

281434

281434

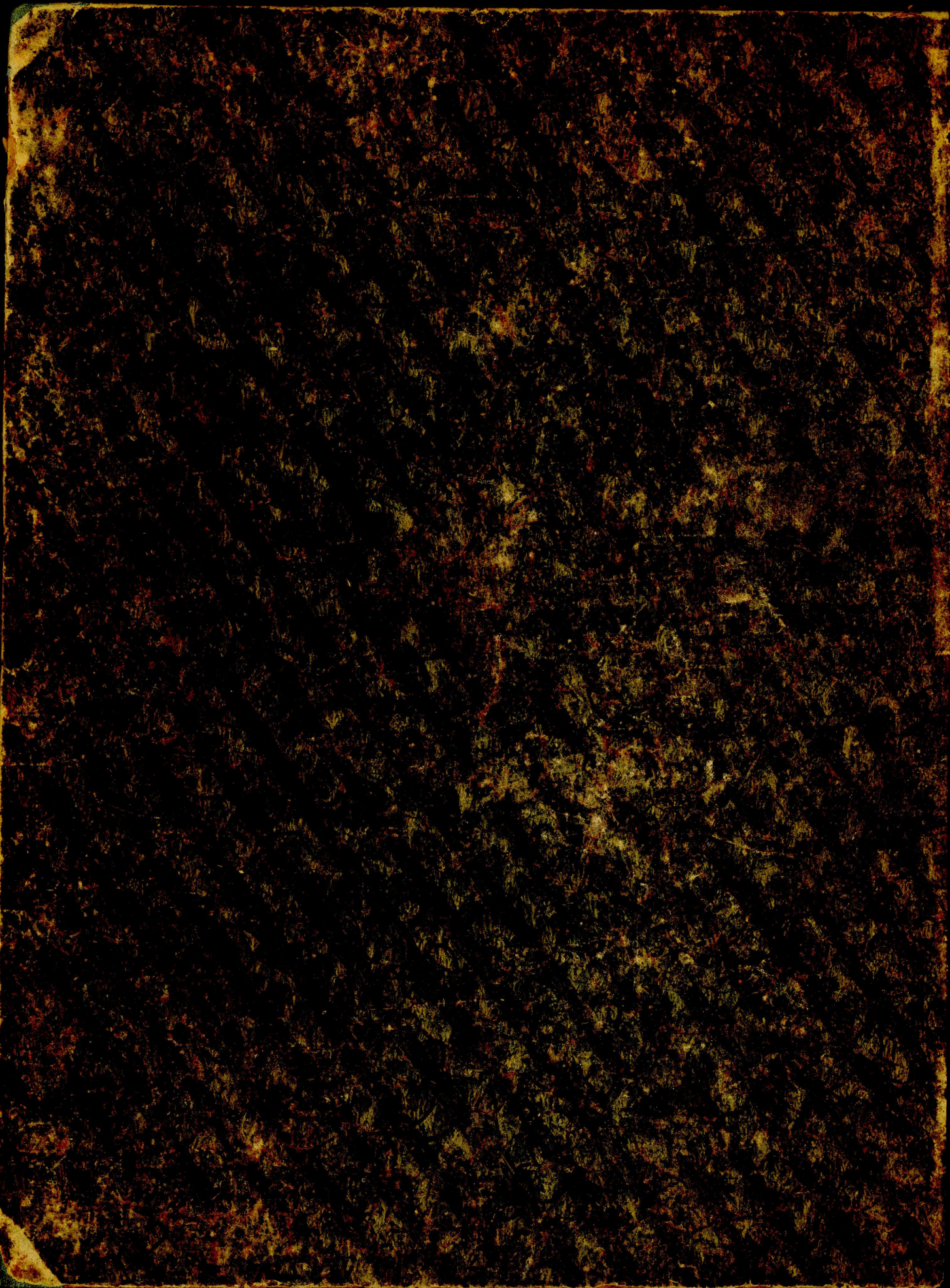
А. М. Ляпунов

Общая задача  
об

устойчивости  
движения

1892 г







Handwritten text, possibly a signature or name, in the top left corner.



