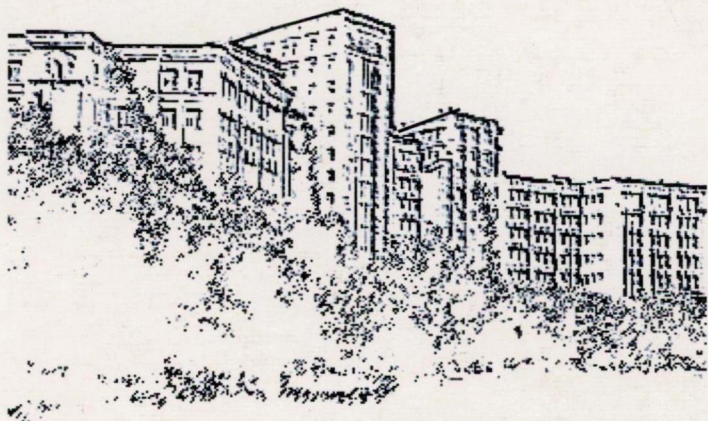


Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



№ 1058

Харків
2013

K-14038

П335887

V.N. Karazin Kharkiv National University



00981201

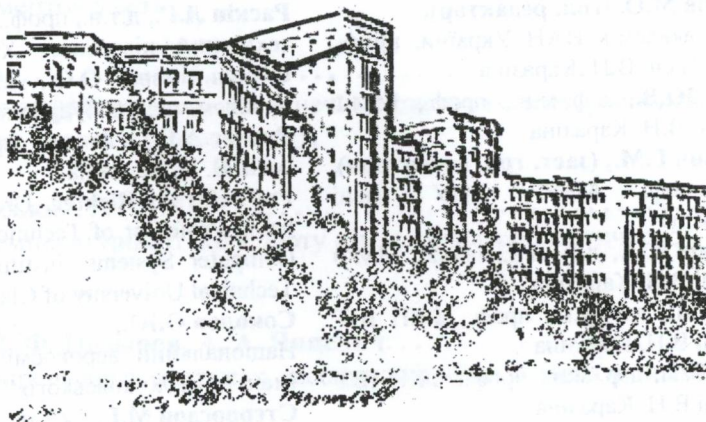
3

ISSN 2304–6201

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



№ 1058

Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 21

Серія заснована 2003 р.

Харків
2013

До випуску увійшли статті, присвячені дослідженням у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації, висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 5 від 26.04.2013 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор), д.ф.-м.н., академік НАН України, проф., IBT ХНУ імені В.Н. Каразіна
Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Жолткевич Г.М., (заст. гол. редактора), д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна
Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН IBT ХНУ імені В.Н. Каразіна
Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН IBT ХНУ імені В.Н. Каразіна
Prof. **Philippe Lahire**, Dr. habil., Professor of computer science, Dep. of C. S., University of Nice-Sophia Antipolis, France
Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Мищенко В.О. (відпов. секретар), д.т.н., доц., ФКН IBT ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"
Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України
Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В. Н. Каразіна
Prof. **Harald Richter**, Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Professor of Technical Informatics and Computer Systems, Institute of Informatics, Technical University of Clausthal, Germany
Соколов О.Ю., д.т.н., проф., Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського "ХАІ"
Стервоєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН IBT ХНУ імені В.Н. Каразіна
Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., IBT ХНУ імені В.Н. Каразіна
Черваньов І.Г., д.т.н., проф., геолого-географічний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна
Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 538.
Тел. +380 (57) 705-81-42, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті пройшли внутрішнє та зовнішнє рецензування.

Свідоцтво про державну реєстрацію KB № 11825-696 ПР від 04.10.2006.

© Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2013



ЗМІСТ

▪ В. Г. Агеев, С. П. Греков, И. Н. Зинченко, Т. Г. Салахутдинов.	5
Компьютерное моделирование развития, распространения и локализации взрывов метано-воздушных смесей в горных выработках	
▪ В. М. Годунко, В. О. Мищенко, А. В. Пасека.	13
Особенности энергетических метрик UML диаграмм	
▪ А. А. Гуржий, А. В. Шалденко.	20
Процессы переноса скалярных полей в течениях вязкой жидкости в криволинейных трубах в приближении Дина	
▪ Е. В. Диденко.	29
Сенсоры дискретных потоков информационной системы управления движением элементов в сети	
▪ В. Д. Душкин.	35
Моделирование дифракции волн на конечных системах лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя	
▪ О. Б. Кобильська.	43
Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння	
▪ Е. А. Когут, З. Ф. Назыров, А. А. Янцевич.	50
О линейных непрерывных системах, ассоциированных с операторными узлами	
▪ Д. Н. Колесник, А. Д. Шамровский.	65
Геометрически нелинейная решетчатая модель консольной балки под действием сосредоточенной силы	
▪ А. И. Косолап.	77
Метод последовательного раскрытия модулей в задачах негладкой оптимизации	
▪ О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер.	83
Сплайн-інтерфлетажія та обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій	
▪ В. П. Ляшенко.	97
Температурное поле бесконечного цилиндра с движущимся источником тепла	
▪ В. П. Ляшенко.	104
Визначення параметрів керування температурним полем за допомогою оберненої задачі Стефана	

▪ Т. П. Мельник.....	113
Використання екстраполяції для удосконалення методів прогнозування	
▪ В. О. Міщенко.....	122
Моделі та характеристики обчислювального кластера, які допомагають визначати напрямки його подальшого розвитку	
▪ А. Л. Пивень.....	132
Численное решение вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями	
▪ Е. В. Свет, Н. В. Сметанкина, А. Н. Шупиков.....	142
Метод решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане	
▪ Ю. А. Скоб, М. Л. Угрюмов.....	149
Численное моделирование детонации в газовых смесях	
▪ А. В. Фёдоров, А. В. Омельченко.....	158
Планирование экспериментов при исследовании решающих правил распознавания сигналов методом моделирования	
▪ В. П. Черненко.....	178
Об одном численном методе одномерной оптимизации	
▪ Y. V. Shestopalov, E. V. Chernokozhin.....	184
On solution to integral equations with a logarithmic singularity of the kernel on several intervals of integration: elements of the spectral theory	
▪ CONTENTS.....	190

УДК 519.6

Компьютерное моделирование развития, распространения и локализации взрывов метано-воздушных смесей в горных выработках

В. Г. Агеев, С. П. Греков, И. Н. Зинченко, Т. Г. Салахутдинов

Научно-исследовательский институт горноспасательного дела «Респиратор», Украина

Рассмотрен численный метод расчета параметров воздушных ударных волн в сети горных выработок. Предложена численная схема для определения параметров воздушных ударных волн на сопряжениях горных выработок. Для описания процесса горения метановоздушной смеси использована модель цепных реакций. Разработаны алгоритм и программа, реализующая описанный метод и позволяющая прогнозировать расположение безопасных мест ведения горноспасательных работ в сети горных выработок при взрывах метановоздушной смеси.

Ключевые слова: воздушная ударная волна, местное сопротивление, цепная реакция, сеть горных выработок.

Розглянуто чисельний метод розрахунку параметрів повітряних ударних хвиль у мережі гірничих виробок. Запропонована чисельна схема для визначення параметрів повітряних ударних хвиль в місцях сполучення гірничих виробок. Для опису процесу горіння метаноповітряної суміші використана модель ланцюгових реакцій. Розроблені алгоритм і програма, які реалізують описаний метод і дозволяють прогнозувати розташування безпечних місць ведення гірничорятувальних робіт в мережі гірничих виробок при вибухах метаноповітряної суміші.

Ключові слова: повітряна ударна хвиля, місцевий опір, ланцюгова реакція, мережа гірничих виробок.

The numerical method of calculation of parameters of air shock waves in the mine workings network is considered. The numerical scheme to determine the parameters of the shock waves at the mine workings connections is suggested. Chain reaction model to describe combustion action of methane-air mixture is used. The algorithm and the program realizing the method described and allowing the forecast of the situation of the safe places of carrying-out the mine-rescue operations in the mine workings network by methane explosions are worked out.

Key words: shock wave, local resistance, chain reaction, mine workings network.

1. Постановка проблемы и обзор публикаций по теме исследования

В газовых шахтах открытое пламя, короткое замыкание в электросиловых или осветительных сетях и взрывные работы могут явиться источниками воспламенения метано-воздушных или пылевоздушных смесей. Процесс воспламенения при определенных условиях может переходить в горение, а затем и во взрыв большой разрушительной силы. Взрывы метано-воздушных и пылевоздушных смесей вызывают образование воздушных ударных волн (ВУВ), которые, распространяясь на большие расстояния, разрушают сооружения, коммуникации, оборудование и прочие устройства, как в подземных условиях, так и на поверхности. Это обуславливает значительные расходы средств на ремонтно-восстановительные работы, увеличивает время проветривания шахт и

влечет за собой вынужденные простои горных предприятий. Кроме того, ВУВ представляют опасность для людей.

Ранее выполненные исследования дали основания для создания методики расчета безопасных расстояний при взрывах газа и пыли в сети горных выработок [1]. Однако, упомянутая методика не учитывает динамического поведения ВУВ, отражения ВУВ от стенок выработок, увеличения давления во фронте ВУВ за счет наложения нескольких ВУВ. В работе [2] использован газодинамический подход к решению задачи распространения ВУВ, однако решение находится только лишь на прямолинейных участках горных выработок в случае стационарного режима. Авторами [3] предложен численный метод решения задачи распространения и взаимодействия ВУВ в сети горных выработок. Особенностью этого метода является решение двумерной системы Эйлера на сопряжениях горных выработок. Однако такой подход значительно увеличивает время расчета параметров ВУВ в сети горных выработок. Особенно это заметно в случае крупных шахт, число выработок и сопряжений в которых достигает порядка нескольких сотен.

2. Нерешенные части проблемы

Решение задачи распространения ВУВ в сети горных выработок зависит от многих факторов. Концентрация метана в загазованной области, скорость распространения пламени, наличие или отсутствие пыли обуславливают вид начального условия для поставленной задачи. Ранее [3] в качестве начальных условий для задачи распространения ВУВ в горных выработках использовались условия вида:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x,0) &= \begin{cases} 1, & x \notin [x_1; x_2]; \\ \bar{P}_1, & x \in [x_1; x_2]. \end{cases} \\ \bar{U}(x,0) &= 0; \\ \bar{\rho}(x,0) &= 1; \end{aligned} \quad (1),$$

где $\bar{P}(x,0)$, $\bar{U}(x,0)$, $\bar{\rho}(x,0)$ - распределение по длине выработки относительных давления, скорости и плотности газов в начальный момент времени; $[x_1; x_2]$ - загазованная область; $\bar{P}_1$ - постоянная величина ($\bar{P}_1 \neq 1$).

Это условие задает постоянное избыточное давление во всей загазованной области. Подобный подход не соответствует физике процесса горения и взрыва, поскольку на начальном этапе формирования ВУВ происходит медленное горение метана. Постепенно с увеличением температуры давление на фронте пламени, а также его скорость растут. Достигая границ загазованной области, фронт пламени переходит во фронт ВУВ. Заметим, что соотношение параметров ВУВ (1) не достигается ни в один момент времени. Поэтому для корректного описания формирования ВУВ необходимо задать другие начальные условия.

Как отмечается в литературе [3], прохождение ударной волной сопряжений горных выработок сопровождается сложным процессом перераспределения энергии вследствие разделения фронта ВУВ на несколько фронтов, отражения и дифракции фронтов, возникновения волн разрежения. Для описания подобных процессов естественно использовать двумерную систему уравнений Эйлера [4]. Однако численное решение этой системы требует значительных вычислительных мощностей и таким образом может существенно увеличить время расчета распространения ВУВ в сети горных выработок, количество которых может достигать нескольких сотен. Поэтому для расчета параметров ВУВ, преодолевающих сопряжения необходимо предложить численную схему, которая бы требовала небольшого количества вычислений.

3. Цели работы

Целью статьи является описание схемы для определения параметров ВУВ на сопряжениях горных выработок, а также разработка алгоритма и программы, реализующей описанный метод и позволяющей прогнозировать расположение безопасных мест ведения горноспасательных работ в сети горных выработок при взрывах метано-воздушной смеси.

4. Постановка задачи

Динамика движения газа, в том числе поведение ВУВ, в горной выработке описывается системой дифференциальных уравнений Эйлера [4].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + c \frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(\bar{u})}{\partial t} + c \frac{\partial(\bar{P} + \bar{u}^2 / \bar{\rho})}{\partial x} &= -\frac{\lambda_0 \Pi c}{8S} \bar{u} |\bar{u}| / \bar{\rho}; \\ \frac{\partial(\bar{E})}{\partial t} + c \frac{\partial[(\bar{E} + \bar{P})\bar{u} / \bar{\rho}]}{\partial x} &= \frac{\alpha \Pi}{\rho_0 R S} (1 - \bar{P} / \bar{\rho}) + \frac{q}{\rho_0 R T_0} \end{aligned} \quad (2),$$

где $\bar{\rho}$ – относительная плотность газовой смеси, 1; $\bar{u}$ – относительная массовая скорость смеси газов вдоль оси выработки, 1; $\bar{P}$ – относительное давление, 1; $\bar{E}$ – относительная полная энергия потока газов, 1; t – время, с; x – координата, направленная вдоль оси выработки, м; λ_0 – коэффициент аэродинамического сопротивления выработки, 1; Π – периметр поперечного сечения выработки, м; S – площадь поперечного сечения выработки, м²; α – коэффициент теплообмена со стенками выработок, Па·м/(с·К); R – газовая постоянная, Дж/(кг·К); $c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}$, м/с; P_0 – давление в выработках до взрыва, Па;

ρ_0 – плотность воздуха в выработках при нормальных условиях, кг/м³; T_0 –

температура воздуха в выработках до взрыва, К; q — суммарная плотность источников и стоков тепла, Вт/м³.

На основании численного решения системы (2) необходимо разработать алгоритм расчета безопасных мест ведения горноспасательных работ при взрывах метана и пыли в сети горных выработок.

5. Основная часть

Для численного решения системы уравнений (2) необходимо дополнить ее начальными условиями. Как уже было сказано выше, начальные условия типа (1) не соответствуют физике взрыва метана, поэтому выберем другие начальные условия. В работе [5] описан подход, позволяющий смоделировать цепную реакцию горения на этапе, предшествующем взрыву. Численная схема представляется в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_m^{n+1} &= \bar{\rho}_m^n + Cu(\bar{u}_{m-1}^n - \bar{u}_{m+1}^n)/2 + kCu(\bar{\rho}_{m-1}^n - 2\bar{\rho}_m^n + \bar{\rho}_{m+1}^n); \\ \bar{u}_m^{n+1} &= \frac{(1 - \bar{r}Cu|\bar{u}_m^n|/2\bar{\rho}_m^n)\bar{u}_m^n + Cu(\bar{P}_{m-1}^n - \bar{P}_{m+1}^n + \bar{u}_{m-1}^2/\bar{\rho}_{m-1}^n - \bar{u}_{m+1}^2/\bar{\rho}_{m+1}^n)/2}{1 + \bar{r}Cu|\bar{u}_m^n|/2\bar{\rho}_m^n}; \end{aligned} \quad (3),$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_m^{n+1} &= \bar{P}_m^n + (\gamma - 1)(\bar{u}_m^{n2}/\bar{\rho}_m^n - \bar{u}_m^{n+12}/\bar{\rho}_m^{n+1})/2 + \\ &+ Cu\{[\gamma\bar{P}_{m-1}^n + (\gamma - 1)\bar{u}_{m-1}^2/2\bar{\rho}_{m-1}^n]\bar{u}_{m-1}^n/\bar{\rho}_{m-1}^n - \\ &- [\gamma\bar{P}_{m+1}^n + (\gamma - 1)\bar{u}_{m+1}^2/2\bar{\rho}_{m+1}^n]\bar{u}_{m+1}^n/\bar{\rho}_{m+1}^n\}/2 + kCu(\bar{P}_{m-1}^n - 2\bar{P}_m^n + \bar{P}_{m+1}^n) + \\ &+ \alpha Cu(1 - \bar{P}_m^n/\bar{\rho}_m^n) + Cu\bar{q}_m^n, \end{aligned}$$

где $Cu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ — коэффициент Куранта; $\bar{r} = \frac{\lambda\Delta x}{2\sqrt{S}}$ — относительное

аэродинамическое сопротивление участка выработки; $\bar{\alpha} = \frac{(\gamma - 1)\alpha\Pi\Delta x}{\rho_0 cBS}$

безразмерный коэффициент теплоотдачи стенкам выработки; $\bar{q}_m^n = \frac{(\gamma - 1)q_m^n\Delta x}{c\rho_0 BT_0}$

безразмерная функция тепловыделения при цепных реакциях горения.

Искомые параметры в начальный момент времени остаются неизменными

$$\bar{P}_m^0 = 1; \bar{U}_m^0 = 0; \bar{\rho}_m^0 = 1 \quad (4),$$

а формирование ВУВ моделируется с помощью задания функции источника тепла в виде:

$$\bar{q}_m^n = \begin{cases} 3,5n\Delta x / \sqrt{S}, & n\Delta x \leq l \text{ и } m = n \\ 0, & n\Delta x > l \text{ или } m \neq n \end{cases} \quad (5),$$

где l – длина загазованной зоны, м;

Для моделирования поведения ВУВ в местах поворотов и разветвлений горных выработок используется система двумерных уравнений газовой динамики [4]. Чтобы сократить количество вычислений и время расчета параметров ВУВ и безопасных мест ведения горноспасательных работ численный метод будем организовывать так, чтобы непосредственно в месте разветвления горных выработок находилась только одна точка разбиения. В этой точке будем решать двумерную систему Эйлера. Наиболее распространенным способом задания граничных условий при решении таким методом является способ отражения [6]. В этом случае вводятся дополнительные узлы (3, 4), которые располагаются за пределами ветвей, как это показано на рис. 1.

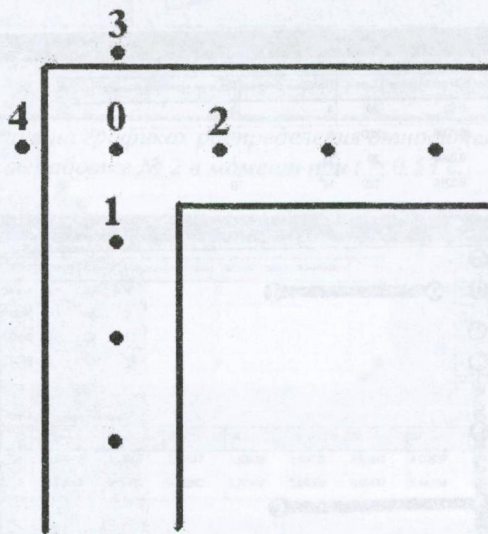


Рис. 1. Схема сопряжения горных выработок.

Расчет в точке 0 на новом временном слое будет производиться с использованием значений в точках 0 – 4 на предыдущем временном слое. В точках 3, 4 будут задаваться граничные условия вида:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \bar{u} = 0 \quad (6),$$

Алгоритм расчета можно условно разделить на несколько блоков. Первый блок включает в себя задание исходных данных (конфигурация сети горных выработок, параметры выработок, параметры взрыва, параметры численного расчета, координаты мест сопряжений выработок на схеме), проверка корректности исходных данных, вычисление вспомогательных переменных (матрица инцидентности узлов горных выработок согласно топологии сети).

