приближение к функции $p^{-1}(\theta)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ с порядком наилучшего.

В настоящей работе применен **новый метод**, *основанный на представлении ортонормированных многочленов через операторы* $a_n(\theta)$, $b_n(\theta)$ *и функцию типа Сеге, зависящую только от плотности распределения.* Это позволяет получить условия (не рассматривавшиеся до сих пор) *одновременного существования равномерных предельных соотношений*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} | P_n^*(e^{i\theta}) - \pi(e^{i\theta})| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} r_n(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} | Q_n^*(e^{i\theta_0}) - \chi(e^{i\theta_0}) | = 0 \tag{!}$$

на дуге окружности $z = e^{i\theta_0}$, $\theta_0 \in [\alpha', \beta'] \in [\alpha\beta] \in [-\pi, \pi]$, *если функция распределения* $\sigma(\theta)$ *на всем отрезке* $[-\pi, \pi]$ *не абсолютно непрерывна,* удовлетворяет условию (0. 3), а на отрезке $[\alpha, \beta]: \sigma(\theta) \in AC$, $0 < p(\theta) \in C$ и $\omega(\delta, p)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. При указанных условиях $E_0 \subset E$ и $\pi_0(\theta) = \pi(e^{i\theta})$, $\theta \in E$.

§ 1. О СВЯЗИ МЕЖДУ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ И ОПЕРАТОРАМИ $a_n(\theta_0)$ И $b_n(\theta_0)$

Лемма 1.1. *Оператор* $a_n(\theta_0)$ *существует для* $\theta_0 \in E$ *при условии (0. 3) имеет место равенство*

$$a_n(\theta_0) = \frac{\varkappa_n}{\varkappa} - \frac{1}{2}(\Theta_0).$$

$$\pi_0(\Theta_0) c_0 e^{-in\theta_0} \{F(e^{i\theta_0}) P_n(e^{i\theta_0}) + Q_n(e^{i\theta_0})\}. \tag{1. 1}$$

Доказательство. Исходя из (0. 6), имеем

$$a_n(\theta_0) = I_1(\theta_0) - \pi_0(\theta_0) I_2(\theta_0), \tag{1. 2}$$

где

$$I_1(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \frac{\overline{P_n^*(e^{i\theta})}}{\overline{\pi(e^{i\theta})}} \frac{d\theta}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}},$$

$$I_2(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\,\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}\,d\sigma(\theta).$$

Заметим прежде всего, что

$$I_1(\theta_0)=-e^{-i\theta_0}\overline{I(\theta_0)},$$

где

$$\theta_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{P_n^*(z)}{z\pi(z)}\frac{dz}{z-z_0},\quad z=e^{i\theta},\ z_0=e^{i\theta_0}.$$

Но

$$I(\theta_0)=\frac{1}{2\pi i z_0}\oint\limits_{|z|=1}\frac{P_n^*(z)}{\pi(z)}\,\frac{dz}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi i z_0}$$

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{P_n^*(z)}{\pi(z)}\,\frac{dz}{z}=\frac{P_n^*(z_0)}{2z_0\pi(z_0)}-\frac{P_n^*(0)}{z_0\pi(0)}.$$

Итак,

$$I_1(\theta_0)=-\frac{1}{z_0}\left\{\frac{\overline{P_n^*(z_0)}}{\overline{2z_0\pi(z_0)}}-\frac{\overline{P_n^*(0)}}{\overline{z_0\pi(0)}}\right\}=\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-\frac{\overline{P_n^*(z_0)}}{\overline{2\pi(z_0)}}.\tag{1.3}$$

Найдем $I_2(\theta_0)$. Полагая $\overline{P_n^*(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta)=d\mu_n(\theta)$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\,d\mu_n(\theta)\,|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\,P_n^*(e^{i\theta})|\,d\sigma(\theta)\leqslant\sqrt{c_0}\,\|\,P_n\,\|_2^{\sigma}=\sqrt{c_0},$$

откуда следует, что $\mu_n(\theta)$ является функцией с ограниченным изменением. На основании теоремы И. И. Привалова о граничных значениях интеграла типа Коши-Стильтьеса (см. [4, гл. 1]) получим

$$I_2(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z\overline{P_n^*(z)}}{z-z_0}\,d\sigma(\theta)=\lim_{\zeta\to z_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{z\,d\mu_n(\theta)}{z-\zeta}-\frac{1}{2}\,\mu_n'(\theta_0)=$$

$$-\lim_{\zeta\to z_0}I_3(\zeta)-\frac{1}{2}\,p(\theta_0)\,\overline{P_n^*(z_0)},$$

где

$$I_3(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{z\overline{P_n^*(z)}}{z-\zeta}\,d\sigma(\theta).\tag{1.4}$$

Применим соотношение (0.2)

$$\overline{P_n^*(z)}=\frac{\varkappa_n}{\overline{P_{n+1}(0)}}\,\overline{P_{n+1}(z)}-\frac{\varkappa_{n+1}}{\overline{P_{n+1}}}\,\overline{zP_n(z)},$$

поэтому

$$I_3(\zeta)=\frac{\varkappa_n}{\overline{P_{n+1}(0)}}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{\overline{zP_{n+1}^*(z)}}{z-\zeta}\,d\sigma(\theta)-\frac{\varkappa_{n+1}}{\overline{P_{n+1}(0)}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{\overline{P_n^*(z)}}{z-\zeta}\,d\sigma(\theta).$$

