О нуляхъ цѣлой функціи Эрмита и функцій Лямэ.

А. А. Маркова.

(Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ проф. А. М. Ляпунову).

Въ надеждѣ, что Вы сохранили интересъ къ функціямъ Лямэ, я позволяю себѣ обратить Ваше вниманіе на замѣтку *) г-на Клейна „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung", которая, впрочемъ, касается не столько самихъ функцій Лямэ сколько цѣлой функціи Эрмита, связанной извѣстнымъ образомъ съ уравненіемъ Лямэ.

На двухъ фигурахъ г-нъ Клейнъ показываетъ, какъ распредѣляются нули этой цѣлой функціи въ различныхъ случаяхъ, но не приводитъ никакого доказательства.

Обдумывая предложеніе г-на Клейна, я убѣдился, что для его доказательства можно съ успѣхомъ воспользоваться разсужденіями вполнѣ подобными тѣмъ, какія были мною примѣнены къ другой цѣлой функціи въ мемуарѣ **) „О цѣлой функціи

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1-\Delta}{2},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{x}\right) F\left(\frac{-n+\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1+\Delta}{2},\ 1+\Delta,\ \frac{1}{x}\right)$$

и о функціяхъ болѣе общаго характера"; что я и предполагаю сдѣлать въ настоящемъ письмѣ.

*) Mathematische Annalen XL.

**) Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg; VII série, XLI.

Начнемъ съ установленія обозначеній. Пусть

$$\varphi=\varphi(x)=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3), \quad e_1<e_2<e_3, \quad A=n(n+1),$$

$F(x, B)$ цѣлая функція n-ой степени отъ x, равная произведенію $y_1 y_2$ двухъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія

$$2\varphi y''+\varphi' y'-2(Ax+B)y=0.$$

Извѣстно, что функція $F(x, B)$ удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію третьяго порядка

$$2\varphi F'''+3\varphi' F''+\varphi'' F'-8(Ax+B)F'-4AF=0$$

и нелинейному уравненію второго порядка

$$(F'F'-2FF'')\varphi-FF'\varphi'+4(Ax+B)FF=\Phi(B),$$

гдѣ $\Phi(B)$ не зависитъ отъ x.

Извѣстно также, что $F(x, B)$ цѣлая функція n-ой степени не только относительно x, но и относительно B, если коэффиціентъ при x^n мы полагаемъ въ этой функціи равнымъ единицѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что $\Phi(B)$ цѣлая функція $2n+1$ степени отъ B и что въ ней коэффиціентъ при B^{2n+1} число положительное.

Мы будемъ заниматься вопросомъ о распредѣленіи вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B)=0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

при различныхъ вещественныхъ значеніяхъ параметра B.

Если число B возрастаетъ непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$, это распредѣленіе мѣняется только при переходѣ B черезъ корни уравненія

$$\Phi(B)=0.$$

Для значеній B, удовлетворяющихъ послѣднему уравненію, функція $F(x, B)$ обращается въ квадратъ одной изъ функцій Лямэ, т. е. принимаетъ видъ

$$(x-e_1)^{\varepsilon_1}(x-e_2)^{\varepsilon_2}(x-e_3)^{\varepsilon_3}[f(x)]^2,$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція отъ x, а показатели ε_1, ε_2, ε_3 имѣютъ одно изъ двухъ значеній: 0 и 1.

Относительно функцій Лямэ я буду предполагать извѣстными только слѣдующія предложенія:

1) онѣ соотвѣтствуютъ вещественнымъ значеніямъ B;

2) число ихъ равно $2n+1$ и каждой изъ нихъ соотвѣтствуетъ свое особое значеніе B, такъ что различнымъ функціямъ Лямэ соотвѣтвѣтствуютъ различныя значенія B;

3) всѣ корни уравненія

$$f(x)=0$$

вещественны и лежатъ между e_1 и e_3.

Въ силу этихъ предложеній всѣ корни уравненія

$$\Phi(B)=0$$

вещественны и различны.

Пусть они будутъ

$$B_1<B_2<\ldots<B_i<B_{i+1}<\ldots<B_{2n+1}.$$

Положимъ еще

$$\frac{\partial F(x,B)}{\partial B}=U(x,B),$$

$$F(x,B_i)=(x-e_1)^{\varepsilon_1^{(i)}}(x-e_2)^{\varepsilon_2^{(i)}}(x-e_3)^{\varepsilon_3^{(i)}}[f_i(x)]^2$$

и условимся обозначать черезъ N_i' число корней уравненія

$$f_i(x)=0$$

въ промежуткѣ (e_1, e_2), а черезъ N_i'' число корней того-же уравненія въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Наконецъ символомъ ξ_i будемъ обозначать любой корень уравненія

$$f_i(x)=0,$$

а буквою e любое изъ чиселъ e_1, e_2, e_3.

Пока B лежитъ въ одномъ изъ промежутковъ

$$(-\infty, B_1),\ (B_1, B_2), \ldots, (B_i, B_{i+1}), \ldots, (B_{2n}, B_{2n+1}),\ (B_{2n+1}, +\infty)$$

распредѣленіе вещественныхъ корней уравненія

$$F(x,B)=0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

не мѣняется при возрастанiи B.

Измѣненiя-же въ этомъ распредѣленiи происходятъ только при переходѣ B черезъ значенiя

$$B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}.$$

Для изслѣдованiя этихъ измѣненiй намъ надо при значенiяхъ B близкихъ къ B_i разсмотрѣть корни x уравненiя

$$F(x, B) = 0$$

близкiе къ ξ_i и къ e.

При безконечно малыхъ величинахъ разностей

$$x - \xi_i \qquad \text{и} \qquad B - B_i$$

уравненiе

$$F(x, B) = 0$$

обращается въ слѣдующее

$$(x - \xi_i)^2 F''(\xi_i, B_i) + 2(B - B_i)U(\xi_i, B_i) = 0.$$

Съ другой стороны изъ вышеуказаннаго нелинейнаго дифференцiальнаго уравненiя нетрудно вывесть слѣдующее равенство

$$-2U(\xi_i, B_i)F''(\xi_i, B_i)\varphi(\xi_i) = \Phi'(B_i),$$

которое показываетъ, что отношенiе $\dfrac{-U(\xi_i, B_i)}{F''(\xi_i, B_i)}$ имѣетъ тотъ же знакъ какъ и произведенiе

$$\Phi'(B_i)\varphi(\xi_i).$$

Знакъ же послѣдняго произведенiя одинаковъ со знакомъ $(-1)^{i-1}$, если ξ_i лежитъ въ промежуткѣ (e_1, e_2), и одинаковъ со знакомъ $(-1)^i$, если ξ_i лежитъ въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Слѣдовательно, если i число нечетное, при переходѣ B черезъ значенiе B_i, отъ меньшихъ величинъ къ бóльшимъ, $2N_i'$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ (e_1, e_2), а $2N_i''$ вещественныхъ корней, заключенныхъ въ промежуткѣ (e_2, e_3), становятся мнимыми.

Напротивъ, если i число четное, при такомъ же переходѣ B черезъ значенiе B_i отъ меньшихъ величинъ къ бóльшимъ, вещественные корни, заключенные въ промежуткѣ (e_1, e_2), обращаются въ $2N_i'$ мнимыхъ корней, а $2N_i''$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Обращаясь къ тому корню x уравненія

$$F(x, B) = 0,$$

который близокъ къ e при B близкомъ къ B_i, мы прежде всего должны предположить

$$F(e, B_i) = 0.$$

Затѣмъ безъ большого труда находимъ равенство

$$-U(e, B_i) F'(e, B_i) \varphi'(e) = \Phi'(B_i)$$

и, предполагая разности

$$x - e \quad \text{и} \quad B - B_i$$

безконечно малыми, получаемъ уравненіе

$$(x - e) F'(e, B_i) + (B - B_i) U(e, B_i) = 0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ произведенія $(-1)^{i-1}(B - B_i)$ при $e = e_1$ и при $e = e_3$; если-же $e = e_2$, то знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ $(-1)^i (B - B_i)$.

На основаніи всего сказаннаго нами легко составить слѣдующую таблицу:

Предѣлы для B	Число корней уравненія $F(x, B) = 0$			
	въ промеж. $(-\infty, e_1)$	въ промежуткѣ (e_1, e_2)	въ промежуткѣ (e_2, e_3)	въ промеж. $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_1$	$\varepsilon_1^{(1)}$	0	$\varepsilon_2^{(1)} + 2N_1'' + \varepsilon_3^{(1)}$	0
$B_1 < B < B_2$	0	$\varepsilon_1^{(1)} + 2N_1' + \varepsilon_2^{(1)} =$ $\varepsilon_1^{(2)} + 2N_2' + \varepsilon_2^{(2)}$	0	$\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)}$
$B_2 < B < B_3$	$\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^{(3)}$	0	$\varepsilon_2^{(2)} + 2N_2'' + \varepsilon_3^{(2)} =$ $\varepsilon_2^{(3)} + 2N_3'' + \varepsilon_3^{(3)}$	0
$B_3 < B < B_4$	0	$\varepsilon_1^{(3)} + 2N_3' + \varepsilon_2^{(3)} =$ $\varepsilon_1^{(4)} + 2N_4' + \varepsilon_2^{(4)}$	0	$\varepsilon_3^{(3)} = \varepsilon_3^{(4)}$
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$B_{2n} < B < B_{2n+1}$	$\varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_2^{(2n)} + 2N_{2n}'' + \varepsilon_3^{(2n)} =$ $\varepsilon_2^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}'' + \varepsilon_3^{(2n+1)}$	0
$B_{2n+1} < B < +\infty$	0	$\varepsilon_1^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}' + \varepsilon_2^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_3^{(2n+1)}$

А изъ счета мнимыхъ корней выводимъ:

$$N_1'' = N_2'' , \quad N_2' = N_3' , \quad N_3'' = N_4'' , \ldots , \; N_{2n-1}'' = N_{2n}'' , \quad N_{2n}' = N_{2n+1}' .$$

Разсматривая нашу таблицу и принимая во вниманіе только что написанныя равенства, нетрудно посредствомъ простаго сложенія и вычитанія придти къ такой формулѣ

$$2N_1' + \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_2^{(1)} - 2N_{2n+1}' = \varepsilon_2^{(2)} - \varepsilon_2^{(3)} + \varepsilon_2^{(4)} - \varepsilon_2^{(5)} + \ldots +$$

$$+ \varepsilon_2^{(2n-2)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \varepsilon_1^{(2n)} + \varepsilon_2^{(2n)} .$$

Съ другой стороны изъ вида функціи $F(x, B)$ легко заключить, что при весьма большихъ значеніяхъ B^2 модули корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

должны быть также весьма большими и потому сами корни не могутъ заключаться между e_1 и e_3.

Поэтому должно быть

$$N_1'' = 0 , \quad \varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_3^{(1)} = 0 , \quad 2N_1' + \varepsilon_1^{(1)} = n ,$$

$$N_{2n+1}' = 0 , \quad \varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n+1)} = \varepsilon_2^{(2n+1)} = 0 , \quad 2N_{2n+1}'' + \varepsilon_3^{(2n+1)} = n ,$$

въ силу чего приведенное выше равенство даетъ

$$n = \varepsilon_2^{(2)} - \varepsilon_2^{(3)} + \varepsilon_2^{(4)} - \varepsilon_2^{(5)} + \ldots + \varepsilon_2^{(2n-2)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \varepsilon_2^{(2n)}$$

и слѣдовательно

$$\varepsilon_2^{(2)} = \varepsilon_2^{(4)} = \ldots = \varepsilon_2^{(2n-2)} = \varepsilon_2^{(2n)} = 1 ,$$

$$\varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_2^{(3)} = \varepsilon_2^{(5)} = \ldots = \varepsilon_2^{(2n-1)} = \varepsilon_2^{(2n+1)} = 0 .$$

Такимъ образомъ всѣ числа $\varepsilon_2^{(i)}$ вполнѣ опредѣлены.

Обращаясь къ числамъ $\varepsilon_1^{(i)}$ и $\varepsilon_3^{(i)}$, замѣтимъ, что $\varepsilon_1^{(1)}$ равняется нулю при n четномъ и единицѣ при n нечетномъ. Это число мы обозначимъ черезъ ε.

Затѣмъ послѣдовательно находимъ:

$$\varepsilon_1^{(2)} = 1 - \varepsilon = \varepsilon_1^{(3)} , \quad \varepsilon_1^{(4)} = \varepsilon_1^{(5)} = \varepsilon , \quad \varepsilon_1^{(6)} = \varepsilon_1^{(7)} = 1 - \varepsilon , \quad \varepsilon_1^{(8)} = \varepsilon_1^{(9)} = \varepsilon , \ldots ,$$

$$\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)} = 0 , \quad \varepsilon_3^{(3)} = \varepsilon_3^{(4)} = 1 , \quad \varepsilon_3^{(5)} = \varepsilon_3^{(6)} = 0 , \quad \varepsilon_3^{(7)} = \varepsilon_3^{(8)} = 1 , \ldots .$$

Въ виду всѣхъ этихъ равенствъ, таблица распредѣленія вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

принимаетъ слѣдующій видъ:

Предѣлы для B	Число корней уравненія $F(x, B) = 0$			
	въ промежут. $(-\infty, e_1)$	въ промежут. (e_1, e_2)	въ промежут. (e_2, e_3)	въ промежут. $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_1$	$\varepsilon = \frac{1-(-1)^n}{2}$	0	0	0
$B_1 < B < B_2$	0	n	0	0
$B_2 < B < B_3$	$1 - \varepsilon$	0	1	0
$B_3 < B < B_4$	0	$n - 1$	0	1
$B_4 < B < B_5$	ε	0	2	0
$B_5 < B < B_6$	0	$n - 2$	0	0
$B_6 < B < B_7$	$1 - \varepsilon$	0	3	0
$B_7 < B < B_8$	0	$n - 3$	0	1
$B_8 < B < B_9$	ε	0	4	0
$B_9 < B < B_{10}$	0	$n - 4$	0	0
$B_{10} < B < B_{11}$	$1 - \varepsilon$	0	5	0
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

Послѣдняя таблица, по существу дѣла, равносильна чертежамъ г-на Клейна.

Замѣчу, что предыдущія разсужденія служатъ также для доказательства замѣченнаго Вами, въ диссертаціи „Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости", закона послѣдовательности функцій Лямэ.

Объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій, наблюдаемыхъ на его поверхности.

I. I. Сикора.

Съ самаго начала моихъ занятій солнцемъ меня поражали величіе, величина и сила явленій, происходящихъ на немъ; кромѣ того приходилось неоднократно наблюдать движеніе свѣтящейся массы протуберанцевъ. Это навело меня на мысль, что, коль скоро явленія пятенъ и протуберанцевъ реальныя, то, такъ какъ эти явленія захватываютъ большія пространства поверхности солнца и достигаютъ иногда грандіозныхъ размѣровъ, не должны ли они производить подъемы и опусканія поверхности солнца и, слѣдовательно, увеличивать или уменьшать діаметры солнца въ этихъ направленіяхъ.