Во втором выполняется вычисление параметров ВУВ согласно численной схеме (3)–(5). После того, как будет выполнен расчет на заданном количестве временных слоев, проводится расчет максимальных по времени относительных давлений во всех горных выработках заданной сети. Места, в которых максимальное относительное давление меньше заданного порогового значения, считаются безопасными для ведения горноспасательных работ. В противном случае – опасными.

Третий блок содержит процедуры и функции, которые обеспечивают визуализацию динамического поведения параметров ВУВ с указанием безопасных мест ведения горноспасательных работ на графиках, в таблицах и на схеме сети горных выработок (рис. 2,3,4).

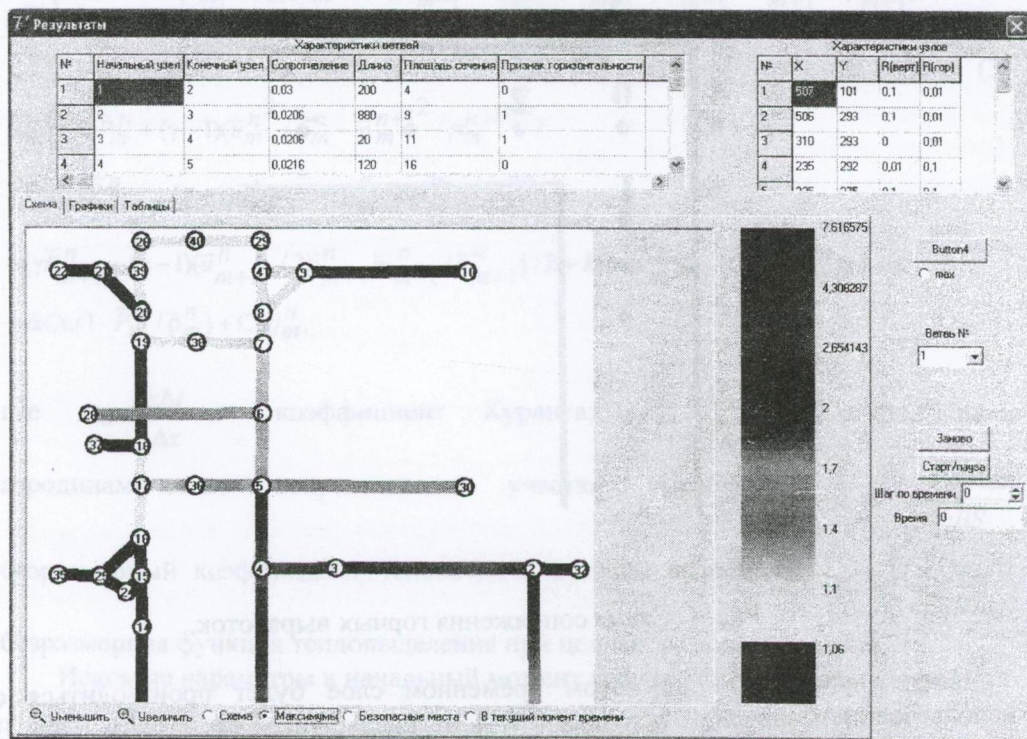


Рис. 2. Распределение максимального давления в сети горных выработок.

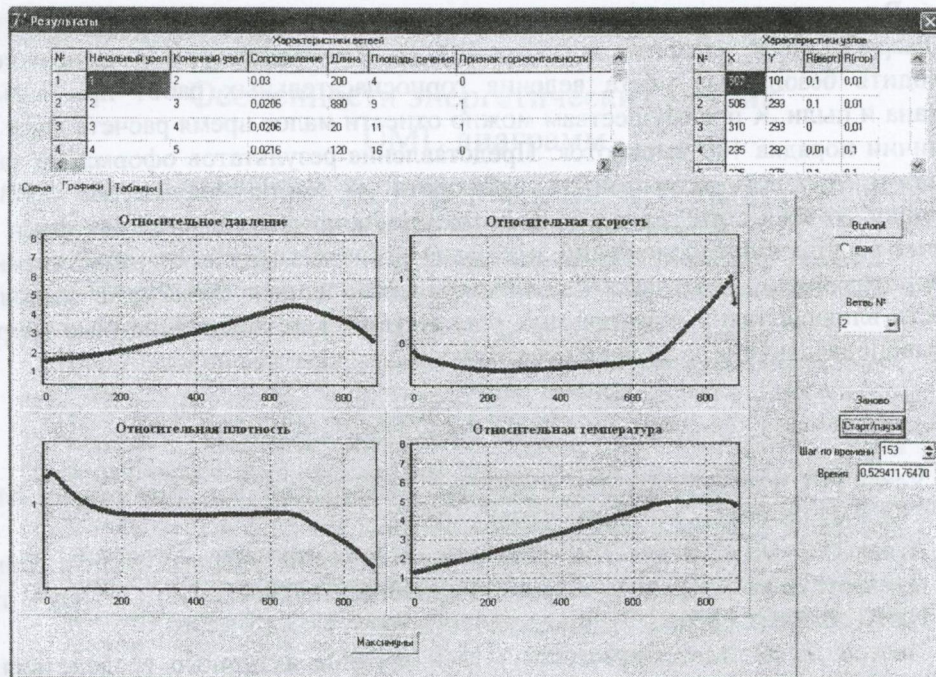


Рис. 3. Представление на графиках распределения относительного давления в выработке № 2 в момент при $t = 0.53$ с.

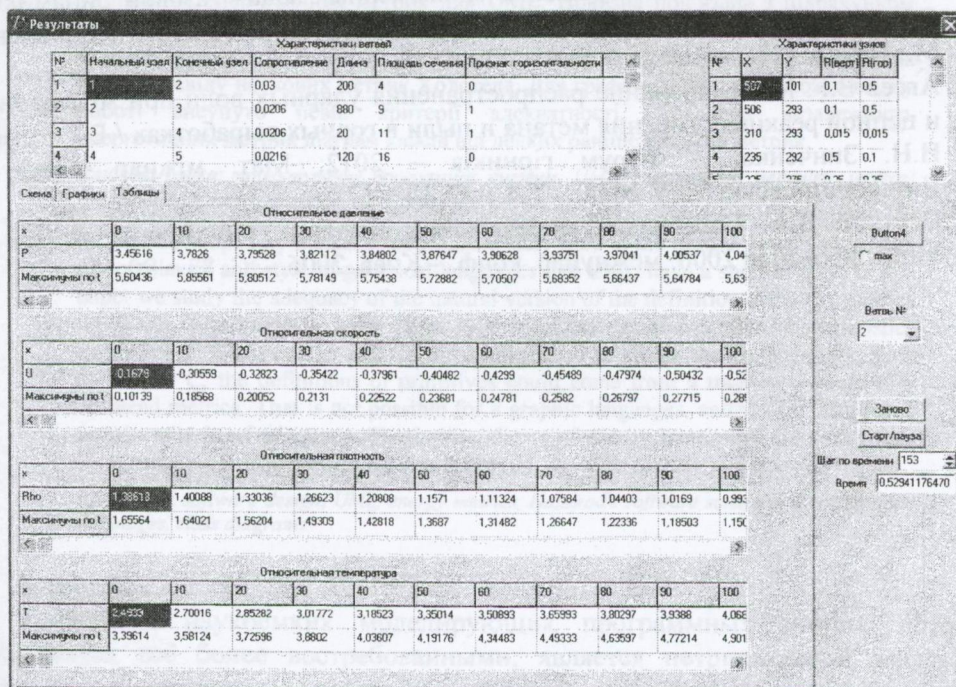


Рис. 4. Представление в таблицах распределения относительного давления в выработке № 2 в момент при $t = 0.53$ с.

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Разработанный алгоритм и программа расчета параметров ВУВ позволяют находить безопасные места ведения горноспасательных работ при взрывах метана и пыли. К преимуществам можно отнести малое время расчета даже при наличии порядка 100 выработок. Представление результатов оформлено таким образом, что есть возможность наблюдать изменение параметров ВУВ во времени во всей сети горных выработок. Недостатком является тот факт, что расчет ведется в предположении, что все выработки в местах их разветвлений и поворотов имеют угол либо 90° , либо 0° . Также данная схема не в состоянии учесть влияние таких разрушаемых препятствий, как вентиляционные двери и взрывоподавляющие заслоны и перемычки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устав ВГСЧ по организации и ведению горноспасательных работ: утв. МУП СССР 22.06.1983. - М.: Недра, 1986. - 254 с.
2. Агеев В.Г. Математическая модель формирования ударных волн в горных выработках при взрывах метана / Горноспасательное дело: Сб. науч. тр. / НИИГД «Респиратор». – Донецк, 2010. – Вып. 47. – С. 5 – 10.
3. Палеев Д. Ю. Математическое моделирование активного воздействия на взрывоопасные области и очаги горения в угольных шахтах / Д.Ю. Палеев, О.П. Брабандер. - Томск: Изд-Во Томского университета, 1999. - 199 с.
4. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов – М.: Наука, 1976. – 400 с.
5. Агеев В.Г. Моделирование распространения ударных волн при мгновенной и цепной реакциях горения метана и пыли в горных выработках / В.Г. Агеев, И.Н. Зинченко. – Форум гірників – 2012: Мат. міжнар. конф. – Дніпропетровськ: МГУ 2012. – Т.4. – С. 12 – 17.
6. Святний В.А. Паралельне моделювання складних динамічних систем // Моделювання 2006: междунар. конф. – Киев, 2006. – С. 83 – 90.

УДК 004.412:004.415.2

Особенности энергетических метрик UML диаграмм

В. М. Годунко, В. О. Мищенко, А. В. Пасека

ИП Годунко В. М., Ростов-на-Дону, Россия,

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина,

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

В проектировании широко используются модели, разработанные средствами UML. Исследования сложности и стиля для таких графических языков имеют короткую историю. В данной работе изучены вопросы адекватности естественного варианта определения энергетических метрик для UML. Новизна связана с подсчётом примитивных характеристик (примитивов). Когда энергетические метрики вводились для языков программирования, например, Ада или Си, в определениях примитивов можно было исходить из традиции научных метрик Холстеда. Для графических языков это невозможно, и в работе выдвинуты определённые критерии адекватности. Доказана независимость энергетических метрик диаграмм классов от некоторых ранее известных метрик.

Ключевые слова: проектирование программных систем, UML, энергетические метрики, научные метрики Холстеда, графические языки, диаграмма классов.

У проектуванні широко використовуються моделі, розроблені засобами UML. Дослідження складності і стилю для таких графічних мов мають коротку історію. У даній роботі вивчені питання адекватності природного варіанту визначення енергетичних метрик для UML. Новизна пов'язана з підрахунком примітивних характеристик (примітивів). При введенні енергетичних метрик для мов програмування, скажімо, Ада чи Сі, можна було визначати примітиви на основі досвіду наукових метрик Холстеда. Для графічних мов це неможливо, і у роботі висунуто певні критерії адекватності. Доведено незалежність енергетичних метрик діаграм класів від деяких раніше відомих метрик.

Ключові слова: проектування програмних систем, UML, енергетичні метрики, наукові метрики Холстеда, графічні мови, діаграма класів.

Models developed by means of UML are widely used in the design. However, studies of complexity and style of graphical languages like UML have a short history. In this paper we study the adequacy of the natural version of the definition of energy metrics for UML. The question boils down to the calculation of primitive characteristics (primitives). When energy metrics were introduced to programming languages, such as Ada or C, the definitions of primitives could come from a tradition of scientific Halstead metrics. That is not possible for a graphic languages, and we are introduced certain criteria of adequacy. The independence of energy metrics of class diagrams from some previously known metrics is proved.

Key words: software design, UML, energy metrics, Halstead's software science metrics, graphic languages, class diagrams.

Введение

Разработка наукоёмких моделирующих программных систем, которые становятся всё более востребованными, является нетривиальной задачей и требует современных подходов к подготовке, испытаниям и использованию программного кода. Один из наиболее перспективных подходов к созданию кода обсуждаемых систем опирается на парадигму последовательного преобразования моделей [1]. На каждом этапе такого преобразования

необходимо принимать во внимание объективные показатели сложности и трудоёмкости требований и кодов. В частности, применяя генераторы кода, полезно каждый раз убеждаться в том, что разработка инструкций такому генератору намного дешевле, надёжнее или быстрее, чем непосредственная разработка требуемого кода [2]. На этапе проектирования сегодня широко используются модели, разработанные средствами UML. В отличие от текстов, подготовленных на универсальных языках программирования, для которых вопросы сложности и стиля исследуются около полувека, для языков, ориентированных на графическое представление требований, подобные публикации появились относительно недавно. Их актуальность возрастает по мере расширения сферы применений языка UML. Наиболее популярны формальные оценки для диаграмм классов UML моделей [3].

В этом сообщении рассмотрены только диаграммы классов и диаграммы компонент, в техническом плане примыкающих к классам. Целью работы была верификация определений метрик, разработанных в соответствии с принципами энергетического анализа программ и сравнение этих метрик с существующими.

1. Постановка задачи

Наиболее популярные, как нам кажется, метрики, которые принято ассоциировать с UML диаграммами, возникли раньше в форме ООП метрик и нацелены на отражение качества тех сущностей (например, классов), которые показаны на этих диаграммах [3]. Де-факто их рассматривали и как метрики качества самих диаграмм. Однако в данной работе нас интересует качество диаграмм UML в первую очередь. Ставится задача испытания одного естественного варианта определения энергетических метрик для UML. Опыт определения таких метрик для языков программирования [3], продолжавший традиции научных метрик Холстеда, здесь непосредственно не применим.

2. Некоторые известные метрики качества диаграмм классов

С. Чидамбер и К. Кемерер (1994) предложили шесть проектных метрик, для классов, из которых 3 подходят для диаграмм классов UML [3]:

- *Взвешенные методы на класс* (Weighted Methods Per Class - WMC): подробности

$$WMC = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (1)$$

где C_i - «сложность i -го метода» из всех n методов $M_1 \dots M_n$, и мы здесь, следуя прецедентам «упрощения» [3], считаем её равной 1, то есть, $WMC = n$.

- *Высота дерева наследования* (Depth of Inheritance Tree - DIT) – определяется как длина максимального пути от данного класса до корневого класса в иерархии классов.

- *Количество детей* (Number of children - NOC) – это количество непосредственных наследников класса.

Последние две метрики являются характеристиками дерева наследования, предполагая его показанным на диаграмме. В целом метрики Чидамбера и Кемерера предназначены для оценки сложности проекта в отношении его

влияния на такие характеристики качества продукции, как пригодность для обслуживания и возможность многократного использования [4].

Метрики Ли и Генри, [3], учитывают внутреннюю информацию о классах:

- *Концентрация абстракций* (data abstraction coupling - DAC) – это количество атрибутов класса, «типом которых является другой класс».
- *Количество локальных методов* (number of local methods - NOM).
- *Число описаний в классах* (number of properties - SIZE2).

Все эти метрики прошли валидационные процедуры [3], однако не выяснялось, полна ли их система для прогноза качества проектов. Другими словами: что можно сказать о независимости от них других полезных метрик?

3. Энергетические метрики диаграмм UML

Энергетические метрики W , A , E , Q (q) были созданы взамен общеизвестных научных метрик М.Холстеда в качестве характеристик совершенства процесса кодирования и надёжности продукции [5]. Описаны принципы и схемы их точного определения по исходным текстам программ. Всё реализовано для языка Ада и требует уточнения специфических деталей для других промышленных языков программирования. В данной работе речь идёт о реализации этого подхода в отношении «программ», которые имеют графическую форму представления.

В таком случае не очевидны способы формирования схемы программной системы: методы выделения её модулей, блоков и групп блоков. Мы даём такую естественную интерпретацию: *модуль* – оформленная диаграмма, *группа* – её связный подграф, *блок* – прямоугольный классификатор класса.

Число формальных параметров блока определяется как число отношений, в которых участвует класс, классификатор которого определяет этот блок. Следуя наиболее подходящему в энергетическом анализе из определений Холстеда [6],

$$\eta^* = 2 + \eta_2^*, \quad (2)$$

где η^* – потенциальный словарь блока;

η_2^* – число формальных параметров блока.

Программные символы определим как простые элементы UML. Отсюда подсчитываются примитивы длина и словарь.

На основании определения примитивов возможны определения простейших метрик, восходящие к М. Холстеду [5,6]:

$$V = V(M) = V(N, \eta) = N \log_2 \eta \quad (\text{объём модуля или блока}) \quad (3)$$

$$V^* = V(\eta^*, \eta^*) \quad (\text{потенциальный объём блока}) \quad (4)$$

$$D = V/V^* \quad (\text{трудность модуля}), \quad (5)$$

где N и η – длина и словарь модуля M , η^* – потенциальный словарь блока, V^* – потенциальный объём модуля – сумма таких величин по всем группам, которые подсчитываются в зависимости от статуса группы. Если группа – «структурная», то V^* группы – это сумма V^* по блокам. Тогда:

$$V^*(M) = \sum V^*(B_{ji}) \quad (\text{для модуля } M) \text{ который состоит из блоков } B_{ji}), (6)$$

где B_{ji} - i -й блок j -й группы модуля M .

Спецификационная энергия E определяется для групп, а затем - модуля:

$$E_j = V_j^* / \lambda^2, \quad E(M) = \sum E_j \quad (7)$$

где λ - нормирующий константа, зависящая от языка программирования.

Если схема программной системы нетривиальна, то энергетический анализ требует оценки метрики *объём разработки*, которая для модуля имеет вид:

$$W(M) = \sum V(M_i) + V(N, \eta') \quad (8)$$

где M_i - другие модули системы, от которых зависит данный модуль;

$V(M)$ - холстедовский объём модуля M ;

η' - полный словарь η модуля M , который определяется так, чтоб учесть контекст и порядок разработки (имеющиеся в [4] подробности здесь опустим).

Отметим, что энергетические метрики, в отличие от вышеупомянутых метрик UML/ОПП, вводятся как метрики диаграмм с любым числом классов или систем таких диаграмм. Сравнение с предшествующими метриками раздела 2 осмысленно только для диаграмм, поясняющих один класс.

4. Независимость энергетических метрик

Замечание 1. Пусть имеется две системы метрик $M_1, \dots, M_k$ и $N_1, \dots, N_l$. Предположим, что метрика M_i зависит от метрик $N_1, \dots, N_l$. Это означает, что

$$M_i = f(N_1, N_2, \dots, N_l) \quad (9)$$

Тогда для любых двух диаграмм D_1 и D_2 должно быть

$$(\forall j = 1..l : N_j(D_1) = N_j(D_2)) \Rightarrow M_i(D_1) = M_i(D_2), \quad (10)$$

Если же удаётся привести пример таких двух диаграмм, что при некотором j

$$(\forall j = 1..l : N_j(D_1) = N_j(D_2)) \& M_i(D_1) \neq M_i(D_2), \quad (11)$$

то метрика M_i не может зависеть от метрик $N_1, \dots, N_l$. Если такие примеры находятся для всех M_i , то система метрик $M_1, \dots, M_k$ не зависит от $N_1, \dots, N_l$.

