ГЛАВА I.

Предварительный анализъ.

Постановка вопроса.

1. Разсмотримъ какую-либо матерьяльную систему съ k степенями свободы.

Пусть

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_k$$

суть k независимыхъ перемѣнныхъ, которыми мы условились опредѣлять ея положеніе.

Мы будемъ предполагать, что за перемѣнныя эти взяты такія величины, которыя остаются вещественными для всякихъ дѣйствительныхъ положеній системы.

Разсматривая названныя перемѣнныя, какъ функціи времени t, первыя производныя ихъ по t будемъ означать черезъ

$$q_1', \quad q_2', \quad \ldots, \quad q_k'.$$

Во всякой динамической задачѣ, въ которой силы опредѣленнымъ образомъ заданы, эти функціи будутъ удовлетворять нѣкоторымъ k дифференціальнымъ уравненіямъ второго порядка.

Пусть для уравненій этихъ найдено какое-либо частное рѣшеніе

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \ldots, \quad q_k = f_k(t),$$

въ которомъ величины q_j выражаются вещественными функціями t, дающими при всякомъ t только возможныя для нихъ значенія *).

Этому частному рѣшенію будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное движеніе нашей системы. Сравнивая его въ извѣстномъ отношеніи съ другими, возможными для нея при тѣхъ же силахъ, движеніе это будемъ называть *невозмущеннымъ*, а всѣ остальныя, съ которыми оно сравнивается, *возмущенными*.

---

*) Можетъ случиться, что для величинъ q_j по самому ихъ выбору возможны не всякія вещественныя значенія, а только небóльшія или менéньшія извѣстныхъ предѣловъ.

Разумѣя подъ t_0 нѣкоторый данный моментъ времени, назовемъ соотвѣтствующія ему значенія величинъ q_j, q_j' въ какомъ-либо движеніи черезъ q_{j0}, q_{j0}'.

Пусть

$$q_{10} = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad q_{20} = f_2(t_0) + \varepsilon_2, \quad \dots, \quad q_{k0} = f_k(t_0) + \varepsilon_k,$$

$$q_{10}' = f_1'(t_0) + \varepsilon_1', \quad q_{20}' = f_2'(t_0) + \varepsilon_2', \quad \dots, \quad q_{k0}' = f_k'(t_0) + \varepsilon_k',$$

гдѣ ε_j, ε_j' суть нѣкоторыя вещественныя постоянныя.

Заданіемъ этихъ постоянныхъ, которыя будемъ называть *возмущеніями*, опредѣлится возмущенное движеніе. Мы будемъ предполагать, что имъ можно приписывать всякія численно достаточно малыя значенія.

Говоря о возмущенныхъ движеніяхъ, *близкихъ* къ невозмущенному, будемъ разумѣть движенія, для которыхъ возмущенія численно достаточно малы.

Пусть Q_1, $Q_2, \dots, Q_n$ суть какія-либо данныя непрерывныя вещественныя функціи величинъ

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots, \quad q_k, \quad q_1', \quad q_2', \quad \dots, \quad q_k'.$$

Для невозмущеннаго движенія онѣ обратятся въ нѣкоторыя извѣстныя функціи t, которыя означимъ соотвѣтственно черезъ F_1, $F_2, \dots, F_n$. Для возмущеннаго движенія онѣ будутъ нѣкоторыми функціями величинъ

$$t, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_k, \quad \varepsilon_1', \quad \varepsilon_2', \quad \dots, \quad \varepsilon_k'.$$

Когда всѣ ε_j, ε_j' равны нулю, величины

$$Q_1 - F_1, \quad Q_2 - F_2, \quad \dots, \quad Q_n - F_n$$

будутъ равными нулю для всякаго t. Но если постоянныя ε_j, ε_j', не будучи нулями, предполагаются всѣ безконечно-малыми, то является вопросъ, можно ли назначить такіе безконечно-малые предѣлы для величинъ $Q_s - F_s$, которыхъ послѣднія никогда не превзошли бы по числовымъ значеніямъ?

Рѣшеніе этого вопроса, который составитъ предметъ нашихъ изысканій, зависитъ какъ отъ характера разсматриваемаго невозмущеннаго движенія, такъ и отъ выбора функцій Q_1, $Q_2, \dots, Q_n$ и момента времени t_0. При опредѣленномъ выборѣ послѣднихъ, отвѣтъ на этотъ вопросъ будетъ, слѣдовательно, характеризовать въ извѣстномъ отношеніи невозмущенное движеніе, опредѣляя собою то свойство послѣдняго, которое будемъ называть *устойчивостью*, или противоположное ему, которое будемъ называть *неустойчивостью*.