Но

$$\frac{z+\zeta}{z-\zeta}=1+\frac{2\zeta}{z-\zeta}=-1+\frac{2z}{z-\zeta}$$

и $I_3(\zeta)$ можно записать в виде

$$I_3(\zeta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\overline{P_{n+1}(z)}\, d\sigma(\theta)\, \frac{\varkappa_n}{\overline{P_{n+1}(0)}} -$$

$$\frac{1}{2\zeta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\overline{P_n(z)}\, d\sigma(\theta)\, \frac{\varkappa_{n+1}}{\overline{P_{n+1}(0)}}.$$

Используем известное предельное соотношение (см. [2, стр. 73])

$$\lim_{\zeta\to z_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\overline{P_n(z)}\, d\sigma(\theta) = c_0 z_0^{-n}\left[F(z_0)\, P_n^*(z_0) - Q_n^*(z_0)\right],$$

и тогда

$$\lim_{\zeta\to z_0} I_3(\zeta) = \frac{1}{2} c_0 z_0^{-n+1}\left[F(z_0)\, P_{n+1}^*(z_0) - Q_{n+1}^*(z_p)\right]\frac{\varkappa_n}{\overline{P_{n+1}(0)}} -$$

$$-\frac{1}{2z_2} c_0 z_0^{-n}\left[F(z_0)\, P_n^*(z_0) - Q_n^*(z)\right]\frac{\varkappa_n}{\overline{P_{n+1}(0)}} =$$

$$= \frac{1}{2}c_0 z_0^{-n+1}\left\{F(z_0)\left[\frac{\varkappa_n P_{n+1}^*(z_0) - \varkappa_{n+1} P_n^*(z_0)}{\overline{P_{n+1}(0)}}\right] - \left[\frac{\varkappa_n Q_{n+1}^*(z_0) - \varkappa_{n+1} Q_n^*(z_0)}{\overline{P_{n+1}(0)}}\right]\right\}.$$

Применяя снова соотношение (0. 2), получим

$$\lim_{\zeta\to z_0} I_3(\zeta) = \frac{1}{2}c_0 z_0^{-n}\left\{F(z_0)\frac{\overline{P_{n+1}(0)}\, P_n(z_0)}{\overline{P_{n+1}(0)}} - \frac{\overline{Q_{n+1}(0)}\, Q_n(z_0)}{\overline{P_{n+1}(0)}}\right\}. \qquad (1.5)$$

Но

$$Q_{n+1}(0) = -P_{n+1}(0).$$

Применяя (1. 4) и (1. 5), будем иметь

$$I_2(\theta_0) = \frac{1}{2}c_0 z_0^{-n}\left\{(z_0)(z_0)\, P_n(z_0) + Q_n(z_0)\right\} - \frac{1}{2}\, p(\theta_0)\,\overline{P_n^*(z_0)}. \qquad (1.6)$$

Объединяя (1. 2), (1. 3) и (1. 6), запишем

$$a_n(\theta_0) = \frac{\varkappa_n}{\varkappa} - \frac{\overline{P_n^*(z_0)}}{z\pi(z_0)} - \frac{\pi(z_0)}{2} C_0 z_0^{-n}\left\{F(z_0)\, P_n(z_0) + Q_n(z_0)\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\pi(z_0)\, p(\theta_0)\,\overline{P_n^*(z_0)}. \qquad (1.7)$$

Но

$$|\pi(z_0)|^2 = |\pi(\theta_0)|^2 = \frac{1}{p(\theta_0)}.$$

Теперь из (1. 7) будет следовать (1. 1).

Лемма 2. 1. *Между модулями операторов $a_n(\theta_0)$ и $b_n(\theta_0)$ имеет место следующее соотношение:*

$$\left|\frac{\varkappa_n}{\varkappa} - a_n(\theta_0)\right| - |b_n(\theta_0)|^2 = 1,\ \theta_0\in E. \qquad (1.8)$$

Доказательство. Известно (см. [2, стр. 73]), что

$$b_n(\theta_0) = \frac{-c_0}{2} e^{-i(n+1)\theta_0}\pi_0(\theta_0)\left\{F(e^{i\theta_0})\, P_n^*(e^{i\theta_0}) - Q_n^*(e^{i\theta_0})\right\},\ \theta_0\in E, \qquad (1.9)$$

поэтому

$$|b_n(\theta_0)|^2 = \frac{c_0^2}{4}|\pi_0(\theta_0)|^2\left\{|F(z_0)|^2|P_n(z_0)|^2 + |Q_n(z_0)|^2 -\right.$$

$$\left.-\left[F(z_0)\,\overline{Q_n^*(z_0)}\, P_n^*(z_0) + \overline{F(z_0)}\, Q_n^*(z_0)\,\overline{P_n^*(z_0)}\right]\right\}. \qquad (1.9')$$

Из равенства (1.1) следует

$$\left|\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-a_n(\theta_0)\right|^2=\frac{c_0^2}{4}|\pi_0(\theta_0)|^2\{|F(z_0)|^2|P_n(z_0)|^2+|Q_n(z_0)|^2+$$
$$+\left[\overline{F(z_0)}\,\overline{P_n(z_0)}\,Q_n(z_0)+F(z_0)P_n(z_0)\overline{Q_n(z_0)}\right]\}. \quad (1.1')$$

Объединяя равенства (1.9′) и (1.1′), получим

$$\left|\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-a_n(\theta_0)\right|^2-|b_n(\theta_0)|^2=\frac{|\pi_0(\theta_0)|^2}{4}\;c_0^2e^{-in\theta_0}\left[P_n^*(e^{i\theta_0})Q_n(e^{i\theta_0})+\right.$$
$$\left.+P_n(e^{i\theta_0})Q_n^*(e^{i\theta_0})\right]\cdot\left[F(e^{i\theta_0})+\overline{F(e^{i\theta_0})}\right]. \quad (1.10)$$