Лемма о независимости. Базовые энергетические метрики V и V^* независимы от системы 3-х метрик Чидамбера и Кемерера, подходящих для диаграмм классов UML, плюс метрика числа описаний в классах от Ли и Генри.

Для доказательства достаточно подсчитать все указанные метрики диаграмм а) (поясняет класс A) и б) (поясняет B) на рис. 1 и воспользоваться замечанием 1.

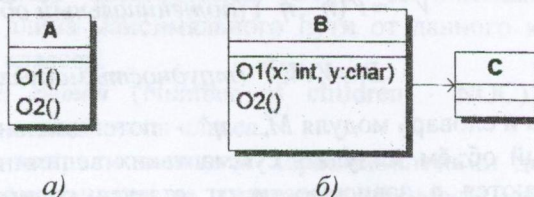


Рис. 1. Диаграммы, используемые в доказательстве леммы о независимости

Замечание 2. Утверждение леммы справедливо для и больших систем ранее известных метрик. Например, можно было бы добавить остальные метрики Ли и Генри. Мы воздержались от этого в виду расплывчатости их определений в [3,4].

5. Критерий адекватности, основанный на уравнении длины

Для верификации правил подсчёта программных символов (ПСим-лы) на UML диаграммах их подсчитывали две группы студентов. Одни действовали на основе определения предыдущего раздела, а другие имели полномочия составить и использовать стратегию подсчёта на собственное понимание. Использовалось 20 UML диаграмм взятых из [7]. Оценка регрессионной зависимости длины модуля N от его словаря n для первой группы лучше следует уравнению длины программы Холстеда [5,6] (рис 2.), которое является, по сути, единственным объективным критерием адекватности определения ПСим.

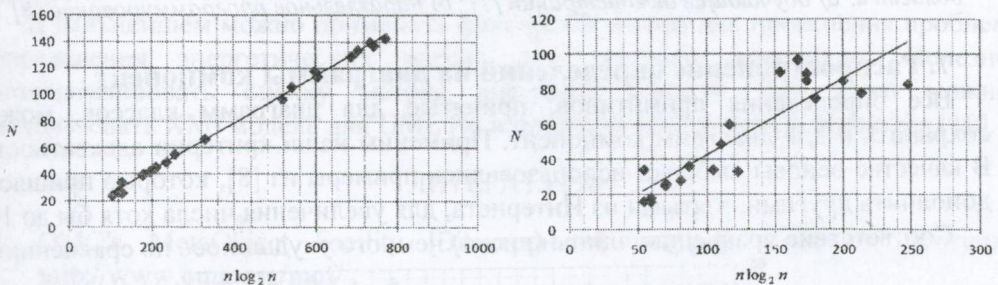


Рис. 2. Линеаризованная регрессия длины N на словарь n при разных определениях ПСим

6. Сбалансированность энергии и работы для диаграмм

Наряду с (7), спецификационная энергия модуля, состоящего из многих не сгруппированных блоков (типично для UML диаграмм), полагается равной [6]:

$$E_f = \begin{cases} (V^*)^3 \cdot \lambda^{-2} & \leftarrow n \leq 4 \\ (n/9 + 0.5) \cdot \left(V^* / (n/9 + 0.5) \right)^3 \cdot \lambda^{-2} & \leftarrow n \geq 5 \end{cases}, \quad (12)$$

где n – количество блоков в модуле, V^* – сумма потенциальных объёмов данных n блоков, λ – уровень языка программирования (в наших расчетах $\lambda = 1$).

О расхождении между спецификационной энергией программы и ее работой A свидетельствуют метрики (q) Q – (нормированного) информационного тепла:

$$A = D \cdot V, \quad Q = E - A, \quad q = Q / \max(E, A). \quad (13)$$

Проведен вычислительный эксперимент по выяснению распределения метрики q на реальных выборках диаграмм, взятых из [7,8].

Результаты рассматривались в плане верификации принятого метода оценки спецификационной энергии. Критерий – отражение теоретически предсказываемой тенденции к колебаниям между значениями E и A при соблюдении в среднем «нулевого» баланса по большим выборкам и по процессу разработки (к его концу). Набранная статистика (рис. 3) пока недостаточна для

7885664

суждений о таком балансе на каком-то уровне достоверности. Однако она не противоречит явно гипотезе о таком балансе, поскольку демонстрирует, что знак этой величины может оказываться разным. Вполне возможно, что для данных предметных областей существует прямая регрессии A на E , которая отлична от биссектрисы квадранта и служит отражением специфики этих областей [5].

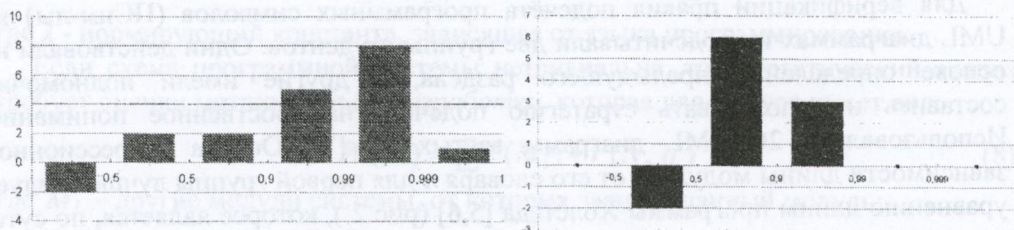


Рис. 3. Гистограммы распределения величины q для выборок из двух предметных областей: а) обучающие демонстрации [7]; б) параллельное программирование [8]

7. Распространение определений на диаграммы компонент

Все определения примитивов, принятые для диаграмм классов, можно сохранить и для диаграмм компонент. Применим наши критерии адекватности. В качестве основы выборки использовались примеры из [8], которые пришлось дополнить другими, взятыми из Интернета, для увеличения числа хотя бы до 16.

Соответствие уравнению длины (рис. 4) немного ухудшилось по сравнению с

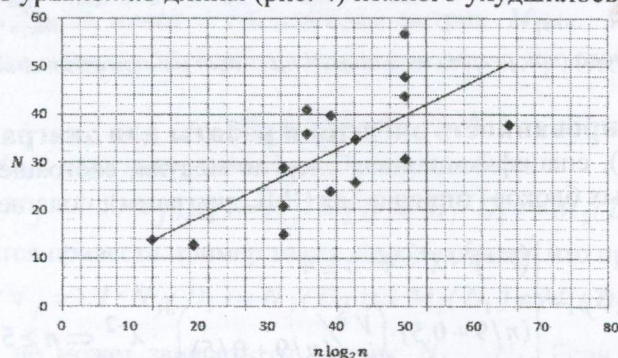


Рис. 4. Линеаризованная регрессия длины N на словарь n для диаграмм компонент

вариантом б) рис. 1, но считать его нарушенным нет оснований. Простое объяснение: примеры диаграмм компонент отличаются большим разнообразием, чем для классов, и связь длины программы с её словарём более стохастична.

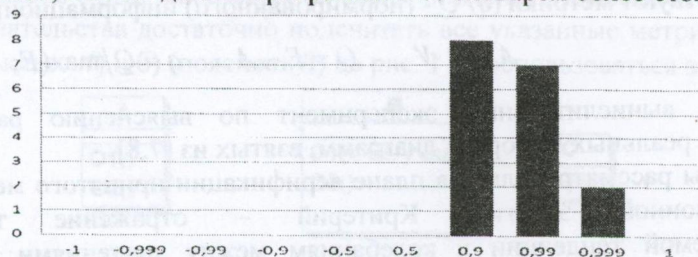


Рис. 5. Дисбаланс между энергией и работой по выборке из диаграмм компонент

Нарушен баланс в среднем между спецификационной энергией и работой (рис. 5). Если это так и для других выборок, то определение спецификационной энергии для диаграмм компонент придётся усовершенствовать.

Заключение

Разработан метод верификации определения энергетических метрик для UML диаграмм, что позволяет использовать известные возможности таких метрик для оценки качества указанных диаграмм в проектах программных систем. Верификация определений основана на согласии с уравнением длины программы Холстеда и согласии с тезисом о балансе в среднем по выборкам между спецификационной энергией и работой кодирования. Применительно к естественным определениям для диаграмм классов данный метод показал удовлетворительность гипотезы их адекватности, а в приложении к диаграммам компонент – необходимость дополнительного исследования.

В дальнейшем можно применить факторный анализ для прояснения проблем определения энергетических метрик для диаграмм компонент. Полезно автоматизировать оценку метрик диаграмм классов. Для этого можно использовать XMI модель для UML [9] и привлечь инструменты Matreshka [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. OMG's MetaObject Facility [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.omg.org/mof/>.
2. Годунко В.М., Мищенко В.О., Резник М.М., Штефан Д.В. Динамическая генерация HTML страниц для Ada web серверов // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2012. – № 57. – С. 225 – 229.
3. Calero C., Genero M., Piattini M. A survey of metrics for UML class diagrams // Journal of Object Technology. – 2005. – 9. – P. 59-92.
4. Орлов С.А. Технологии разработки программного обеспечения: [учеб. пособие] / С. А. Орлов – СПб.: Питер, 2003. – 480 с.
5. Мищенко В.О. Энергетический анализ программного обеспечения с примерами реализации для Ада-программ. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2007. – 128 с.
6. Мищенко В.О. CASE-оценка критических программных систем. Том 1. Оценка качества / Мищенко В.О., Поморова О. В., Говорущенко Т. А. / под ред. Харченко В. С. – : Х: Нац. аэрокосмический ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2012. – 201 с.
7. ISO/IEC 19505-1 [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://www.omg.org/spec/UML/ISO/19505-1/PDF/>.
8. A. Burns, A. Wellings. Concurrent and real-time programming in Ada. // Cambridge University Press. – 2007. – P. 461.
9. OMG MOF 2 XMI Mapping Specification [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.omg.org/spec/xmi/2.4.1/pdf>. – 09.08.2011.
10. Матрёшка: Преобразование Ada в UML - Ada-Ru Community -16 Апр. 2012 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ada-ru.qtada.com/archives/445>.

УДК 532.5

Процессы переноса скалярных полей в течениях вязкой жидкости в криволинейных трубах в приближении Дина

А. А. Гуржий, А. В. Шалденко

Национальный технический университет "КПИ", Украина

В работе рассматривается задача адвекции выделенной жидкости внутри криволинейной трубы с круговым поперечным сечением в приближении Дина. Показано, что поле скорости в поперечном сечении претерпевают каскад бифуркаций, связанный с появлением периодических эллиптических и периодических гиперболических точек. Анализ численных результатов показывает, что зоны с интенсивными режимами адвекции в рассматриваемом течении формируются в областях, прилегающих к периодическим гиперболическим точкам.

Ключевые слова: течение Дина, бифуркационная диаграмма, задача адвекции, области интенсивной адвекции, численный эксперимент.

В роботі розглядається задача адвекції виділеної рідини усередині криволінійної труби з круговим поперечним перерізом у наближенні Діна. Показано, що поле швидкості в поперечному перерізі зазнає каскад бифуркацій, пов'язаний з появою періодичних еліптичних і періодичних гіперболічних точок. Аналіз чисельних результатів показує, що зони з інтенсивними режимами адвекції в розглянутій течії формуються в областях, прилеглих до періодичних гіперболічних точок.

Ключові слова: Течія Діна, бифуркаційна діаграма, задача адвекції, області інтенсивної адвекції, чисельний експеримент.

The advection problem of separated fluid inside curved pipes with circular cross-section at Dean approximation is considered in the article. The velocity field in the transverse cross-section undergoes a cascade of bifurcations associated with an appearance of periodic elliptic and periodic hyperbolic points is shown. Analyze of numerical results shows that the zones with intensive advection regimes in the flow under consideration are formed in regions near periodic hyperbolic points.

Key words: Dean flow. Bifurcation diagram, advection problem, intensive advection regions, numerical experiment.

1. Введение

Перемешивание разного рода пассивных составляющих в течениях жидкости является сложным природным явлением, которое включает два важнейших процесса: деформация пятна в заданном поле скорости, и размыв границ пятна молекулярной диффузией [1]. Анализ геометрических и временных масштабов течений позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема перемешивания сводится к анализу деформации выделенных областей жидкости в заданном поле скорости. Такая задача в научной литературе [2] получила название задача об адвекции.

Известно, что при определенных условиях некоторые ламинарные течения проявляют интенсивные режимы адвекции. В этих течениях две прилегающие жидкие частицы отдаляются одна от другой экспоненциально со временем – свойство, характерное для хаотических детерминированных динамических систем. По аналогичному закону растягивается материальная линия, составленная из таких частиц. В современной литературе [2,3] для течений, которые проявляют такие свойства, предложен термин “хаотическая адвекция”.

С практической точки зрения одной из важных задач вихревой динамики является течение Дина [4], которое развивается в криволинейных трубах [5, 6]. Численное решение уравнений Навье-Стокса [5] показывает, что течение теряет устойчивость для $Dn_{cr} \approx 600$ (где Dn – число Дина), смещая положение максимальной осевой скорости в поперечном сечении трубы на 0.38 (где a – радиус поперечного сечения трубы) и уменьшая объемный расход примерно на 28% по отношению к прямолинейной трубе. Экспериментальные исследования [7] показывают, что решение Дина [4] в приближении $Dn < Dn_{cr}$ достаточно хорошо описывает движение вязкой жидкости в криволинейных трубах.

В работе [8] рассматривается адвекция системы жидких частиц в сегментированной криволинейной трубе постоянного радиуса, в которой каждый ее сегмент периодически смещается относительно другого на угол $\pm\theta$ в поперечном сечении. Анализ сечений Пуанкаре и статистический анализ распределения жидких частиц показали, что геометрическая периодичность сегментов при неизменной приложенной разности давления приводит к существенной интенсификации процессов адвекции, начиная с некоторого критического значения $\pm\theta_{cr}$. Однако сравнительный анализ режимов адвекции выделенных областей жидкости при различных параметрах течений до настоящего времени в научной литературе не проводился.

Целью настоящей работы является выявление основных закономерностей процесса переноса выделенной жидкости в сегментированной криволинейной трубе с постоянным круговым поперечным сечением.

2. Критерии хаотической адвекции жидкости

Неинертная (пассивная) жидкая частица всегда перемещается со скоростью внешнего окружающего потока. Поэтому утверждение равенства скорости частицы и скорости внешнего течения приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями адвекции [2]:

$$\frac{dx}{dt} = U(x, t), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Другими словами, адвекция жидкости фактически сводится к анализу траекторий системы лагранжевых частиц в эйлеровом поле скорости. Главная сложность этой задачи связана с переходом от движения дискретной системы жидких частиц к деформациям непрерывных линий и поверхностей, ограничивающих выделенную жидкость.

При анализе режимов хаотической адвекции жидкостей исследователи пользуются основным критерием [9]: хаотическая (интенсивная) адвекция – процесс, при котором длина в двумерном случае (или площадь в трехмерном случае) границ выделенной жидкости растягивается во времени по экспоненциальному закону; регулярная (слабая) адвекция – процесс, при котором длина в двумерном случае (или площадь в трехмерном случае) границ выделенной жидкости растягивается во времени в первом приближении по линейному или другому закону.

В настоящее время универсального критерия идентификации хаотического движения отдельных жидких частиц не существует. В хаотической динамике

применяется несколько критериев хаотического движения отдельных жидких частиц [9,10]. Одним из самых простых критериев является анализ фазовой траектории жидкой частицы (маркера): если ее траектория имеет определенную упорядоченность и предсказуемость, то движение частицы считается регулярным; если ее траектория не содержит признака упорядоченности, то движение частицы считается хаотическим.

Важным качественным критерием является сечение Пуанкаре – система точек, полученная в результате пересечения фазовой траекторией произвольно выбранной плоскости в выбранном направлении. Фазовая траектория считается регулярной, если система точек сечения Пуанкаре формирует упорядоченную структуру или ложится на регулярную кривую. Если траектория маркера формирует нерегулярную последовательность точек, то движение является хаотическим.

При хаотическом движении две близлежащие траектории в среднем расходятся. Мерой расхождения служат показатели Ляпунова [9,10]. Методика их определения сводится к совместному интегрированию уравнений движения (1) с линеаризованными уравнениями

$$\frac{dz_i}{dt} = [A] z_i, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad \text{где} \quad [A] = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}(t)}. \quad (2)$$

В расчетах принимают $|z_i^0| = 1.0$.

Наибольший показатель Ляпунова определяется следующим образом:

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|z_i(t)|}{|z_i^0|}. \quad (3)$$

При хаотическом движении $\Lambda > 0$, две соседние траектории, в среднем, расходятся. При регулярном движении $\Lambda < 0$, траектории, в среднем, сходятся.

При анализе процессов адвекции в периодических течениях можно найти такие частицы, которые через интервал времени nT (где T – период движения) возвращаются в фазовом пространстве в начальное положение $\mathbf{x}$. Эти точки называют периодическими точками порядка n . Для их определения необходимо выполнить условие

$$[\mathbf{T}]^n \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = 0. \quad (4)$$

Анализ корней λ_i характеристического уравнения линеаризованной системы (4) позволяет выделить в периодическом течении гиперболические точки ($\lambda_i > 1$), эллиптические точки ($\lambda_i < 1$) и точки параболического типа ($\lambda_i = 1$).

3. Поле скорости в течении Дина

Аналитические выражения для компонент поля скорости ламинарного течения в криволинейной трубе с круговым поперечным сечением впервые было получено в работе [4] в приближении $Dn \ll 1$. В этой части работы приведены основные этапы вывода выражений для компонент поля скорости с целью упорядочения обозначений, примененных в этой работе.

Рассмотрим ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом динамической вязкости μ внутри сегмента трубы с круговым

поперечним сечением a и радиусом кривизны R (рис.1). Каждый сегмент трубы имеет угловую протяженность θ_0 , в локальной системе координат, связанной с центром кривизны сегмента. Плоскость последующего сегмента по отношению к предыдущему сегменту повернута на фиксированный угол χ .

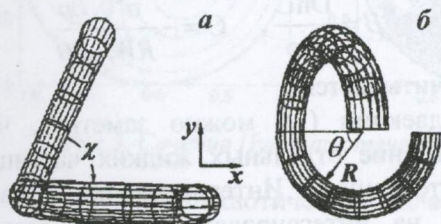


Рис.1. Геометрия задачи

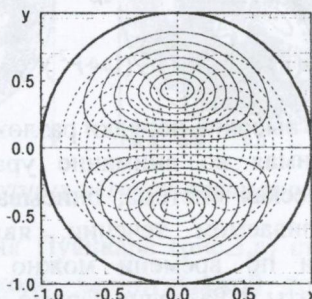


Рис.2. Траектории движения жидких частиц в поперечном сечении трубы

Полагаем, что течение в сегменте трубы является стационарным и значения компонент поля скорости $\{u, v, w\}$ не зависят от угловой координаты θ . В каждом поперечном сечении криволинейной трубы можно ввести (x, y) -плоскость, которая связана с полярной системой координат (r, φ) выражениями: $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$.

В дальнейшем задачу удобно пронормировать на радиус a трубы и характерную осевую скорость W течения.