Прійдя къ этому мнѣнію, я началъ рыться въ журналахъ и спеціальныхъ работахъ по теоріи солнца, думая найти какія-нибудь работы и указанія по этому вопросу; но оказалось, что по этому вопросу почти ничего не сдѣлано, такъ какъ всѣ работы относительно измѣненія діаметра солнца носятъ статистическій характеръ.

Мнѣ кажется, что первый поднялъ вопросъ объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій солнечныхъ пятенъ и протуберанцевъ A. Secchi; его статья относительно этого помѣщена въ журналѣ „Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani" за 1873 годъ. Эта статья касается 182 меридіанальныхъ наблюденій діаметра солнца за время отъ 12 іюля 1871 г. по 12 іюля 1872 г. и въ ней между прочимъ A. Secchi дѣлаетъ выводъ, что діаметръ больше, когда пятенъ и протуберанцевъ меньше. Затѣмъ относительно зависимости величины діаметра солнца отъ пятнообразовательной дѣятельности солнца существуютъ работы Tacchini, Hilfiker-a, Wolf-a, Auwers-a и другихъ. Большинство этихъ работъ сводится къ сравненію кривыхъ такъ называемыхъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ діаметровъ солнца, выводимыхъ изъ меридіанальныхъ наблюденій различныхъ обсерваторій, съ кривыми относительныхъ чиселъ Вольфа, при чемъ Вольфомъ давались даже эмпирическія формулы для величины діаметра солнца въ зависимости отъ относительныхъ чиселъ.

Изъ этихъ работъ наиболѣе интересно изслѣдованіе Auwers-а, которое приводитъ къ отрицательнымъ результатамъ, а именно: Auwers говоритъ, что маленькія измѣненія діаметра солнца зависятъ отъ неисправленныхъ личныхъ уравненій наблюдателей и что величина діаметра солнца не мѣняется, а мѣняются личныя уравненія наблюдателей. Что же касается годового періода, то Auwers говоритъ, что онъ зависитъ отъ наблюдателя, атмосферныхъ условій и вліянія температуры на инструментъ.

Кромѣ того нужно обратить вниманіе на то, что меридіанальныя наблюденія даютъ величины діаметра въ направленіи по суточному движенію, а этотъ послѣдній въ теченіе года измѣняетъ свой наклонъ къ экватору солнца отъ -26^0 до $+26^0$, такъ что измѣряется въ теченіе года не одинъ и тотъ же діаметръ.

Познакомившись съ литературой по этому вопросу я въ іюнѣ мѣсяцѣ настоящаго 1895 года предпринялъ измѣренія діаметровъ солнца въ различныхъ направленіяхъ. Наблюденія производились при помощи 6-ти-дюймового рефрактора Харьковской Обсерваторіи съ проектированьемъ солнца и нитей нитянаго микрометра на экранъ. Сѣтка нитей состояла изъ 2-хъ параллельныхъ нитей въ одномъ направленіи и большого числа нитей къ нимъ перпендикулярныхъ, перпендикулярность которыхъ была провѣрена. Микрометрическая коробка устанавливалась такъ, чтобы 2 параллельныя нити были установлены въ направленіи по суточному движенію и затѣмъ наблюдались моменты касанія западнымъ и восточнымъ краями солнца группы нитей. Въ этомъ случаѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ находило солнце, въ томъ же мѣстѣ оно и сходило съ нити. Затѣмъ микрометрическая коробка поворачивалась на опредѣленный уголъ γ, и, слѣдовательно, на этотъ уголъ поворачивались и нити, и снова наблюдалось прохожденіе солнца черезъ нити, но только теперь, очевидно, измѣрялся діаметръ, наклоненный къ діаметру въ направленіи по суточному движенію подъ угломъ γ. Въ этомъ случаѣ, если коробка повернута въ направленіи $NWSO$, край солнца находитъ ниже, чѣмъ сходитъ, а при обратномъ движеніи—наоборотъ. Измѣренный въ этомъ случаѣ діаметръ r, очевидно, будетъ больше діаметра въ направленіи по суточному движенію и дѣйствительная величина его, очевидно, равна $r\cos\gamma$. Затѣмъ по способамъ, употребляемымъ для опредѣленія геліографическихъ широтъ протуберанцевъ, можно опредѣлить широту западнаго конца измѣреннаго діаметра или наклонъ его къ экваторіальному діаметру солнца. Нужно замѣтить, что окуляръ при харьковскомъ рефракторѣ съ наименьшимъ увеличеніемъ позволяетъ измѣрять діаметры съ наклономъ не болѣе 31^0 къ діаметру въ направленіи по суточному движенію, а этотъ послѣдній, вслѣдствіе наклона экватора къ эклиптикѣ приблизительно въ $23^0 5$, наклоненія экватора солнца къ эклиптикѣ приблизительно въ 7^0 и долготы восходящаго узла солнечнаго экватора приблизительно въ 75^0, можетъ имѣть наибольшій наклонъ къ солнечному экватору около 26^0; слѣдовательно, съ даннымъ увеличеніемъ въ теченіе года можно измѣрять діаметры въ предѣлахъ наклонностей къ солнечному экватору отъ -57^0 до $+57^0$. Вышеназванныя измѣренія на Харьковской Обсерваторіи продолжались съ 10 іюня по октябрь мѣсяцъ и за этотъ періодъ широты западнаго конца измѣряемыхъ діаметровъ находились въ предѣлахъ отъ -41^0 до $+54^0$.

Мнѣ кажется, что изъ такого рода наблюденій, при большомъ количествѣ ихъ, можно бы было вывести заключеніе о сжатіи солнца подобно тому, какъ это можно вывести изъ геліометрическихъ наблюденій.

Теперь посмотримъ, какъ можно получить приведенную и исправленную величину измѣреннаго діаметра.

Какъ извѣстно, величина діаметра, приведенная къ экватору, къ среднему разстоянію солнца отъ земли и исправленная на измѣненіе прямого восхожденія солнца въ теченіе сутокъ, будетъ равна

$$r \cos\gamma \cos\delta (1-\lambda)\varrho\,,$$

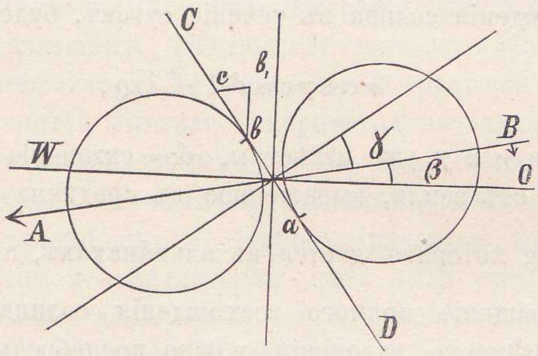
гдѣ обозначенія r и γ уже извѣстны, δ — склоненіе солнца, ϱ — разстояніе солнца отъ земли, выраженное въ среднемъ разстояніи солнца отъ земли и log котораго дается въ альманахахъ, а $\lambda = \frac{\Delta\alpha}{86400 + \Delta\alpha}$, гдѣ $\Delta\alpha$ — приращеніе прямого восхожденія солнца за однѣ сутки. (Вліяніемъ измѣненія склоненія можно пренебречь, такъ какъ это вліяніе очень незначительно). Если наблюдать солнце, когда оно высоко стоитъ надъ горизонтомъ, то другихъ поправокъ можно и не вводить, въ противномъ случаѣ нужно ввести поправку на рефракцію.

Прежде чѣмъ сказать, какъ вводится поправка на рефракцію, нужно замѣтить, что вообще наблюдать солнце удобнѣе и выгоднѣе, когда оно стоитъ низко надъ горизонтомъ, во-первыхъ потому, что при высокомъ положеніи солнца наблюдать бываетъ часто неудобно, что оказываетъ, конечно, вліяніе на результатъ наблюденій, а во-вторыхъ потому, что въ полдень воздухъ сильно нагрѣвается, волнуется и потому изображенія бываютъ очень дрожащія. Если опредѣлять абсолютную величину діаметра солнца, то низкимъ положеніемъ солнца, конечно, пользоваться нельзя, такъ какъ мы не можемъ ввести точно поправку и на рефракцію, и на измѣненіе діаметра солнца отъ дѣйствія атмосферы; но, если цѣль наблюденій, какъ было въ данномъ случаѣ, сравнить величины діаметровъ въ различныхъ направленіяхъ, то можно пользоваться и наблюденіями

*

въ горизонтѣ, если умѣть вводить поправку на рефракцію. Легко понять, что рефракція не оказываетъ вліянія на величину діаметра, измѣряемаго въ направленіи по суточному движенію, такъ какъ находящій и сходящій края солнца будутъ имѣть одну и ту же высоту и, слѣдовательно, рефракцію можно считать для нихъ одинаковой; но этого нельзя сказать относительно другихъ діаметровъ. Дѣйствительно, если находящій край имѣетъ меньшее зенитное разстояніе, чѣмъ сходящій, то въ тотъ моментъ, когда наблюдается схожденіе съ нити края солнца, угловой діаметръ уже пройденъ, такъ какъ для сходящаго края солнца рефракція больше и потому наблюденный діаметръ больше дѣйствительнаго. Если же находящій край солнца имѣетъ большее зенитное разстояніе, то происходитъ явленіе обратное. Слѣдовательно, поправку нужно ввести собственно не на рефракцію, а на измѣненіе ея вслѣдствіе разности высотъ сходящаго и находящаго края солнца.

Положимъ на экранѣ AB — направленіе суточнаго движенія, CD — нить, черезъ которую наблюдается прохожденіе краевъ солнца, γ—уголъ наклона измѣряемаго діаметра къ діаметру въ направленіи по суточному движенію, β—наклонъ линіи суточнаго движенія къ горизонту.



Въ этомъ случаѣ солнце находитъ ниже, чѣмъ оно сходитъ. Такъ какъ въ точкѣ b окружности солнца рефракція меньше чѣмъ въ точкѣ a, то видимая высота точки b надъ a меньше дѣйствительной, а потому въ моментъ наблюденія схожденія края солнца, солнце не сходитъ съ той же линіи, которой касалось оно при нахожденіи, такъ какъ въ дѣйствительности относительно точки a точка b на разность рефракціи $dr = bb_1$ находится выше и, чтобы пройти угловой діаметръ, солнце должно пройти еще путь b_1c, на что оно употребитъ нѣкоторое время dt. Изъ треугольника cbb_1 опредѣлимъ dt:

$$dt = \frac{dr}{15} \cdot \frac{\sin cbb_1}{\sin bcb_1} = + \frac{dr \sin(\beta - \gamma)}{15 \cos\gamma}.$$

Если солнце сходитъ ниже, чѣмъ находитъ, то подобнымъ же образомъ найдемъ, что $dt = -\dfrac{dr \sin(\beta-\gamma)}{15 \cos\gamma}$, при чемъ γ считается положительнымъ внизъ отъ AB и отрицательнымъ вверхъ.

Слѣдовательно, для опредѣленія dt нужно знать dr, β и γ. dr есть не что иное какъ разность рефракціи для сходящаго и находящаго края солнца, т. е. измѣненіе рефракціи при измѣненіи высоты на величину $ab\cos(\beta-\gamma)$ или на величину $r\sin\gamma$ при средней высотѣ солнца h, которая находится по часовому углу солнца и склоненію его, напримѣръ, изъ діаграммы высотъ Radau, построенной для широты города Харькова. Что касается β, т. е. угла линіи суточнаго движенія съ горизонтомъ, то легко видѣть изъ сферическаго треугольника, вершинами котораго служатъ на небесной сферѣ положеніе солнца, проекція его на горизонтъ и точка захода или восхода солнца, что $\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\,40^0\cos 15(\tau-t)$, гдѣ 40^0 представляетъ приблизительный наклонъ плоскости экватора къ плоскости горизонта, τ—приблизительное время восхода или захода, а t—приблизительное время наблюденія солнца. Слѣдовательно, по t и δ опредѣляется изъ діаграммы Radau высота солнца h, а по $r\sin\gamma$ и h опредѣляется dr, затѣмъ по t и τ при помощи небольшой таблички опредѣляется β; а зная dr, β и γ, опредѣлимъ и $\pm dt$; при чемъ знакъ $+$ берется въ томъ случаѣ, если солнце находитъ ниже чѣмъ сходитъ, а знакъ—въ противномъ случаѣ. Эта поправка $\pm dt$ на разность рефракціи при высотѣ солнца $>15^0$ будетъ $<0^{s}\!\cdot\!1$ времени, но при наблюденіи въ горизонтѣ можетъ доходить до $1^{s}\!\cdot\!0$.

Найдя приведенныя и исправленныя на рефракцію величины діаметровъ, можно ихъ уже сравнивать другъ съ другомъ и сопоставлять съ явленіями солнечныхъ пятенъ и протуберанцевъ. За вышеуказанный періодъ, съ 10 іюня по октябрь мѣсяцъ, дней измѣренія діаметровъ солнца было 38 и измѣрено въ эти дни 232 діаметра въ различныхъ направленіяхъ, при чемъ вѣроятная ошибка одного измѣренія, выводимаго изъ прохожденія западнаго и восточнаго края солнца черезъ 7,6 или 5 нитей, была большею частью значительно $<0^{s}\!\cdot\!1$ и очень рѣдко достигала величины $0^{s}\!\cdot\!1$ времени.

Величины всѣхъ измѣренныхъ діаметровъ я не привожу и изъ 38 дней наблюденій привожу только результаты 27 дней наблюденія, такъ какъ остальные 11 дней не представляютъ ничего особенно интереснаго въ сравненіи съ приводимыми 27 днями: въ эти послѣдніе дни исчезали и появлялись изъ-за видимой поверхности солнца группы пятенъ; въ эти дни наблюдались наиболѣе замѣчательные протуберанцы, въ эти же дни происходили на солнцѣ и другія сильныя возмущенія видимой его поверхности. Вычисленныя величины діаметровъ, измѣренныхъ въ эти 27 дней, для наглядности представлены на прилагаемой къ сему таблицѣ, на которой горизонтальныя линіи, соотвѣтствующія различнымъ днямъ, представляютъ части видимой окружности солнца съ бывшими въ то время протуберанцами въ предѣлахъ позиціонныхъ *NWSO*-овыхъ угловъ отъ 48^0 до 126^0 и отъ 236^0 до 306^0. Кромѣ протуберанцевъ на таблицѣ крестиками обозначены тѣ мѣста на видимой окружности солнца, вблизи которыхъ во время измѣренія діаметровъ находилась какая-нибудь группа пятенъ. Къ этимъ горизонтальнымъ линіямъ внизу прибавлены коротенькія вертикальныя черточки, которыя указываютъ на положеніе западнаго или восточнаго конца измѣреннаго діаметра, а величина его обозначена на таблицѣ рядомъ съ черточками двумя цифрами: десятыми и сотыми долями секунды, причемъ 2^m и 8^s подразумѣваются; если же величина діаметра была $2^m\ 7^s$ или $2^m\ 9^s$ съ долями, то на таблицѣ величина діаметра обозначена тремя цифрами.