В силу известного тождества (см. [2, стр. 16])

$$P_n^*(\zeta)Q(\zeta)+P_n(\zeta)Q_n^*(\zeta)=\frac{2}{c_0}\zeta^n \quad (1.11)$$

и соотношений

$$|\pi_0|(\theta_0)|^2=\frac{1}{p(\theta_0)},\quad \operatorname{Re}F(e^{i\theta_0})=\frac{1}{c_0}p(\theta_0), \quad (1.12)$$

получим (1.8). Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Имеют место следующие представления для многочленов первого и второго рода для* $\theta_0\in E$:

$$P_n^*(e^{i\theta_0})=\left[\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-\overline{a_n(\theta_0)}\right]\pi_0(\theta_0)-e^{i(n+1)\theta_0}b_n(\theta_0)\overline{\pi_0(\theta_0)}, \quad (1.13)$$

$$\theta_n^*(e^{i\theta_0})=\left[\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-\overline{a_n(\theta_0)}\right]\pi_0(\theta_0)F(e^{i\theta_0})+e^{i(n+1)\theta_0}b_n(\theta_0)\overline{\pi_0(\theta_0)}F(e^{i\theta_0}). \quad (1.14)$$

Доказательство. Исходя из соотношений [(1.1) и (1.9), имеем

$$\left[\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-a_n(\theta_0)\right]P_n^*(e^{i\theta_0})+b_n(\theta_0)e^{i\theta_0}P_n(e^{i\theta_0})=\pi_0(\theta_0)^*. \quad (1.15)$$

Перейдем к сопряженным величинам в (1.15). Тогда

$$\left[\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-\overline{a_n(\theta_0)}\right]P_n(e^{i\theta_0})+\overline{b_n(\theta_0)}e^{-i\theta_0}P_n^*(e^{i\theta_0})=e^{in\theta_0}\overline{\pi_0(\theta_0)}. \quad (1.16)$$

Решая совместно систему (1.15) и (1.16) и применяя тождество (1.8), получим (1.13).

Для доказательства соотношения (1.14) умножим обе части соотношения (1.9) на $\pi_0(\theta_0)F(e^{i\theta_0})$, и исходя из равенства (1.12), получим

$$b_n(\theta_0)e^{i(n+1)}\overline{\pi_0(\theta_0)}\,\overline{F(e^{i\theta_0})}=\frac{c_0}{2p(\theta_0)}\{|F(e^{i\theta_0})|^2P_n^*(e^{i\theta_0})-\overline{F(e^{i\theta_0})}\,Q_n^*(e^{i\theta_0})\}. \quad (1.17)$$

Переходя к сопряженным величинам в соотношении (1.1) и умножая обе его части на $\pi_0(\theta_0)F(e^{i\theta_0})$, прийдем к равенству

$$\left[\frac{\varkappa_n}{\varkappa}-\overline{a_n(\theta_0)}\right]\pi_0(\theta_0)F(e^{i\theta_0})=\frac{c_0}{2}\frac{1}{p(\theta_0)}\{|F(e^{i\theta_0})|^2P_n^*(e^{i\theta_0})+F(e^{i\theta_0})Q_n^*(e^{i\theta_0})\}. \quad (1.1')$$

Объединяя соотношения (1.17) и (1.1′) и исходя из равенства (1.12), получим соотношение (1.14).

§ 2. РАВНОМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ПЕРВОГО РОДА

Лемма 2.1. *Пусть*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty. \quad (2.1)$$

* Соотношение (1.15) было впервые получено Я. Л. Геронимусом (см. [31, стр. 68—69]) другим методом.

На отрезке $[\alpha, \beta] \subset E \subset [-\pi, \pi]$ *имеем* $f_0(\theta) \in L_2(\alpha, \beta)$, (2.2)

$$\sigma(\theta) \in AC[\alpha, \beta], \ 0 < m_0 \leqslant p(\theta), \tag{2.3}$$

почти всюду

$$p(\theta) \leqslant M. \tag{2.4}$$

Тогда равномерно для $\theta_0 \in [\alpha'\beta'] \subset [\alpha, \beta]$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} b_n(\theta_0) = \lim \rho_n(\theta_0) = 0, \tag{2.5}$$

причем оценка для $\rho_n(\theta_0)$ *зависит только от глобальных свойств функции распределения* $\sigma(\theta)$.

Доказательство. На основании (1.13) имеем

$$\pi_0(\theta_0) - P_n^*(e^{i\theta_0}) = \pi_0(\theta_0)\left(1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa}\right) - \overline{a_n(\theta_0)}\,\pi_0(\theta_0) + b_n(\theta_0)\, e^{i(n+1)\theta_0}\overline{\pi_0(\theta_0)}.$$

В силу (1.12) и (2.3) имеем

$$|\pi_0(\theta_0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_0}}, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

Поэтому

$$\rho_n(\theta_0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_0}}\left(1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa}\right) + \frac{1}{\sqrt{m_0}}\left(|a_n(\theta_0)| + |b_n(\theta_0)|\right). \tag{2.6}$$

Применим представление для $a_n(\theta_0)$ (см. [2, стр. 66])

$$a_n(\theta_0) = \frac{1}{2\pi\varkappa_n}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)\,[\varkappa_n\overline{P_n^*(e^{i\theta})} - \overline{\varkappa\pi_0(\theta)}]\, e^{i\theta} d\sigma(\theta). \tag{2.7}$$