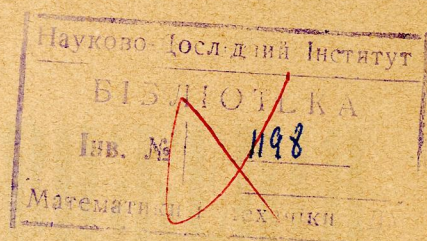


92









ОБЩАЯ ЗАДАЧА

ОБЪ

УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ.



THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTEN

ASTEN

ASTEN

ASTEN

ASTEN



ОБЩАЯ ЗАДАЧА  
ОБЪ  
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ.

РАЗСУЖДЕНИЕ  
А. ЛЯПУНОВА.

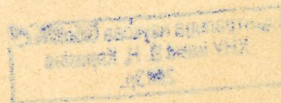
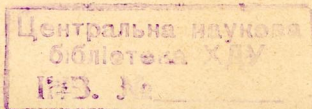


Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества.

ХАРЬКОВЪ.

Типографія Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.

1892.



281434-42

84

92

71

65

16

1958.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ.*



## ПРЕДИСЛОВІЕ.

---

Въ этомъ сочиненіи излагаются нѣкоторые способы для рѣшенія вопросовъ о тѣхъ свойствахъ движенія и въ частности равновѣсія, которыя извѣстны подъ названіями устойчивости и неустойчивости.

Обыкновенные вопросы такого рода, которымъ и посвящено это сочиненіе, приводятъ къ изслѣдованію дифференціальныхъ уравненій вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

вторыя части которыхъ, зависящія отъ времени  $t$  и неизвѣстныхъ его функцій  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при величинахъ  $x_s$ , численно достаточно малыхъ, разлагаются въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ послѣднихъ и уничтожаются, когда величины эти всѣ дѣлаются нулями.

Задача состоитъ при этомъ въ томъ, чтобы узнать, можно ли начальныя значенія функцій  $x_s$ , не дѣлая ихъ нулями, выбирать настолько численно малыми, чтобы во все время, слѣдующее за начальнымъ моментомъ, функціи эти оставались численно мѣньшими нѣкоторыхъ заранѣе данныхъ, отличныхъ отъ нуля, но сколь угодно малыхъ предѣловъ.

Когда наши дифференціальныя уравненія мы умѣемъ интегрировать, задача эта, конечно, не представляетъ затрудненій. Но важно имѣть способы, которые позволяли бы рѣшать ее независимо отъ выполнимости этого интегрированія.



Извѣстно, что существуютъ случаи, когда рассматриваемая задача допускаетъ приведеніе къ нѣкоторой задачѣ о maxima'хъ и minima'хъ \*). Но область вопросовъ, которые такимъ путемъ могутъ быть разрѣшаемы, весьма ограничена, и въ большинствѣ случаевъ необходимо прибѣгать къ какимъ-либо инымъ методамъ.

Приемъ, которымъ пользуются обыкновенно, приводится къ тому, что въ изслѣдуемыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ отбрасываютъ всѣ члены выше перваго измѣренія относительно величинъ  $x$ , и вмѣсто первоначальныхъ рассматриваютъ получаемыя такимъ путемъ линейныя уравненія.

Такъ трактуется вопросъ въ сочиненіи Томсона и Тэта *Treatise on Natural Philosophy* (Vol. I, Part I, 1879), въ сочиненіяхъ Routh'a *A treatise on the stability of a given state of motion* (1877) и *A treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies* (Part II, 4 edition, 1884) и наконецъ — въ сочиненіи Жуковского *О прочности движенія* (Ученыя Записки Московскаго Университета; отдѣлъ физико-математическій, 4 вып., 1882).

Конечно, указанный сейчасъ приемъ вноситъ весьма существенное упрощеніе, въ особенности въ тѣхъ случаяхъ, когда коэффициенты въ дифференціальныхъ уравненіяхъ суть постоянныя величины. Но законность такого упрощенія a priori ничѣмъ не оправдывается, ибо дѣло приводится къ замѣнѣ рассматриваемой задачи другою, съ которою она можетъ не находиться ни въ какой зависимости. Во всякомъ случаѣ очевидно, что если рѣшеніе новой задачи и можетъ давать отвѣтъ на первоначальную, то только при извѣстныхъ условіяхъ; а послѣднія обыкновенно не указываются.