При взглядѣ на эту табличку сейчасъ же видно, что діаметры солнца въ различныхъ направленіяхъ неравны и, слѣдовательно, что фигура равновѣсія видимой поверхности солнца представляетъ не правильную фигуру шара или эллипсоида вращенія, а постоянно измѣняющуюся волнообразную фигуру; кромѣ того, если обратимъ вниманіе на тѣ мѣста поверхности солнца, въ направленіи на которыя діаметръ сравнительно очень большой, то увидимъ, что всякое значительное увеличеніе діаметра, соотвѣтствующее какъ бы подъему видимой поверхности солнца, совпадаетъ съ уменьшеніемъ діаметровъ въ направленіи на сосѣднія части видимой окружности солнца или съ уменьшеніемъ діаметра въ томъ же направленіи въ предыдущій или на слѣдующій день. При этомъ нужно замѣтить, что, собственно говоря, сравнивать результаты измѣреній различныхъ дней не всегда вполнѣ возможно, такъ какъ наблюденія производились не въ одно и тоже время и при разныхъ атмосферныхъ условіяхъ и потому различнымъ образомъ вліяла на величину солнца атмосфера и кромѣ того всякій день дѣлалась, конечно, новая установка экрана въ фокусѣ изображенія солнца. Примѣромъ того, что подъемъ сопровождается опусканіемъ, могутъ служить слѣдующіе дни измѣреній: 22 іюня, 20, 21 августа и 4, 5 сентября.

Неравенство діаметровъ зависитъ, повидимому, отъ тѣхъ явленій, которыя происходятъ на солнцѣ: отъ солнечныхъ пятенъ, протуберанцевъ и, вѣроятно, еще отъ другихъ явленій, о которыхъ мы еще ничего не знаемъ. Наиболѣе отчетливо обнаруживается вліяніе пятенъ, а именно: оказывается, что изъ 27 случаевъ исчезновенія или появленія пятенъ въ тѣхъ мѣстахъ, въ направленіи на которыя измѣрялись діаметры, въ 19 случаяхъ пятна произвели, какъ будто, подъемъ поверхности солнца, въ четырехъ случаяхъ въ мѣстахъ исчезновенія или появленія группы пятенъ, обозначенныхъ на таблицѣ цыфрами 7, 10, 23, 24, произошло опусканіе, но при этомъ нужно замѣтить, что во время измѣренія діаметровъ группы 10, 23 и отчасти 24 не были точно на краю солнца, а группа 7 не произвела подъема вслѣдствіе того, что протуберанецъ видѣнный 2-го и 3-го іюля за позиціоннымъ угломъ 296^0, былъ, повидимому, причиной значительнаго опусканія поверхности солнца 4 іюля; что же касается остальныхъ 4-хъ случаевъ: 4, 21, 22 и 26, то въ этихъ случаяхъ ничего нельзя сказать ни о подъемѣ, ни объ опусканіи поверхности солнца.

Слѣдовательно, можно вывести заключеніе, что пятна производятъ подъемъ видимой поверхности солнца и увеличиваютъ діаметръ солнца въ направленіи на пятна.

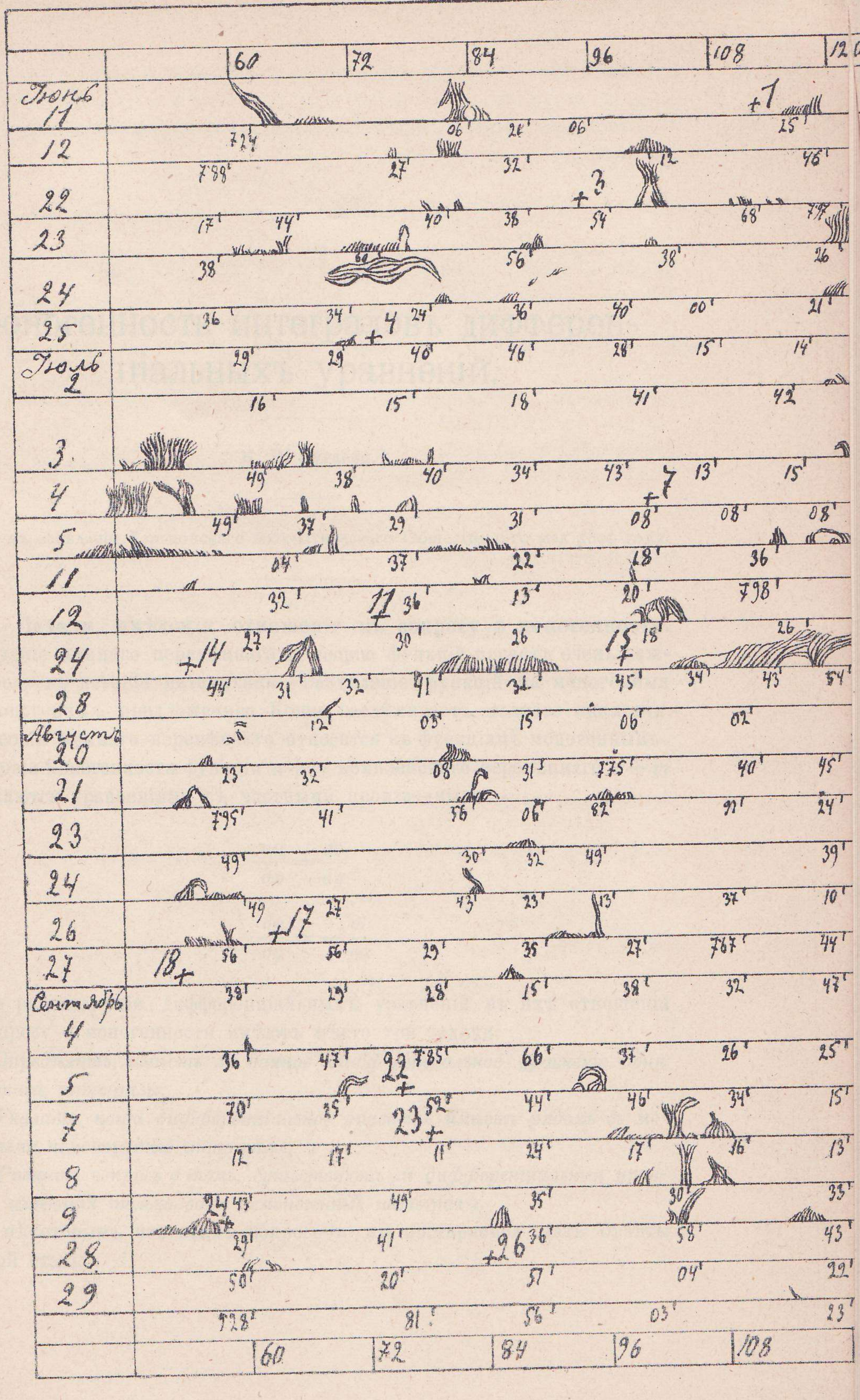
Что касается протуберанцевъ, то дѣйствіе ихъ на видимую фигуру солнечной поверхности такъ же ясно не обнаруживается, но тѣмъ не менѣе нѣкоторые подъемы и опусканія можно объяснить дѣйствіемъ протуберанцевъ, такъ напримѣръ очень возможно, что протуберанцы 3, 4 іюля за позиціонными углами отъ 48^0—68^0 были причиной подъема поверхности солнца въ мѣстѣ своего появленія и этотъ подъемъ сопровождался 5 іюля опусканіемъ. Особенно интересны подъемъ и опусканіе, произведенныя протуберанцемъ 2, 3 іюля за позиціоннымъ угломъ 296^0: 2 іюля онъ произвелъ подъемъ поверхности солнца, затѣмъ 3 іюля въ двухъ мѣстахъ замѣтно уже опусканіе, а 4 іюля, когда видимая дѣятельность протуберанца прекратилась, ясно обнаружилось опусканіе поверхности солнца.

Но особенно сильные подъемы и опусканія нельзя объяснить ни пятнами, ни протуберанцами и, вѣроятно, причиной ихъ служатъ процессы, происходящіе на солнцѣ, которыхъ мы не видимъ и о которыхъ не знаемъ. Что же касается реальности ихъ, то нужно замѣтить, что иногда, когда приходилось наблюдать очень большой діаметръ, измѣренія черезъ нѣкоторое время повторялись съ новой установкой, и случалось, что вновь полученная величина діаметра отличалась отъ первоначальной нѣсколькими сотыми долями секунды. Особенно рельефные подъемы и опусканія такого рода наблюдались 20-го, 21-го августа и 4-го сентября.

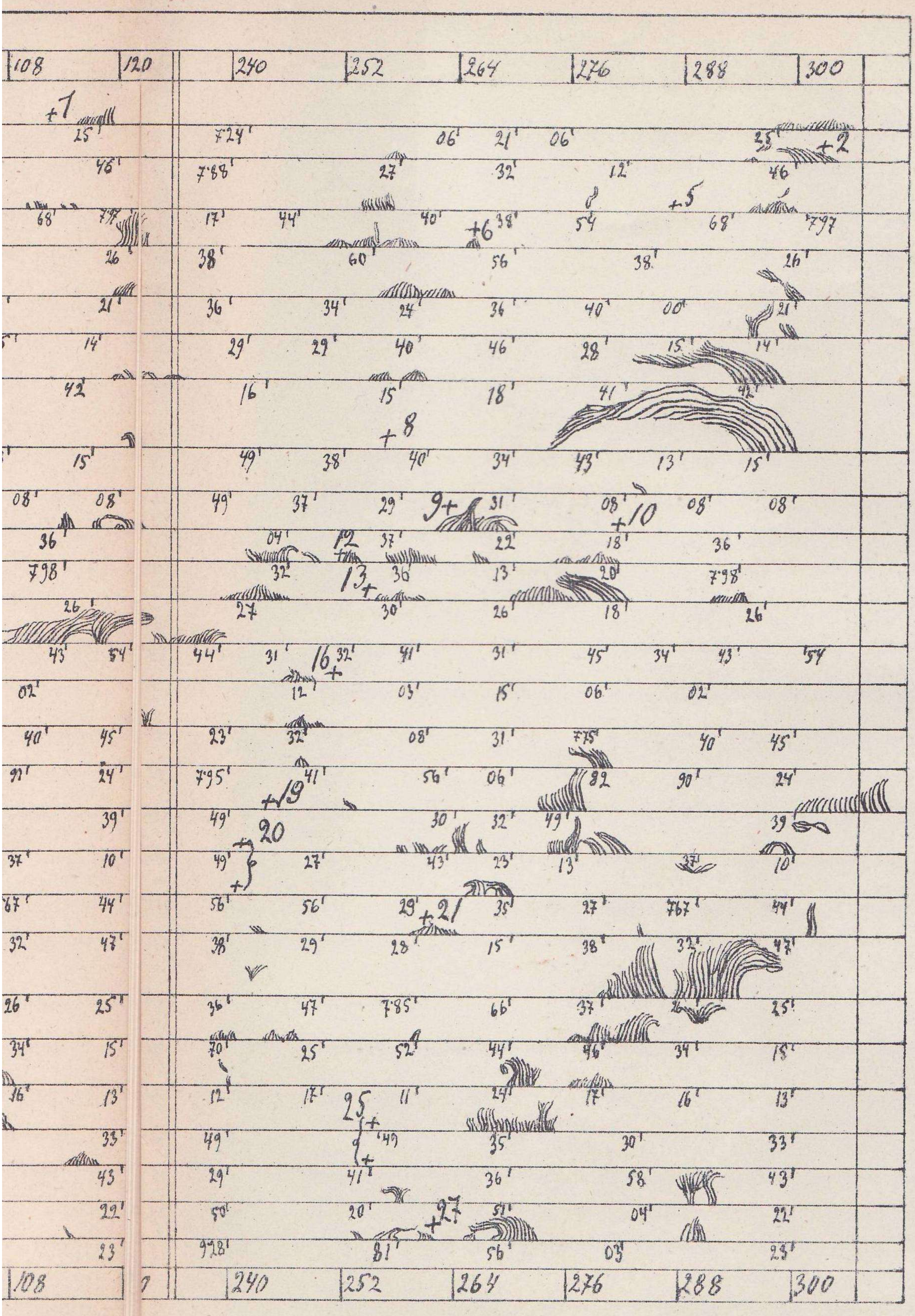
Въ заключеніе нужно сказать нѣсколько словъ по поводу кажущагося противорѣчія между выводами изъ вышеназванныхъ наблюденій относительно вліянія пятенъ на величину діаметра солнца и утвержденіями Secchi, Wolf-а и другихъ, что, когда пятенъ больше, то діаметръ меньше и наоборотъ. Это противорѣчіе происходитъ оттого, что при сравненіи величины діаметра солнца съ пятнообразовательной дѣятельностью солнца берутся діаметры въ направленіи по суточному движенію, тогда какъ пятна образуются въ разныхъ широтахъ.

Во время maximum-а пятна образуются въ среднихъ широтахъ и большею частью уменьшаютъ діаметръ солнца въ направленіи по суточному движенію, такъ какъ увеличеніе діаметра въ направленіи на пятно сопровождается уменьшеніемъ діаметровъ въ направленіи на сосѣднія части поверхности солнца; а во время minimum-а пятна образуются почти на самомъ экваторѣ или въ высшихъ широтахъ, а потому пятна большею частью будутъ увеличивать діаметръ въ направленіи по суточному движенію или никакого дѣйствія на него не будутъ оказывать. Вслѣдствіе этого ходъ кривой діаметровъ во время maximum-а долженъ былъ бы быть болѣе правильный, а во время minimum-а кривая должна бы итти скачками. Подобный ходъ имѣетъ кривая, помѣщенная въ статьѣ Hilfiker-а: „Première étude sur les observations du diamètre du Soleil faites à l'Observatoire de Neuchatel de 1862—1883".

Что же касается работы A. Secchi, поднявшей, повидимому, вопросъ о связи между дѣятельностью солнца и его діаметромъ, то можно замѣтить, что наблюденія, помѣщенныя въ этой работѣ, продолжались съ іюля мѣсяца 1871 года по іюль 1872 года, т. е. во время близкое къ maximum-у (онъ былъ въ 1870 году), и потому пятна въ большинствѣ случаевъ уменьшали діаметръ солнца въ направленіи по суточному движенію.



60 72 84 96 108 120
Июнь 11
12
22
23
24
25
Июль 2
3
4
5
11
12
24
28
Август 20
21
23
24
26
27
Сентябрь 4
5
7
8
9
28
29
60 72 84 96 108



108
120
240
252
264
276
288
300
+1
+2
+5
+6
+8
9+
+10
12
13+
16+
+19
+20
+21
25
+27

Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій.

Н. В. Бугаева.

Читано въ засѣданіи Харьковскаго математическаго Общества 9-го мая 1895 года.

§ 1. Задачи, имѣющія отношеніе къ вопросу о моногенности. Введеніе мнимаго перемѣннаго въ теорію функцій играетъ очень важную роль въ исторіи математики. Раздѣленіе функцій на моногенныя и немоногенныя, предложенное Коши, заслуживаетъ полнаго вниманія. Вся теорія мнимаго перемѣннаго относится къ функціямъ моногеннымъ.