По неравенству Буняковского — Шварца

$$|a_n(\theta_0)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}\,\|\varkappa\pi_0(\theta) - \varkappa_n P_n^*(e^{i\theta})\|_2^\sigma\, \|f_0\|_2^\sigma. \tag{2.8}$$

Применяя (2.3) и (2.4), получим

$$\|f_0(\theta)\|_2^\sigma \leqslant \left\{\frac{M}{2\pi}\int_\alpha^\beta |f_0(\theta)|^2 d\theta + \frac{A_1}{\delta_0}\int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0(\theta)|^2 d\sigma(\theta)\right\}^{\frac{1}{2}} {}^{*}, \quad \theta_0 \in [\alpha', \beta'].$$

Но

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0(\theta)|^2 d\sigma(\theta) = 1,$$

и поэтому

$$\|f_0(\theta)\|_2^\sigma \leqslant A_2. \tag{2.9}$$

Известно (см. [2, стр. 26]), что

$$\|\varkappa\pi_0(\theta) - \varkappa_n P_n^*(e^{i\theta})\|_2^\sigma = \sqrt{\varkappa^2 - \varkappa^2}. \tag{2.10}$$

Объединяя (2.8) — (2.10), получим

$$|a_n(\theta_0)| \leqslant A_3\sqrt{\varkappa - \varkappa_n}. \tag{2.11}$$

В силу леммы (1.2) имеем

$$|b_n(\theta_0)|^2 = \left|\frac{\varkappa_n}{\varkappa} - a_n(\theta_0)\right|^2 - 1 = \left(\frac{\varkappa_n}{\varkappa}\right)^2 + |a_n(\theta_0)|^2 - 1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa} \times$$

$$\times \left\{a_n(\theta_0) + \overline{a_n(\theta_0)}\right\} \leqslant 2|a_n(\theta_0)| + |a_n(\theta_0)|^2 + \left(1 - \frac{\varkappa_n^2}{\varkappa^2}\right). \tag{2.12}$$

---

* Здесь A_1, в дальнейшем $A_1, A_2 \ldots; B, B_1 \ldots; C_1, C_2$ — положительные постоянные.

Объединяя (2. 6), (2. 11) и (2. 12), получим

$$\rho_n(\theta_0) \leqslant A_4 \sqrt[4]{\varkappa - \varkappa_n}. \tag{2.13}$$

Неравенства (2. 11), (2. 12) и (2. 13) доказывают лемму.

Теорема 2. 1. *Пусть выполняется условие (2. 1). На внутреннем отрезке* $[\alpha, \beta] \in [-\pi, \pi]$:

$$\sigma(\theta) \in AC, \quad 0 < m_0 \leqslant p(\theta) \in C. \tag{2. 14}$$

Локальный модуль непрерывности $\omega(\delta, p)$ *удовлетворяет включению*

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \in L_2(0, \delta_0) \tag{2. 15}$$

и условию

$$(Z_1): \qquad \delta \int_{\delta}^{\delta_0} \frac{\omega(t, p)}{t^2}\, dt = 0\{\omega(\delta, p)\} \tag{2. 16}$$

или одному из эквивалентных условий: $(B_1)(L_1)$, (S_1), (p_1) (см. [5]). *Тогда равномерно относительно*

$$\theta \in [\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta] \quad \lim_{n \to} P_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}),$$

причем для $\rho_n(\theta)$ *имеем оценку* (2. 13).

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу условий (2. 1), (2. 14) и включения (2. 15)*, любая точка $\theta_0 \in [\alpha', \beta']$ принадлежит множеству E.

Действительно, так как на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция $p(\theta)$ ограничена сверху и снизу, то модуль непрерывности функции $\ln p(\theta)$ такого же порядка, как и функции $p(\theta)$, и поэтому

$$\frac{\omega(t, \ln p)}{t} \in L_1 \quad (0, \delta_0).$$

По известной теореме (см., например, [6, стр. 94]) ряд Фурье функции $\ln \frac{1}{p(\theta)}$ и сопряженный ряд равномерно сходятся в $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$. Отсюда вытекает, что ряд Маклорена функции $\ln \pi(z)$ равномерно сходится на дуге $e^{i\theta}$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Поэтому на этой дуге существуют граничные значения функций $\ln \pi(z)$ и $\pi(z)$, причем граничная функция $\pi(e^{i\theta})$ непрерывна при $\theta \in [\alpha'\beta']$ и определяется формулой (0. 5) для всех $\theta \in [\alpha', \beta']$. Покажем, что существует $\lim\limits_{r \to 1-0} F_0(re^{i\theta}) = F(e^{i\theta})$ и $F(e^{i\theta})$ непрерывна на дуге $e^{i\theta}$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Действительно,

$$F(re^{i\theta}) = F_0(re^{i\theta}) - F_1(re^{i\theta}) + F_2(re^{i\theta}),$$

где

$$F_0(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} p_0(t)\, dt, \quad p_0(t) = \begin{cases} p(t), & \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ \text{линейная в } [-\pi, \alpha] \cap [\beta, \pi] \end{cases}$$

$$p_0(\theta) \in C[-\pi, \pi], \quad p_0(-\pi) = p_0(\pi).$$

$$F_1(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi c_0} \left\{ \int_{-\pi}^{\alpha} + \int_{\beta}^{\pi} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} p_0(t)\, dt \right\},$$

$$F_2(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi c_0} \left\{ \int_{-\pi}^{\alpha} + \int_{\beta}^{\pi} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} d\sigma(t) \right\}.$$