Мы будемъ исключительно заниматься тѣми случаями, когда рѣшеніе разсматриваемаго вопроса не зависитъ отъ выбора момента t_0, въ который сообщаются возмущенія. Поэтому примемъ здѣсь слѣдующее опредѣленіе:

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ суть произвольно задаваемыя положительныя числа. Если при всякихъ L_s, какъ бы они малы ни были, могутъ быть выбираемы положительныя числа $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_1', E_2', \ldots, E_k'$, такъ, чтобы при всякихъ вещественныхъ ε_j, ε_j', удовлетворяющихъ условіямъ

$$|\varepsilon_j| \leqq E_j, \qquad |\varepsilon_j'| \leqq E_j', \text{ *)} \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

и при всякомъ t, превосходящемъ t_0, выполнялись неравенства

$$|Q_1 - F_1| < L_1, \quad |Q_2 - F_2| < L_2, \ldots, \quad |Q_n - F_n| < L_n,$$

— то невозмущенное движеніе *по отношенію къ величинамъ* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ устойчиво; въ противномъ случаѣ — неустойчиво.

Приведемъ примѣры.

Если матерьяльная точка, притягиваемая неподвижнымъ центромъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія, описываетъ круговую траекторію, то движеніе ея по отношенію къ радіусу-вектору, проведенному изъ центра притяженія, а также по отношенію къ ея скорости устойчиво. То же движеніе по отношенію къ прямоугольнымъ координатамъ точки неустойчиво.

Если же разсматриваемая точка описываетъ эллиптическую траекторію, то движеніе ея неустойчиво не только по отношенію къ прямоугольнымъ координатамъ, но и по отношенію къ радіусу-вектору и скорости. Но оно устойчиво напр. по отношенію къ величинѣ

$$r - \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

гдѣ p и e параметръ и эксцентриситетъ эллипса, описываемаго точкою въ невозмущенномъ движеніи, а r и φ радіусъ-векторъ точки въ возмущенномъ движеніи и уголъ, составляемый имъ съ наименьшимъ радіусомъ-векторомъ въ невозмущенномъ движеніи.

Когда твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку и не подверженное дѣйствію силъ, вращается вокругъ наибольшей или наименьшей изъ осей эллипсоида инерціи, соотвѣтствующаго этой точкѣ, движеніе его устойчиво по отношенію къ угловой скорости и угламъ, составляемымъ мгновенною осью съ какими-либо неподвижными или неизмѣнно связанными съ тѣломъ направленіями. Когда же оно вращается вокругъ средней оси эллипсоида инерціи, движеніе его по отношенію къ тѣмъ же величинамъ неустойчиво.

Можетъ случиться, что предѣловъ E_j, E_j', удовлетворяющихъ требованію предыдущаго опредѣленія, нельзя найти, если разсматривать всякія возмущенія, а тѣмъ не менѣе возможно найти такіе предѣлы для возмущеній, подчиненныхъ нѣкоторымъ условіямъ вида:

---

*) Вообще подъ $|x|$ условимся разумѣть числовое значеніе вещественнаго или модуль мнимаго количества x.

$$f = 0 \quad \text{или} \quad f \geqq 0,$$

гдѣ f нѣкоторая функція величинъ

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots, \ \varepsilon_k, \ \varepsilon_1', \ \varepsilon_2', \ \ldots, \ \varepsilon_k',$$

обращающаяся въ нуль, когда всѣ эти величины полагаются равными нулю.

Въ такихъ случаяхъ мы будемъ говорить, что невозмущенное движеніе устойчиво для возмущеній, подчиненныхъ такимъ-то условіямъ.

Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ эллиптическое движеніе точки по отношенію къ ея прямоугольнымъ или какимъ-либо другимъ координатамъ устойчиво для возмущеній, удовлетворяющихъ условію неизмѣняемости полной энергіи, или — по терминологіи Томсона и Тэта — для консервативныхъ возмущеній.

Такимъ образомъ для движеній неустойчивыхъ можно будетъ разсуждать объ *условной устойчивости*.

Предыдущее опредѣленіе, конечно, относится и къ понятію объ „устойчивости равновѣсія“, ибо покой можно разсматривать, какъ частный случай движенія.

2. Рѣшеніе нашего вопроса зависитъ отъ изслѣдованія дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія или, если угодно, отъ изслѣдованія дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ функціи:

$$Q_1 - F_1 = x_1, \quad Q_2 - F_2 = x_2, \ \ldots, \ Q_n - F_n = x_n.$$

Порядокъ системы этихъ послѣднихъ уравненій вообще будетъ тотъ же, т. е. $2k$; но въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ быть и ниже.