Условія моногенности функціи $u+vi$ комплекснаго перемѣннаго $x+yi$ выражаются уравненіями съ частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При разсмотрѣніи дифференціальныхъ уравненій въ ихъ отношеніи къ вопросу о моногенности имѣютъ мѣсто три задачи:

1. *Опредѣлить, имѣетъ ли данное дифференціальное уравненіе одни моногенные интегралы;*

2. *Указать, когда дифференціальное уравненіе имѣетъ рядомъ съ моногенными немоногенные интегралы, и*

3. *Рѣшить вопросъ о томъ, существуютъ ли дифференціальныя уравненія, имѣющія только одни немоногенные интегралы.*

По нѣкоторымъ изъ этихъ вопросовъ мы постараемся дать отвѣты въ этой статьѣ.

§ 2. Моногенность интеграловъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

Не трудно показать, что дифференціальное уравненіе перваго порядка вида

$$\frac{d\alpha}{dz} = f(z,\ \alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

въ томъ случаѣ, когда $f(z,\ \alpha)$ такого свойства, что для

$$z = x + yi\,,$$
$$\alpha = u + vi\,,$$
$$f(z,\ \alpha) = f(x + yi,\ u + vi) = P + Qi\,,$$

имѣетъ только одни моногенные интегралы.

Дѣйствительно, изъ уравненія

$$d\alpha = f(z,\ \alpha)\, dz$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) =$$
$$= (P + Qi)\ (dx + idy) = Pdx - Qdy + i\ (Qdx + Pdy).$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, получаемъ два уравненія:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = Pdx - Qdy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = Qdx + Pdy.$$

Эти соотношенія ведутъ къ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = Q, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -Q, \ \dfrac{\partial v}{\partial y} = P. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Уравненія (2) прямо ведутъ къ условіямъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что дифференціальныя уравненія вида (1) имѣютъ только одни моногенные интегралы.

§ 3. **Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій вида**

$$\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = f(z, \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

въ томъ случаѣ, когда $f(x+yi,\ u+vi) = P+Qi$.

Вопросъ о моногенности интеграловъ уравненія (3) имѣетъ значеніе уже потому, что этому уравненію удовлетворяютъ Абелевы интегралы и Абелевы функціи.

Уравненіе (3) ведетъ къ уравненію

$$d\alpha^2 = f(z,\ \alpha)dz^2 = (P+Qi)dz^2$$

или къ уравненію

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\right]^2 =$$

$$= (P+Qi)(dx^2 + 2i\,dx\,dy - dy^2),$$

которое окончательно приводится къ виду:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}dx dy + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy^2\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy^2\right] +$$

$$+2i\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx dy + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dy^2\right] =$$

$$= Pdx^2 - Pdy^2 - 2Qdxdy + i(Qdx^2 + 2Pdxdy - Qdy^2).$$

Это уравненіе даетъ шесть уравненій съ частными производными:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = -P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -Q \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{2\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\frac{2\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-Q \dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=P \dots\dots\dots\dots (9)$$

Изъ уравненій (7) и (8) находимъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{Q}{\dfrac{2\partial u}{\partial x}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{Q}{\dfrac{2\partial u}{\partial y}} \dots\dots (10)$$

Складывая уравненія (7) и (8), получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0 \dots\dots\dots\dots (11)$$

Вставляя величины (10) въ уравненіе (9), получимъ послѣ приведенія уравненіе:

$$Q\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2P\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0 \dots\dots (12)$$

Вставляя выраженія (10) въ уравненіе (6), получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Q^2}{4\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial y}}=-Q$$

или уравненіе

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}Q+Q^2=0$$

или

$$\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Q\right)^2=0,$$

откуда имѣемъ

$$2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Q=0 \dots\dots\dots\dots (13)$$

Изъ уравненій (13) и (7) имѣемъ

$$2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

или уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Изъ уравненій (13) и (8) получимъ

$$2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Уравненія (14) и (15), какъ необходимыя слѣдствія уравненія (3) и уравненій (4), (5), (6), (7), (8) и (9), ясно показываютъ, что уравненіе (3) допускаетъ только одни моногенные интегралы.

Это общее заключеніе весьма важно для теоріи Абелевыхъ функцій.

§ 4. **Вопросъ о моногенности интеграловъ въ примѣненіи къ дифференціальному уравненію**

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} = f(z,\ \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

въ томъ случаѣ, когда для $z = x + yi$, $\alpha = u + vi$

$$f(x + yi,\ u + vi) = P + Qi.$$

Изъ уравненія (16) вытекаетъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2\right) =$$

$$= (P + Qi)\,(dx + idy)^2 =$$

$$= Pdx^2 - Pdy^2 - 2Qdxdy + i\,(Qdx^2 - Qdy^2 + 2Pdxdy),$$

которое ведетъ къ слѣдующимъ уравненіямъ съ частными производными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Складывая уравненія (17) и (18), а также (20) и (21), получаемъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

изъ которыхъ видно, что и u и v гармоническія функціи.

Складывая уравненія (19) и (20) и сравнивая уравненія (19) и (21), получимъ два уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

Интегрируя уравненія (24), получаемъ уравненія

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\chi(x)\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\psi(y)\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

гдѣ $\chi(x)$ и $\psi(y)$ двѣ произвольныя функціи.

Уравненія (25) и (26) ясно показываютъ, что гармоническія функціи u и v, удовлетворяющія дифференціальному уравненію (16), не будутъ вообще функціями моногенными.

Интегралы уравненія (16) будутъ моногенными функціями только въ томъ частномъ случаѣ, когда произвольныя функціи $\chi(x)$ и $\psi(y)$ обращаются въ нули.

Можно показать, что функціи $\chi(x)$ и $\psi(y)$ суть линейныя функціи перемѣнныхъ.

Дѣйствительно, вставляя величины (25) и (26) въ уравненія (23), находимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi'(x)+\psi'(y)=0\,,\ldots\ldots\ldots(27)$$

откуда видно, что вообще

$$\psi'(y)=C_1,\quad \chi'(x)=-C_1$$

и слѣдовательно

$$\psi(y)=C_1 y+C_2,$$

$$\chi(x)=-C_1 x+C_3.$$

Уравненія (25) и (26) принимаютъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=C_1y+C_2\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-C_1x+C_3\,.$$

Интегралы будутъ моногенными только тогда, когда произвольныя постоянныя обращаются въ нули, т. е. когда

$$C_1=0\,,\qquad C_2=0\,,\qquad C_3=0\,.$$

§ 5. Немоногенные интегралы дифференціальнаго уравненія

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=z\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(28)$$

Намъ извѣстно, что моногенный интегралъ этого уравненія выражается формулою:

$$\alpha=\frac{z^3}{6}+Cz+C'=\frac{1}{6}(x+yi)^3+C(x+yi)+C'\,,\;.\;.\;.\;(29)$$

въ которой мы имѣемъ два произвольныхъ постоянныхъ C и C'.

Чтобы найти немоногенный интегралъ этого уравненія, мы замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=x+yi\,;$$

слѣдовательно, въ данномъ случаѣ

$$P=x\,,\qquad Q=y$$

и рядъ уравненій отъ (17) до (22) приметъ видъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(30)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=y\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(31)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-y\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(34)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-y\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(32)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=x\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(35)$$

Интегрируя эти уравненія, имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + \psi_1(y)\,,$$

$$u = \frac{x^3}{6} + x\psi_1(y) + \psi_2(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

а также

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -xy + \varphi_1(x)\,,$$

$$u = -\frac{xy^2}{2} + y\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Изъ уравненія (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\psi_1'(y) + \psi_2'(y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Сравнивая величины (36) и (31), имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) = -x\,,$$

откуда имѣемъ:

$$\psi_1''(y) = -1\,, \qquad \psi_2''(y) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\psi_2(y) = C_1 y + C_2\,,$$

$$\psi_1(y) = -\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4\,.$$

Вставляя величины $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ въ уравненіе (a), получимъ:

$$u = \frac{x^3}{6} + x\left(-\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4\right) + C_1 y + C_2 \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Такъ какъ по уравненію (32)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -y = -y + C_3\,,$$

то $C_3 = 0$ и уравненіе (c) приметъ видъ:

$$u = \frac{x^3}{6} + x\left(-\frac{y^2}{2} + C_4\right) + C_1 y + C_2 =$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + C_4 x + C_1 y + C_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Опредѣляя функцію v по уравненіямъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = y\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -y\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = x\,,$$

имѣемъ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = xy + \Theta_1(y)\,,$$

$$v = \frac{yx^2}{2} + x\,\Theta_1(y) + \Theta_2(y) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Изъ уравненія

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = x\,\Theta_1''(y) + \Theta_2''(y) = -y$$

вытекаетъ, что

$$\Theta_1''(y) = 0\,, \qquad \Theta_2''(y) = -y\,,$$

откуда

$$\Theta_1(y) = K_1 y + K_2\,,$$

$$\Theta_2(y) = -\frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4;$$

слѣдовательно,

$$v = \frac{yx^2}{2} + x(K_1 y + K_2) - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4 .$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = x = x + K_1\,,$$

то $K_1 = 0$ и

$$v = \frac{yx^2}{2} + K_2 x - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Такъ какъ $\alpha = u + vi$, то на основаніи уравненій (d) и (e) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + C_4x + C_1y + C_2 + \\ + i\left(\frac{yx^2}{2} + K_2x - \frac{y^3}{6} + K_3y + K_4\right). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (f)$$

Моногенный интегралъ (29) имѣлъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{(x+yi)^3}{6} + C(x+yi) + C' = \\ = \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + i\left(\frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + C(x+yi) + C'. \end{aligned}\right\} \ldots (29)$$

Немоногенный же интегралъ (f) имѣетъ видъ

$$\alpha = \frac{z^3}{6} + (C_4 + iK_2)x + (C_1 + iK_3)\,y + C_2 + iK_4.$$

Полагая

$$C_4 + iK_2 = M, \quad C_1 + iK_3 = N, \quad C_2 + iK_4 = P,$$

мы выражаемъ немоногенный интегралъ въ видѣ

$$\alpha = \frac{z^3}{6} + Mx + Ny + P. \ldots\ldots (g)$$

Для моногенности необходимо, чтобы выполнялись условія:

$$N = Mi = Ci,$$

$$P = C'.$$

Такимъ образомъ, моногенный интегралъ (29) зависитъ отъ двухъ, а немоногенный (g) отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ.

Отсюда выводимъ

Общее заключеніе: *Уравненіе второго порядка* $\frac{d^2\alpha}{dz^2} = f(z, \alpha)$ *имѣетъ моногенные и немоногенные интегралы. Моногенные интегралы являются какъ частные случаи интеграловъ немоногенныхъ.*

§ 6. **Нелинейное дифференціальное уравненіе, имѣющее моногенные и немоногенные интегралы.**

Хорошимъ примѣромъ такого случая можетъ служить дифференціальное уравненіе:

$$\alpha \frac{d^2\alpha}{dz^2} = \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2. \ldots\ldots (37)$$

Уравненіе это можетъ быть легко проинтегрировано.

Дѣйствительно, оно даетъ

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{dz^2}}{\frac{d\alpha}{dz}} = \frac{\frac{d\alpha}{dz}}{z},$$

откуда

$$l\left(\frac{d\alpha}{dz}\right) = l(\alpha) + l(C),$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = C\alpha, \quad \alpha = C'e^{Cz},$$

или

$$\alpha = C'e^{C(x+yi)} \text{. . . . .} (38)$$

Не трудно видѣть, что это же уравненіе имѣетъ немоногенный частный интегралъ:

$$\alpha = Ce^{x+y} \quad \text{. . . . .} (39)$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (37), мы видимъ, что интегралъ (39) ему удовлетворяетъ.

Для насъ остается пока не рѣшеннымъ вопросъ о томъ, существуютъ ли всегда такія общія выраженія, изъ которыхъ вытекаютъ въ формѣ простого слѣдствія какъ моногенные, такъ и немоногенные интегралы.

§ 7. **Происхожденіе дифференціальныхъ уравненій, имѣющихъ немоногенные интегралы.**

Можно легко образовать дифференціальное уравненіе, которое для перемѣннаго $z = x + yi$ имѣетъ немоногенный интегралъ $\alpha = f(x, y)$.

Для этого изъ двухъ уравненій

$$z = x + yi \text{. . . . .} (40)$$

$$\alpha = f(x, y) \text{. . . . .} (41)$$

получаемъ два уравненія:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}} \text{. . . . . .} (42)$$

*

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(1+i\frac{dy}{dx}\right)^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(43)$$

Исключивъ изъ четырехъ уравненій (40), (41), (42) и (43) величины x, y, $\frac{dy}{dx}$, получаемъ дифференціальное уравненіе:

$$F\left(z,\ \alpha,\frac{d\alpha}{dz},\ \frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)=0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(44)$$

интеграломъ котораго будетъ функція (41).

Изъ самаго происхожденія уравненія (44) видно, что немоногенные интегралы встрѣчаются въ первый разъ только въ дифференціальныхъ уравненіяхъ второго порядка.

Изъ $\mu+2$ уравненій

$$z=x+y\iota,$$

$$\alpha=f(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\dots C_{\mu-2}),\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(45)$$

$$\frac{d\alpha}{dz}=\frac{df}{dz}=\frac{df}{dx+idy},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{d^2f}{dz^2}=\frac{d^2f}{(dx+idy)^2},$$

$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

$$\frac{d^\mu\alpha}{dz^\mu}=\frac{d^\mu f}{(dx+idy)^\mu},$$

можно исключить $\mu+1$ величинъ x, y, $\frac{dy}{dx}$, C_1, $C_2,\dots C_{\mu-2}$ и получить дифференціальное уравненіе

$$F\left(z,\ \alpha,\ \frac{d\alpha}{dz},\ \frac{d^2\alpha}{dz^2},\dots\frac{d^\mu\alpha}{dz^\mu}\right)=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(46)$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе порядка μ можетъ имѣть немоногенный интегралъ (45), содержащій $\mu-2$ произвольныхъ постоянныхъ.

Одинъ случай движенія вязкой несжимаемой жидкости.

В. А. Стеклова.

1. Назовемъ черезъ x, y, z координаты точекъ пространства, заполненнаго вязкой несжимаемой жидкостью, черезъ t время, черезъ u, v, w проекціи скорости точки x, y, z жидкости на координатныя оси, черезъ μ плотность жидкости, черезъ p давленіе ея, черезъ U силовую функцію силъ, дѣйствующихъ на частицы жидкости, черезъ k постоянную, пропорціональную коэффиціенту вязкости, и черезъ Δ обозначимъ операцію вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія вязкой несжимаемой жидкости можно представить подъ видомъ

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}-k\Delta u=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial x},\\
&\frac{dv}{dt}-k\Delta v=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial y},\\
&\frac{dw}{dt}-k\Delta w=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial z},
\end{aligned}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Пусть a, b, c суть координаты въ начальный моментъ времени той точки жидкости, координаты которой въ моментъ t суть x, y, z.