В предположении $a \ll R$ для ламинарного течения с малыми числами Рейнольдса Re решение задачи разделяется на течение Пуазейля вдоль трубы с характерной осевой скоростью W и поперечное течение, компоненты поля скорости которого выражаются через скалярную функцию тока

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

В этом случае безразмерные уравнения, описывающие распределение осевой скорости $w(r, \varphi)$ течения и функции тока, имеют вид

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{a^2}{RW\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla^2 \Psi + 2Dn w \left(\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (7)$$

где Dn – безразмерный параметр задачи – число Дина [8]

$$Dn = \frac{W^2 a^2}{R\nu} = \left(\frac{Wa}{\nu} \right)^2 \frac{a}{R} = Re^2 \frac{a}{R}. \quad (8)$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости.

Далее уравнения (6,7) раскладываются в ряд Тейлора по малому параметру Dn . Первый порядок разложения описывает течение Пуазейля в прямолинейной трубе с круговым поперечным сечением [11], а следующий порядок для

уравнения (7) – поперечное течение, которое формируется в криволинейной трубе [12]. В прямоугольной системе координат, связанной с осью трубы, ведущие слагаемые поля скорости принимают вид (здесь $r^2 = x^2 + y^2$)

$$u_x = \frac{\alpha}{1152} \left\{ h(r) + \frac{y^2}{r} h'(r) \right\}, \quad u_y = \frac{\alpha}{1152} \frac{xy}{r} h'(r), \quad w = \frac{\beta}{4} (1 - r^2). \quad (9)$$

где
$$h(r) = \frac{(4 - r^2)}{4} (1 - r^2)^2, \quad \alpha = \text{Dn} C^2, \quad \beta = \frac{\text{Dn} C}{\text{Re}}, \quad C = -\frac{a^2}{RW\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Более высокие порядки разложения не учитываются.

Принимая во внимание уравнение адвекции (1), можно заметить, что динамическая система, описывающая движение отдельных жидких частиц в рассматриваемом течении, является автономной. Интегрирование задачи адвекции по времени можно изменить на интегрирование вдоль осевой координаты θ . Разделив первые два уравнения (9) на третье уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{G}{1152} (4 - 5x^2 - 23y^2 + x^4 + 8x^2y^2 + 7y^4), \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{G}{192} xy(3 - x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (10)$$

где $G = \alpha / \beta$. Эти уравнения описывают движение жидких частиц по мере их продвижения вдоль трубы по угловой координате θ .

4. Адвекции жидкости в криволинейных трубах

Рассмотрим ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости внутри последовательных периодических сегментов криволинейной трубы в приближении Дина. Пусть протяженность каждого сегмента трубы $\theta_0 = \pi$, а плоскость каждого последующего сегмента трубы повернута по отношению к плоскости предыдущего сегмента на угол $\chi = \pi/2$.

Движение жидкости вдоль трубы описывается системой уравнений (1) с начальными условиями: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Она движется по замкнутым траекториям (рис.2), образуя два циркуляционных течения в верхней и нижней частях трубы (сплошные линии). На следующем сегменте циркуляционные течения поворачиваются на угол χ (штриховые линии). Пересечение фазовых траекторий на соседних сегментах трубы часто приводит к интенсификации процессов адвекции [8, 9].

На рис.3 показано сечение Пуанкаре для различных значений G . Дискретизация фазовых траекторий проводилась после прохождения жидкой частицы двух сегментов, составляющих период течения. При $G = 30.0$ (рис.3,а), сечение Пуанкаре является регулярным во всей области поперечного сечения трубы. Имеются две периодические эллиптические точки ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$) первого порядка. При $G = 50.0$, сечение Пуанкаре усложняется (рис.3,б), а регионы регулярного движения частиц уменьшаются. В области, прилегающей к эллиптическим периодическим точкам ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$), появляются регулярные острова четвертого порядка ($E_1^{(3)}$, $E_2^{(3)}$, $E_3^{(3)}$, $E_4^{(3)}$ и $E_1^{(4)}$, $E_2^{(4)}$, $E_3^{(4)}$, $E_4^{(4)}$, соответственно).

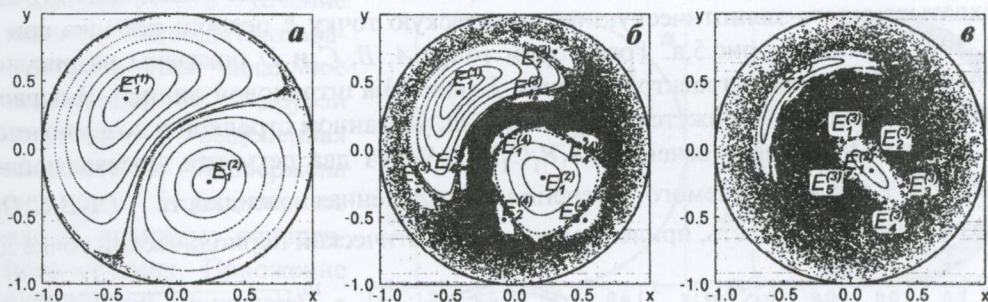


Рис.3. Сечение Пуанкаре течения Дина для разных значений параметра G

При $G = 70.0$ хаотическая область сечения Пуанкаре (рис.3,в) становится преобладающей в поперечном сечении. Около эллиптической точки $E_1^{(2)}$ появляется система эллиптических точек ($E_1^{(3)}, E_2^{(3)}, \dots, E_5^{(3)}$) пятого порядка. Дальнейшее увеличение G приводит к тому, что большая часть сечения Пуанкаре заполняется хаотической последовательностью точек.

Бифуркационная диаграмма периодических точек первого порядка в рассматриваемом течении при изменении параметра G показана на рис.4 (z – координаты точек на прямой $y = -x$). Для малых значений G течение обладает только двумя эллиптическими (E) периодическими точками. При $G=177$ происходит первая бифуркация, при которой образуются две пары эллиптических и гиперболических (H) точек. В дальнейшем (при $G=225$) происходит образование одной эллиптической и трех гиперболических периодических точек. Схемы пространственного положения периодических точек при некоторых значениях G показаны на рисунке, на котором эллиптические периодические точки нанесены сплошными кружочками, а гиперболические периодические точки – крестиками.

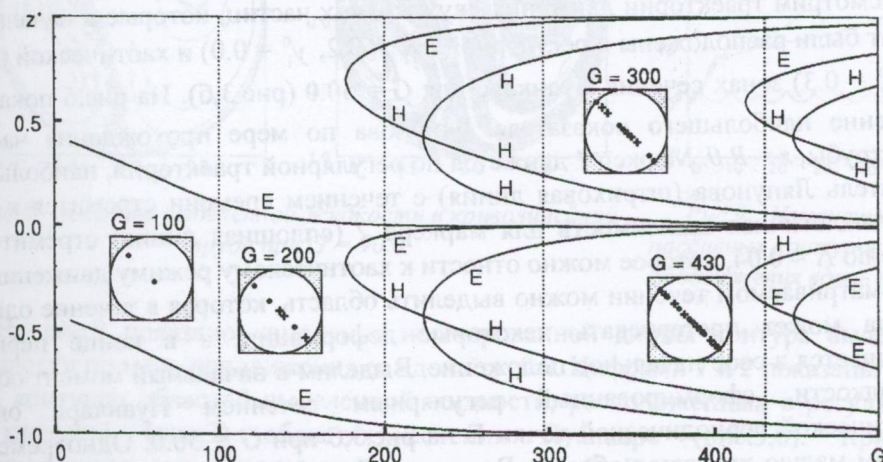


Рис.4. Бифуркационная диаграмма течения Дина при $\chi = \pi/2$, $\theta_0 = \pi$

Процесс адвекции жидкости с границами в виде квадрата $ABCD$, охватывающего эллиптическую периодическую точку E первого порядка при $G = 200$, показан на рис.5,а. Траектории точек A , B , C и D показаны на рисунке сплошной линией, а траектория точки E нанесена штриховой линией. В первом сегменте жидкость движется в направлении, указанном стрелкой и возвращается в центральную часть сечения ($A_1B_1C_1D_1$). Через два сегмента, составляющих период рассматриваемого течения, выделенная жидкость ($A_2B_2C_2D_2$) возвращается в область, прилегающую к эллиптической периодической точке E .

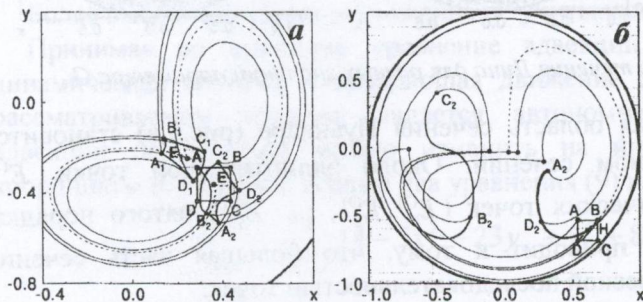


Рис.5. Адвекция квадратной области, охватывающей эллиптическую (а) и гиперболическую (б) периодические точки при $G=200$

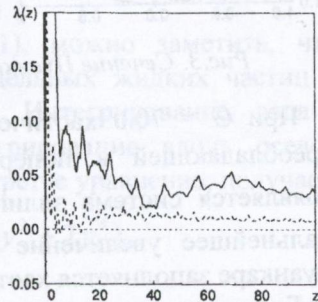


Рис.6. Изменение наибольшего показателя Ляпунова для маркеров

Некоторые особенности процесса адвекции можно подчеркнуть из примера на рис.5,б, на котором показана адвекция квадрата $ABCD$, охватывающего в начальный момент гиперболическую периодическую точку H первого порядка. За один период точка H возвращается в свое исходное положение. Выделенная жидкость испытывает сильное растяжение, квадрат вытягивается в тонкую полосу, которая располагается вдоль границы течения. При этом стороны AD и BC растянулись значительно меньше по сравнению со сторонами AB и CD .

Рассмотрим траектории движения двух жидких частиц, которые в начальный момент были расположены в регулярной ($x_1^0 = 0.2$, $y_1^0 = 0.0$) и хаотической ($x_2^0 = 0.6$, $y_2^0 = 0.3$) зонах сечения Пуанкаре для $G = 50.0$ (рис.3,б). На рис.6 показано изменение наибольшего показателя Ляпунова по мере прохождения частиц вдоль трубы, $z = R\theta$. Маркер 1 движется по регулярной траектории, наибольший показатель Ляпунова (штриховая линия) с течением времени стремится к $\Lambda \approx 0.01$. Аналогичная зависимость для маркера 2 (сплошная линия) стремится к значению $\Lambda \approx 0.04$, которое можно отнести к хаотическому режиму движения. В рассматриваемом течении можно выделить область, которая в течение одного периода может претерпевать некоторые деформации, а в конце периода возвращается в свое начальное положение. Выделим в начальный момент объем A жидкости, сформированный регулярным сечением Пуанкаре около эллиптической периодической точки E на рис.3,б при $G = 50.0$. Одновременно выделим малую круговую область B радиуса $R_0 = 0.15$ с центром в точке ($x_c = 0.6$, $y_c = 0.3$), которая расположена в хаотической зоне сечения Пуанкаре, как показано на рис.7,а. Результаты численного моделирования показывают, что

жидкость A в течение каждого периода возвращается в свое начальное положение. С другой стороны, выделенная жидкость B подвержена сильному растяжению вдоль границы поперечного сечения. Положение выделенной жидкости в сечении $n = 12$ показано на рис.7,б.

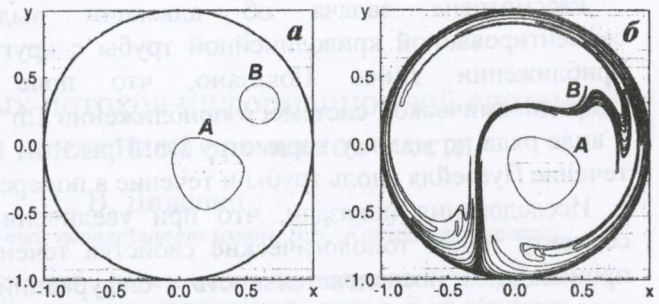


Рис.7. Адвекция выделенной жидкости внутри регулярного и хаотического сечений Пуанкаре при $G=50$

При увеличении осевой скорости течения

жидкости, интенсивность процесса адвекции существенно увеличивается. На рис.8 показан случай адвекции жидкости при $G = 90.0$. В начальном сечении выделенная жидкость занимает положение, аналогичное выделенной жидкости A на рис.7,а. Уже после 5 периодов границы выделенной жидкости сильно растянулись, однако подкрашенная жидкость, в отличие от предыдущего случая, размещена в центральной части поперечного сечения (рис.8,а). Дальнейшее продвижение жидкости по трубе сопровождается заполнением выделенной жидкостью всего поперечного сечения. Положение выделенной жидкости после 10 периодов показано на рис.8,б. Такой режим адвекции относится к интенсивным (хаотическим) режимам.

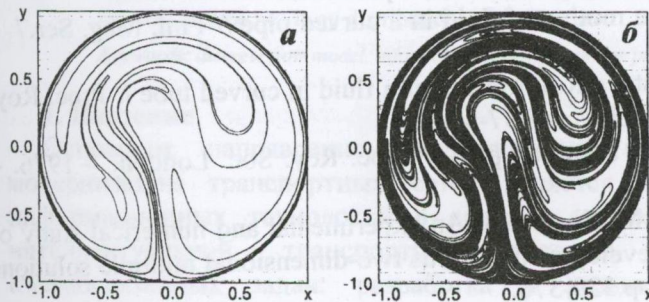


Рис.8. Адвекция выделенной жидкости в криволинейной трубе при $G = 90.0$

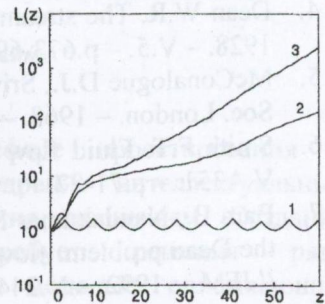


Рис.9. Изменение длины пассивных контуров по мере продвижения вдоль трубы

На рис.9 показано изменение нормированной длины контура выделенной жидкости по мере продвижения ее вдоль трубы. Цифрами 1 и 2 показаны кривые для контуров областей выделенной жидкости, расположенных в регулярной и хаотической (рис.7) областях сечения Пуанкаре (рис.3,б). Кривая 3 иллюстрирует зависимость для случая на рис.8. Видно, что кривые 2 и 3 возрастают по экспоненциальной зависимости, что соответствует интенсивному режиму адвекции жидкости внутри криволинейной трубы.

4. Выводы

Рассмотрена задача об адвекции выделенной жидкости внутри сегментированной криволинейной трубы с круговым поперечным сечением в приближении Дина. Показано, что поле скорости, формируемое в гидродинамической системе, в приближении $Dn \ll 1$ может быть представлено в виде ряда по малому параметру Dn . При этом ведущие слагаемые описывают течение Пуазейля вдоль трубы и течение в поперечном сечении трубы.

Исследования показали, что при увеличении приложенного градиента к сегменту трубы топологические свойства течения существенно усложняются: происходит последовательность бифуркаций, которая сопровождается появлением системы эллиптических и гиперболических точек. Анализ сечения Пуанкаре рассматриваемого течения, выполненный для системы пассивных жидких частиц, позволяет оценить размеры области интенсивной и регулярной адвекции в поперечном сечении трубы.

Показано, что процессы адвекции для жидкости, расположенной в начальный момент в областях, прилегающих к гиперболическим периодическим точкам, протекает интенсивно, при этом длина контура выделенной жидкости растягивается экспоненциально во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика / М.: Наука, 1986. – 736с.
2. Aref H. Stirring by chaotic advection // JFM. – 1984. – V.143. – p.1-23.
3. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1990. – V.A333, – p.273-288.
4. Dean W.R. The streamline motion of fluid in a curved pipe // Phil. Mag. Ser.7. – 1928. – V.5. – p.673-693.
5. McConalogue D.J., Srivastava R.S. Motion of a fluid in curved tube // Proc. Roy. Soc. London. – 1968. – V.A307. – P.37-53.
6. Smith F.T. Fluid flow into a curved pipe // Proc. Roy. Soc. London. – 1976. – V.A351. – p.71-87.
7. Bara B., Nandakumar K., Masliyah J.H. An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions // JFM. – 1992. – V.244. – p.339-376.
8. Jones S.W., Thomas O.M., Aref H. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // JFM. – 1989. – V.209. – p.335-357.
9. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport / Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 364p.
10. Мун Ф. Хаотические колебания / М.: Мир, 1990. – 312с.
11. Ламб Г. Гидродинамика / М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. – 929с.
12. Berger S.A., Talbot L., Yao L.-S. Flow in curved pipes // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1983. – V.15. – p.461-512.

УДК 004.67:656.11

Сенсоры дискретных потоков информационной системы управления движением элементов в сети

Е. В. Диденко

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье предложен способ определения характеристик дискретных транспортных потоков. Для получения эмпирических данных и их обработки применяется метод, основанный на использовании видеоданных и регистрации моментов времени наступления определенных событий в транспортной системе, представлении данных в виде распределений временных интервалов между элементами в транспортном потоке, определении параметров распределений.

Ключевые слова: модель дискретных потоков, информационная система обработки видеозображений.

У статті запропоновано спосіб визначення характеристик дискретних транспортних потоків. Для отримання емпіричних даних і їх обробки застосовується метод, заснований на використанні відеоданих і реєстрації моментів часу настання певних подій у транспортній системі, представлення даних у вигляді розподілів інтервалів між елементами в транспортному потоці, визначенні параметрів розподілів.

Ключові слова: модель дискретних потоків, інформаційна система обробки відеозображень.

This paper proposes a method for determining discrete traffic flow characteristics. The method of obtaining empirical data and its processing is based on the use of video and registration of the moments of certain events in the transport system, representation of the data as time headway distributions of traffic flow.

Keywords: discrete flow model, information system for image processing.

1. Введение

Основным направлением исследований в сфере проектирования и модернизации транспортных сетей является внедрение интеллектуальных информационных технологий в систему управления движением. Создание интеллектуальной транспортной системы требует решения ряда взаимосвязанных задач: разработка и развитие моделей, описывающих движение транспортных потоков в сетях, создание средств получения и обработки информации о транспортных потоках [1].

В основе информационных систем управления движением в транспортной сети лежит модельное представление о потоках. Пропускную способность пересечений транспортной системы существенным образом определяют значения величины входящих потоков и временные интервалы между элементами в них [2,3]. При высокой плотности потока увеличивается влияние распределений интервалов между элементами на вероятность пересечения или встраивания элементов одного потока в другой. В отличие от макромоделей транспортных потоков, в кинетических и стохастических моделях потоки рассматриваются как множество дискретных элементов, что позволяет

учитывать влияние распределений интервалов между элементами входящих потоков на пропускную способность пересечений [3,4].

Для прогнозирования состояния транспортной сети с помощью систем компьютерного моделирования требуются входные данные. В статье [5] предлагается использовать следующую классификацию способов получения эмпирических данных о движении потоков:

- сбор данных внешними по отношению к транспортному потоку средствами: датчики-веса, видео съемка и т.д.;

- сбор данных внутренними по отношению к транспортному потоку средствами: датчики в автомобилях, посылающие информацию о состоянии потока внешним устройствам обработки.