Мы будемъ предполагать число n и функціи Q_s такими, чтобы порядокъ этой системы былъ n, и чтобы она приводилась къ нормальному виду:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{1}$$

и вездѣ далѣе будемъ разсуждать объ этихъ послѣднихъ уравненіяхъ, называя ихъ дифференціальными уравненіями возмущеннаго движенія.

Всѣ X_s въ уравненіяхъ (1) суть извѣстныя функціи величинъ

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n, \ t,$$

обращающіяся въ нуль при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Мы сдѣлаемъ теперь относительно нихъ нѣкоторыя предположенія, и вездѣ далѣе будемъ трактовать уравненія (1) исключительно въ этихъ предположеніяхъ.

Мы допустимъ, что функціи X_s даны не только для вещественныхъ, но и для комплексныхъ значеній величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, модули которыхъ достаточно малы, и что по крайней мѣрѣ для всякаго вещественнаго t, бо́льшаго или равнаго t_0 функціи эти разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, абсолютно сходящіеся для всякихъ x_s, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|x_1| \leqq A_1, \quad |x_2| \leqq A_2, \ldots, \quad |x_n| \leqq A_n,$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть или отличныя отъ нуля постоянныя, или такія функціи t, которыя никогда не дѣлаются нулями.

Такимъ образомъ для всякаго изъ указанныхъ значеній t всѣ X_s будутъ *голоморфными* (holomorphes) функціями величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *).

Пусть

$$X_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

гдѣ сумма распространена на всѣ цѣлыя неотрицательныя числа $m_1 . m_2, \ldots, m_n$, удовлетворяющія условію

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 1.$$

Въ этихъ разложеніяхъ всѣ коэффиценты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ суть функціи t, которыя, согласно нашему предположенію, должны оставаться опредѣленными, а по характеру самой задачи — вещественными для всякаго вещественнаго t, бо́льшаго или равнаго t_0. Мы будемъ предполагать кромѣ того, что для всѣхъ такихъ значеній t это суть функціи непрерывныя.

Приписывая t какое-либо изъ указанныхъ сейчасъ значеній и разсматривая въ разложеніи X_s совокупность членовъ выше перваго измѣренія при всевозможныхъ комплексныхъ значеніяхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, модули которыхъ соотвѣтственно равны $A_1, A_2, \ldots, A_n$, означимъ черезъ M_s нѣкоторый высшій предѣлъ ея модуля при этихъ условіяхъ. Тогда по извѣстной теоремѣ будемъ имѣть:

$$\left|P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right| < \frac{M_s}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}}. \tag{2}$$

Вообще далѣе будемъ разсматривать только вещественныя значенія t, не меньшія t_0. Если же въ какихъ-либо случаяхъ представится надобность разсматривать и другія значенія t, то объ этомъ всегда будемъ упоминать опредѣленно.

---

*) Употребляя этотъ терминъ для сокращенія рѣчи и вездѣ далѣе, считаемъ нужнымъ сказать опредѣленно, что́ мы будемъ разумѣть подъ нимъ.

Разсматривая какую-либо функцію перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы будемъ называть ее по отношенію къ этимъ перемѣннымъ голоморфною всякій разъ, когда она можетъ быть представляема подъ видомъ n-кратнаго ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s, *по крайней мѣрѣ для всѣхъ такихъ значеній послѣднихъ, модули которыхъ не превосходятъ нѣкоторыхъ отличныхъ отъ нуля предѣловъ.*

Замѣтимъ, что если вмѣсто времени за независимую перемѣнную примемъ какую-либо непрерывную вещественную функцію времени, вмѣстѣ съ нимъ безпредѣльно возрастающую, то послѣдняя при рѣшеніи вопроса объ устойчивости можетъ играть такую же роль, какъ и время. Поэтому независимая перемѣнная t въ уравненіяхъ (1) не всегда будетъ означать время, но во всякомъ случаѣ—функцію его, удовлетворяющую только-что сказанному условію.

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе:

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть значенія функцій $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $t = t_0$. Тогда, по свойству функцій Q_s, всякой системѣ вещественныхъ значеній величинъ

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots, \ \varepsilon_k, \quad \varepsilon'_1, \ \varepsilon'_2, \ \ldots, \ \varepsilon'_k, \tag{3}$$

численно достаточно малыхъ, будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая система вещественныхъ значеній величинъ

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n. \tag{4}$$

При томъ, какъ-бы ни было мало данное положительное число A, эти послѣднія всегда можно будетъ сдѣлать численно ме́ньшими A, подчиняя величины (3) условію, чтобы ихъ числовыя значенія не превосходили достаточно малаго, но отличнаго отъ нуля предѣла E.

Мы предположимъ теперь, что, какъ-бы ни было мало данное положительное число E, всегда можно найти такое положительное число A, чтобы всякой системѣ вещественныхъ значеній величинъ (4), численно ме́ньшихъ A, соотвѣтствовали одна или нѣсколько системъ вещественныхъ значеній величинъ (3), численно ме́ньшихъ E.