Разсматривая x, y, z какъ функціи a, b, c и t, мы преобразуемъ предыдущія уравненія къ виду

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{da}-k\left(\varDelta u\frac{dx}{da}+\varDelta v\frac{dy}{da}+\varDelta w\frac{dz}{da}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial a},$$

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{db}-k\left(\varDelta u\frac{dx}{db}+\varDelta v\frac{dy}{db}+\varDelta w\frac{dz}{db}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial b}, \quad (2)$$

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{dc}-k\left(\varDelta u\frac{dx}{dc}+\varDelta v\frac{dy}{dc}+\varDelta w\frac{dz}{dc}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial c}.$$

Возьмемъ въ жидкости въ начальный моментъ времени замкнутую кривую, опредѣляемую уравненіями

$$a=\varphi_1(\sigma), \quad b=\varphi_2(\sigma), \quad c=\varphi_3(\sigma), \qquad (3)$$

гдѣ σ есть нѣкоторый параметръ.

Будемъ разсматривать движеніе точекъ жидкости, лежащихъ въ начальный моментъ времени на этой кривой.

Положимъ

$$V^2=u^2+v^2+w^2$$

и назовемъ черезъ df элементъ дуги контура (f), въ который преобразуется кривая (3) въ моментъ t, черезъ ϑ уголъ, составляемый касательной къ этому контуру съ направленіемъ скорости V.

Оперируя надъ уравненіями (2) также, какъ поступаютъ съ уравненіями движенія невязкой жидкости для вывода извѣстной теоремы Томсона *), получаемъ

$$\frac{d}{dt}\int V\cos\vartheta df=k\int(\varDelta u dx+\varDelta v dy+\varDelta w dz)\ {}^{**)}.$$

Назовемъ черезъ J циркуляцію скорости по замкнутому контуру (f). Имѣемъ

$$J=\int V\cos\vartheta df.$$

---

*) Н. Е. Жуковскій. „Лекціи по гидродинамикѣ“, стр. 77 и 78.
H. Lamb. „A treatise on the motion of fluids“, p. 157, 158.

**) Интеграція распространяется на весь замкнутый контуръ (f).

Слѣдовательно,

$$\frac{dJ}{dt} = k \int (\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz). \qquad (4)$$

Правая часть этого равенства, вообще говоря, не равна нулю, и принципъ сохраненія вихрей для вязкой жидкости, вообще говоря, не имѣетъ мѣста.

Но для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ теченія жидкости интегралъ

$$\int (\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz)$$

можетъ обращаться въ нуль. Въ этихъ случаяхъ принципъ сохраненія вихрей будетъ справедливъ и для жидкости неидеальной.

H. Poincaré замѣтилъ, что указанной особенностью обладаетъ теченіе, удовлетворяющее слѣдующему условію.

Положимъ

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

гдѣ ξ, η и ζ суть, какъ извѣстно, проекціи на оси координатъ вихревой скорости точки x, y, z.

Вышеупомянутое условіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\zeta}{\zeta}. \qquad (5)$$

Но это условіе слишкомъ мало говоритъ о характерѣ ему соотвѣтствующихъ теченій, ибо задача объ опредѣленіи движенія жидкости, удовлетворяющаго уравненіямъ (1) вмѣстѣ съ уравненіями (5), слишкомъ сложна.

Не безъинтересно указать хотя бы нѣкоторыя изъ дѣйствительно возможныхъ движеній вязкой жидкости, для которыхъ имѣетъ мѣсто принципъ сохраненія вихрей.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ обратить вниманіе на одно изъ такихъ теченій довольно общаго характера, обладающее нѣкоторыми замѣчательными свойствами, которыя считаю не лишнимъ указать.

2. Уравненія движенія вязкой жидкости можно привести къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\eta w-\zeta v-k\Delta u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\zeta u-\xi w-k\Delta v=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\xi v-\eta u-k\Delta w=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right).$$

Положимъ

$$u=e^{-st}u_1,\quad v=e^{-st}v_1,\quad w=e^{-st}w_1, \tag{7}$$

гдѣ s есть нѣкоторая положительная постоянная, u_1, v_1 и w_1 суть функціи координатъ, не зависящія отъ t.

При этомъ

$$\xi=e^{-st}\xi_1,\quad \eta=e^{-st}\eta_1,\quad \zeta=e^{-st}\zeta_1, \tag{8}$$

гдѣ ξ_1, η_1, ζ_1 суть функціи координатъ, не зависящія отъ времени и составленныя изъ частныхъ производныхъ функцій u_1, v_1 и w_1 по координатамъ также, какъ ξ, η и ζ составлены изъ u, v и w.

Подставимъ выраженія (7) и (8) въ уравненія (6).

Получимъ

$$-ke^{-st}(\Delta u_1+\lambda^2 u_1)+e^{-2st}(\eta_1 w_1-\zeta_1 v_1)=\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$-ke^{-st}(\Delta v_1+\lambda^2 v_1)+e^{-2st}(\zeta_1 u_1-\xi_1 w_1)=\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{9}$$

$$-ke^{-st}(\Delta w_1+\lambda^2 w_1)+e^{-2st}(\xi_1 v_1-\eta_1 u_1)=\frac{\partial T}{\partial z},$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\lambda^2=\frac{s}{k},\quad T=\frac{U-p}{\mu}-\frac{V^2}{2}.$$

Не трудно видѣть, что уравненіямъ (9) можно удовлетворить, полагая

$$\eta_1 w_1-\zeta_1 v_1=0,$$

$$\zeta_1 u_1-\xi_1 w_1=0, \tag{10}$$

$$\xi_1 v_1-\eta_1 u_1=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (10) даютъ

$$\xi_1 = mu_1, \quad \eta_1 = mv_1, \quad \zeta_1 = mw_1,$$

гдѣ m какая либо функція координатъ, въ частности постоянная.

Положимъ

$$m = \lambda = \sqrt{\frac{s}{k}}.$$

Имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \lambda u_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \lambda v_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \lambda w_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Функціи u_1, v_1, w_1, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, удовлетворяютъ и слѣдующимъ

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + \lambda^2 u_1 &= 0, \\ \Delta v_1 + \lambda^2 v_1 &= 0, \\ \Delta w_1 + \lambda^2 w_1 &= 0. \end{aligned}$$

При этомъ лѣвыя части уравненій (9) обращаются въ нуль и уравненія эти приводятся къ тремъ слѣдующимъ

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$U - p - \mu \frac{V^2}{2} = \varphi(t), \tag{12}$$

гдѣ $\varphi(t)$ есть произвольная функція времени.

Опредѣливъ u_1, v_1, w_1 при помощи уравненій (11), мы получимъ рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій движенія (9) подъ видомъ

$$u = e^{-k\lambda^2 t} u_1, \quad v = e^{-k\lambda^2 t} v_1, \quad w = e^{-k\lambda^2 t} w_1,$$

причемъ будемъ имѣть интегралъ (12) уравненій (9), позволяющій опредѣлить гидродинамическое давленіе въ каждой точкѣ жидкости до нѣкоторой произвольной функціи времени.

При $k=0$ получится случай, такъ называемыхъ, постоянныхъ винтовыхъ движеній идеальной жидкости, указанный впервые Graig'омъ въ III-ьемъ томѣ „American Journal of Mathematics“ и подробнѣе изслѣдованный проф. И. С. Громекой въ соч. „Нѣкоторые случаи движенія несжимаемой жидкости“ (Казань, 1881 г.).

3. Функціи u, v и w удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\lambda u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\lambda v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda w,$$

которыя показываютъ, что линіи вихрей и линіи токовъ совпадаютъ во все время движенія и что отношеніе скорости теченія къ вихревой скорости есть величина постоянная во всѣхъ точкахъ жидкости и для всѣхъ моментовъ времени.

Тѣ точки жидкости, скорость которыхъ въ начальный моментъ времени равна нулю, будутъ имѣть скорость равную нулю и во все время движенія. То же должно сказать и о составляющихъ u, v и w скорости по осямъ координатъ.

Внутри сферы радіуса $\frac{\pi}{\lambda}$, цѣликомъ лежащей внутри жидкости (если это допускаютъ размѣры области (D), заполненной жидкостью), проходитъ по крайней мѣрѣ одна поверхность нулевыхъ значеній функцій u, v и w.

То же самое должно сказать и о сферахъ радіусовъ

$$\frac{2\pi}{\lambda},\quad \frac{3\pi}{\lambda},\ldots$$

Это предложеніе доказано проф. И. С. Громекой въ вышеупомянутомъ его соч. „Нѣкоторые случаи и т. д.“ для функцій u_1, v_1 и w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11); оно распространяется, очевидно, и на разсматриваемый нами случай.

Наконецъ, слѣдуетъ замѣтить, что скорость каждой точки жидкости убываетъ съ теченіемъ времени и движеніе жидкости ассимптотически стремится къ покою.

4. Разсматриваемый случай движенія вязкой жидкости особенно интересенъ потому, что для него имѣетъ мѣсто принципъ сохраненія вихрей.

Въ самомъ дѣлѣ, функціи u, v и w, очевидно, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0\,,$$
$$\Delta v + \lambda^2 v = 0\,,$$
$$\Delta w + \lambda^2 w = 0\,.$$

Вслѣдствіе этого правая часть уравненія (4) приводится къ виду

$$k\int(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz) = -\lambda^2 k\int(u dx + v dy + w dz) = -\lambda^2 kJ\,,$$

а самое уравненіе (4_1) обращается въ слѣдующее

$$\frac{dJ}{dt} = -k\lambda^2 J\,.$$

Отсюда

$$J = J_0 e^{-k\lambda^2 t}\,,$$

гдѣ J_0 есть значеніе J для начальнаго момента времени.

Слѣдовательно, циркуляція скорости для всякаго замкнутаго контура, циркуляція скорости по которому равна нулю въ начальный моментъ времени, будетъ равна нулю и во все время движенія.

Точки жидкости, лежащія въ начальный моментъ времени на какой нибудь вихревой трубкѣ (L), будутъ лежать въ моментъ t на нѣкоторой трубкѣ (L_1).

Такъ какъ циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на вихревой трубкѣ (L), равна нулю, то циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на трубкѣ (L_1), также равна нулю, т. е. (L_1) есть также вихревая трубка.

Такъ какъ это справедливо для любой вихревой трубки (L) и для любого момента времени, то точки, лежащія въ начальный моментъ времени на вихревыхъ нитяхъ, будутъ образовать вихревыя же нити и въ любой изъ слѣдующихъ моментовъ движенія.

Принципъ сохраненія вихрей для разсматриваемаго движенія вязкой жидкости доказанъ.

Но напряженіе вихря, само собой разумѣется, не будетъ постояннымъ. Величина напряженія убываетъ съ теченіемъ времени, ассимптотически приближаясь къ нулю.

5. Опредѣленіе движенія жидкости приводится къ разысканію функцій u_1, v_1, w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11), которыя можно разсматривать какъ уравненія постояннаго винтового теченія идеальной несжимаемой жидкости со скоростями u_1, v_1, w_1.

Мнѣ извѣстно единственное сочиненіе, въ которомъ разсматривается вопросъ объ интегрированіи уравненій (11), это—вышеупомянутое соч. проф. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.“.

Но и въ этой работѣ мы имѣемъ мало данныхъ общаго характера относительно условій интегрируемости уравненій (11). Изслѣдуются преимущественно частныя рѣшенія этихъ уравненій и главнымъ образомъ движеніе жидкихъ массъ, заполняющихъ области, ограниченныя цилиндрическими поверхностями.

Поэтому я считаю возможнымъ остановиться на нѣкоторыхъ соображеніяхъ общаго характера, которыя и изложу въ слѣдующихъ §§-ахъ.

Въ каждомъ частномъ вопросѣ приходится искать интегралы уравненій движенія при тѣхъ или иныхъ условіяхъ на поверхности (S), ограничивающей область (D), заполненную жидкостью.

Наиболѣе употребительныя изъ условій этого рода состоятъ въ заданіи на поверхности (S) или величинъ u_1, v_1, w_1, или слагающей скорости по какому либо опредѣленному направленію, чаще всего по нормали къ поверхности (S).

Первое изъ этихъ условій не можетъ имѣть мѣста въ разсматриваемомъ случаѣ, ибо не трудно убѣдиться, что при какомъ угодно (неопредѣленномъ) λ не можетъ существовать функцій координатъ u_1, v_1, w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11) и принимающихъ произвольно заданныя значенія на поверхности (S) *).

Остается разобрать наиболѣе интересный случай, когда на поверхности (S) задается нормальная составляющая скорости движенія, опредѣляемаго уравненіями (11).

Будемъ предполагать параметръ λ неопредѣленнымъ и отбросимъ для простоты письма значки при u_1, v_1 и w_1.

Будемъ, слѣдовательно, искать конечныя, однозначныя и непрерывныя внутри области (D) функціи координатъ u, v и w, удовлетворяющія уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\lambda u, \\ &\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\lambda v, \\ &\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda w \end{aligned}\right\} \text{ внутри } (D) \qquad \mathbf{(13)}$$

и условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \quad \text{на поверхности } (S), \qquad (14)$$

---

*) Мы не станемъ останавливаться на доказательствѣ этого отрицательнаго результата.

гдѣ α, β и γ суть cosinus'ы угловъ нормали (положимъ, внѣшней) къ поверхности (S) съ осями координатъ, а f есть заданная функція координатъ точекъ поверхности (S).

Предположимъ сначала, что

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f = 0 \quad \text{на поверхности } (S) \qquad \textbf{(15)}$$

и что λ не превосходитъ нѣкотораго предѣла λ_1.

Если существуютъ функціи u, v, w, отличныя отъ нуля и удовлетворяющія указаннымъ условіямъ, то онѣ суть въ то же время функціи параметра λ.

Для значеній λ, не превосходящихъ нѣкотораго предѣла (положимъ λ_1), онѣ должны разлагаться въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ λ, слѣдующаго вида

$$u = \sum u_n\lambda^n, \quad v = \sum v_n\lambda^n, \quad w = \sum w_n\lambda^n.$$

Такъ какъ эти выраженія должны удовлетворять уравненіямъ (13) и слѣдующему изъ нихъ уравненію

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

при всякомъ λ (не превосходящемъ только нѣкотораго предѣла), то функціи u_0, v_0, w_0 должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D)$$

а на поверхности (S) условію

$$u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma = 0.$$

Функціи же u_n, v_n, $w_n (n = 1, 2, \ldots)$ должны удовлетворять условіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_n}{\partial y}-\frac{\partial v_n}{\partial z}=u_{n-1}\,,\\
&\frac{\partial u_n}{\partial z}-\frac{\partial w_n}{\partial x}=v_{n-1}\,,\\
&\frac{\partial v_n}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial y}=w_{n-1}\,,\\
&\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}=0\,,
\end{aligned}\right\}\text{ внутри }(D)$$

$$u_n\cos\alpha+v_n\cos\beta+w_n\cos\gamma=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Всѣмъ этимъ условіямъ можно удовлетворить только значеніями

$$u_n\,,\ v_n\,,\ w_n \qquad (n=0,\,1,\,2,\,3,\ldots)$$

тождественно равными нулю.