Широко распространенным способом получения данных о потоках является применение систем обработки видеоизображений [5]. Но большинство систем, где реализован этот способ, не позволяют получать информацию о потоке с детализацией (распределение временных интервалов между элементами), требуемой для моделей дискретных потоков. Поэтому создание средств определения характеристик транспортных потоков для моделей дискретных потоков является одной из актуальных научных задач.

В этой работе предлагается метод определения характеристик дискретных транспортных потоков, основанный на использовании видеоданных и регистрации моментов времени наступления определенных событий в транспортной системе, представлении полученных данных в виде распределений временных интервалов между элементами в потоке, определении параметров этих распределений. Предложенный метод реализован в информационной системе GetIntervalDistribution [6,7].

2. Обработка и хранение информации о движении потоков

Для получения и обработки данных о движении транспортных потоков используется система GetIntervalDistribution [6]. Основные этапы обработки данных в системе приведены на рис. 2.1.

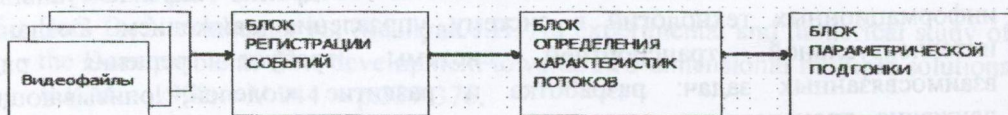


Рис.2.1 Основные этапы обработки данных в системе GetIntervalDistribution

В качестве входных данных для системы GetIntervalDistribution используются видеофайлы, содержащие запись движения транспортных потоков по участкам сети. GetIntervalDistribution позволяет регистрировать моменты наступления определяемых пользователем событий. Событием называется пересечение либо освобождение автомобилем пространственного элемента транспортной сети, который отмечается на кадре с помощью маркеров. В системе два режима обработки: ручной и автоматической регистрации событий. В режиме ручной обработки, оператор системы, перемещаясь с помощью

кнопок навигации по набору кадров, регистрирует номера кадров, в которых произошли интересные события.

Обработка большого объема видео данных в ручном режиме является трудоёмкой, требует значительных затрат времени и может порождать большое число ошибок в виду человеческого фактора. Для ускорения процесса обработки видеофайлов в системе GetIntervalDistribution используется программный блок, который позволяет осуществлять регистрацию заданных пользователем событий в автоматическом режиме. Оператор в этом случае контролирует результаты обнаружения, чтобы отсеять ошибки работы программного комплекса. Механизм автоматической регистрации событий основан на изменении цветовых характеристик отмеченного участка кадра при пересечении его автомобилем относительно значения цветовой характеристики, когда на участке отсутствует автотранспорт. Использование автоматического режима повышает требования к типу входных видеоданных (высокое качество изображений, отсутствие помех). Проверка качества работы блока автоматической регистрации событий приведена в работе [7].

Последовательности зарегистрированных номеров кадров сохраняются в хранилище данных совместно с информацией, необходимой для просмотра и редактирования обработанных событий. По завершению процесса обработки видеoinформации, данные о зарегистрированных событиях, преобразуются в форматы, требуемые для их использования в системах управления движением потоков. GetIntervalDistribution позволяет определить как макро характеристики потоков (средняя скорость, величина потока и т.д.), так и распределения интервалов времени между автомобилями, требуемые для моделей дискретных потоков. Наборы данных с интервалами времени между событиями имеют одинаковый формат в независимости от природы транспортных потоков, будь то автомобильные потоки или потоки в телекоммуникационных сетях

3. Определение параметров распределений временных интервалов в транспортном потоке

Для получения эмпирических данных, использовалась видеoinформация о состоянии компонентов улично-дорожной сети вдали от пересечений, предоставляемая Интернет – ресурсами [8]. Длительность обрабатываемых видео файлов составляет временной промежуток от 30 до 60 минут, что позволяет собрать достаточную статистику (от 400 до 800 событий в зависимости от уровня потока) регистрируемых событий, при незначительном влиянии суточных колебаний величины транспортного потока на форму распределения интервалов между элементами потока. В окне системы GetIntervalDistribution отмечалась область (рис.3.1), первичное соприкосновение переднего бампера транспортного средства с которой интерпретируется как произошедшее событие. Максимальная точность определения момента времени появления события ограничена частотой кадров в видеофайлах (для видеофайлов, использованных при обработке, составляет 1/24 секунды). Информация о зарегистрированных событиях переводилась в выборку временных интервалов между появлениями событий по каждому видео файлу.

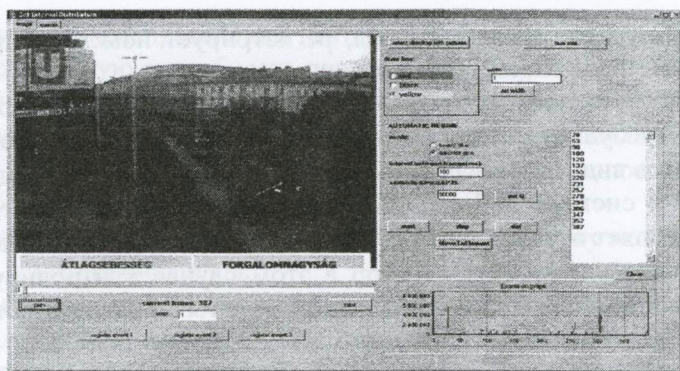


Рис.3.1 Регистрация событий в системе GetIntervalDistribution (маркерами отмечена область, при ее пересечении автомобилем система регистрирует событие)

По сформированным выборкам были построены гистограммы частот (гистограммы 1 на рис.3.2 и 3.3). Параметрическая подгонка осуществлялась на основе гипотезы о соответствии распределений экспериментальных данных известным распределениям вероятности. Для нахождения параметров распределения применялись методы параметрической подгонки: метод наибольшего правдоподобия, метод наименьших квадратов (мнк), метод моментов. В качестве аппроксимирующей функции была выбрана функция плотности вероятности гамма распределения (1). Гамма распределение удовлетворяет физическим ограничениям для транспортных потоков [2]: временные интервалы между элементами в транспортном потоке всегда больше 0, малая вероятность появления небольших интервалов при $k > 1$ (условие, возникающее из-за конечного размера транспортного элемента).

$$\text{Gamma}(k, \theta) = t^{k-1} \frac{e^{-\frac{t}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} \quad (1)$$

Результаты параметрической подгонки различными методами приведены на рис. 3.2. Кривая 2 – мнк, кривая 3 – метода моментов, кривая 4 – метод наибольшего правдоподобия.

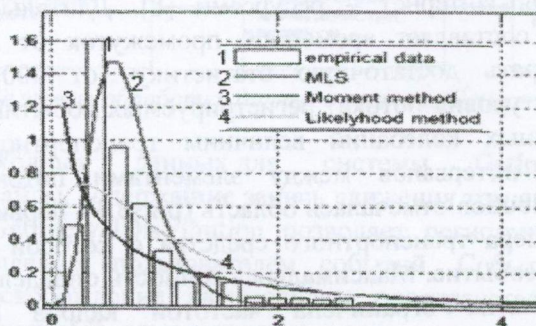


Рис. 3.2 Результаты параметрической подгонки, в предположении, что выборка соответствует гамма-распределению (1 – эмпирические данные, плотность вероятности гамма распределения с параметрами, полученными с помощью мнк (кривая 2), метода моментов (кривая 3), метода наибольшего правдоподобия (кривая 4))

Из графика (рис. 3.2) видно, что метод наименьших квадратов ближе к эмпирическим данным при малых значениях интервалов, тогда как для больших интервалов – метод моментов и метод наибольшего правдоподобия. Можно отметить, что эмпирическое распределение в области больших интервалов имеет вид экспоненциального распределения. Поэтому для определения характеристик потоков применяется композиционная модель получения параметров распределений (аналогичный метод описан в работе [2]), в которой исходная выборка разбивается на две: интервалы меньшие среднего значения попадают в первую, а большие – во вторую. В качестве аппроксимирующей функции для первой выборки используется плотность вероятности гамма распределения, а для второй – смещенного экспоненциального распределения. Результаты параметрической подгонки методом наименьших квадратов для составного распределения приведены на рис. 3.3. Кривая 2 – график плотности вероятности гамма распределения, кривая 3 – смещенного экспоненциального распределения, с параметрами, определенными с помощью мнк.

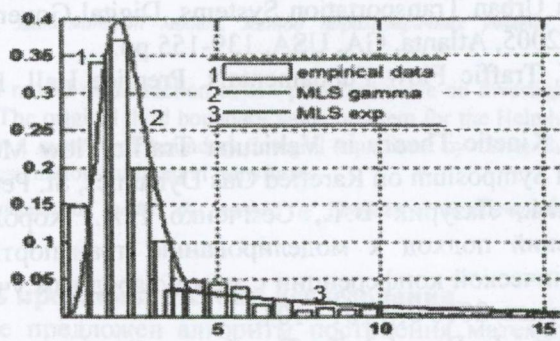


Рис. 3.3 Результаты параметрической подгонки с помощью мнк, в предположении, что выборка соответствует составному распределению (кривая 2 – гамма распределение и кривая 3 – смещенное экспоненциальное)

Из рисунка 3.3 видно, что небольшие интервалы хорошо аппроксимируются гамма-распределением, а большие – экспоненциальным.

5. Результаты и выводы

В этой работе предложен метод определения характеристик дискретных потоков, основанный на обработке видеоизображений и регистрации моментов времени наступления событий в транспортной системе, представлении полученных данных в виде распределений временных интервалов между элементами в потоке. Предложенный метод позволяет получать не только макрохарактеристики потоков (величина, средняя скорость), но и одну из основных характеристик дискретных потоков – распределение временных интервалов между элементами. Параметры распределений определяются с помощью методов параметрической подгонки: метода моментов, метода наибольшего правдоподобия, метода наименьших квадратов. В качестве аппроксимирующих функций используются плотности вероятности гамма-распределения и составного распределения. Описанный метод реализован в

программной системе GetIntervalDistribution. Программная система GetIntervalDistribution может служить поставщиком распределений временных интервалов между элементами для системы управления движением на базе модели дискретных потоков. Эти данные позволят оценивать изменения в пропускной способности транспортной системы при разных уровнях потока и распределениях интервалов между элементами. Распределения, полученные с помощью программной системы GetIntervalDistribution, могут быть использованы в качестве входных данных при компьютерном моделировании пересечений транспортных потоков в рамках модели дискретных потоков.

Автор выражает благодарность магистру Шпагиной Л. О. за помощь в получении данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Michael Hunter, Joonho Ko, Randall Guensler, School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology Atlanta, Georgia. Vehicular Networks in Urban Transportation Systems, Digital Government Conference'05, May 15-18, 2005, Atlanta, GA, USA, 139-155 pp.
2. May, Adolf. Traffic Flow Fundamentals. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990
3. T. Waldeer. Kinetic Theory in Vehicular Traffic Flow Modeling. Proc. of 25th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, St. Petersburg, 2006.
4. Гецович Е.М., Лазурик В.Т., Семченко Н.А., Король В.Ю. Эмпирико-стохастический подход к моделированию транспортных потоков. Труды научно-технической конференции с международным участием. КМНТ-2010. Часть 1, Харьков, 2010 стр 101 - 104.
5. M, Kuwahara, J, Barcelo. Traffic data collection and its standardization. International series in operations research and management science. Volume 144. New York, 2006
6. Гецович Е.М., Диденко Е.В., Лазурик В.Т., Рогов Ю.В. Информационная система определения характеристик транспортного потока по данным видеонаблюдений // Труды международной научной конференции «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках і інформаційних технологіях». - Харьков: «Апостроф», 2011. - с. 221 – 222
7. Диденко Е.В., Шпагина Л.О. Автоматизация процесса восстановления характеристик транспортных потоков. // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях». Харьков, 2012, с. 119-120К.
8. Közlekedési képinformációs portál - Címlap [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.utv.hu/>

УДК 51.73

Моделирование дифракции волн на конечных системах лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя

В. Д. Душкин

Академия ВВ МВС Украины, г. Харьков, Украина

Построена математическая модель дифракции E- поляризованной волны на рассматриваемой структуре. Исходная третья краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к системе граничных интегральных уравнений с помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований.

Ключевые слова: математические модели, метод параметрических представлений интегральных преобразований.

Побудовано математичну модель дифракції E - поляризованої хвилі на структурі, яка розглядається. Вихідна третя крайова завдання для рівняння Гельмгольца зведена до системи граничних інтегральних рівнянь з допомогою методу параметричних уявлень інтегральних перетворень.

Ключові слова: математичні моделі, метод параметричних уявлень інтегральних перетворень.

A mathematical model of diffraction of E - polarized wave on investigated structure has been built. The original third boundary value problem for the Helmholtz equation was reduced to a system of boundary integral equations by using the method of parametric representations of integral transforms.

Key words: mathematical model, the method of parametric representations of integral transforms.

1. Актуальность проблемы. Истоки исследования.

В данной работе предложен алгоритм построения математической модели исследуемой задачи. Способ построения данного алгоритма является развитием подхода, предложенного в работах Ю. В. Ганделя [1-4], для многослойных структур, расположенных в неоднородной среде.

2. Постановка задачи.

Рассматривается дифракционная структура, изображённая на рис. 1. Слой $|z| \leq d$ заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε . В плоскостях $z = d$ и $z = -d$ расположено конечное число импедансных лент. Количество и расположение лент в плоскостях произвольно.

Введём следующие обозначения. Пусть

$$L_i = \bigcup_{q=1}^M (\alpha_{i,q}, \beta_{i,q}), \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$\alpha_{1,q}$ и $\beta_{1,q}$ - координаты проекций на ось рёбер лент, лежащих в плоскости $z = d$, а $\alpha_{2,q}$ и $\beta_{2,q}$ - координаты проекций рёбер лент, лежащих в плоскости $z = -d$.

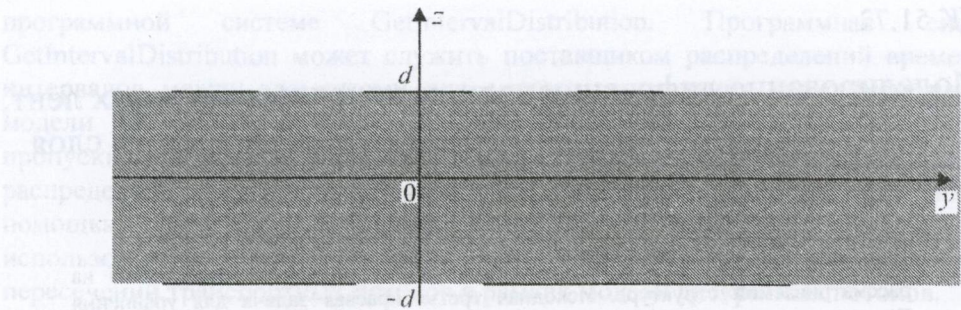


Рис. 1 Сечение дифракционной структуры плоскостью YOZ

Из бесконечности сверху на дифракционную структуру наклонно падает Е-поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды, икс-координата электрического поля которой имеет вид:

$$U(y, z) = \exp(ik(y \cdot \sin \phi - z \cdot \cos \phi)). \quad (2)$$

Зависимость поля от времени даётся множителем $e^{-i\omega t}$. В задаче необходимо найти полное поле, возникшее в результате дифракции волны на решётке.

2. Построение математической модели задачи.

Пусть функция $u^{ini}(y, z)$ описывает поле, которое существовало в пространстве в отсутствии лент. Полное поле $u(y, z)$, возникшее в результате дифракции волны на решётке, будем искать в виде:

$$u(y, z) = \begin{cases} u^{ini}(y, z) + u_0(y, z), & z > d; \\ u^{ini}(y, z) + u_1(y, z), & |z| \leq d; \\ u^{ini}(y, z) + u_2(y, z), & z < -d; \end{cases} \quad (3)$$

где

$$u_0(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y - \gamma(\lambda)(z - d)) d\lambda, \quad (4)$$

$$u_1(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1^+(\lambda) sh(\gamma_\varepsilon(\lambda)(z + d)) sh^{-1}(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} C_1^-(\lambda) sh(\gamma_\varepsilon(\lambda)(z - d)) sh^{-1}(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda, \quad (5)$$

$$u_2(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_2(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y + \gamma(\lambda)(z + d)) d\lambda, \quad (6)$$

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \lambda \in R, \quad \operatorname{Re}(\gamma(\lambda)) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(\gamma(\lambda)) \leq 0. \quad (7)$$

Выбор знаков действительной и мнимой частей величины $\gamma(\lambda)$ произведён в соответствии с условиями излучения Зоммерфельда.