При этомъ условіи величины (4) могутъ играть такую же роль при рѣшеніи вопроса объ устойчивости, какъ и величины (3). Поэтому далѣе вмѣсто послѣднихъ будемъ разсматривать всегда величины (4).

3. Для интегрированія уравненій (1) въ занимающемъ насъ вопросѣ естественно представляется метода послѣдовательныхъ приближеній, основанная на допущеніи, что начальныя (т. е. соотвѣтствующія $t = t_0$) значенія искомыхъ функцій численно достаточно малы.

Метода эта, въ своемъ простѣйшемъ видѣ, приводитъ къ рядамъ, которые могутъ быть получены слѣдующимъ образомъ.

Полагая

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + x_s^{(3)} + \ldots, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

и разсматривая величины $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$ вмѣстѣ съ ихъ производными по t, какъ обладающія $m^{\text{ымъ}}$ измѣреніемъ, вносимъ эти выраженія функцій x_s въ уравненія (1) и въ каждомъ изъ послѣднихъ приравниваемъ между собою совокупности членовъ одинаковаго измѣренія той и другой части равенства. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующія системы дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s^{(1)}}{dt} &= p_{s1}x_1^{(1)} + p_{s2}x_2^{(1)} + \ldots + p_{sn}x_n^{(1)}, \\ &(s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} (m>1)\quad \frac{dx_s^{(m)}}{dt} &= p_{s1}x_1^{(m)} + p_{s2}x_2^{(m)} + \ldots + p_{sn}x_n^{(m)} + R_s^{(m)}. \\ &(s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здѣсь $R_s^{(m)}$ суть извѣстныя цѣлыя раціональныя функціи отъ величинъ $x_\sigma^{(\mu)}$ съ коэффиціентами, представляющими суммы произведеній изъ функцій $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ на нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

Всѣ $R_s^{(m)}$, соотвѣтствующія всякому данному m, конечно, будутъ зависѣть только отъ тѣхъ $x_\sigma^{(\mu)}$, для которыхъ $\mu < m$.

Поэтому введенныя нами функціи $x_s^{(m)}$ можно будетъ опредѣлять изъ написанныхъ уравненій послѣдовательно въ порядкѣ возрастанія m.

Первая задача, которою придется при этомъ заняться, будетъ состоять въ интегрированіи системы (6) однородныхъ линейныхъ уравненій.

Принимая въ разсчетъ предположенную опредѣленность и непрерывность коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$, нетрудно доказать, что всегда найдется группа n^2 функцій, опредѣленныхъ и непрерывныхъ для всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеній t *), которая представитъ систему n независимыхъ рѣшеній для системы уравненій (6).

Предложеніе это докажется при помощи дѣйствительнаго составленія нѣкоторыхъ выраженій для функцій $x_s^{(1)}$, удовлетворяющихъ названнымъ уравненіямъ при всякомъ t, превосходящемъ t_0, и принимающихъ какія-либо заданныя значенія для $t = t_0$. А такія выраженія можно получить подъ видомъ рядовъ, разсматривая напр. уравненія, выводимыя изъ (6) умноженіемъ вторыхъ частей ихъ на нѣкоторый параметръ ε, и стараясь удовлетворить этимъ новымъ уравненіямъ рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ послѣдняго. Если эти ряды составляются въ предположеніи, что значенія, принимаемыя искомыми функціями при $t = t_0$, не зависятъ отъ ε, то они будутъ абсолютно сходящимися для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній t и при всякомъ ε. Дѣлая въ нихъ $\varepsilon = 1$, и получимъ сказанныя выраженія функцій $x_s^{(1)}$.

Допустимъ, что какимъ-либо способомъ для уравненій (6) удалось найти систему n независимыхъ частныхъ рѣшеній.

Пусть

$$x_{s1},\quad x_{s2},\quad \ldots,\quad x_{sn}$$

суть функціи t, представляющія функцію $x_s^{(1)}$ въ этихъ рѣшеніяхъ.

Тогда общій интегралъ системы (6) выразится уравненіями:

---

*) Говоря о значеніяхъ t, мы всегда имѣемъ въ виду нѣкоторыя опредѣленныя числа. Поэтому безконечность никогда не разсматриваемъ, какъ значеніе t.

$$\left. x_s^{(1)} = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \cdots + a_n x_{sn}, \atop (s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \right\} \tag{8}$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольныя постоянныя.

Послѣ того, какъ функціи $x_s^{(1)}$ найдены, можно будетъ опредѣлять и всѣ остальныя $x_s^{(m)}$ послѣдовательнымъ интегрированіемъ системъ линейныхъ неоднородныхъ уравненій (7), соотвѣтствующихъ $m = 2, 3, \ldots$.