Слѣдовательно, при неопредѣленномъ λ не существуетъ конечныхъ, непрерывныхъ и отличныхъ отъ нуля внутри области (D) функцій u, v, w, удовлетворяющихъ уравненіямъ (13) при условіи (15).

Но весьма вѣроятно, что для каждой области (D), ограниченной по крайней мѣрѣ конвексной поверхностью (S), существуетъ безчисленное множество опредѣленныхъ положительныхъ значеній $\lambda_n (n=1\,,\,2,\ldots)$, при каждомъ изъ которыхъ могутъ быть найдены отличныя отъ нуля функціи U_n, V_n и W_n, удовлетворяющія разсматриваемымъ условіямъ *).

Во всякомъ случаѣ мы знаемъ, что для различныхъ частныхъ видовъ поверхности (S) это предложеніе несомнѣнно справедливо.

Нѣсколько относящихся сюда примѣровъ можно найти въ упоминавшемся выше соч. проф. И. С. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.“.

Допустимъ, что поверхность (S) принадлежитъ къ классу поверхностей (несомнѣнно существующихъ), для которыхъ существуютъ вышеупомянутыя числа λ_n и имъ соотвѣтствующія функціи U_n, V_n и W_n $(n=1\,,\,2,\ldots)$.

Будемъ разумѣть въ уравненіяхъ (13) подъ λ одно изъ чиселъ λ_n, а подъ u, v, w ему соотвѣтствующія функціи U_n, V_n и W_n.

Теченіе жидкости, опредѣляемое уравненіями (13) при условіи (15) на поверхности (S), обладаетъ характерными особенностями, о которыхъ мы считаемъ не лишнимъ сдѣлать нѣсколько замѣчаній.

---

*) Я могъ бы привести рядъ соображеній, дѣлающихъ весьма вѣроятнымъ это интересное предложеніе, но такъ какъ эти соображенія все же нельзя считать безусловно строгими, то я считаю лишнимъ развивать относящіяся сюда изслѣдованія.

Поверхность (S) должна быть въ разсматриваемомъ случаѣ одновременно и поверхностью тока и поверхностью вихря.

Для любого вырѣзка (S_1) поверхности (S), ограниченнаго замкнутымъ контуромъ (f), будемъ имѣть

$$\int_{S_1} (\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)\, ds = 0 \text{ *)}.$$

По теоремѣ Стокса

$$\int_{S_1} (\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)\, ds = \int_{(f)} (udx + vdy + wdz) = J\,,$$

гдѣ второй изъ интеграловъ этихъ равенствъ распространяется на весь контуръ (f).

Слѣдовательно, циркуляція скорости по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности (S), равна нулю.

Поэтому на поверхности (S) не можетъ существовать замкнутыхъ линій тока (въ то же время и линій вихря), если только скорость въ каждой точкѣ этой линіи не равна нулю.

На поверхности (S) должны образоваться критическія точки, въ которыхъ должны пересѣкаться линіи токовъ.

Эти точки должны быть точками одновременнаго схода или выхода всѣхъ проходящихъ черезъ нихъ линій токовъ.

Возьмемъ двѣ какія либо линіи токовъ (L) и (L_1), пересѣкающіяся въ критической точкѣ (s).

Изъ какой либо точки (m) линіи (L) проводимъ кривую, ортогональную ко всѣмъ линіямъ токовъ, лежащимъ между (L) и (L_1).

Эта линія пересѣчетъ линію (L_1) въ нѣкоторой точкѣ (m_1).

Разсмотримъ замкнутый контуръ mm_1sm.

Будемъ обозначать, по обыкновенію, циркуляцію скорости по какому угодно замкнутому контуру $abc \ldots l$ вообще черезъ

$$(abc \ldots l).$$

По предыдущему,

$$(mm_1sm) = (mm_1) + (m_1s) + (sm) = (m_1s) + (sm) = 0\,,$$

ибо, очевидно,

$$(mm_1) = 0\,.$$

---

*) Интегралъ распространяется на всю поверхность вырѣзка (S_1).

Слѣдовательно,

$$(m_1 s) = -(sm),$$

т. е. линіи токовъ (L) и (L_1) должны имѣть одно и тоже направленіе *).

Число критическихъ точекъ на поверхности (S) должно равняться по меньшей мѣрѣ двумъ, причемъ *одна изъ этихъ точекъ должна быть точкою схода всѣхъ проходящихъ черезъ нее линій тока, другая точкой выхода.*

На поверхности (S) могутъ существовать замкнутыя линіи нулевыхъ значеній скорости теченія, или, какъ мы будемъ говорить, линіи нулей.

Эти линіи раздѣлятъ поверхность (S), вообще говоря, на нѣсколько сегментовъ и нѣсколько поясовъ, ограниченныхъ не пересѣкающимися линіями нулей.

На поверхности каждаго изъ этихъ сегментовъ должна существовать критическая точка схода или выхода линій токовъ, лежащихъ на этомъ сегментѣ.

Концы линій токовъ должны лежать на линіи нулей, ограничивающей этотъ сегментъ.

Въ каждомъ поясѣ концы каждой линіи тока должны лежать на двухъ различныхъ линіяхъ нулей, его ограничивающихъ, и линіи токовъ должны быть одинаково направленными.

Линіи токовъ внутри области (D) должны быть, вообще говоря, замкнутыми, а *поверхности токовъ* (вихрей) *замкнутыми многосвязными поверхностями.*

Примѣры подобнаго рода теченій можно найти въ соч. проф. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.".

6. Будемъ теперь считать параметръ λ какимъ угодно (неопредѣленнымъ) и ограничимся предположеніемъ, что поверхность (S) конвексна и имѣетъ опредѣленную касательную плоскость въ каждой точкѣ.

Такъ какъ при неопредѣленномъ λ не существуетъ отличныхъ отъ нуля функцій u, v, w, удовлетворяющихъ уравненіямъ (13) при условіи

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то *уравненія* (13) *и условіе*

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f \quad \textit{на поверхности } (S) \qquad \textbf{(14)}$$

опредѣляютъ вполнѣ и единственнымъ образомъ конечныя и опредѣлен-

---

*) Направленіе линіи тока опредѣляется направленіемъ скоростей точекъ, образующихъ эту линію.

ныя для всѣхъ точекъ области (D) *функціи* u, v, w, *если только такія функціи существуютъ.*

Функція f должна удовлетворять только одному условію

$$\int f ds = 0\,,$$

гдѣ ds обозначаетъ элементъ поверхности (S), на которую распространяется интегралъ лѣвой части этого равенства.

Необходимо доказать, или по крайней мѣрѣ найти условія, при которыхъ можетъ быть доказано существованіе функцій u, v и w.

Для этого мы воспользуемся извѣстной методой послѣдовательныхъ приближеній, развитой E. Picard'омъ въ его мемуарѣ, „Memoire sur la theorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives" (Journ. de Mathém., T. VI, série IV).

Подставимъ въ правыя части уравненій (13) вмѣсто функцій u, v и w нули и опредѣлимъ функціи u_0, v_0, w_0 при помощи условій

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial z}=0\,,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{\partial w_0}{\partial x}=0\,,\\
&\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}=0\,,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0\,,
\end{aligned}\right\}\ \text{внутри } (D)$$

$$u_0\cos\alpha+v_0\cos\beta+w_0\cos\gamma=f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Подставимъ затѣмъ въ правыя части уравненій (13) вмѣсто u, v, w функціи u_0, v_0, w_0 и опредѣлимъ функціи u_1, v_1, w_1 при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=\lambda u_0\,,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial w_1}{\partial x}=\lambda v_0\,,\\
&\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=\lambda w_0\,,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\ \text{внутри } (D)$$

и условія

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta + w_1 \cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

и т. д., вообще, составимъ функціи

$$u_n, \ v_n, \ w_n,$$

удовлетворяющія уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial v_n}{\partial z} &= \lambda u_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{\partial w_n}{\partial x} &= \lambda v_{n-1}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \lambda w_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{внутри } (D) \tag{16}$$

и условію

$$u_n \cos\alpha + v_n \cos\beta + w_n \cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S). \tag{16_1}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Допустимъ, что мы умѣемъ опредѣлить функціи

$$u_n, \ v_n, \ w_n$$

при всякомъ n, предполагая ихъ непрерывными и конечными для всѣхъ точекъ области (D).

Положимъ

$$u_n' = u_n - u_{n-1}, \quad v_n' = v_n - v_{n-1}, \quad w_n' = w_n - w_{n-1}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1' + u_2' + \cdots + u_n' + \cdots, \\ v &= v_0 + v_1' + v_2' + \cdots + v_n' + \cdots, \\ w &= w_0 + w_1' + w_2' + \cdots + w_n' + \cdots. \end{aligned} \tag{17}$$

Функціи u_n', v_n', w_n', какъ не трудно видѣть, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w'_n}{\partial y}-\frac{\partial v'_n}{\partial z}=\lambda u'_{n-1},\\
&\frac{\partial u'_n}{\partial z}-\frac{\partial w'_n}{\partial x}=\lambda v'_{n-1},\\
&\frac{\partial v'_n}{\partial x}-\frac{\partial u'_n}{\partial y}=\lambda w'_{n-1},\\
&\frac{\partial u'_n}{\partial x}+\frac{\partial v'_n}{\partial y}+\frac{\partial w'_n}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\quad \text{внутри } (D) \qquad \begin{aligned}&(18)\\ &(18_1)\end{aligned}$$

при условіи

$$u'_n\cos\alpha+v'_n\cos\beta+w'_n\cos\gamma=0 \qquad \text{на поверхности } (S). \qquad (19)$$

Эти уравненія будутъ имѣть мѣсто при всякомъ $n=1, 2, \ldots,$ если поставимъ условіе

$$u'_0=u_0,\quad v'_0=v_0,\quad w'_0=w_0.$$

Опредѣливъ при помощи уравненій (18), (18$_1$) и условія (19) функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\,3,\ldots)}$$

въ видѣ конечныхъ и опредѣленныхъ функцій координатъ для всѣхъ точекъ области (D), получимъ u, v и w въ видѣ рядовъ (17), каждый членъ которыхъ будетъ опредѣленной функціей координатъ.

Ряды (17) удовлетворяютъ условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \qquad \text{на поверхности } (S) \qquad (14)$$

и удовлетворяютъ формально уравненіямъ (13).

Они будутъ представлять рѣшеніе задачи, если будутъ сходящимися для всѣхъ точекъ внутри области (D).

7. Покажемъ прежде всего, какимъ образомъ опредѣляются функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n. \qquad {\scriptstyle (n=2,\,3,\ldots)}$$

Не трудно видѣть, что уравненія (18), (18$_1$) и условіе (19) вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляютъ эти функціи.

Допустимъ, что какимъ бы то ни было способомъ найдены функціи

$$u'_{n-1},\ v'_{n-1},\ w'_{n-1}.$$

Положимъ

$$
\begin{aligned}
u'_n &= \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w'_{n-1}}{r}d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v'_{n-1}}{r}d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial x} = S_1^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial x},\\
v'_n &= \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{u'_{n-1}}{r}d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{w'_{n-1}}{r}d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial y} = S_2^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial y}, \qquad (20)\\
w'_n &= \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{v'_{n-1}}{r}d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{u'_{n-1}}{r}d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial z} = S_3^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial z},
\end{aligned}
$$

гдѣ r есть разстояніе какой либо точки x, y, z пространства отъ точекъ ξ, η, ζ области (D) *).

Эти функціи, какъ извѣстно **), удовлетворяютъ уравненіямъ (18) и будутъ удовлетворять всѣмъ налагаемымъ на эти функціи условіямъ, если опредѣлимъ P_n при помощи уравненія

$$\varDelta P_n = 0 \quad \text{внутри } (D) \qquad (21)$$

и условія

$$\frac{\partial P_n}{\partial n} = -(S_1^{(n)}\cos\alpha + S_2^{(n)}\cos\beta + S_3^{(n)}\cos\gamma) \quad \text{на поверхности } (S). \qquad (22)$$

Правая часть этого равенства есть вполнѣ опредѣленная функція координатъ точекъ поверхности (S); n обозначаетъ направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S).

Мы знаемъ, что условіями (21) и (22) функція P_n опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной (по методѣ C. Neumann'a).

Допустимъ, что найдена функція P_n, опредѣляемая этими условіями, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими первыми производными для всѣхъ точекъ области (D).

Опредѣливъ P_n, получимъ по формулѣ (20) и функціи

$$u'_n, \; v'_n, \; w'_n.$$

8. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что функціи u'_n, v'_n, w'_n будутъ извѣстны при всякомъ $n = 0, 1, 2, \ldots$, если будутъ извѣстны функціи

$$u_0, \; v_0, \; w_0; \qquad u'_1, \; v'_1, \; w'_1.$$

---

*) $d\tau'$ обозначаетъ элементъ объема области (D) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η и ζ.

**) См. Lamb. „A treatise on the motion of fluids“. Cambridge, 1879, p. 150 etc.

Опредѣленіе первыхъ, очевидно, приводится къ разысканію функціи P_0 при помощи условій

$$\Delta P_0 = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Опредѣливъ P_0, получимъ

$$u_0 = \frac{\partial P_0}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial P_0}{\partial y}, \quad w_0 = \frac{\partial P_0}{\partial z}.$$

Остается только найти

$$u_1', \; v_1', \; w_1'.$$

Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1'}{\partial y} - \frac{\partial v_1'}{\partial z} = \lambda u_0 , \\
&\frac{\partial u_1'}{\partial z} - \frac{\partial w_1'}{\partial x} = \lambda v_0 , \\
&\frac{\partial v_1'}{\partial x} - \frac{\partial u_1'}{\partial y} = \lambda w_0 , \\
&\frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial v_1'}{\partial y} + \frac{\partial w_1'}{\partial z} = 0 ,
\end{aligned}\right\} \text{внутри } (D) \tag{23}$$

$$u_1' \cos\alpha + v_1' \cos\beta + w_1' \cos\gamma = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Уравненія (23) отличаются отъ уравненій (18) тѣмъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ выраженіе

$$u_0 \cos\alpha + v_0 \cos\beta + w_0 \cos\gamma$$

не равно нулю на поверхности (S). Формулами (20) нельзя пользоваться непосредственно.

Положимъ

$$u_1' = u_1'' + l, \quad v_1' = v_1'' + m, \quad w_1' = w_1'' + n, \tag{24}$$

гдѣ l, m, n суть функціи координатъ, конечныя и непрерывныя для всѣхъ точекъ области (D).

Положимъ затѣмъ

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z} = q_1',$$

$$\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x} = q_2',$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} = q_3',$$

$$\lambda u_0 - q_1' = q_1, \quad \lambda v_0 - q_2' = q_2, \quad \lambda w_0 - q_3' = q_3$$

и подчинимъ функціи l, m, n условію

$$q_1'\cos\alpha + q_2'\cos\beta + q_3'\cos\gamma = \lambda f,$$

или

$$q_1\cos\alpha + q_2\cos\beta + q_3\cos\gamma = 0.$$

Выберемъ какія либо три изъ безчисленнаго множества функцій l, m и n, удовлетворяющихъ всѣмъ этимъ условіямъ.