Введём функции

$$F_1(y) = \left(\frac{\partial u^+}{\partial y} - \frac{\partial u^-}{\partial y} \right)(y, d) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_0(\lambda) - C_1^+(\lambda))(i\lambda) \exp(i\lambda y) d\lambda, y \in R; \quad (8)$$

$$F_2(y) = \left(\frac{\partial u^+}{\partial y} - \frac{\partial u^-}{\partial y} \right)(y, -d) = \int_{-\infty}^{\infty} (-C_1^-(\lambda) - C_2(\lambda))(i\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, y \in R; \quad (9)$$

$$F_3(y) = \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)(y, d) = \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma(\lambda) \cdot C_0(\lambda)) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{C_1^-(\lambda) \cdot \gamma_\varepsilon(\lambda)}{sh(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d)} - C_1^+(\lambda) \gamma_\varepsilon(\lambda) ch(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) \right) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda; \quad (10)$$

$$F_4(y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)(y, -d) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1^-(\lambda) \gamma_\varepsilon(\lambda) ch(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) \exp(i\lambda y) d\lambda + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1^+(\lambda) \gamma_\varepsilon(\lambda) sh^{-1}(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) - \gamma(\lambda) \cdot C_2(\lambda) \right) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda. \quad (11)$$

В силу непрерывности полного поля и его производных на границе раздела сред «вакуум-диэлектрик» функции $F_i(y)$ обладают свойствами:

$$F_i(y) = 0, \quad y \notin L_i, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (12)$$

$$\int_{\alpha_{i,q}}^{\beta_{i,q}} F_i(t) dt = 0, \quad (i = 1, 2, \quad q = 1, \dots, M); \quad (13)$$

$$\int_{\alpha_{1,1}}^y F_1(t) dt = u_0(y, d) - u_1(y, d), \quad y \in R; \quad (14)$$

$$\int_{\alpha_{2,1}}^y F_2(t) dt = u_1(y, -d) - u_2(y, -d), \quad y \in R. \quad (15)$$

Введём функции:

$$a_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} F_1(t) \cdot \frac{\exp(-i\lambda t) - 1}{\lambda} dt, \quad \lambda \in R, \quad (16)$$

$$a_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} F_2(t) \cdot \frac{\exp(-i\lambda t) - 1}{\lambda} dt, \quad \lambda \in R, \quad (17)$$

$$a_3(\lambda) = \frac{1}{2\pi \gamma_\varepsilon(\lambda)} \int_{L_1} F_3(t) \cdot \exp(-i\lambda t) dt, \quad \lambda \in R, \quad (18)$$

$$a_4(\lambda) = \frac{1}{2\pi\gamma_\varepsilon(\lambda)} \int_{L_2} F_4(t) \cdot \exp(-i\lambda t) dt, \quad \lambda \in R; \quad (19)$$

$$\eta(\lambda) = \gamma(\lambda) \cdot \gamma_\varepsilon^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in R; \quad (20)$$

$$\nu(\lambda) = \gamma(\lambda) \cdot \gamma_\varepsilon^{-1}(\lambda) + \operatorname{cth}(\gamma_\varepsilon(\lambda)d), \quad \Delta(\lambda) = sh^{-2}(\gamma_\varepsilon(\lambda)d) - \nu^2(\lambda). \quad (21)$$

Заметим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta(\lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu(\lambda) = 2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta(\lambda) = -4. \quad (22)$$

Из определений и свойств функций $F_i(y)$ следует, что

$$C_0(\lambda) = C_1^+(\lambda) + a_1, \quad C_2(\lambda) = -a_2 - C_1^-(\lambda), \quad \lambda \in R; \quad (23)$$

$$\eta(\lambda) \cdot C_0(\lambda) + \frac{C_1^-(\lambda)}{sh(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d)} + C_1^+(\lambda) \cdot \operatorname{cth}(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) = -a_3(\lambda), \quad \lambda \in R; \quad (24)$$

$$\frac{C_1^+(\lambda)}{sh(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d)} + C_1^-(\lambda) \operatorname{cth}(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) - \eta(\lambda) \cdot C_2(\lambda) = a_4(\lambda), \quad \lambda \in R. \quad (25)$$

Из (23)-(25) следует, что

$$C_1^\pm(\lambda) = \sum_{j=1}^4 \sigma_j^\pm(\lambda) \cdot a_j(\lambda), \quad C_0(\lambda) = \sum_{j=1}^4 (\sigma_j^+(\lambda) + \delta_{1,j}) \cdot a_j(\lambda), \quad (26)$$

$$C_2(\lambda) = -\sum_{j=1}^4 (\sigma_j^-(\lambda) + \delta_{2,j}) \cdot a_j(\lambda), \quad \lambda \in R. \quad (27)$$

где

$$\sigma_1^-(\lambda) = \sigma_2^+(\lambda) = \frac{-\eta(\lambda)}{\Delta \cdot sh^2(\gamma_\varepsilon(\lambda)d)}, \quad \sigma_3^-(\lambda) = -\sigma_4^+(\lambda) = -\frac{sh^{-2}(\gamma_\varepsilon(\lambda)d)}{\Delta}, \quad (28)$$

$$\sigma_2^-(\lambda) = \sigma_1^+(\lambda) = \eta(\lambda) \cdot \frac{\nu}{\Delta}, \quad \sigma_4^-(\lambda) = -\sigma_3^+(\lambda) = -\frac{\nu}{\Delta}. \quad (29)$$

Заметим также, что

$$\exists \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma_s^\pm(\lambda) = m_s < \infty, \quad s = 1, \dots, 4; \quad \sigma_s^\pm(-\lambda) = \sigma_s^\pm(\lambda), \quad \lambda \in R. \quad (30)$$

Из граничных условий Шукина-Леонтовича на поверхности лент следуют соотношения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - h_0 \right) u_0(y, d) = - \left(\frac{\partial}{\partial z} - h_0 \right) u^{ini}(y, d), \quad y \in L_1; \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + h_1 \right) u_1(y, d) = - \left(\frac{\partial}{\partial z} + h_1 \right) u^{ini}(y, d), \quad y \in L_1; \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - h_1 \right) u_1(y, -d) = - \left(\frac{\partial}{\partial z} - h_1 \right) u^{ini}(y, -d), \quad y \in L_2; \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + h_0\right)u_2(y, -d) = -\left(\frac{\partial}{\partial z} + h_0\right)u^{ini}(y, -d), \quad y \in L_2. \quad (34)$$

Из (31)-(34) и свойств функций $F_i(y)$ следуют соотношения:

$$F_3(y) - h_0 \int_{\alpha_{1,1}}^y F_1(t)dt - (h_0 + h_1) \cdot u_1(y, d) = (h_0 + h_1) \cdot u^{ini}(y, d), \quad y \in L_1; \quad (35)$$

$$F_4(y) + h_0 \int_{\alpha_{2,1}}^y F_2(t)dt - (h_0 + h_1) \cdot u_1(y, -d) = (h_0 + h_1) \cdot u^{ini}(y, -d), \quad y \in L_2; \quad (36)$$

$$\frac{\partial(u_0 + u_1)}{\partial z}(y, d) - h_0 \int_{\alpha_{1,1}}^y F_1(t)dt + (h_1 - h_0) \cdot u_1(y, d) = f(y, d), \quad y \in L_1; \quad (37)$$

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial z}(y, -d) - h_0 \int_{\alpha_{2,1}}^y F_2(t)dt - (h_1 - h_0) \cdot u_1(y, -d) = f(y, -d), \quad y \in L_2; \quad (38)$$

где $f(y, \pm d) = -2 \frac{\partial}{\partial z} u^{ini}(y, \pm d) \mp (h_1 - h_0) \cdot u^{ini}(y, \pm d)$.

Введём обозначения:

$$G_j(\lambda, t) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda(y-t))}{\lambda}, & i=1,2; \\ \frac{\cos(\lambda(y-t))}{\gamma_\varepsilon(\lambda)}, & i=3,4; \end{cases} \quad (39)$$

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{\gamma_\varepsilon(\lambda)}{sh(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d)}, \quad \Theta_2(\lambda) = \gamma_\varepsilon(\lambda)cth(2\gamma_\varepsilon(\lambda)d) - \gamma(\lambda), \quad \lambda \in R \quad (40)$$

и множества $L_3 = L_1$; $L_4 = L_2$.

Из представлений (4)-(6) функций $u_i(y, z)$ и обозначений (40) следует справедливость равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u_0 + u_1)(y, d) = & - \int_{-\infty}^{\infty} (C_0(\lambda) - C_1^+(\lambda)) \cdot |\lambda| \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} (C_0(\lambda) - C_1^+(\lambda)) \cdot (|\lambda| - \gamma(\lambda)) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} (C_1^-(\lambda) \cdot \Theta_1(\lambda) + C_1^+(\lambda) \Theta_2(\lambda)) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_2 + u_1)(y, -d) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1^-(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot |\lambda| \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1^-(\lambda) + C_2(\lambda) \right) \cdot (\gamma(\lambda) - |\lambda|) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1^+(\lambda) \cdot \Theta_1(\lambda) + C_1^-(\lambda) \cdot \Theta_2(\lambda) \right) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda.
\end{aligned} \quad (42)$$

Основываясь на свойствах параметрического представления преобразования Гильберта [4], получаем:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_0(\lambda) - C_1^+(\lambda) \right) \cdot |\lambda| \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{F_1(t) dt}{t - y}; \quad (43)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(-C_1^-(\lambda) - C_2(\lambda) \right) \cdot |\lambda| \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{F_2(t) dt}{t - y}. \quad (44)$$

Из свойств функций $F_i(y)$ следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_0(\lambda) - C_1^+(\lambda) \right) (|\lambda| - \gamma(\lambda)) e^{i\lambda y} d\lambda = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \int_0^{\infty} (\lambda - \gamma(\lambda)) G_j(\lambda, y - t) d\lambda F_1(t) dt;
\end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1^-(\lambda) + C_2(\lambda) \right) (\gamma(\lambda) - |\lambda|) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \int_0^{\infty} (\lambda - \gamma(\lambda)) G_j(\lambda, y - t) d\lambda F_2(t) dt;
\end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} C_1^{\pm}(\lambda) \cdot \Theta_i(\lambda) \cdot \exp(i\lambda y) d\lambda = \\
& = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \int_0^{\infty} \sigma_j^{\pm}(\lambda) \cdot \Theta_i(\lambda) \cdot G_j(\lambda, y - t) d\lambda F_j(t) dt;
\end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
u_1(y, d) = & \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \int_0^{\infty} \left(\sigma_j^+(\lambda) + \frac{\delta_{j1} + \delta_{3j}}{2} \right) \cdot G_j(\lambda, y - t) d\lambda F_j(t) dt - \\
& - \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(y - t) F_1(t) dt - \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{i\pi}{2} H_0^1(k\sqrt{\varepsilon}|y - t|) F_3(t) dt;
\end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
u_1(y, -d) = & - \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \int_0^{\infty} \left(\sigma_j^-(\lambda) + \frac{\delta_{j2} - \delta_{4j}}{2} \right) \cdot G_j(\lambda, y - t) d\lambda F_j(t) dt + \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\pi}{2} \text{Sign}(y - t) F_2(t) dt - \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{i\pi}{2} H_0^1(k\sqrt{\varepsilon}|y - t|) F_4(t) dt.
\end{aligned} \quad (49)$$

Введём функции:

$$M_j^+(t) = -(h_0 + h_1) \int_0^\infty \left(\sigma_j^+(\lambda) + \frac{\delta_{j1} + \delta_{3j}}{2} \right) \cdot G_j(\lambda, y-t) d\lambda, \quad (50)$$

$$M_j^-(t) = (h_0 + h_1) \int_0^\infty \left(\sigma_j^-(\lambda) + \frac{\delta_{j2} - \delta_{4j}}{2} \right) \cdot G_j(\lambda, y-t) d\lambda, \quad (51)$$

$$K_j^+(t) = \delta_{1,j} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\gamma(\lambda)}{\lambda} \right) \sin(\lambda t) d\lambda + \int_0^\infty \left(\sigma_j^-(\lambda) \cdot \Theta_1(\lambda) + \sigma_j^+(\lambda) \cdot \Theta_2(\lambda) \right) \cdot G_j(\lambda, t) d\lambda + \\ + (h_1 - h_0) \int_0^\infty \left(\sigma_j^+(\lambda) + \frac{\delta_{j1} + \delta_{3j}}{2} \right) \cdot G_j(\lambda, t) d\lambda; \quad (52)$$

$$K_j^-(t) = \delta_{2,j} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\gamma(\lambda)}{\lambda} \right) \sin(\lambda t) d\lambda + \int_0^\infty \left(\sigma_j^+(\lambda) \cdot \Theta_1(\lambda) + \sigma_j^-(\lambda) \cdot \Theta_2(\lambda) \right) \cdot G_j(\lambda, t) d\lambda + \\ + (h_1 - h_0) \cdot \int_0^\infty \left(\sigma_j^-(\lambda) + \frac{\delta_{j2} - \delta_{4j}}{2} \right) \cdot G_j(\lambda, t) d\lambda. \quad (53)$$

В результате подстановки в соотношения (35)-(38) интегральных представлений (45)-(53) получаем систему интегральных уравнений:

$$F_3(y) - h_0 \int_{\alpha_{1,1}}^y F_1(t) dt + \frac{h_0 + h_1}{4} \int_{L_1} \text{sign}(y-t) F_1(t) dt + \\ + \frac{h_0 + h_1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{i\pi}{2} H_0^1(k\sqrt{\varepsilon}|y-t|) F_3(t) dt + \\ + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} M_j^+(t) F_j(t) dt = (h_0 + h_1) \cdot u^{ini}(y, d), \quad y \in L_1; \quad (54)$$

$$F_4(y) + h_0 \int_{\alpha_{2,1}}^y F_2(t) dt - \frac{h_0 + h_1}{4} \int_{L_2} \text{sign}(y-t) F_2(t) dt + \\ + \frac{h_0 + h_1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{i\pi}{2} H_0^1(k\sqrt{\varepsilon}|y-t|) F_4(t) dt + \\ + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} M_j^-(t) F_j(t) dt = (h_0 + h_1) \cdot u^{ini}(y, -d), \quad y \in L_2; \quad (55)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F_1(t) dt}{t-y} - h_0 \int_{\alpha_{1,1}}^y F_1(t) dt - \frac{h_1 - h_0}{4} \int_{L_1} \text{sign}(y-t) F_1(t) dt -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h_1-h_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{i\pi}{2} H_0^1(k\sqrt{\varepsilon}|y-t|) F_3(t) dt + \\
& + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} K_j^+(t) F_j(t) dt = f(y, d), \quad y \in L_1; \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{F_2(t) dt}{t-y} - h_0 \int_{\alpha_{2,1}}^y F_2(t) dt - \frac{h_1-h_0}{4} \int_{L_2} \text{sign}(y-t) F_2(t) dt + \\
& + \frac{h_1-h_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{i\pi}{2} H_0^1(k\sqrt{\varepsilon}|y-t|) F_4(t) dt + \\
& + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} K_j^-(t) F_j(t) dt = f(y, -d), \quad y \in L_2. \quad (57)
\end{aligned}$$

3. Выводы по результатам исследований.

Получены системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода и системы СИУ, через решения которых выражаются основные параметры рассеянных электромагнитных волн. Эти системы отличаются от систем интегральных уравнений, полученных в работе [2] наличием логарифмических и кусочно-постоянных слагаемых в подынтегральных выражениях. Для их численного решения можно использовать вычислительную схему метода дискретных особенностей [4-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gandel'. Yu. V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 171, № 1. — Springer Science+Business Media, Inc. — P. 74-88.
2. Gandel', Yu. V., Kravchenko, V. F., and Pustovoi, V. I., Scattering of Electromagnetic Waves by a Thin Superconducting Band // Doklady Mathematics. — 1996. - vol. 54, no. 3. - p. 959-961.
3. Gandel Yu. V., Sidelnikov G. L. The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction on the finite lattice above flat screen. // Differential equations. - V.35, № 9, 1999. - p. 1155 – 1161
4. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин. — Х. Акад. ВВ МВД Украины, 2012. —544с.
5. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. — Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996, 475 p.

УДК 517.946.9

Дослідження температурного поля дроту під час електропластичного волочіння

О. Б. Кобильська

Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, Україна

Рассматривается математическая модель температурного поля в движущейся изотропной осесимметрической среде с циклически действующим импульсным источником тепла. Изучаются особенности действия импульсных источников тепла на температурное распределение. В данной работе исследуется температурное распределение в осесимметрической среде во время электропластического волочения в зависимости от вида импульсного источника тепла. Получены численные расчеты для материалов цинк и медь, построены графики температурных распределений во время электропластического волочения.

Ключевые слова: *начально-краевая задача, волочение, импульсный источник тепла*

Розглядається математична модель температурного поля у рухомому ізотропному осесиметричному середовищі з циклічно діючим імпульсним джерелом тепла. Вивчаються особливості дії імпульсних джерел тепла на температурний розподіл. В даній роботі досліджується температурний розподіл в осесиметричному середовищі під час електропластичного волочіння в залежності від виду імпульсного джерела тепла. Отримано чисельні розрахунки для матеріалів цинк і медь, побудовані графіки температурних розподілів під час електропластичного волочіння.

Ключові слова: *початково-крайова задача, волочіння, імпульсне джерело тепла*

In the paper the mathematical model of temperature field in the mobile isotropic axisymmetric environment with periodically operating heat sources is considered. Features of action of pulse sources of heat on temperature distribution are studied. In this paper the temperature distribution in axisymmetric medium during electroplastic drawing is investigated depending on a type of a pulse source of heat. Numerical calculations for materials zinc and copper are received. Graphs of temperature distributions during electroplastic drawing are built.

Key words: *boundary value problem, drawing, pulsed heat source.*

1. Актуальність роботи.

Виробництво тугоплавкого і важко деформованого дроту без попереднього розігріву перед пластичною деформацією призводить до зниження якості продукції і часто буває неможливим. Застосування технології електропластичного волочіння (ЕПВ) в процесі виробництва тонкого дроту під впливом періодично діючого імпульсного внутрішнього джерела тепла дозволяє знизити зусилля пластичної деформації та проводити процес волочіння при понижених температурах [1]. Температурне поле під час процесу волочіння можна визначити, досліджуючи математичну модель теплового процесу ЕПВ. Математична модель такого процесу у найбільш повній постановці приводить до дослідження та розв'язання нелінійних та нелокальних задач для рівняння теплопровідності [2,3].

2. Постановка задачі.

З математичної точки зору температурне поле рухомого дроту під час процесу ЕПВ можна розглядати як температурне поле рухомого осесиметричного ізотропного середовища з імпульсними внутрішніми джерелами тепла, які породжуються дією електричного струму силою I в зоні нагрівання. При таких умовах температурне поле в зоні нагрівання може бути визначено за допомогою розв'язку крайової задачі для рівняння теплопровідності [2,3].

Розглянемо загальну постановку задачі визначення температурного поля в обмеженому рухомому зі швидкістю $v(t)$ середовищі, яке розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Коли нагрівання дроту відбувається одночасно з пластичною деформацією, а температура не дозволяє проводити процес волочіння не порушуючи умову нерозривності, це призводить до обриву дроту [1]. Тому одночасно з питанням визначення температурного розподілу, під час перехідного процесу, виникає проблема визначення таких параметрів керування процесом нагрівання, при яких температурне поле під час руху середовища зі змінною $v(t)$ швидкістю стає стаціонарним. Цього можна досягти, обравши відповідним чином щільність джерел тепла та підібравши відповідним чином режими імпульсного джерела тепла, а саме скважність, тривалість одного імпульсу.

Починаючи з деякого моменту часу, при $t \geq t_0$, швидкість руху дроту стає постійною $v = \text{const}$. Вибір параметрів керування та режиму імпульсного джерела тепла дозволить підтримувати в зоні ЕПВ необхідний, з технологічної точки зору, температурний розподіл. Методи визначення параметрів керування тепловим процесом під час ЕПВ розглянуті в [2]. В даній роботі досліджується залежність теплового процесу під час ЕПВ від виду імпульсного джерела тепла. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності, розв'язання якої дозволяє визначити температурне поле рухомого дроту, в зоні нагрівання якого, діє джерело тепла з щільністю $w(z, t, T)$, що залежить від координат та температури [2].

Оскільки перехід від нестационарного температурного поля (перехідний процес) до стаціонарного процесу відбувається неперервно в часі, то на початку стаціонарного процесу повинна виконуватися умова узгодження температурних розподілів, тобто $\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} T(r, z, t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} T(r, z, t)$.

3. Мета роботи.

З'ясувати вплив імпульсного джерела тепла на температурний розподіл у рухомому середовищі.

4. Матеріал і результати досліджень.