Каждое изъ этихъ интегрированій выполнится при помощи квадратуръ. При этомъ каждое изъ нихъ введетъ n постоянныхъ произвольныхъ, и для опредѣленія послѣднихъ представится широкій выборъ закона, который вообще долженъ быть подчиненъ только условію, чтобы получаемые ряды по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ предѣлахъ были сходящимися.

Названныя постоянныя опредѣлятся вполнѣ, если введемъ условіе, чтобы всѣ $x_s^{(m)}$, для которыхъ $m > 1$, обращались въ нуль при $t = t_0$.

Составимъ въ этомъ предположеніи формулы для опредѣленія функцій $x_s^{(m)}$, когда всѣ $x_\sigma^{(\mu)}$, для которыхъ $\mu < m$, уже найдены.

Положимъ

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \triangle.$$

Этотъ опредѣлитель будетъ функціею t, не обращающеюся въ нуль ни при какихъ разсматриваемыхъ нами значеніяхъ t, ибо по извѣстной теоремѣ

$$\triangle = C e^{\int \sum_1^n p_{ss}\, dt},$$

гдѣ C отличная отъ нуля постоянная.

Означимъ миноръ этого опредѣлителя, соотвѣтствующій элементу x_{ij}, черезъ $\triangle_{ij}$.

Тогда искомыя формулы будутъ слѣдующаго вида:

$$x_s^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \frac{\triangle_{ij}}{\triangle} R_i^{(m)}\, dt. \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{9}$$

Функціи $x_s^{(m)}$, опредѣляемыя этими формулами, остаются опредѣленными и непрерывными для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній t.

Относительно постоянныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ это суть цѣлыя однородныя функціи $m^{\text{ой}}$ степени.

При томъ, если выбранная нами система частныхъ рѣшеній уравненій (6) такова, что при $t = t_0$ всѣ x_{ij} получаютъ вещественныя значенія, то коэффиціенты въ этихъ функціяхъ остаются вещественными для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній t.

Опредѣливши такимъ образомъ функціи $x_s^{(m)}$, обращаемся къ вопросу о сходимости рядовъ (5), которые представятся, какъ расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ постоянныхъ a_s.

4. Мы уже сдѣлали нѣкоторыя предположенія относительно коэффиціентовъ въ разложеніяхъ вторыхъ частей уравненій (1). Теперь прибавимъ къ нимъ еще одно.

Мы будемъ предполагать, что за величины $A_1, A_2, \ldots, A_n, M_1, M_2, \ldots, M_n$ могутъ быть приняты такія функціи t, чтобы для всякаго T, бо́льшаго t_0, при t, измѣняющемся въ предѣлахъ t_0 и T, для каждой изъ функцій A_s существовалъ нѣкоторый положительный низшій предѣлъ, а для каждой изъ функцій M_s — нѣкоторый высшій предѣлъ.

Въ этомъ предположеніи докажемъ, что для всѣхъ значеній t, лежащихъ между t_0 и T, какъ бы ни было велико данное число T, предыдущіе ряды (разсматриваемые, какъ расположенные по степенямъ величинъ a_s) будутъ абсолютно сходящимися при всякихъ a_s, модули которыхъ не превосходятъ нѣкотораго отличнаго отъ нуля предѣла, извѣстнымъ образомъ зависящаго отъ T.

Докажется это, какъ и другія подобныя теоремы, съ которыми встрѣтимся далѣе, при помощи обычной въ такихъ случаяхъ методы, которою мы обязаны Коши.

Обращаясь къ этому доказательству, замѣчаемъ, что при t, не выходящемъ изъ границъ t_0 и T, можно назначить нѣкоторые постоянные высшіе предѣлы для модулей всѣхъ x_{ij} и $\dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ или, если угодно, для модулей всѣхъ

$$x_{ii} - 1, \qquad x_{ij}, \qquad (i \lesseqgtr j) \qquad \textbf{(10)}$$

$$\frac{\Delta_{ii}}{\Delta} - 1, \qquad \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}. \qquad (i \lesseqgtr j) \qquad \textbf{(11)}$$

Пусть K есть такой высшій предѣлъ для величинъ (10), а K' — для величинъ (11).

Если разсматриваемая система частныхъ рѣшеній уравненій (6) опредѣлена условіемъ, что при $t = t_0$

$$x_{ii} = 1, \qquad x_{ij} = 0, \qquad (i \lesseqgtr j)$$

то за K и K' можно взять такія непрерывныя функціи T, которыя будутъ обращаться въ нуль при $T = t_0$.

Пусть вообще $\{u\}$ означаетъ результатъ замѣны въ какой-либо цѣлой функціи u отъ величинъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ всѣхъ членовъ ихъ модулями.