* И даже менее сильного включения

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \in L_1(0, \delta_0). \tag{2. 15'}$$

Так как

$$\Omega(\delta, p_0) \leqslant \omega(\delta p) + A\delta \leqslant B_1 \omega(\delta, p),$$

то

$$\frac{\Omega(t, p_0)}{t} \in L_1(-\pi, \pi).$$

Применяя прежние рассуждения, покажем, что существует

$$\lim_{r \to 1-0} F_0(re^{i\theta}) = F_0(e^{i\theta}), \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

и $F_0(e^{i\theta})$ непрерывна на всей окружности $e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Функции $F_1(e^{i\theta})$ и $F_2(e^{i\theta})$ непрерывны на дуге $e^{i\theta}$, $\theta \in [\alpha', \beta']$. Итак, $[\alpha', \beta'] \subset E$.

Известно (см. [7, теорема 8]), что, если $f(\theta) \in L_1(-\pi, \pi)$, $f(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ и имеет место включение (2. 15′) для функции $f(\theta)$, то

$$\omega(\delta, \tilde{f}) \leqslant A_2 \left\{ \int_0^\delta \frac{\omega(t, f)}{t} dt + \delta \int_\delta^{\delta_0} \frac{\omega(t, f)}{t^2} dt \right\}. \tag{2. 17}$$

Применяя (0. 5) и (2. 17), получим

$$\omega(\delta, \pi) \leqslant A_3 \left\{ \int_0^\delta \frac{\omega(t, p)}{t} dt + \delta \int_\delta^{\delta_0} \frac{\omega(t, p)}{t^2} dt \right\}. \tag{2. 18}$$

Учитывая условия (2. 16) и легко проверяемое неравенство

$$\omega(\delta, f) \leqslant \frac{2}{\ln 2} \int_0^\delta \frac{\omega(t, f)}{t} dt, \tag{2. 19}$$

получим

$$\omega(\delta, \pi) \leqslant A_4 \int_0^\delta \frac{\omega(t, p)}{t} dt.$$

Неравенство 2. 19) позволяет воспользоваться известной теоремой (см. [8, § 22]), согласно которой

$$\int_0^\delta \left[\frac{\omega(t, \pi)}{t}\right]^2 dt \leqslant A_5 \int_0^\delta \left[\frac{\omega(t, p)}{t}\right]^2 dt. \tag{2. 20}$$

Покажем, что при условиях теоремы

$$i(\theta_0) = \| f_0(\theta) \|_2^\sigma < \infty, \quad \theta_0 \in [\alpha', \beta'].$$

Действительно,

$$2\pi i^2(\theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} |f_0(t)|^2 d\sigma(t) = \int_{-\pi}^{\alpha} + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^\pi |f_0(t)|^2 d\sigma(t) =$$

$$= i_1(\theta_0) + i_2(\theta_0) + i_3(\theta_0).$$

Найдем оценку для $i_2(\theta_0)$

$$i_2(\theta) \leqslant \frac{M}{4} \int_\alpha^\beta \left| \frac{\pi(e^{it}) - \pi(e^{i\theta_0})}{\sin \frac{t - \theta_0}{2}} \right|^2 dt \leqslant \frac{M\pi^2}{4} \int_0^\delta \left[\frac{\omega(t, \pi)}{t}\right]^2 dt,$$

$$M = \operatorname*{Max}_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} p(t). \tag{2. 21}$$

Неравенства (2. 21) и (2. 20) позволяют считать, что $i^2(\theta_0) < \infty$. Интегралы $i_1(\theta_0)$ и $i_3(\theta_0)$ оцениваются аналогично. Для оценки $i_1(\theta_0)$ замечаем, что при $\theta_0 \in [\alpha', \beta']$, $t \overline{\in} [\alpha, \beta]$

$$|e^{i\theta_0} - e^{it}| \geqslant 2\sin\frac{\delta_0}{2} \geqslant \frac{2\delta_0}{\pi} \ (\delta_0 < \pi).$$

Поэтому

$$i_1(\theta_0) \leqslant \frac{\pi}{2\delta_0} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0(t) - \pi_0(\theta_0)|^2 d\sigma(t) \leqslant \frac{\pi}{\delta_0} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0(t)|^2 d\sigma(t) +$$

$$+ \frac{\pi}{\delta p(\theta_0)} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(t).$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0(t)|^2 d\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0\ (t)|^2 p(t)\, dt = 1$$

и

$$i_1(\theta_0) \leqslant \frac{2\pi^2}{\delta_0}\left(1 + \frac{c_0}{m_0}\right).$$

Итак,

$$i(\theta_0) < \infty.$$

Теорема 2.1 следует теперь из леммы 2.1.