Должно впрочемъ замѣтить, что сознавая нестрогость приема, нѣкоторые авторы (какъ напр. Routh) не ограничиваются однимъ первымъ приближеніемъ, къ которому приводитъ интегрированіе названныхъ выше линейныхъ уравненій, а рассматриваютъ также второе и нѣкоторыя изъ слѣдующихъ, получаемыхъ обычными въ подобныхъ случаяхъ методами. Но этимъ дѣло мало подвигается впередъ, ибо вообще такимъ путемъ достигается только болѣе точное представленіе функцій  $x$  въ предѣлахъ из-

---

\*) Мы разумѣемъ здѣсь тѣ случаи, къ которымъ приложима извѣстная теорема Лагранжа о maxima'хъ силовой функціи, касающаяся вопросовъ объ устойчивости равновѣсія, или болѣе общая теорема Routh'a о maxima'хъ и minima'хъ извѣстныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія, позволяющая рѣшать нѣкоторые вопросы объ устойчивости движенія (см. *The advanced part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies*, 4 edition, 1884, p. 52, 53).



## VII

вѣстнаго промежутка времени, что, конечно, не даетъ новыхъ основаній для какихъ-либо заключеній объ устойчивости.

Единственная, сколько мнѣ извѣстно, попытка строгаго рѣшенія вопроса принадлежитъ М. Poincaré, который въ своемъ во многихъ отношеніяхъ замѣчательномъ мемуарѣ *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (Journal de mathématiques; 3 série, tomes 7 et 8; 4 série, tomes 1 et 2) и именно въ двухъ послѣднихъ его частяхъ разсматриваетъ вопросы объ устойчивости для случая системъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка, а также останавливается на нѣкоторыхъ близкихъ къ нимъ вопросахъ, касающихся системъ третьяго порядка.

Хотя М. Poincaré и ограничивается очень частными случаями, но методы, которыми онъ пользуется, допускаютъ значительно болѣе общія приложенія и способны привести еще ко многимъ новымъ результатамъ.

Идеями, заключающимися въ названномъ мемуарѣ, я руководствовался при большей части моихъ изысканій.

Задача, которую я себѣ поставилъ, предпринимая настоящее изслѣдованіе, можетъ быть формулирована такъ: указать тѣ случаи, въ которыхъ первое приближеніе дѣйствительно рѣшаетъ вопросъ объ устойчивости, и дать какіе-либо способы, которые позволяли бы рѣшать его по крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ изъ тѣхъ случаевъ, когда по первому приближенію нельзя судить объ устойчивости.

Конечно, чтобы придти къ какимъ-либо результатамъ, необходимо было сдѣлать относительно разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій извѣстныя предположенія.

Простѣйшее изъ нихъ и вмѣстѣ съ тѣмъ соотвѣтствующее наиболѣе важнымъ и интереснымъ приложеніямъ состояло бы въ томъ, что коэффициенты въ разложеніяхъ вторыхъ частей этихъ уравненій суть постоянныя величины. Весьма многимъ интереснымъ вопросамъ соотвѣтствовало бы также болѣе общее предположеніе, что коэффициенты эти суть періодическія функціи времени.

Въ этихъ двухъ предположеніяхъ вопросъ и трактуется мною преимущественно.

Впрочемъ я касаюсь отчасти и болѣе общаго случая, когда названныя коэффициенты суть какія-либо функціи времени, числовыя значенія которыхъ никогда не превосходятъ извѣстныхъ предѣловъ.



### VIII

Въ этомъ общемъ предположеніи трактуется вопросъ въ первой главѣ моего сочиненія, гдѣ доказывается одно предложеніе, касающееся интегрированія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи рядовъ извѣстнаго типа \*) и указываются нѣкоторыя вытекающія изъ него заключенія объ устойчивости. Въ томъ же предположеніи доказываются здѣсь и нѣкоторыя другія предложенія, лежація въ основаніи дальнѣйшихъ выводовъ.