Разысканіе функцій u_1', v_1' и w_1' сведется къ опредѣленію конечныхъ и непрерывныхъ для всѣхъ точекъ области (D) функцій u_1'', v_1'', w_1'' при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1''}{\partial y} - \frac{\partial v_1''}{\partial z} = q_1, \\ &\frac{\partial u_1''}{\partial z} - \frac{\partial w_1''}{\partial x} = q_2, \\ &\frac{\partial v_1''}{\partial x} - \frac{\partial u_1''}{\partial y} = q_3, \\ &\frac{\partial u_1''}{\partial x} + \frac{\partial v_1''}{\partial y} + \frac{\partial w_1''}{\partial z} + \psi = 0 \end{aligned}\right\} \text{ внутри } (D) \qquad \textbf{(25)}$$

и условія

$$u_1''\cos\alpha + v_1''\cos\beta + w_1''\cos\gamma + \vartheta = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\psi = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z},$$

$$\vartheta = l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma.$$

Мы подчинимъ функціи l, m, n еще слѣдующему условію

$$\int\left(\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\right)d\tau=0,$$

причемъ необходимо получимъ

$$\int\vartheta ds=0,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S).

Положимъ теперь

$$\begin{aligned}
u_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{q_3}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{q_2}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial x}=S_1+\frac{\partial P_1}{\partial x},\\
v_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{q_1}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{q_3}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial y}=S_2+\frac{\partial P_1}{\partial y},\qquad(26)\\
w_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{q_2}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{q_1}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial z}=S_3+\frac{\partial P_1}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Функціи u_1'', v_1'', w_1'', такимъ образомъ составленныя, удовлетворяютъ уравненіямъ (25) и будутъ удовлетворять всѣмъ налагаемымъ на нихъ условіямъ, если опредѣлимъ конечную и непрерывную вмѣстѣ съ ея первыми производными функцію P_1 при помощи уравненія

$$\Delta P_1+\psi=0 \qquad \text{внутри } (D)$$

и условія

$$\frac{\partial P_1}{\partial n}+S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta+S_3\cos\gamma+\vartheta=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Положивъ, наконецъ,

$$P_1=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\psi'}{r}d\tau'+P_1'=V+P_1',$$

получимъ

$$\Delta P_1'=0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial P_1'}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n}+S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta+S_3\cos\gamma+\vartheta=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Опредѣливъ по методѣ C. Neumann'a P_1', найдемъ P_1, затѣмъ u_1'', v_1'', w_1'' [по формуламъ (26)] и, наконецъ, функціи u_1', v_1', w_1' по формуламъ (24).

Замѣтимъ, что вообще задача объ опредѣленіи функціи W, удовлетворяющей условіямъ

$$\varDelta W = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = F \qquad \text{на поверхности } (S), {}^{*}) \tag{27}$$

гдѣ F есть какая либо заданная функція координатъ, возможна только при условіи

$$\int F ds = 0. \tag{28}$$

Въ нашемъ случаѣ очевидно

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial n} + S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + S_3 \cos\gamma + \vartheta \right) ds = 0\,,$$

т. е. условіе (28) выполняется.

Точно также при всякомъ n [рав. (22)]

$$\int (S_1^{(n)} \cos\alpha + S_2^{(n)} \cos\beta + S_3^{(n)} \cos\gamma)\, ds = 0.$$

Такимъ образомъ всѣ функціи u_n', v_n', w_n' $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ могутъ быть опредѣлены послѣдовательно.

9. Воспользуемся теперь функціями

$$G_x, \quad G_y, \quad G_z,$$

существованіе которыхъ утверждаетъ H. Poincaré въ своемъ мемуарѣ „Sur les équations de la Physique Mathématique" **) и которыя опредѣляются слѣдующими условіями:

1) G_x, G_y, G_z суть функціи двухъ системъ координатъ

$$x, y, z \qquad \text{и} \qquad \xi, \eta, \zeta.$$

2) Функціи G_x, G_y, G_z конечны и непрерывны внутри области (D) во всѣхъ точкахъ за исключеніемъ

---

*) Эту задачу мы будемъ называть задачей C. Neumann'a.

**) См. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1894.

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\zeta,$$

гдѣ эти функціи обращаются въ безконечность.

3) Разности

$$G_x - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_y - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_z - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

остаются конечными при $r=0$.

4) G_x, G_y, G_z удовлетворяютъ уравненію типа

$$\Delta F=0 \qquad \text{внутри } (D).$$

5) На поверхности (S) онѣ удовлетворяютъ условію типа

$$\frac{\partial F}{\partial n}=0.$$

Опредѣленіе этихъ функцій сводится на опредѣленіе непрерывныхъ внутри (D) функцій, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ задачи C. Neumann'а, и не представляетъ особыхъ затрудненій.

Интегралы

$$\int |G_x|\,ds', \qquad \int |G_y|\,ds', \qquad \int |G_z|\,ds',\ ^{*)}$$

гдѣ ds' есть элементъ поверхности (S) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η, ζ, суть положительныя и конечныя функціи x, y, z *внутри* области (D).

Обозначимъ наибольшее изъ наибольшихъ значеній этихъ интеграловъ внутри области (D) черезъ H.

Обозначимъ по прежнему черезъ W функцію, опредѣляемую условіями (27) (см. § 8-ой).

Пусть W' есть значеніе W въ точкѣ ξ, η, ζ области (D).

Въ такомъ случаѣ, какъ замѣтилъ H. Poincaré,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W'}{\partial \xi}&=-\int G_x f ds,\\ \frac{\partial W'}{\partial \eta}&=-\int G_y f ds,\\ \frac{\partial W'}{\partial \zeta}&=-\int G_z f ds.\end{aligned} \tag{29}$$

*) Вообще, черезъ $|F|$ мы означаемъ модуль функціи F.

Отсюда для каждой точки внутри (D)

$$\left|\frac{\partial W'}{\partial \xi}\right| \leqq H(f)\,, \quad \left|\frac{\partial W'}{\partial \eta}\right| \leqq H(f)\,, \quad \left|\frac{\partial W'}{\partial \zeta}\right| \leqq H(f)\,,$$

гдѣ (f) означаетъ maximum модуля f на поверхности (S).

10. Положимъ для сокращенія письма

$$T_n = S_1^{(n)} \cos\alpha + S_2^{(n)} \cos\beta + S_3^{(n)} \cos\gamma\,.$$

Равенства (20), въ силу (29), приводятся къ виду

$$u_n' = S_1^{(n)} + \int G_x T_n' ds'\,,$$

$$v_n' = S_2^{(n)} + \int G_y T_n' ds'\,,$$

$$w_n' = S_3^{(n)} + \int G_z T_n' ds'\,.$$

Назовемъ наибольшую величину конечнаго во всей области (D) интеграла

$$\int \frac{d\tau'}{r^2}$$

черезъ Q, наибольшее изъ наибольшихъ значеній модулей функцій u_n', v_n', w_n' внутри (D) черезъ N_n.

Очевидно, что

$$\left| S_n^j \right| \leqq \frac{\lambda}{2\pi} Q N_{n-1}\,, \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\left| T_n \right| \leqq \frac{3\lambda}{2\pi} Q N_{n-1}\,.$$

Слѣдовательно,

$$\left| u_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}\,,\ \left| v_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}\,,\ \left| w_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}\,,$$

гдѣ

$$K = \frac{Q}{2\pi}(1 + 3H)$$

есть конечная положительная постоянная, зависящая только отъ свойствъ поверхности (S).

Такимъ образомъ находимъ

$$N_n \leq K N_{n-1}. \qquad (n=2,\,3,\dots)$$

Рядъ

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n + \cdots \tag{30}$$

сходится для всѣхъ значеній параметра λ, не превосходящихъ предѣла $\frac{1}{K}$.

Модуль каждаго члена изъ рядовъ,

$$\sum_1^\infty u_n', \qquad \sum_1^\infty v_n', \qquad \sum_1^\infty w_n' \tag{31}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда (30).

Слѣдовательно, ряды (31) сходятся абсолютно и равномѣрно внутри области (D), пока

$$\lambda < \frac{1}{K}.$$

Такимъ образомъ ряды

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_1^\infty u_n', \\ v &= v_0 + \sum_1^\infty v_n', \\ w &= w_0 + \sum_1^\infty w_n \end{aligned} \tag{32}$$

представляютъ предѣлы, къ которымъ стремятся функціи u_n, v_n и w_n (см. § 6-ой) при возрастаніи n до безконечности, т. е.

$$u = \lim u_n \big|_{n=\infty}, \quad v = \lim v_n \big|_{n=\infty}, \quad w = \lim w_n \big|_{n=\infty}.$$

Такъ какъ ряды (32) сходятся абсолютно, то

$$\lim u_n' = 0, \quad \lim v_n' = 0, \quad \lim w_n' = 0, \text{*)}$$

или

$$\lim u_n = \lim u_{n-1}, \quad \lim v_n = \lim v_{n-1}, \quad \lim w_n = \lim w_{n-1}.$$

*) Мы пишемъ $\lim u_n$ и т. д. для краткости вмѣсто $\lim u_n \big|_{n=\infty}$ и т. д.

Уравненія (16) обратятся въ предѣлѣ (при $n=\infty$) въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=\lambda u\,,\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=\lambda v\,,\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=\lambda w\,.\end{aligned}\right\}\text{ внутри области } (D)$$

Функціи u, v и w, опредѣляемыя рядами (32), удовлетворяютъ дѣйствительно уравненіямъ задачи.

Очевидно, что онѣ удовлетворяютъ и условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Существованіе искомыхъ функцій такимъ образомъ доказано по крайней мѣрѣ при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ параметра λ, не превосходящихъ конечнаго и опредѣленнаго числа $\frac{1}{K}$, которое будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе размѣры области (D).

11. Опредѣливъ при помощи рядовъ (32) функціи u_1, v_1 и w_1 (мы возвращаемся къ обозначеніямъ § 2-ого), составимъ затѣмъ по формуламъ (7) выраженія проекцій на оси координатъ скорости точекъ вязкой несжимаемой жидкости и такимъ образомъ вполнѣ опредѣлимъ разсматриваемое теченіе въ томъ случаѣ, когда задается нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей жидкую массу [рав. (14)].

Замѣтимъ, что изслѣдованія §§-овъ 6, 7, 8, 9 и 10 могутъ имѣть значеніе и независимо отъ ихъ связи съ остальною частью работы, ибо доказываютъ существованіе и даютъ возможность опредѣлить постоянное винтовое теченіе идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной конвексной поверхностью (S), по заданной нормальной составляющей скорости этого теченія на поверхности (S).

Соображенія вышеупомянутыхъ §§-овъ приводятъ такимъ образомъ къ обобщенію извѣстной теоремы C. Neumann'a объ опредѣленности и существованіи движенія жидкости (идеальной, несжимаемой) съ потенціаломъ скоростей W при заданной нормальной составляющей скорости теченія на поверхности, ограничивающей жидкую массу.

Теорема C. Neumann'a, выраженная въ только что приведенной механической формѣ, получается изъ доказанной нами при $\lambda=0$.

Новый способъ интегрированія нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

М. Ф. Ковальскаго.

(Сообщено въ засѣданіи Харьковскаго Математическаго Общества 8 февраля 1896 г.).

Изучая способы *Коши* и *Якоби* интегрированія дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка, я искалъ не только упрощеній этихъ пріемовъ, но и прямыхъ обоснованій тѣхъ идей, на которыхъ они зиждутся. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ мнѣ удалось достигнуть цѣли; въ настоящей статьѣ я предлагаю результатъ моихъ изысканій.

§ 1. Пусть

$$F(x_1\,,\;x_2\,,\cdots x_n\,,\;z\,,\;p_1\,,\;p_2\,,\cdots p_n)=0\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

будетъ даное нелинейное дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка; въ немъ n независимыхъ перемѣнныхъ $(x_1\,,\;x_2\,,\;x_3\ldots x_n)$ и одна функціональная z; каждое p_s есть частная производная отъ z по соотвѣтствующему x_s.

Если существуетъ интегралъ для этого уравненія въ видѣ

$$z=f(x_1\,,\;x_2\,,\cdots x_n\,,\;c_1\,,\;c_2\,,\cdots c_n),$$

гдѣ c_r суть постоянныя произвольныя, то должны имѣть тождество:

$$F\left(x_1\,,\;x_2\cdots x_n\,,\;f\,,\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\;\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=0$$

и частныя производныя отъ него, по всякому x_r,

$$(X_r)+(Z)\frac{\partial f}{\partial x_r}+\sum_s (P_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r}=0\,;$$

здѣсь (X_r), (Z) и (P_s) взяты для краткости письма; каждое изъ нихъ замѣняетъ частную производную отъ F, соотвѣтственно, по x_r, z и p_s; скобки при нихъ указываютъ на то, что z замѣщенъ черезъ f, а p_s — черезъ $\frac{\partial f}{\partial x_s}$.

§ 2. Если въ послѣднемъ тождествѣ, обратно, f замѣнить черезъ z, а $\frac{\partial f}{\partial x_r}$ — черезъ p_r, то оно перейдетъ въ уравненіе линейное, по частнымъ производнымъ отъ p_r:

$$X_r+Zp_r+\sum_s P_s\frac{\partial p_r}{\partial x_s}=0\,,$$

гдѣ X_r, Z и P_s поставлены безъ скобокъ, потому что въ нихъ z и p_i остались ничѣмъ незамѣненными.

Извѣстно, что, для нахожденія интеграла этому уравненію, надо проинтегрировать обыкновенную систему уравненій:

$$\frac{dx_s}{P_s}=-\frac{dp_r}{X_r+Zp_r}.$$

Къ нимъ можно прибавить еще одно:

$$\frac{dx_s}{P_s}=\frac{dz}{\sum P_r p_r}\,,$$

получаемое изъ символическаго тождества:

$$dz=\sum_r p_r dx_r\,,$$

замѣною dx_r черезъ $\frac{P_r dx_s}{P_s}$, изъ уравненій $\frac{dx_r}{P_r}=\frac{dx_s}{P_s}$; здѣсь r и s какое-либо изъ значеній: $1, 2, \ldots n$.

Полную систему уравненій можно написать такъ:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{\sum P_s p_s}=\frac{-dp_1}{X_1+Zp_1}=\ldots=\frac{-dp_n}{X_n+Zp_n}\,.\;.\;(2)$$

§ 3. Число всѣхъ уравненій $2n$; пусть ихъ интегралы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= f_r(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}), \\ z &= \theta(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}), \\ p_s &= \theta_s(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}). \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

Понятно, что x_1, для простоты, взятъ независимою перемѣнною и что $s = 1, 2 \dots n$, а $r = 2, 3 \dots n$; всякое c_i есть постоянная произвольная; число ихъ $2n$.