Примечание 2.1. Условиям (2.15) и (2.16) теоремы 2.1 удовлетворяет модуль непрерывности (см. [7])*

$$\omega(\delta,\ p) \simeq \delta^{\mu}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu},\quad 0 \leqslant \nu,\quad \frac{1}{2} \leqslant \mu < 1.$$

Примечание 2.2. Пусть, кроме включения (2.15), имеет место порядковое равенство

$$\omega(\delta,\ p) \cong \delta^{\nu}\lambda(\delta),\quad 0 < \nu < 1, \qquad (2.22)$$

$\lambda(\delta)$ — почти невозрастающая функция в $[0,\ \delta_0]$:

$$\lambda(\delta_2) \leqslant B_3\lambda(\delta_1),\quad \delta_2 \geqslant \delta_1,\quad B_3 \geqslant 1.$$

Из неравенств (2.18) и (2.19) получим при условии (2.22)

$$\omega(\delta,\ \pi) \leqslant B_4 \int_0^{\delta} \frac{\omega(t,\ p)}{t}\, dt.$$

В теореме 2.1 вместо условия (Z_1) можно взять условие (2.22)

Теорема 2.2. *Пусть*

$$\frac{1}{p(\theta)} \in L_1(-\pi,\ \pi)^{**}. \qquad (2.23)$$

На внутреннем отрезке $[\alpha,\ \beta] \subset [-\pi,\ \pi] : \sigma(\theta) \in AC,\ 0 < m_0 \leqslant p(\theta) \subset C$ *и выполняются два условия* (2.16) *и*

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(t,\ p)}{t}\, dt = 0\{\omega(\delta,\ p)\} \qquad (2.24)$$

или одно условие

$$(\Lambda_0) : \frac{\omega(t,\ p)}{t} \ln\frac{1}{t} \in L_1(0,\ \delta_0). \qquad (2.25)$$

Тогда равномерно относительно $\theta_0 \in [\alpha',\ \beta'] \subset [\alpha,\ \beta]$

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta_0}) = \pi(e^{i\theta_0}).$$

Доказательство. Применим метод расщепления функции $f_0(\theta)$ (см [9]). Положим

$$f_0(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta),$$

* Т. е. $B_5\delta^{\nu}\lambda(\delta) \leqslant \omega(\delta,\ p) \leqslant B_6\delta^{\nu}\lambda(\delta)$.

** При $p(\theta) \in L_1(-\pi,\ \pi)$, $\frac{1}{p(\theta)} \in L_1(-\pi,\ \pi)$ имеем $\ln p(\theta) \in L_1(-\pi,\ \pi)$. Или одно из эквивалентных ему условий (B), (S), (L), (P^2) (см. [5]).

где

$$f_1(\theta)=\begin{cases}f_0(\theta), & \theta\overline{\in}[\alpha,\beta]\\ 0, & \theta\in[\alpha,\beta]\end{cases}\qquad f_2(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\overline{\in}[\alpha,\beta]\\ f_0(\theta), & \theta\in[\alpha,\beta]\end{cases}\tag{2.26}$$

и соответственно

$$a_n(\theta_0)=a_n^{(1)}(\theta_0)+a_n^{(2)}(\theta_0),\qquad b_n(\theta)=b_n^{(1)}(\theta_0)+b_n^{(2)}(\theta_0).$$

Применяя те же соображения, с помощью которых было доказано, что $i_1(\theta_0)<\infty$, установим, что

$$f_1(\theta_0)\in L_2^{\sigma},\quad \theta_0\in[\alpha',\beta'].$$

В силу леммы 2.1 получим, что равномерно относительно $\theta_0\in[\alpha',\beta]$

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}(\theta_0)=\lim_{n\to\infty}b_n^{(1)}(\theta_0)=0.$$

Применяя неравенство (2.19) и условия (Z) и (Z_1), получим

$$f(\theta)\leqslant B_7\frac{|\theta-\theta_0|,(p)}{|\theta-\theta_0|},\quad \theta\in[\alpha,\beta],\quad \theta_0\in[\alpha'\beta'],$$

и поэтому

$$f_0(\theta)\in L_1(\alpha,\beta).$$

Известно, что класс $L_2(\alpha,\beta)$ плотен в классе L_1 $(\alpha\geqslant\beta)$, поэтому, задавая $0<\varepsilon_n\to 0$, мы всегда сможем найти последовательность функций

$$f_{3,n}(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\overline{\in}[\alpha,\beta]\\ f_{0,n}(\theta), & \theta\in[\alpha,\beta],\ f_{0,n}(\theta)\in L_2(\alpha,\beta),\quad n=1,2,\ldots,\end{cases}\tag{2.27}$$

чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta}|f_0(\theta)-f_{0,n}|\,d\theta\leqslant\varepsilon_n.\tag{2.28}$$

В силу ограниченности на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции $p(\theta)$ имеем

$$p(\theta)f_{3,n}^2(\theta)\in L_1(-\pi,\pi),$$

что в сочетании с (2.27) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_{3,n}^2(\theta)\,d\sigma(\theta)<\infty.\tag{2.29}$$

Положим теперь

$$f_{4,n}(\theta)=f_2(\theta)-f_{3,n}(\theta)$$

и соответственно

$$a_n^{(4)}(\theta_0)=a_n^{(2)}(\theta_0)-a_n^{(3)}(\theta_0),\quad b_n^{(4)}(\theta_0)=b_n^{(2)}(\theta_0)-b_n^{(3)}(\theta_0).$$

Снова, как и прежде, получим, что равномерно относительно $\theta_0\in[\alpha',\beta']$

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{(3)}(\theta_0)=\lim_{n\to\infty}b_n^{(3)}(\theta_0)=0.$$

Применяя рассуждения из [10, стр. 73—76] и [2, стр. 58—60), легко показать, что при условии (2.23) и включении (2.15′) имеем

$$|P_n(e^{i\theta})|\leqslant B_8,\quad \theta\in[\alpha',\beta].\tag{2.30}$$

Оценим $b_n^{(4)}(\theta_0)$. Исходя из представлений (2.26), (2.27) и оценки (2.28), получим

$$\left|b_n^{(4)}(\theta_0)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_{4,n}(\theta)|\,|P_n(e^{i\theta})|\,d\sigma(\theta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\beta}^{\alpha}|f_{4,n}(\theta)|\ |P_n(e^{i\theta})|\,p(\theta)\,d\theta\leqslant MB_9\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}|f_{4,n}(\theta)|\,d\theta\leqslant B_{10}\varepsilon_n.$$