Первая глава представляетъ только вступительную часть моего сочиненія, въ которой излагаются нѣкоторыя предложенія принципіальнаго характера. Главную же часть составляютъ вторая и третья, гдѣ и разсматриваются послѣдовательно случаи постоянныхъ и періодическихъ коэффициентовъ.

Каждую изъ этихъ двухъ главъ я начинаю нѣкоторыми замѣчаніями, касающимися линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, соответствующихъ первому приближенію, при чемъ въ третьей главѣ, гдѣ трактуется случай періодическихъ коэффициентовъ, вхожу въ нѣкоторыя подробности относительно такъ называемаго характеристичнаго уравненія.

Переходя затѣмъ къ главному вопросу и указавши условія, при которыхъ онъ разрѣшается въ первомъ приближеніи, я обращаюсь къ тѣмъ особннымъ случаямъ, когда для этой цѣли въ дифференціальныхъ уравненіяхъ необходимо принимать въ расчетъ члены выше перваго измѣренія.

Но случаи этого рода весьма разнообразны, и въ каждомъ изъ нихъ задача получаетъ свой особый характеръ, такъ что не можетъ быть и рѣчи о какихъ-либо общихъ способахъ ея рѣшенія, которые относились бы ко всѣмъ такимъ случаямъ.

Поэтому различные возможные случаи приходится разсматривать отдѣльно, и я ограничиваюсь только простѣйшими изъ нихъ, которые представляютъ затрудненія, наименѣе серьезные. Изслѣдованіе ихъ и изложеніе соответствующихъ имъ способовъ рѣшенія вопросовъ объ устойчивости занимаетъ большую часть двухъ послѣднихъ главъ.

Не входя въ дальнѣйшія подробности относительно содержанія этого сочиненія, съ которымъ читатель можетъ до извѣстной степени ознакомиться

\*) Ряды, о которыхъ идетъ здѣсь рѣчь, разсматривались мною въ болѣе частныхъ предположеніяхъ въ статьѣ *О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости* (Сообщ. Харьк. Мат. Общ. 2 серия, томъ I, 1888). Впослѣдствіи я узналъ, что въ такихъ же предположеніяхъ ряды эти разсматривались М. Poincaré въ его диссертациі *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* (Thèse, 1879).



изъ прилагаемаго оглавленія, замѣчу еще, что во второй главѣ я касаюсь вопроса о періодическихъ рѣшеніяхъ нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Вопросъ этотъ находится въ тѣсной связи съ методами, предлагаемыми мною для одного изъ особенныхъ случаевъ. При томъ разсмотрѣніе его приводитъ къ нѣкоторымъ заключеніямъ объ условной устойчивости для тѣхъ наиболѣе интересныхъ случаевъ, когда дифференціальныя уравненія имѣютъ каноническую форму. А этими заключеніями исчерпывается почти все, что пока можно сказать общаго о такихъ случаяхъ.

Въ предлагаемомъ сочиненіи читатель не найдетъ рѣшенія какихъ-либо опредѣленныхъ механическихъ задачъ. По первоначальному плану приложенія такого рода должны были составить четвертую главу. Но потомъ я отказался отъ намѣренія прибавлять ее, имѣя въ виду слѣдующія соображенія.