Визначення нестационарного температурного розподілу приводить до розв'язання наступної початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності в області $\Omega_t, \Omega_t : \{(z, r, t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \leq t_0\}$ [3]

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nu c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), (r, z) \in \Omega_t \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = f_{12} [\alpha(T_c - T) - \varepsilon \sigma (T_c^4 - T^4)], \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = f_{12} [\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4)], \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = f_{12} [-\alpha(T)(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4)], \quad (4)$$

де $w(z, t, T)$ у випадку залежності джерел тепла від координати і часу має вигляд

$$W(z, t, T) = f_{11}(z) f_2(T), \quad (5)$$

$$W(z, t, T) = f_{12}(z) f_2(T),$$

$$f_2(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad \rho_0, \beta - \text{питомий опір і температурний коефіцієнт}$$

опору дроту. Функції $f_{11}(z), f_{12}(t), f_{13}(t)$ в залежності від технологічних особливостей процесу можуть мати вигляд

$$f_{11}(t) = \left| \sin \left(\frac{t\pi}{t_0} \right) \right|,$$

$$f_{12}(t) = \begin{cases} m \frac{t}{t_0} - mn, & nt_0 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{m} \right) t_0 \\ 0, & \left(n + \frac{1}{m} \right) t_0 < t \leq (n+1)t_0, \end{cases} \quad t < 0$$

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \frac{2kt}{t_0} - 2kn, & 0 \leq t \leq (n + \frac{1}{2mk})t_0 \\ \frac{1}{m}, & (n + \frac{1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 \\ -\frac{2kt}{t_0} + 2(kn+1), & (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 < t \leq (n + \frac{1}{k})t_0 \\ 0, & (n + \frac{1}{k})t_0 < t < (n+1)t_0 \end{cases}$$

Тут параметри m, n визначають циклічний характер дії джерел тепла. Функції $f_{11}(z), f_{12}(t), f_{13}(t)$ є кусково-неперервними і додатно визначеними. Розв'язок шукаємо чисельним методом. Використовуємо консервативну різницеву схему. Лінії розриву функцій $f_{1i}(t)$ паралельні вісі x . Оберемо спеціальну сітку, коли усі точки розриву є вузлами. У даному випадку сітка буде рівномірною. Для чисельних розрахунків було обрано матеріал цинк та мідь.

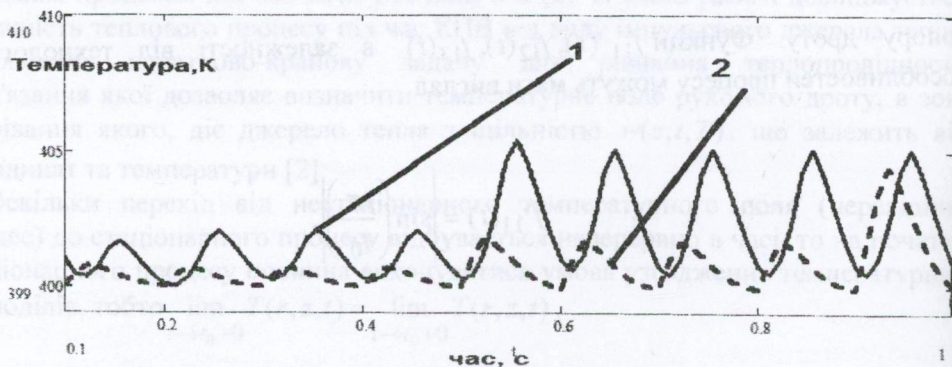


Рис. 1. а
крива 1 $m=2$, крива 2 $m=5$

Зміна скважності m та тривалості одного імпульсу t_0 дозволяє змінювати температуру, що в свою чергу впливає на проведення процесу електропластичного волочиння. рис. 1.а, 1. б

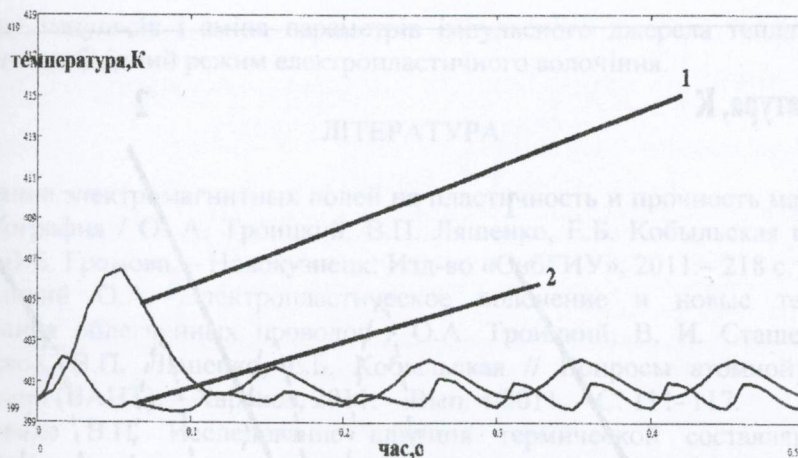


Рис. 1. б
крива 1– $t_o=0.1$, крива 2– $t_o=0.05$.

Рис. 1 Температурні розподіли отримані із розв'язку (1)– (5) при $f_{12}(t)$ та при різних значеннях t_o

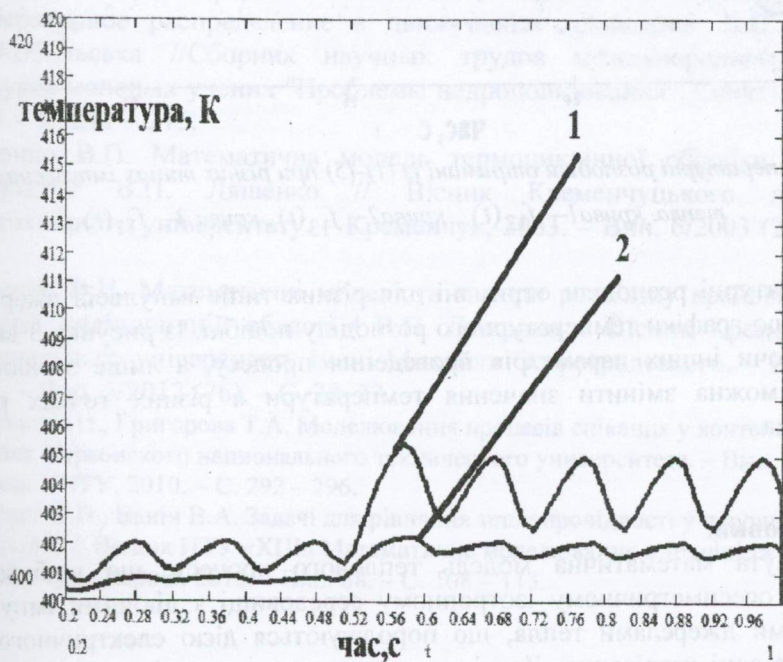


Рис. 2 Температурні розподіли отримані із розв'язку (1)– (5) для $f_{13}(t)$ та для значеннях струму
крива 1– $I=10$ А, крива 2– $I=30$ А

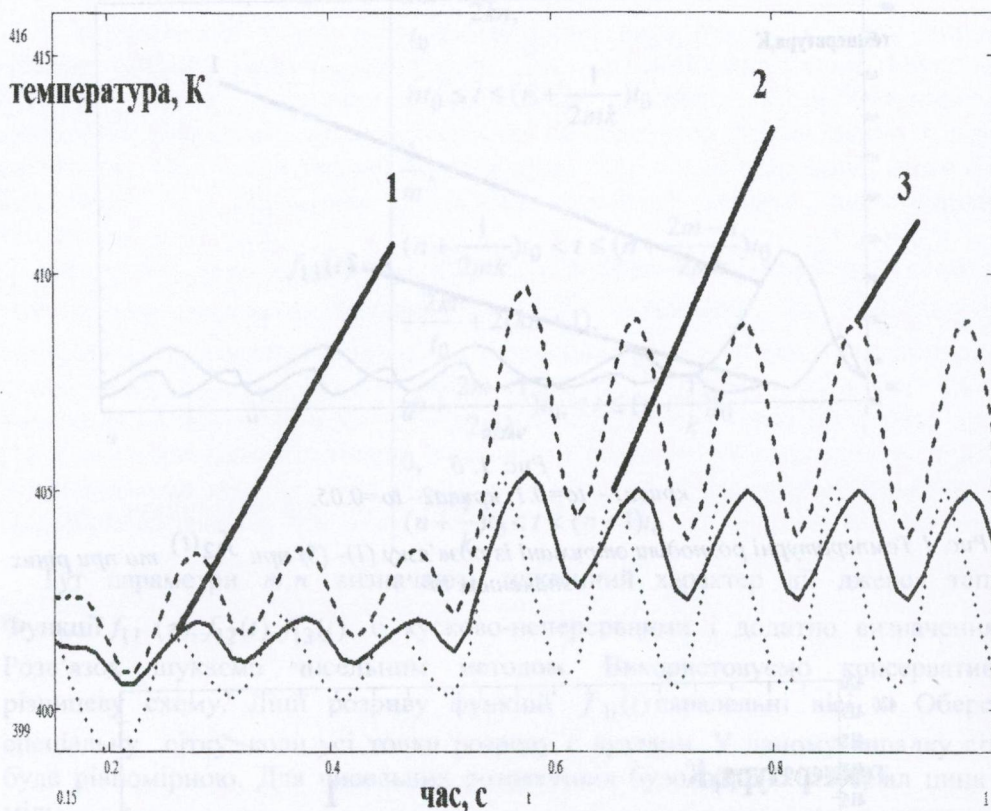


Рис. 3 Температурні розподіли отримані із (1)–(5) при різних типах імпульсних джерел тепла. крива 1– $f_{12}(t)$, крива 2– $f_{13}(t)$, крива 3– $f_{11}(t)$.

Температурні розподіли отримані для різних типів імпульсів джерел тепла свідчать, що графіки температурного розподілу подібні. Із рисунку 3 видно, що не змінюючи інших параметрів проведення процесу, а лише змінюючи тип імпульсу можна змінити значення температури в різних точках рухомого середовища.

5. Висновки.

Розглянута математична модель теплового процесу, що відбувається в рухомому осесиметричному ізотропному середовищі з діючими імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою I в зоні нагрівання. Досліджено вплив характеру імпульсного джерела тепла на температурний розподіл в рухомому дроті під час процесу електропластичного волочіння

Результати чисельних розрахунків температурних розподілів взяті із натурних експериментів волочіння дроту, що проводились раніше і описані в роботах [4–9], показали, що температура підвищується несуттєво, в межах $5–10^0\text{C}$. Отримано картину температурних розподілів, із якої видно, що підбір

характеру імпульсів і зміна параметрів імпульсного джерела тепла дозволяє підбирати необхідний режим електропластичного волочіння.

ЛІТЕРАТУРА

1. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов: Монография / О. А. Троицкий, В.П. Ляшенко, Е.Б. Кобыльская и др. под ред. В.Е. Громова. – Новокузнецк: Изд-во «СибГИУ», 2011. – 218 с.
2. Троицкий О.А. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов / О.А. Троицкий, В. И. Сташенко, В.Г. Рыжков, В.П. Ляшенко, Е.Б. Кобыльская // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ). – Харьков, 2011. – Вып. 4/2011. – С. 111–117.
3. Ляшенко В.П. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении / В.П. Ляшенко Е. Б. Кобыльская, Т.А. Григорова, О.А. Троицкий // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2011. – Вип. 4/2011 (69), част. 1. – С. 57–62.
4. Троицкий О.А., Моисеенко В.М., Спицын В.И. и др. Электропластическая деформация вольфрама // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295. – № 5. – С. 251–255.
5. В.П. Ляшенко Исследование влияния импульсного действия тока на температурное распределение в движущейся проволоке/ В.П. Ляшенко, О.Б.Кобыльська //Сборник научных трудов международного форума-конкурса молодых ученых "Проблемы недропользования". Санкт-Петербург, 2010. – С. 211 – 215.
6. Ляшенко В.П. Математична модель термоциклічної обробки металевих матеріалів/ В.П. Ляшенко // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук, 2003. – Вип. 6/2003 (23). – С. 8–11.
7. Ляшенко В.П. Математичні моделі та методи розв'язку крайових задач у рухомій циліндричній області / В.П. Ляшенко // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2012. – Вип. 5/2012 (76). – С. 28–33.
8. Ляшенко В.П., Григорова Т.А. Моделирование процессов спикання у контейнері. // Вестник Херсонского национального технического университета. – Вып. 3(39). – Херсон: ХНТУ, 2010. – С. 292 – 296.
9. Ляшенко В.П., Ванін В.А. Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії. // Вісник НТУ «ХПІ» Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків, 2010. – Вип. 68. – С. 108 – 113.

УДК 517.948

О линейных непрерывных системах, ассоциированных с операторными узлами

Е. А. Когут, З. Ф. Назыров, А. А. Янцевич

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье изучаются непрерывные линейные открытые системы, ассоциированные с локальными и метрическими узлами. Рассмотрена операция сцепления систем и свойства их характеристических функций. В работе показано, что любую открытую линейную систему можно расширить только за счет пространств входа и выхода до ассоциированной с соответствующими узлами. Причем при специальном входе внутреннее состояние расширенной системы совпадает с внутренним состоянием исходной системы, и на одном из каналов выхода получаем выход исходной системы.

Ключевые слова: линейная система, операторный узел, локальный, метрический, индефинитный, сцепление.

В статті вивчаються неперервні лінійні відкриті системи, асоційовані з локальними та метричними вузлами. Розглянута операція зчеплення систем і властивості їх характеристичних функцій. В роботі показано, що будь-яку відкриту лінійну систему можна розширити тільки за рахунок просторів входу та виходу до асоційованої з відповідними вузлами. Причому при спеціальному вході внутрішній стан розширеної системи співпадає з внутрішнім станом вихідної системи, і на одному з каналів виходу отримаємо вихід вихідної системи.

Ключові слова: лінійна система, операторний вузол, локальний, метричний, індефінітний, зчеплення.

Continuous linear open systems associated with local and metric colligations are studied in the paper. The operation of system conjunction and their characteristic functions are examined. It is proved in the paper that every open linear system can be expanded to the associated with corresponding colligations only using input and output spaces. Besides, for the special input, the internal state of the expanded system coincides with the internal state of the initial system and in the one of output channels we obtain output of the initial system.

Key words: linear system, operator colligation, local, metric, indefinite, coupling.

Совокупность трех гильбертовых пространств E , H , F , для которых определены отображения $x(t) = R \cdot u(t)$ и $v(t) = W \cdot u(t)$, где $u \in E$, $x \in H$, $v \in F$, называется открытой системой. Пространства E , H , и F называются соответственно пространствами входа, внутреннего состояния и выхода системы [1]. В пространствах E и F наряду с дефинитной метрикой $(\cdot, \cdot)$ с помощью операторов инволюции J_E и J_F введены индефинитные метрики $[\cdot, \cdot]_E$, $[\cdot, \cdot]_F$, которые связаны соотношениями

$$[u_1, u_2]_E = (J_E u_1, u_2); \quad [v_1, v_2]_F = (J_F v_1, v_2). \quad (1)$$

Оператор T - основной оператор системы ($T \in [H, H]$), а операторы, осуществляющие связь между пространствами E и H и H и F , называются канальными операторами. Самосопряженный оператор J , квадрат которого

равен единице, называется оператором инволюции ($J = J^*$; $J^2 = I$), где I - единичный оператор.

Оператор, сопряженный к φ по отношению к индефинитной метрике, будем обозначать φ^+ , в отличие от обычного гильбертова сопряжения, который обозначается φ^* .

Пусть φ - линейный ограниченный оператор, отображающий пространство E в H ($\varphi \in [E, H]$, $x \in H$, $u \in E$),

$$(\varphi u, x) = (u, \varphi^+ x) = (J_E u, J_E \varphi^+ x) = [u, \varphi^+ x].$$

Таким образом, $\varphi^+ = J_E \varphi^*$.

Все входящие в рассмотрение операторы будем считать линейными ограниченными операторами. Если основной оператор системы T неограничен или плохо обусловлен, то удобно рассмотреть открытую систему в виде

$$iT \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \varphi u(t); \quad (2)$$

$$v(t) = \varphi^+ \frac{dx}{dt} + u(t), \quad (3)$$

т. е. основной оператор T находится при производной.

Сперва рассмотрен случай, когда $E = F$ и $J_E = J_F$. Множество линейных ограниченных операторов, действующих из E в H , обозначается $[E, H]$. Совокупность двух гильбертовых пространств E и H и трех операторов $T \in [H, H]$, $\varphi \in [E, H]$ и $J \in [E, E]$ называется локальным узлом $\Delta = (T, H, \varphi, E, J)$, если выполняется условие

$$\frac{T - T^*}{i} = \varphi \varphi^+. \quad (4)$$

Оператор J называется метрическим оператором узла. Как видно, оператор T отличен от самосопряженного. Если операторы T и φ , определяющие открытую систему, связаны условием (4), то система называется ассоциированной с локальным операторным узлом. В статье рассмотрена также операция сцепления открытых систем (в данном случае непрерывных), когда выход первой из систем является входом второй системы. Важной является и передаточная функция входа на выход, которая называется характеристической функцией открытой системы. Приведены свойства указанной функции открытой системы (2) - (3). Также рассмотрены открытые системы, ассоциированные с метрическими операторными узлами, т. е. узлами, когда основной оператор системы отличен от унитарного и операторы, определяющие такую систему, удовлетворяют условиям (9) - (10).

В статье показано, как любую линейную систему в пространстве состояний можно расширить до ассоциированной с операторным узлом только за счет «расширения» внешних пространств, причем при специальном входном сигнале внутреннее состояние расширенной системы совпадает с внутренним

состоянием исходной системы, а один из выходов расширенной системы совпадает с выходом исходной системы.