Для оценки $a_n^4(\theta_0)$ применим неравенство (2.7) (с заменой $f_0(\theta)$ на $f_{4,n}(\theta)$), представления (2.26), (2.27) и оценки (2.28) и (2.30), после чего получим

$$|a_n^{(4)}(\theta)| \leqslant \left(\frac{M}{2\pi} B_8 + \frac{\varkappa}{\varkappa_0} \frac{1}{\sqrt{m_0}}\right) \int_\alpha^\beta |f_0(\theta) - f_{0,n}(\theta)| \, d\theta \leqslant B_{11}\varepsilon_n.$$

Итак, равномерно относительно $\theta_0 \in [\alpha', \beta']$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(4)}(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} b_n^{(4)}(\theta_0) = 0.$$

Поэтому такие же предельные соотношения имеют место и для $a_n^{(2)}(\theta_0)$, $b_n^{(2)}(\theta_0)$, а значит и

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} b_n(\theta_0) = 0.$$

Применяем теперь лемму 1.2 и равенство (1.13).

Первая часть теоремы доказана. Докажем вторую часть. На основании неравенства (2.18) легко показать, что из включения (2.25) следует включение

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \in L_1(0, \delta_0). \qquad (2.31)$$

Из равенства $p(\theta) = |\pi(e^{i\theta})|^{-2}$, непрерывности и ограниченности снизу $p(\theta)$ на $[\alpha, \beta]$ получим

$$|p(\theta_1) - p(\theta_2)| \leqslant \frac{2M^2}{\sqrt{m_0}} |\pi(e^{i\theta_2}) - \pi(e^{i\theta_1})|, \quad \theta_1, \theta_2 \in [\alpha', \beta']$$

и

$$\omega(\delta, p) \leqslant \frac{2M^2}{\sqrt{m_0}} \omega(\delta, \pi). \qquad (2.32)$$

Поэтому

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \in L_1(0, \delta_0). \qquad (2.33)$$

Исходя из включения (2.33) и (2.31), докажем вторую часть теоремы, повторив прежние рассуждения.

Примечание 2.3. Условию (2.24) удовлетворяет модуль непрерывности [см. 7]

$$\omega(\delta, p) \simeq \delta^\mu \left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}, \quad 0 < \mu < 1, \ 0 \leqslant \nu.$$

Теоремы 2.1 и 2.2 были сформулированы без доказательства в [11].

Примечание 2.4. Каждое из условий (2.16), (2.24) и (2.25) более жесткое, чем условие

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \in L_1(0, \delta_0),$$

при котором имеет место предельное соотношение (см. [12])

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}), \quad \theta \in [\alpha'\beta'].$$

Однако, это было доказано для системы многочленов, ортонормированных на единичной окружности, относительно веса $p(\theta)$.

§ 3. РАВНОМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОГО РОДА

Лемма 3.1. *Пусть*

$$\frac{1}{p(\theta)} \in L_1(-\pi, \pi). \qquad (3.1)$$

На отрезке $[\alpha, \beta] \subset L_1[-\pi, \pi]$

$$\sigma(\theta) \in AC, \quad 0 < m_0 \leqslant p(\theta) \in C \qquad (3.2)$$

и

$$\frac{\omega(t, p)}{t} \in L_1(0, \delta_0). \tag{3.3}$$

Тогда

$$s(\theta_0) \in AC(\alpha', \beta') \tag{3.4}$$

и

$$0 < m_1 \leqslant q_0(\theta) \in C(\alpha', \beta'), \; q(\theta) \sim q_0(\theta)^*. \tag{3.5}$$

Доказательство. Исходя из тождества (1.11), имеем

$$\frac{2}{C_0 |P_n(e^{i\theta})| |Q_n(e^{i\theta})|} \leqslant \left| \frac{P_n^*(e^{i\theta})}{P_n(e^{i\theta})} \right| + \left| \frac{Q_n^*(e^{i\theta})}{Q_n(e^{i\theta})} \right| = 2. \tag{3.6}$$

При условиях леммы (как это было сказано ранее)

$$|P_n(e^{i\theta_0})| \leqslant C_1, \; \theta_0 \in [\alpha', \beta'], \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

По (3.6) получим

$$|Q_n(e^{i\theta_0})| \geqslant \frac{1}{c_0 C_1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

Известно (см. [2, стр. 79]), что

$$s(\theta_0 + 0) - s(\theta_0 - 0) = 2\pi : \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(e^{i\theta})|^2. \tag{3.8}$$

По (3.7) следует, что ряд в (3.8) расходится и функция $s(\theta)$ непрерывна на $[\alpha', \beta']$.