По занесеніи этихъ интеграловъ въ систему уравненій (2), получимъ тождества:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_1} = \left(\frac{P_r}{P_1}\right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{1}{(P_1)} \sum_s (P_s)\, \theta_s \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} = -\left[\frac{(X_s) + (Z)\theta_s}{(P_1)}\right] \quad . \; . \; (4)$$

Занося-же наши интегралы въ данное уравненіе (1), получимъ

$$F(x_1, f_2, f_3, \dots f_n, \theta, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_n) = 0 \quad \dots\dots (5)$$

уравненіе только между параметрами $(c_1, c_2, \dots c_{2n})$, т. е. результатъ занесенія не зависитъ отъ x_1. Въ этомъ не трудно убѣдиться, если взять отъ него производную по x_1; она, въ силу тождествъ (4), окажется тождественнымъ нулемъ.

Опредѣливъ изъ (5) одну изъ постоянныхъ произвольныхъ (положимъ c_{2n}) функціею остальныхъ и занеся полученное для нея значеніе въ систему интеграловъ (3), получимъ видоизмѣненіе послѣднихъ:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= \psi_r(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \\ z &= \varphi(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \\ p_s &= \varphi_s(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

гдѣ символы ψ_r, φ и φ_s означаютъ результаты занесенія c_{2n} [полученнаго изъ (5)] соотвѣтственно въ f_r, θ и θ_s.

Система-же тождествъ (4) приметъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} = \left[\left(\frac{P_r}{P_1}\right)\right], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \left[\left(\frac{1}{P_1} \sum P_s \varphi_s\right)\right] \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} = -\left[\left(\frac{X_s + \varphi_s Z}{P_1}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (7)$$

и

$$F(x_1\,,\ \psi_2\,,\ \psi_3\,,\dots\psi_n\,,\ \varphi\,,\ \varphi_1\,,\dots\varphi_n)=0.$$

§ 4. Каждое изъ нихъ останется тождествомъ и послѣ того, какъ всѣ постоянныя произвольныя или часть ихъ (положимъ $c_{n+1}\,,\ c_{n+2}\,,\dots$ $\dots c_{2n-1}$) замѣнимъ какими-либо функціями перемѣнныхъ; напримѣръ черезъ $E_1\,,\ E_2\,,\dots E_{n-1}$, значеніями, полученными для нихъ изъ уравненій: $x_r=\psi_r$.

Ясно, что всякое E_i есть функція перемѣнныхъ x_s и остальныхъ параметровъ, $c_1\,,\ c_2\,,\dots c_n$; такъ-же не трудно видѣть, что всѣ они, будучи занесены, обратно, въ систему $x_r=\psi_r$, превратятъ эту послѣднюю въ тождества:

$$x_r=\psi_r(x_1\,,\ c_1\,,\ c_2\dots c_n\,,\ E_1\,,\ E_2\,,\dots E_{n-1})\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Система интеграловъ (6), послѣ занесенія въ нихъ этихъ E, сведется въ такую:

$$\left.\begin{aligned} z&=\varphi\,[x_1\,,c_1,\dots c_n\,,E_1,E_2,\dots E_{n-1}]=\omega\,(x_1\,,x_2,\dots x_n,c_1\,,\,c_2,\dots c_n),\\ &\text{и}\\ p_s&=\varphi_s\,[x_1,c_1,\dots c_n,E_1,E_2,\dots E_{n-1}]=\omega_s(x_1,x_2,\dots x_n,c_1,c_2,\dots c_n). \end{aligned}\right\}(9)$$

Тождества (7) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right)=\left|\frac{P_r}{P_1}\right|,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)=\left|\frac{1}{P_1}\sum P_s\omega_s\right|,\ \left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}\right)=-\left|\frac{X_s+Z\omega_s}{P_1}\right|\\ &\text{и}\\ &\qquad F(x_1,\ x_2\,,\dots x_n\,,\ \omega\,,\ \omega_1\,,\ \omega_2\,,\dots\omega_n)=0. \end{aligned}\right\}(10)$$

Въ послѣднемъ изъ этихъ тождествъ, равно какъ и въ X_i, Z и P_i (входящихъ въ правыя части первыхъ трехъ тождествъ) нумерованные x_r возстановились изъ ψ_r, въ силу (8); а z и его частныя производныя (p_s) замѣнены черезъ соотвѣтствующія ω и ω_s. Скобки въ лѣвыхъ частяхъ первыхъ трехъ тождествъ показываютъ, что входившія c_{n+1}, $c_{n+2}\dots c_{2n-1}$ замѣнены черезъ соотвѣтственныя E_i.

§ 5. Теперь преобразуемъ наши тождества системы (10). Съ этою цѣлію, станемъ брать отъ тождествъ (8) частныя производныя, по каждому нумерованному x; каждое изъ нихъ даетъ n соотвѣтственныхъ тождествъ:

$$0=\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right)+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_2},\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
1&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_r},\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_{r+1}}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_n}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Изъ послѣднихъ $(n-1)$ тождествъ опредѣлимъ $\dfrac{\partial\psi_r}{\partial E_k}$ и полученное выраженіе занесемъ въ (11).

Пусть детерминантъ системы (12) будетъ

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial E_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial E_{n-1}}{\partial x_2}\\
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_3}, & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_r}, & \dfrac{\partial E_2}{\partial x_r} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial E_{n-1}}{\partial x_r}\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_n}, & \ldots & \ldots\ldots & \ldots
\end{vmatrix};$$

тогда

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial E_k} = \frac{\partial \varDelta}{\partial \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_r}\right)} \cdot \frac{1}{\varDelta}.$$

Здѣсь первый множитель представляетъ частную производную отъ $\varDelta$, взятую по элементу: $\frac{\partial E_k}{\partial x_r}$.

Занося это выраженіе въ (11) и замѣняя $\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial x_1}\right)$ его значеніемъ изъ перваго тождества группы (10), получимъ слѣдующее тождество:

$$\left|\frac{P_r}{P_1}\right| = -\frac{1}{\varDelta} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial \varDelta}{\partial \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_r}\right)} \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = -\frac{\varDelta_r}{\varDelta} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

гдѣ $\varDelta_r$ есть детерминантъ, полученный изъ $\varDelta$, замѣною въ этомъ послѣднемъ r-й линіи новою линіею: $\frac{\partial E_1}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial E_{n-1}}{\partial x_1}$. Такъ мы видоизмѣнили первое тождество группы (10).

Далѣе видоизмѣнимъ второе,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left|\frac{1}{P_1}\sum_s P_s \omega_s\right|, \; s = 1, 2 \ldots n.$$

Для этого обратимся къ значенію ω изъ (9) и, взявъ отъ этого символическаго тождества частныя производныя, по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, получимъ n тождествъ:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial \omega}{\partial x_n} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial x_n}.$$

Изъ послѣднихъ $(n-1)$ тождествъ получаемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial E_k} = \frac{1}{\varDelta} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\partial \varDelta}{\partial \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_s}\right)} \frac{\partial \omega}{\partial x_s}.$$

Занося это выраженіе въ первое изъ предыдущихъ тождествъ и замѣняя $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$ значеніемъ изъ (10), получаемъ видоизмѣненіе:

$$\sum_{s=1} \omega_s \left|\frac{P_s}{P_1}\right| = \frac{\partial\omega}{\partial x_1} - \frac{1}{\varDelta} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\partial\omega}{\partial x_s} \frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_s}\right)},$$

или, принимая во вниманіе (13), получаемъ сперва:

$$\sum_{s=1} \omega_s \left|\frac{P_s}{P_1}\right| = \frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \sum_{s=2} \frac{\partial\omega}{\partial x_s} \left|\frac{P_s}{P_1}\right|,$$

и окончательно

$$\sum_{s=1}^{s=n} P_s\left(\omega_s - \frac{\partial\omega}{\partial x_s}\right) = 0 \quad \text{. . . . . (14)}$$

Оперируя точно также надъ ω_r, получимъ видоизмѣненіе третьяго изъ тождествъ (10):

$$-\left|X_r\right| - \left|Z\right| \omega_r = \sum_s \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_r}{\partial x_s} \quad \text{. . . . . (15)}$$

Остается видоизмѣнить и послѣднее изъ группы (10), т. е.

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n, \omega, \omega_1 \ldots \omega_n) = 0.$$

Съ этою цѣлью, беремъ отъ него частныя производныя, какъ по x_r, такъ и по одному (любому) изъ параметровъ c—получимъ два тождества:

$$\left.\begin{aligned} \left|X_r\right| + \left|Z\right| \frac{\partial\omega}{\partial x_r} + \sum \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_s}{\partial x_r} = 0, \\ \text{и} \qquad \left|Z\right| \frac{\partial\omega}{\partial c} + \sum \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_s}{\partial c} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . . (16)}$$

Исключивъ изъ послѣднихъ, при помощи (15), X_r и Z, получимъ тождество:

$$\left(\omega_r - \frac{\partial\omega}{\partial x_r}\right) \sum_s \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_s}{\partial c} = \frac{\partial\omega}{\partial c} \sum_s \left|P_s\right| \left(\frac{\partial\omega_r}{\partial x_s} - \frac{\partial\omega_s}{\partial x_r}\right) \quad \text{. . . . (17)}$$

*

§ 6. Для простоты введемъ обозначеніе:

$$\omega_r - \frac{\partial \omega}{\partial x_r} = S_r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

и разность $\frac{\partial \omega_r}{\partial x_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial x_r}$ обозначаемъ символомъ

$$\left(\frac{r}{s}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Тутъ-же можно замѣтить, что этотъ послѣдній символъ, какъ величина, исчезаетъ, когда $r = s$, и мѣняетъ свой знакъ, при взаимной перестановкѣ его элементовъ.

Послѣ введенія сказанныхъ обозначеній, наши тождества (14) и (17) напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_s \left| P_s \right| S_s = 0, \\ \text{и} \quad &\sum_s \left| P_s \right| \left\{ S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\left(\frac{s}{r}\right) \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \quad (20)$$

Введемъ еще упрощеніе, пусть

$$S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\left(\frac{s}{r}\right) = K_{r,s}.$$

Чтобы совмѣстно существовали оба наши тождества, надо и достаточно существованія такихъ равенствъ:

$$mS_1 = K_{r,1}, \quad mS_2 = K_{r,2} \ldots mS_n = K_{r,n},$$

или

$$m = \frac{K_{r,1}}{S_1} = \frac{K_{r,2}}{S_2} = \ldots = \frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,\sigma}}{S_\sigma} \ldots = \frac{K_{r,r}}{S_r} = \ldots \frac{K_{r,n}}{S_n}.$$

Хотя равенство $\frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,\sigma}}{S_\sigma}$ есть болѣе общее чѣмъ $\frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,r}}{S_r}$; но, для нашей главной цѣли, достаточно и этого послѣдняго.

Замѣняя символы $K_{r,s}$ и $K_{r,r}$ ихъ значеніями получимъ, по сокращеніи на S_r:

$$S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} - S_s \frac{\partial \omega_r}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\left(\frac{s}{r}\right) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

§ 7. Только что построенное нами тождество играетъ важную роль въ нашемъ изслѣдованіи.

Въ самомъ дѣлѣ, вопросъ интеграціи даннаго уравненія (1) мы свели, какъ обыкновенно это дѣлается, на интеграцію обыкновенной системы дифференціальныхъ уравненій. При помощи этой системы, мы нашли рядъ функцій $(\omega, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n)$, которыя, будучи подставлены соотвѣтственно, вмѣсто z и его производныхъ, въ интегрируемое уравненіе (1), превращаютъ его въ тождество.

Само собою становится яснымъ то обстоятельство, что если всякая разность $\frac{\partial \omega}{\partial x_s} - \omega_s$ есть тождественный нуль, то общимъ интеграломъ данному уравненію (1) будетъ $z = \omega$.

Если же эта разность, или наше S_s, отлична отъ нуля, то, посчитавъ любой изъ параметровъ c, входящій въ ω и ω_s, функціей независимыхъ перемѣнныхъ—можно опредѣлить эту c удовлетворяющею уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial x_r} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r} = \omega_r \\ \text{и}\quad &\frac{\partial \omega_s}{\partial x_r} + \frac{\partial \omega_s}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r} = \frac{\partial \omega_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \omega_r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_s} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (22)$$

—что и докажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 8. Предыдущую систему уравненій (22) можно написать, для краткости, такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}} = \frac{\partial c}{\partial x_r}, \\ \text{и}\quad &\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{\partial \omega_r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Не трудно видѣть, что значенія $\frac{\partial c}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial c}{\partial x_s}$, получаемыя изъ перваго уравненія, отождествляютъ второе: ибо результатомъ исключенія $\frac{\partial c}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial c}{\partial x_s}$ будетъ наше тождество (21).

Точно также, при помощи этого тождества, легко провѣряемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{S_s}{\frac{\partial \omega}{\partial c}}\right)$$

есть тождество, считая c функціею независимыхъ перемѣнныхъ, опредѣляемою первымъ изъ (23).

Коль скоро такъ, то искомое c опредѣляется изъ точнаго дифференціала:

$$dc = \sum_r \frac{S_r}{\frac{\partial\omega}{\partial c}} dx_r; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

пусть

$$c = c_1 = G_1(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, c_2, c_3 \ldots c_n) \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

(α_1 — новый параметръ) будетъ его интегралъ.

Кромѣ того, если первое уравненіе изъ (23) умножимъ на всякое $\left|P_r\right|$ и результаты сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$\sum \left|P_r\right| S_r = \frac{\partial\omega}{\partial c} \sum \left|P_r\right| \frac{\partial c}{\partial x_r},$$

лѣвая часть котораго, въ силу перваго изъ (20), есть тождественный нуль; поэтому уравненіе, для опредѣленія c, является линейнымъ въ частныхъ производныхъ c:

$$\sum \left|P_s\right| \frac{\partial c}{\partial x_s} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Слѣдовательно, нрійдется интегрировать систему

$$\frac{dx_1}{|P_1|} = \frac{dx_2}{|P_2|} = \ldots = \frac{dx_s}{|P_s|} = \ldots = \frac{dx_n}{|P_n|} = \frac{dc}{0}.$$

Одинъ изъ интеграловъ этой системы есть

$$c = c_1 = \text{const.} = \beta_1.$$

Остальные интегралы пусть будутъ:

$$\beta_2 = H_2(x_1, x_2, \ldots x_n, \beta_1, c_2, c_3 \ldots c_n),\ \beta_3 = H_3, \ldots \beta_n = H_n;$$

тогда, какъ извѣстно,

$$\Pi(c_1 H_2 H_3 \ldots H_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

гдѣ Π произвольная функція, будетъ служить интеграломъ (26).

Конечно, какъ (25) такъ и (27), можно считать совпадающими рѣшеніями—стоитъ соотвѣтственно подъискать Π. Рѣшеніе (25), въ связи съ $z=\omega$, приводитъ насъ къ общему интегралу, а (27)—къ главному, для даннаго уравненія (1).

Не трудно видѣть всю простоту предлагаемаго метода. Понятно также, что изложеніе можно было нѣсколько сократить; но я старался быть яснымъ.