Тогда, означая черезъ a наибольшую изъ величинъ $|a_s|$, изъ (8) и (9) выведемъ слѣдующія неравенства:

$$\{x_s^{(1)}\} < (1+nK)a,$$

$$\{x_s^{(m)}\} < \int_{t_0}^{T}\{R_s^{(m)}\}dt + (K+K'+nKK')\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{T}\{R_i^{(m)}\}dt.$$

Эти неравенства будутъ справедливы для всякаго t, не выходящаго изъ предѣловъ t_0 и T.

Замѣчаемъ далѣе, что по свойству первоначальнаго выраженія $R_i^{(m)}$ черезъ величины $x_s^{(\mu)}$, $P_i^{(m_1,\ldots,m_n)}$, замѣняя въ немъ послѣднія высшими предѣлами величинъ

$$\{x_s^{(\mu)}\}, \qquad \left|P_i^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}\right|,$$

найдемъ высшій предѣлъ для величины $\{R_i^{(m)}\}$.

Поэтому, если нѣкоторый общій высшій предѣлъ величинъ

$$\{x_1^{(\mu)}\}, \quad \{x_2^{(\mu)}\}, \ldots, \{x_n^{(\mu)}\}$$

въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣняемости t означимъ черезъ $x^{(\mu)}$, а черезъ $R^{(m)}$ означимъ то, во что обратится каждая изъ функцій

$$R_1^{(m)}, \quad R_2^{(m)}, \ldots, R_n^{(m)}$$

послѣ замѣны величинъ $x_s^{(\mu)}$ величинами $x^{(\mu)}$ и величинъ $P_i^{(m_1,\ldots,m_n)}$ нѣкоторыми независящими отъ i высшими предѣлами $P^{(m_1,\ldots,m_n)}$ ихъ числовыхъ значеній въ тѣхъ же предѣлахъ измѣняемости t, то найдемъ:

$$\{x_s^{(m)}\} < (1+nK)(1+nK')(T-t_0)R^{(m)}.$$

Отсюда видно, что можно принять:

$$x^{(1)} = (1+nK)a,$$

$$x^{(m)} = (1+nK)(1+nK')(T-t_0)R^{(m)}. \qquad (m=2,3,\ldots)$$

Но согласно неравенствамъ (2), для $P^{(m_1,\ldots,m_n)}$ можно взять слѣдующія величины:

$$P^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)} = \frac{M}{A^{m_1+m_2+\ldots+m_n}},$$

гдѣ M есть нѣкоторый общій высшій предѣлъ для всѣхъ функцій M_s въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣняемости t, а A нѣкоторый положительный низшій предѣлъ, общій для всѣхъ функцій A_s, въ тѣхъ-же предѣлахъ измѣняемости t.

Если же этими величинами замѣнимъ коэффиціенты $P_s^{(m_1,\dots,m_n)}$ въ функціяхъ X_s, то совокупности членовъ выше перваго порядка въ послѣднихъ сдѣлаются тожественными съ разложеніемъ функціи

$$M\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{A}\right)\left(1-\frac{x_2}{A}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{A}\right)}-1-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{A}\right\}.$$

Поэтому, при сдѣланномъ выборѣ величинъ $P^{(m_1,\dots,m_n)}$, величина $R^{(m)}$ представитъ совокупность членовъ $m^{\text{аго}}$ измѣренія относительно значковъ величинъ $x^{(s)}$ въ разложеніи выраженія

$$M\left\{\left(1-\frac{1}{A}\sum_{s=1}^{\infty}x^{(s)}\right)^{-n}-1-\frac{n}{A}\sum_{s=1}^{\infty}x^{(s)}\right\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если разсмотримъ уравненіе

$$x=(1+nK)\,a+Ah\left\{\left(1-\frac{x}{A}\right)^{-n}-1-n\frac{x}{A}\right\}, \qquad (12)$$

гдѣ

$$h=(1+nK)(1+nK')\,\frac{M(T-t_0)}{A},$$

то рядъ

$$x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+\dots$$

представитъ разложеніе по цѣлымъ положительнымъ степенямъ a корня x этого уравненія, обращающагося въ нуль при $a=0$. Поэтому рядъ этотъ будетъ навѣрно сходящимся, если a менѣе величины

$$g=\frac{A}{1+nK}\left\{1-(n+1)h\left[\left(\frac{1}{nh}+1\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]\right\},$$

представляющей наименьшій изъ модулей всѣхъ значеній a, при которыхъ уравненіе (12) имѣетъ кратные корни. Рядъ этотъ будетъ сходящимся даже и при $a=g$, ибо обладаетъ положительными коэффиціентами, а для названнаго корня, когда a приближается къ g, несомнѣнно существуетъ предѣлъ.