Теперь можно применить известную формулу (см. [3, стр. 50])

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{|Q_n(e^{i\theta})|^2} = s(\theta_2) - s(\theta_1); \; \theta_1, \theta_2 \in [\alpha', \beta'], \tag{3.9}$$

$\{n_k\}_1^{\infty}$ — некоторая подпоследовательность чисел натурального ряда. Из формулы (3.9) и неравенства (3.7) следует включение (3.4). Докажем (3.5). Так как плотность распределения $q(\theta)$ удовлетворяет одновременно с $p(\theta)$ условию (0.3), то почти всюду на $[-\pi, \pi]$

$$q(\theta) = \frac{1}{|\chi(e^{i\theta})|^2}, \; \chi(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} \chi(re^{i\theta}).$$

Легко показать, что для $\theta \in E$

$$\chi(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}) F(e^{i\theta})$$

и почти всюду в $[-\pi, \pi]$

$$q(\theta) = \frac{1}{|\chi(e^{i\theta})|^2 |\pi(e^{i\theta})|^2} = \frac{c_0^2 p(\theta)}{p^2(\theta) + \tilde{p}_\sigma^2(\theta)} \equiv q_0(\theta), \; \tilde{p}_\sigma(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} \, d\sigma(t) \tag{3.10}$$

При доказательстве теоремы 2.1 было установлено, что при условиях (3.2) и (3.3) функция $F(e^{i\theta})$ непрерывна на дуге $e^{i\theta}$, $\theta \in [\alpha', \beta']$, поэтому и

$$\tilde{p}_\sigma(\theta) \in C(\alpha', \beta'), \; \left| \tilde{p}_\sigma(\theta) \right| \leqslant M_1, \; \theta \in [\alpha', \beta'],$$

---

* $q(\theta) \sim q_0(\theta)$ означает, что $q(\theta)$ совпадает почти всюду с $q_0(\theta)$.

$$0 < m_1 = \frac{m_0 c_0^2}{M^2 + M_1^2} \leqslant q_0(\theta) \in C[\alpha', \beta'], \quad q(\theta) \sim q_0(\theta).$$

Так как $s(\theta) \in AC[\alpha', \beta']$, то можно $q(\theta)$ заменить на $q_0(\theta)$*. Лемма полностью доказана.

Теорема 3. 1. *При условиях каждой из теорем 2. 1 и 2. 2 имеем равномерно относительно* θ_0 $[\alpha', \beta']$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} |Q_n^*(e^{i\theta_0}) - X(e^{i\theta_0})| = 0,$$

причем оценка для $r_n(\theta_0)$ *зависит только от глобальных свойств функции распределения.*

Доказательство. По формуле (1. 14) имеем

$$r_n(\theta_0) = \left|\chi_0(\theta_0)\left(1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa}\right) - \overline{a_n(\theta_0)}\chi_0(\theta_0) + b_n(\theta_0)\, e^{i(n+1)\theta_0}\chi_0(\theta_0)\right|.$$

Применяя лемму 3. 1, получим для $\theta_0 \in [\alpha', \beta']$

$$|\chi_0(\theta_0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_1}}.$$

Таким образом,

$$r_n(\theta_0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_1}}\left(1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa}\right) + \frac{1}{\sqrt{m_1}}(|a_n(\theta_0)| + |b_n(\theta_0)|).$$

В условиях каждой из теорем 2. 1—2. 2 было установлено, что равномерно для $\theta_0 \in [\alpha', \beta']$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n(\theta_0)| = \lim_{n\to\infty} |b_n(\theta_0)| = 0.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\theta_0) = 0$$

и

$$r_n(\theta_0) \leqslant C_3 \sqrt[4]{\varkappa - \varkappa_n}.$$

В заключение отметим, что для того чтобы плотность распределения $q(\theta)$ и модуль непрерывности $\omega(\delta, q)$ удовлетворяли условиям теорем 2. 1—2. 2, нужно на $p(\theta)$ и $\omega(\delta, p)$ наложить более жесткие условия, как это следует из соотношения (3. 10).

Наш метод, связанный с применением операторов $a_n(\theta_0)$ *и* $b_n(\theta_0)$, *позволяет получить сравнительно простые условия*** *для одновременного существования равномерных предельных соотношений для многочленов первого и второго рода.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962.
2. Л. Я. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге и их приложения. Зап. н-и, ин-та матем. и механики ХМО, т. XIX, с. 4, 1948, 35—120.

* Так как многочлены $\{Q_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, соответствующие обложению $ds(\theta)$, не отличаются от многочленов $\{Q_{0,n}(e^{i\theta})\}_0^\infty$, соответствующих обложению $ds_0(\theta) =$

$$= \begin{cases} q_0(\theta)\,d\theta, & \theta \in [\alpha'\beta'] \\ ds(\theta) & \theta \,\bar{\in}\, [\alpha'\beta']. \end{cases}$$

** В [3] (теорема 5.5) требуется существование непрерывной второй производной $p''(Q)$ удовлетворяющей условию Дини-Липшица с порядком > 1.

3. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1950.

4. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. ГОНТИ, М.-Л., 1950.

5. Н. К. Бари и С. Б. Стечкин. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. ТММО, т. V, 1956, 485—522.

6. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1. «Мир», 1965.

7. Б. Л. Голинский. О локальном приближении двух сопряженных функций тригонометрическими многочленами. Матем. сб., т. 51 (93): 4, 160, 401—426.

8. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.

9. Я Л. Геронимус и Б. Л. Голинский. Асимптотические формулы для ортогональных многочленов. Сб. «Теория функций и функциональный анализ и их приложения», вып. 2, 1965, стр. 141—163.

10. У. Гренандер и Г. Сеге. Теплицевы формы и их применение. ИЛ, М., 1961.

11. Б. Л. Голинский. О предельных соотношениях и асимптотических формулах для многочленов, ортогональных на единичной окружности. ДАН, т. 160, № 5, 1965, 990, 993.

12. Б. Л. Голинский. О быстроте сходимости последовательности ортогональных многочленов к предельной функции. Укр. матем. журн., т. 19, № 4, 1967, 11—28.

Поступила 16 мая 1968 г.