Всѣ наиболѣе интересные и важные вопросы механики (какъ напр. тѣ, которые приводятъ къ каноническимъ уравненіямъ) таковы, что въ особенныхъ случаяхъ, когда первое приближеніе недостаточно, задача дѣлается для нихъ въ высшей степени трудною, и пока невозможно указать какихъ-либо приѣмовъ для ея рѣшенія. Поэтому, при разсмотрѣніи такихъ вопросовъ, мнѣ пришлось бы ограничиться только примѣрами двоякаго рода: или тѣми, въ которыхъ вопросъ рѣшался бы приведеніемъ къ задачѣ о *maxima*'хъ и *minima*'хъ (т. е. на основаніи теоремы Routh'a), или тѣми, въ которыхъ онъ рѣшался бы въ первомъ приближеніи. Но подобные примѣры, хотя и представляли бы извѣстный интересъ, не относились бы къ главной части моего изслѣдованія, которая, какъ уже было сказано, посвящена изложенію методъ, соотвѣтствующихъ особннымъ случаямъ извѣстныхъ категорій. Что же касается примѣровъ, относящихся къ этимъ методамъ, то ихъ пришлось бы выбирать изъ области тѣхъ вопросовъ механики, въ которыхъ принимаются въ расчетъ различнаго рода сопротивленія среды. Такихъ примѣровъ, конечно, можно было бы привести сколько угодно; но они сами по себѣ не представляли бы большого интереса и могли бы имѣть значеніе только, какъ поясняющіе названныя методы. Если же имѣть въ виду исключительно эту послѣднюю цѣль, то совершенно достаточно и тѣхъ примѣровъ аналитическаго характера, которые приведены мною въ надлежащихъ мѣстахъ двухъ послѣднихъ главъ.

Въ заключеніе замѣчу, что сочиненіе мое не есть трактатъ объ устойчивости, гдѣ было бы обязательно разсмотрѣніе механическихъ задачъ вся-



каго рода. Подобный трактатъ долженъ былъ бы заключать въ себѣ многіе вопросы, которыхъ я здѣсь вовсе не касаюсь.

Въ этомъ сочиненіи я имѣлъ лишь въ виду изложить то, что пока удалось мнѣ сдѣлать для рѣшенія поставленной мною задачи и что, можетъ быть, можетъ послужить точкою отправленія для дальнѣйшихъ изысканій такого же характера.

---

Во время печатанія этого сочиненія появились два весьма интересные произведенія М. Poincaré, въ которыхъ затрогиваются вопросы, стоящіе весьма близко къ разсматриваемымъ мною. Я разумѣю его мемуаръ *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, появившійся въ 13<sup>омъ</sup> томѣ Acta mathematica вскорѣ послѣ того, какъ я началъ печатать свое изслѣдованіе, и вышедшій въ самое недавнее время первый томъ его большого сочиненія *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (Paris, Gauthier-Villars, 1892).

Въ первомъ находятся нѣкоторые результаты, сходные съ полученными мною, на что я и указываю въ надлежащихъ мѣстахъ своего сочиненія въ подстрочныхъ примѣчаніяхъ. Что же касается второго, то ознакомиться съ нимъ подробно я еще не успѣлъ; но по отношенію къ вопросамъ, разсматриваемымъ мною, въ немъ, повидимому, нѣтъ какихъ-либо существенныхъ прибавленій къ названному мемуару.

---

Считаю нужнымъ сказать здѣсь объ одномъ терминѣ, встрѣчающемся въ этомъ сочиненіи.

Разсматривая ряды, расположенные по степенямъ величинъ, которыя по характеру вопроса можно предполагать сколь угодно малыми, я весьма часто говорю о членахъ различныхъ *порядковъ*. При этомъ подъ порядкомъ каждаго члена я разумѣю его измѣреніе, и термину „порядокъ“ не приписываю никакого иного значенія.

Я долженъ упомянуть еще объ одномъ выраженіи, которымъ, по примѣру многихъ французскихъ и нѣмецкихъ ученыхъ, нерѣдко пользуюсь



## XI

для сокращенія рѣчи. Я разумѣю выраженіе: „ряды, *формально* удовлетворяющіе“ такимъ-то уравненіямъ.

Выраженіе это имѣетъ весьма условный смыслъ. Но я счелъ излишнимъ входить въ какія-либо разъясненія его, такъ какъ въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ мнѣ приходится имъ пользоваться, относительно значенія его не можетъ возникнуть никакихъ сомнѣній.

---

Это сочиненіе издано Харьковскимъ Математическимъ Обществомъ, благодаря особымъ средствамъ, которыя нашелъ возможнымъ доставить ему Харьковскій Университетъ, за что и считаю долгомъ выразить послѣднему свою признательность.

А. Лапуновъ.

Харьковъ, 5 апрѣля 1892 г.

---