Но по самому опредѣленію величинъ $x^{(m)}$, сходимостью разсматриваемаго ряда обусловливается абсолютная сходимость рядовъ (5) для всѣхъ значеній t, лежащихъ между t_0 и T.

Поэтому заключаемъ, что для всѣхъ такихъ значеній t ряды (5) будутъ навѣрно абсолютно сходящимися, если модули постоянныхъ a_s не превосходятъ величины g.

Вмѣстѣ съ тѣмъ получаемъ и высшій предѣлъ для модулей суммъ этихъ рядовъ при условіяхъ

$$t_0 \leqq t \leqq T, \qquad |a_s| \leqq g. \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)} \qquad \textbf{(13)}$$

Этотъ высшій предѣлъ представится значеніемъ, соотвѣтствующимъ $a=g$, вышеназваннаго корня уравненія (12), и какъ нетрудно убѣдиться, не будетъ превосходить A.

Изъ послѣдняго обстоятельства слѣдуетъ, что если ряды (5) внести въ функціи X_s, то функціи эти можно будетъ представить рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ a_s.

При этихъ условіяхъ можно, слѣдовательно, написать равенства

$$X_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + R_s^{(2)} + R_s^{(3)} + \ldots, \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)}$$

которыя въ силу уравненій (6) и (7) приводятся къ слѣдующимъ:

$$X_s = \frac{dx_s^{(1)}}{dt} + \frac{dx_s^{(2)}}{dt} + \frac{dx_s^{(3)}}{dt} + \ldots. \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)}$$

Но ряды, находящіеся во вторыхъ частяхъ послѣднихъ, при разсматриваемыхъ условіяхъ, очевидно, суть сходящіеся въ равной степени для всѣхъ значеній t, лежащихъ между t_0 и T, и слѣдовательно въ этихъ предѣлахъ представляютъ производныя отъ функцій, опредѣляемыхъ рядами (5).

Поэтому написанныя равенства приводятъ къ заключенію, что при условіяхъ (13) ряды (5) представляютъ функціи, дѣйствительно удовлетворяющія уравненіямъ (1).

Относительно найденнаго высшаго предѣла g замѣтимъ, что при $T=t_0$ онъ принимаетъ значеніе величины

$$\frac{A}{1+nK},$$

соотвѣтствующее тому же T. А значеніе это, согласно замѣченному выше, можно считать равнымъ соотвѣтствующему значенію величины A всякій разъ, когда выбранная нами система частныхъ рѣшеній уравненій (6) такова, что при $t=t_0$

$$x_{ii} = 1, \qquad x_{ij} = 0. \qquad {\scriptstyle (i \lessgtr j)}$$

Въ послѣднемъ предположеніи постоянныя a_s суть значенія функцій x_s для $t=t_0$.

Мы можемъ поэтому утверждать, что если всѣ A_s суть непрерывныя функціи t, и если A_0 есть наименьшее изъ значеній, принимаемыхъ ими для $t=t_0$, то при всякихъ a_s, которыя по числовымъ значеніямъ менѣе A_0, найдется такой предѣлъ T, бо́льшій t_0, что функціи x_s, удовлетворяющія уравненіямъ (1) и принимающія значенія a_s при $t=t_0$, представятся абсолютно сходящимися рядами, расположенными по восходящимъ степенямъ этихъ значеній, для всякаго t, лежащаго между t_0 и T.

Примѣчаніе. — Для представленія функцій x_s въ тѣхъ же предѣлахъ измѣняемости t можно, конечно, получить безчисленное множество другихъ абсолютно сходящихся рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ нѣкоторыхъ другихъ постоянныхъ произвольныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, модули которыхъ достаточно малы.

Всякіе ряды такого характера могутъ быть выводимы изъ предыдущихъ при помощи подстановокъ вида

$$a_s = f_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

гдѣ f_s означаютъ нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ α_σ.

Разсматривая какіе-либо ряды этого рода, допустимъ, что для нихъ всѣ функціи f_s при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ дѣлаются нулями. Допустимъ кромѣ того, что функціональный опредѣлитель функцій f_s въ отношеніи величинъ α_σ при такомъ положеніи не дѣлается нулемъ.

Тогда, если въ этихъ рядахъ возьмемъ совокупности всѣхъ членовъ не выше $m^{\text{аго}}$ порядка относительно постоянныхъ α_σ, то эти совокупности представятъ то, что мы будемъ называть выраженіями функцій x_s въ $m^{\text{омъ}}$ приближеніи.

Извѣстно, что при сдѣланныхъ предположеніяхъ относительно функцій f_s уравненіямъ (14) всегда можно удовлетворить, выбирая для величинъ α_σ нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ a_s, уничтожающіяся при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, и что, когда всѣ $|\alpha_\sigma|$, $|a_s|$ подчинены условію не превосходить нѣкоторыхъ достаточно малыхъ предѣловъ, такое рѣшеніе будетъ единственно возможнымъ.

Поэтому различныя $m^{\text{ыя}}$ приближенія, полученныя изъ различныхъ разложеній разсматриваемаго характера, будучи выражены черезъ постоянныя a_s, представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ послѣднихъ, и ряды эти будутъ разниться между собою только членами выше $m^{\text{аго}}$ порядка.

5. При той общей точкѣ зрѣнія, съ какой мы разсматривали вопросъ до сихъ поръ, мы имѣли въ виду только доказать, что по крайней мѣрѣ для t, не выходящаго изъ извѣстныхъ границъ, всегда существуютъ функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (1) и въ данный моментъ принимающія какія-либо данныя, численно достаточно малыя значенія, и что метода послѣдовательныхъ приближеній доставляетъ ряды, которые при извѣстныхъ условіяхъ могутъ служить для опредѣленія этихъ функцій. Но переходя къ изложенію какихъ-либо способовъ рѣшенія вопросовъ объ устойчивости, мы должны будемъ оставить эту точку зрѣнія, ограничивая нашу задачу нѣкоторыми болѣе опредѣленными предположеніями относительно дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

Преимущественно мы будемъ заниматься разсмотрѣніемъ двухъ слѣдующихъ случаевъ: когда всѣ коэффиценты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ суть постоянныя величины и когда это суть періодическія функціи t съ однимъ и тѣмъ-же вещественнымъ періодомъ.

Первый, конечно, можно было бы разсматривать, какъ частный случай второго. Но по многимъ причинамъ мы предпочитаемъ разсмотрѣть его отдѣльно.

Въ первомъ случаѣ, по примѣру Routh'а, невозмущенное движеніе мы будемъ называть (для величинъ, по отношенію къ которымъ изслѣдуется устойчивость) *установившимся* (steady); во второмъ — *періодическимъ*.

Разсматривая эти два случая, увидимъ, что для рѣшенія нашего вопроса весьма существенное значеніе будетъ имѣть изслѣдованіе перваго приближенія.

Мы покажемъ, при какихъ условіяхъ это изслѣдованіе вполнѣ рѣшаетъ вопросъ объ устойчивости, и при какихъ оно вообще дѣлается недостаточнымъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ укажемъ и нѣкоторые способы для рѣшенія вопроса въ извѣстныхъ случаяхъ этого послѣдняго рода.

Прежде, однако, чѣмъ перейти къ детальному разсмотрѣнію вопроса, мы остановимся на нѣкоторыхъ общихъ предложеніяхъ, которыя послужатъ точками отправленія при нашихъ изысканіяхъ.

Всѣ способы, которые мы можемъ указать для рѣшенія занимающаго насъ вопроса, можно раздѣлить на двѣ категоріи.

Къ одной мы причислимъ всѣ тѣ, которые приводятся къ непосредственному изслѣдованію возмущеннаго движенія, и въ основаніи которыхъ, поэтому, лежитъ разысканіе общихъ или частныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій (1).

Вообще эти рѣшенія придется искать подъ видомъ безконечныхъ рядовъ, простѣйшимъ типомъ которыхъ могутъ служить разсмотрѣнные въ предыдущемъ параграфѣ. Это суть ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ постоянныхъ произвольныхъ. Но далѣе мы встрѣтимся также и съ нѣкоторыми рядами другого характера.

Совокупность всѣхъ способовъ изслѣдованія устойчивости, относящихся къ этой категоріи, назовемъ *первою методой.*

Къ другой мы причислимъ всѣ тѣ, которые основываются на принципахъ, независящихъ отъ разысканія какихъ-либо рѣшеній дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

Таковъ напр. извѣстный способъ изслѣдованія устойчивости равновѣсія въ случаѣ существованія силовой функціи.

Эти способы могутъ приводиться къ разысканію и изслѣдованію интеграловъ уравненій (1), и вообще въ основаніи всѣхъ тѣхъ изъ нихъ, съ которыми встрѣтимся далѣе, всегда будетъ лежать разысканіе функцій перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ по нѣкоторымъ даннымъ условіямъ, которымъ должны удовлетворять ихъ полныя производныя по t, составленныя въ предположеніи, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть функціи t, удовлетворяющія уравненіямъ (1).

Совокупность всѣхъ способовъ этой категоріи мы назовемъ *второю методой.*

Основанія послѣдней, выраженныя въ нѣсколькихъ общихъ теоремахъ, изложимъ въ концѣ этой главы. Теперь же остановимся на приложеніи первой методы къ одному