Для систем (2) - (3), ассоциированных с локальным узлом, выполняется закон сохранения метрики

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_H^2 = \|v(t)\|_E^2 - \|u(t)\|_E^2. \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x(t), x(t)) &= \left(\frac{d}{dx} x(t), x(t) \right) + \left(x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, -iT \frac{dx(t)}{dt} + \varphi u(t) \right) + \\ &+ \left(-iT \frac{dx(t)}{dt} + \varphi u(t), \frac{dx(t)}{dt} \right) = i \left(T^* \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right) + \left(\frac{dx(t)}{dt}, \varphi u(t) \right) - \\ &- i \left(T \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right) + \left(\varphi u(t), \frac{dx(t)}{dt} \right) = \\ &= -i \left((T - T^*) \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right) + \left[\varphi^+ \frac{dx(t)}{dt}, u(t) \right]_E + \left[u(t), \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt} \right]_E = \\ &= \left(\varphi \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right) + \left[\varphi^+ \frac{dx(t)}{dt}, u(t) \right]_E + \left[u(t), \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt} \right]_E = \\ &= \left[\varphi^+ \frac{dx(t)}{dt}, \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt} \right]_E + \left[\varphi^+ \frac{dx(t)}{dt}, u(t) \right]_E + \left[u(t), \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt} \right]_E + [u, u]_E - [u, u]_E = \\ &= \left[u(t) + \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt}, u(t) + \varphi^+ \frac{dx(t)}{dt} \right]_E - [u(t), u(t)]_E = [v(t), v(t)]_E - [u(t), u(t)]_E. \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (2) - (3) в виде $x(t) = e^{i\lambda t} x_0$, где $x_0 \in H$, $\lambda = \bar{\lambda}$.

$$iT i \lambda e^{i\lambda t} x_0 + e^{i\lambda t} x_0 = \varphi u(t);$$

$$(I - \lambda T)x(t) = \varphi u(t), \quad x(t) = (I - \lambda T)^{-1} \varphi u(t) = -\frac{1}{\lambda} \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi u(t);$$

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t) + \varphi^+ i \lambda e^{i\lambda t} x_0 = u(t) + \varphi^+ i \lambda x(t) = u(t) + i \lambda \varphi^+ \times \\ &\times \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi u(t) = \left[I - i \varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi \right] u(t), \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\lambda}$ принадлежит регулярному множеству оператора T . Таким образом, упомянутые выше отображения входа на внутреннее состояние и входа на выход открытой системы имеют вид

$$R(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi, \quad w(\lambda) = I - i \varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi. \quad (6)$$

$w(\lambda)$ естественным образом продолжается для $\lambda \neq \bar{\lambda}$, в теории несамосопряженных операторов называется характеристической оператор-функцией. Если существует обратный оператор T^{-1} , определенный на всем пространстве, то решение $x(t)$ задачи Коши (2) - (3) имеет вид

$$x(t) = e^{iT^{-1}t} x_0 - i \int_0^t e^{iT^{-1}(t-s)} T^{-1} \varphi u(s) ds.$$

Рассмотрим теперь непрерывную систему, ассоциированную с метрическим операторным узлом. Теперь у нас три гильбертовых пространства E , H , F - пространства входа, внутреннего состояния и выхода системы. Во внешних пространствах с помощью операторов инволюции $J_E \in [E, E]$ ($J_E = J_E^*$, $J_E^2 = I_E$) и $J_F \in [F, F]$ ($J_F = J_F^*$, $J_F^2 = I_F$) заданы индефинитные метрики $[u_1, u_2]_E = (Ju_1, u_2)_E$ и $[v_1, v_2]_F = (J_F v_1, v_2)_F$.

$$\begin{cases} T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \Phi u(t); & T \in [H, H]; \Phi \in [E, H]; \\ v(t) = \psi \frac{dx}{dt} + Ku(t); & \psi \in [H, F], K \in [E, F]. \end{cases} \quad (7)$$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x(t) = -T \frac{dx}{dt} + \Phi u(t); \\ v(t) = \psi \frac{dx}{dt} + Ku(t), \end{cases} \quad (8)$$

т. е. в векторном виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi \\ \psi & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Операторная матрица $S = \begin{pmatrix} -T & \Phi \\ \psi & K \end{pmatrix}$ J -унитарна, т. е.

$$\begin{aligned} SS^+ &= I_{H \oplus F}; \quad S^+ S = I_{H \oplus E}; \\ S^+ &= \begin{pmatrix} -T^* & \psi^+ \\ \Phi^+ & K^+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Phi^+ = J_E \Phi^*$, $\psi^+ = \psi^* J_F$, $K^+ = J_F K^* J_F$. Соотношения (9) в развернутом виде имеют вид

$$\begin{cases} TT^* + \Phi \Phi^+ = I_H; \\ \psi \psi^+ + K K^+ = I_F; \\ \Phi K^+ = T \psi^+; \\ K \Phi^+ = \psi T^*; \end{cases} \quad \begin{cases} T^* T + \psi^+ \psi = I_H; \\ \Phi^+ \Phi + K^+ K = I_E; \\ \psi^+ K = T^* \Phi; \\ K^+ \psi = \Phi^+ T. \end{cases} \quad (10)$$

Для таких систем, ассоциированных с метрическими узлами справедлив следующий закон сохранения метрики:

$$\left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\|_H^2 - \|x(t)\|_H^2 = \|u(t)\|_E^2 - \|v(t)\|_F^2. \quad (11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right) &= (x(t), x(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right) - \left(-T \frac{dx}{dt} + \Phi u, -T \frac{dx}{dt} + \Phi u \right) = \\ &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right) - \left(T \frac{dx}{dt}, T \frac{dx}{dt} \right) + \left(T \frac{dx}{dt}, \Phi u \right) + \left(\Phi u, T \frac{dx}{dt} \right) - (\Phi u, \Phi u) = \\ &= \left((I - T^* T) \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt}, T^* \Phi u \right) + \left(T^* \Phi u, \frac{dx}{dt} \right) - [(I - K^* K) u, u]_E = \\ &= \left[\psi \frac{dx}{dt}, \psi \frac{dx}{dt} \right]_F + \left(\frac{dx}{dt}, \psi^* K u \right) + \left(\psi^* K u, \frac{dx}{dt} \right) - [u, u]_E + [K u, K u]_F = \\ &= \left[\psi \frac{dx}{dt} + K u, \psi \frac{dx}{dt} + K u \right]_F - [u, u]_E = [v, v]_F - [u, u]_E. \end{aligned}$$

Введем понятие сцепления операторов и сцепление открытых систем, когда в рассматриваемой цепочке на вход следующей системы подается выход предыдущей системы. Пусть операторы T_1 и T_2 действуют в пространствах H_1 и H_2 соответственно ($T_1 \in [H_1, H_1]$, $T_2 \in [H_2, H_2]$). Пространство H определим как прямую сумму H_1 и H_2 ($H = H_1 \oplus H_2$). Сцеплением операторов T_1 и T_2 назовем оператор $T \in [H, H]$, если

$$T = T_1 P_1 + T_2 P_2 + C_T,$$

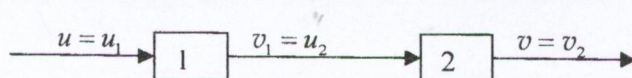
где P_i ортопроекторы H на H_i , а оператор C_T отображает H_1 в H_2 и аннулирует H_2 . Оператор T , определенный таким образом, называется сцеплением операторов T_1 и T_2 и обозначается $T = T_1 \vee T_2$, [1]. Подпространство H_2 является инвариантным подпространством пространства H для оператора T .

Пусть даны две открытые системы вида (7) - (8), ассоциированные с метрическими узлами Δ_1 и Δ_2 ,

$$\Delta_i = \left(J_E, H_i \oplus E; \begin{pmatrix} T_i & \Phi_i \\ \psi_i & K_i \end{pmatrix}, H_i \oplus F, J_F \right) \quad (i=1, 2)$$

$$\begin{cases} T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \Phi_1 u_1(t); \\ v_1(t) = \psi_1 \frac{dx}{dt} + K_1 u_1(t); \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \Phi_2 u \\ v_2(t) = \psi_2 \frac{dy}{dt} + K_2 u_2(t). \end{cases}$$

Схематически сцепление систем можно записать так:



Таким образом

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -T_1 \frac{dx}{dt} + \Phi_1 u_1(t); \\ y(t) = -T_2 \frac{dy}{dt} + \Phi_2 \left(\psi_1 \frac{dx}{dt} + K_1 u_1(t) \right); \\ v_2(t) = \psi_2 \frac{dy}{dt} + K_2 \left(\psi_1 \frac{dx}{dt} + K_1 u_1(t) \right); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ -\Phi_2 \psi_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix} u_1(t); \\ v_2(t) = (K_2 \psi_1, \psi_2) \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} + K_2 K_1 u_1(t). \end{array} \right. \quad (12)$$

Отсюда следует, что коэффициент сцепления равен $(-\Phi_2 \psi_1)$ и вид операторов $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix}$; $\psi = (K_2 \psi_1, \psi_2)$; $K = K_2 \cdot K_1$ (или $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 K_1$; $\psi = K_2 \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2$). Нетрудно проверить, что сцепление открытых систем, ассоциированных с метрическими узлами, есть открытая система, также ассоциированная с метрическим узлом. После того как получен явный вид всех операторов, определяющих сцепление, нетрудно проверить справедливость соотношений (10).

Пусть вход системы имеет вид $u(t) = e^{i\lambda t} u_0$. Будем искать $x(t)$ решение системы (7) в виде $x(t) = e^{i\lambda t} x_0$, где $x_0 \in H$ и $v(t) = e^{i\lambda t} v_0$. Тогда

$$x_0 = -\frac{i}{\lambda} \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi u_0; \quad v_0 = \left[K + \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi \right] u_0 = W_T(\lambda) u_0.$$

$W_T(\lambda)$ в теории неунитарных операторных узлов называют характеристической функцией, т. к. она определяет оператор T с точностью до унитарной эквивалентности на главной части. В теории линейных систем $W_T(\lambda)$ называется передаточной функцией. Таким образом, два отображения пространства входа E на внутреннее состояние H и входа на выход F имеют вид

$$R(\lambda) = -\frac{i}{\lambda} \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi \quad \text{и} \quad W(\lambda) = K + \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что произведение характеристических функций сцепляемых систем есть характеристическая функция сцепления,

$$\begin{aligned}
 W_T(\lambda) &= K_2 K_1 + (K_2 \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2) \begin{pmatrix} T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1 & 0 \\ -\Phi_2 \psi_1 & T_2 - \frac{i}{\lambda} I_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix} = \\
 &= K_2 K_1 + (K_2 \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2) \times \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1\right)^{-1} & 0 \\ \left(T_2 - \frac{i}{\lambda} I_2\right)^{-1} \Phi_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1\right)^{-1} & \left(T_2 - \frac{i}{\lambda} I_2\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix} = \\
 &= K_2 K_1 + K_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1\right)^{-1} \Phi_1 + \psi_2 \left(T_2 - \frac{i}{\lambda} I_2\right)^{-1} \Phi_2 \psi_1 \left(T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1\right)^{-1} \Phi_1 + \\
 &\quad + \psi_2 \left(T_2 - \frac{i}{\lambda} I_2\right)^{-1} \Phi_2 K_1 = K_2 \left[K_1 + \psi_1 \left(T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1\right)^{-1} \Phi_1 \right] + \\
 &\quad + \psi_2 \left(T_2 - \frac{i}{\lambda} I_2\right)^{-1} \Phi_2 \left[K_1 + \psi_1 \left(T_1 - \frac{i}{\lambda} I_1\right)^{-1} \Phi_1 \right] = W_{T_2}(\lambda) W_{T_1}(\lambda).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим сцепление непрерывных открытых систем, ассоциированных с локальными узлами;

$$\begin{cases} i T_1 \frac{dx}{dt} + x(t) = \varphi_1 u_1(t); \\ v_1(t) = u_1(t) + \varphi_1^+ \frac{dx}{dt}; \end{cases} \quad \begin{cases} i T_2 \frac{dy}{dt} + y(t) = \varphi_2 u_2(t); \\ v_2(t) = \varphi_2^+ \frac{dy}{dt} + u_2(t); \end{cases} \\
 v_1(t) = u_2(t).$$

Сцепление таких двух непрерывных систем рассматривается подобно тому, как было в случае, когда непрерывные системы были ассоциированы с метрическими узлами,

$$\begin{cases} x(t) = -i T_1 \frac{dx}{dt} + \varphi_1 u_1(t); \\ y(t) = -i T_2 \frac{dy}{dt} + \varphi_2 \left(u_1(t) + \varphi_1^+ \frac{dx}{dt} \right); \\ v_2(t) = \varphi_2^+ \frac{dy}{dt} + u_1(t) + \varphi_1^+ \frac{dx}{dt}, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x(t) = -iT_1 \frac{dx}{dt} + \varphi_1 u_1(t); \\ y(t) = \varphi_2 \varphi_1^+ \frac{dx}{dt} - iT_2 \frac{dy}{dt} + \varphi_2 u_1(t); \\ v_2 = \varphi_1^+ \frac{dx}{dt} + \varphi_2^+ \frac{dy}{dt} + u_1(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iT_1 & 0 \\ \varphi_2 \varphi_1^+ & -iT_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} u_1(t) = \\ = -i \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2 \varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} u_1(t); \\ v_2(t) = (\varphi_1^+, \varphi_2^+) \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} + u_1(t). \end{cases}$$

Внутренний оператор сцепления $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2 \varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix}$, а каналовый оператор $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$.

Характеристическая функция сцепления, как отмечалось выше (6), равна

$$W_T(\lambda) = I - i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi$$

и выполняется узловое соотношение для сцепления,

$$\begin{aligned} \frac{T - T^*}{i} &= \frac{1}{i} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2 \varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{i} \begin{pmatrix} T_1^* & -i\varphi_1 \varphi_2^+ \\ 0 & T_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_1 - T_1^*}{i} & \varphi_1 \varphi_2^+ \\ \varphi_2 \varphi_1^+ & \frac{T_2 - T_2^*}{i} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_1^+ & \varphi_1 \varphi_2^+ \\ \varphi_2 \varphi_1^+ & \varphi_2 \varphi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} (\varphi_1^+, \varphi_2^+) = \varphi \varphi^+; \end{aligned}$$

$$W_T(\lambda) = I - i(\varphi_1^+, \varphi_2^+) \begin{pmatrix} T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1 & 0 \\ i\varphi_2 \varphi_1^+ & T_2 - \frac{1}{\lambda} I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = I - i(\varphi_1^+, \varphi_2^+) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1\right)^{-1} & 0 \\ -i \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2 \varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1\right)^{-1} & \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = I - \\
& -i(\varphi_1^+, \varphi_2^+) \begin{pmatrix} \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1\right)^{-1} \varphi_1 \\ -i \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2 \varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1\right)^{-1} \varphi_1 + \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2 \end{pmatrix} = \\
& = I - i\varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1\right)^{-1} \varphi_1 - \varphi_2^+ \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2 \varphi_1^+ \left(T_1 - \frac{1}{\lambda} I_1\right)^{-1} \varphi_1 - \\
& - i\varphi_2^+ \left(T_2 - \frac{1}{\lambda} I_2\right)^{-1} \varphi_2 = W_{T_2}(\lambda_2) \cdot W_{T_1}(\lambda). \tag{15}
\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
I - W^+(\lambda)W(\lambda) &= I - \left[I - i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right) \varphi \right] \left[I + i\varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi \right] = \\
&= \varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \left\{ i \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right) - i \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right) - \varphi\varphi^+ \right\} \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi = \\
&= \varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \left\{ \frac{T - T^*}{i} - \varphi\varphi^+ + \frac{i}{\lambda} I - \frac{i}{\lambda} I \right\} \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi = \\
&= \varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} i \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{|\lambda|^2} \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} = \frac{2\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^2} \varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
I - W(\lambda)W^+(\lambda) &= I - \left[I - i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi \right] \left[I + i\varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi \right] = \\
&= i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi - i\varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi - \\
&- \varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi \varphi^+ \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi = \\
&= \varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \left(i \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right) - i \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right) - \varphi\varphi^+ \right) \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi = \\
&= \varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} i \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) I \left(T^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \varphi =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^2} \varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \left(T^* - \frac{1}{\bar{\lambda}} I \right)^{-1} \varphi$$

и характеристическая функция есть двустороннее J -сжатие, если $\operatorname{Im} \lambda > 0$, и двустороннее растяжение, если $\operatorname{Im} \lambda < 0$.

Если открытая система (7) ассоциирована с метрическим узлом, то

$$\begin{aligned} I - W^+(\lambda) \cdot W(\lambda) &= I - \left[K^+ + \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ \right] \left[K + \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right) \Phi \right] = \\ &= I - K^+ K - K^+ \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi - \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ K - \\ &\quad - \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi = \\ &= \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \left[\left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right) \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right) - \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right) T - T^* \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right) - \right. \\ &\quad \left. - \psi^+ \psi \right] \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi = \\ &= \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \left[\frac{1}{|\lambda|^2} - 1 \right] \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi; \\ I - W(\lambda) W^+(\lambda) &= I - \left[K + \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi \right] \left[K^+ + \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ \right] = \\ &= I - K K^+ - K \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ - \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi K^+ - \\ &\quad - \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ = \\ &= \psi \psi^+ - \psi T^* \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ - \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} T \psi^+ - \\ &\quad - \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi \Phi^+ \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ = \\ &= \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \left[\left(T - \frac{i}{\lambda} I \right) \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right) - \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right) T^* - T \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi \Phi^+ \right] \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+ = \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \left[\frac{1}{|\lambda|^2} - 1 \right] \left(T^* + \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \psi^+. \end{aligned}$$

В этом случае характеристическая функция системы является двусторонним J -сжатием внутри единичного круга и двусторонним J -растяжением вне его.

Теперь рассмотрим произвольную непрерывную систему

$$\begin{cases} iT \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \varphi u(t); \\ v(t) = Ku(t) + \psi \frac{dx(t)}{dt}; \\ x(0) = x_0; \end{cases} \quad (16)$$

в предположении, что оператор $K \in [E, F]$ обратим и операторы T, φ, ψ, K не связаны никакими соотношениями. Как и ранее, $u(t) \in E; v(t) \in F; x(t) \in H$. Обозначим $Ku(t) \equiv u_1(t)$, тогда $u_1(t) \in F$. Перепишем уравнения открытой системы в виде

$$\begin{cases} x(t) = -iT \frac{dx(t)}{dt} + \varphi_1 u_1(t); \\ v(t) = \psi \frac{dx(t)}{dt} + u_1(t); \\ x(0) = x_0; \end{cases}$$

где $\varphi K^{-1} = \varphi_1 \in [F, H]$, и в матричном виде (17) запишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iT & \varphi_1 \\ \psi & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ u_1(t) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Воспользуемся способом расширения открытых систем до ассоциированных, предложенным в работе [2].

Включим оператор $T \in [H, H]$ в некоторый локальный операторный узел $\Delta_0 = (T, H, \varphi_0, E_0, J_0)$, где $\frac{T - T^*}{i} = \varphi_0 \varphi_0^+$ и $\varphi_0^+ = J_0 \varphi_0^*$, где $\varphi_0 \in [E_0, H]$. Будем обозначать скалярное произведение в E_0 $[u_1, u_2] = (J_0 u_1, u_2)$; J_0 - инволюция в пространстве E_0 , а круглыми скобками обозначается обычное (дефинитное) скалярное произведение.

Зададим одинаковые пространства входа и выхода расширенной системы

$$\hat{E} = \hat{F} = F \oplus F \oplus F \oplus F \oplus E_0$$

и определим скалярное произведение элементов в $\hat{E}$ и $\hat{F}$ следующим образом.

Если $\hat{u}' = (\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2, \xi'_0)$; $\hat{u}'' = (\xi''_1, \eta''_1, \xi''_2, \eta''_2, \xi''_0)$, то

$$\left[\hat{u}', \hat{u}'' \right]_{\hat{E}} = (\xi'_1, \eta''_1) + (\eta'_1, \xi''_2) + (\xi'_2, \eta''_2) + (\eta'_2, \xi''_2) + [\xi'_0, \xi''_0]_{E_0}.$$

Так определенное скалярное произведение можно записать и в виде

$$\begin{bmatrix} \hat{u}', \hat{u}'' \end{bmatrix}_{\hat{E}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \eta_1' \\ \xi_2' \\ \eta_2' \\ \xi_0' \end{pmatrix}, \hat{\sigma} \begin{pmatrix} \xi_1'' \\ \eta_1'' \\ \xi_2'' \\ \eta_2'' \\ \xi_0'' \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \text{ где } \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Определим действие оператора $\hat{\Phi}$ из $\hat{E}$ в H следующим образом.

Если $\hat{u} = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_0)$, то $\hat{\Phi}\hat{u} = \varphi_1\xi_1 + \psi^*\xi_2 + \varphi_0\xi_0$.

Вычислим действие оператора $\hat{\Phi}^+$,

$$\begin{aligned} (\hat{\Phi}\hat{u}, h) &= (\varphi_1\xi_1 + \psi^*\xi_2 + \varphi_0\xi_0, h) = (\varphi_1\xi_1, h) + (\psi^*\xi_2, h) + (\varphi_0\xi_0, h) = \\ &= (\xi_1, \varphi_1^*h) + (\xi_2, \psi h) + [\xi_0, \varphi_0^*h]_{E_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{\Phi}^+h = (0, \varphi_1^*h, 0, \psi h, \varphi_0^*h)$;

$$\hat{\Phi}\hat{\Phi}^+h = \hat{\Phi}(0, \varphi_1^*h, 0, \psi h, \varphi_0^*h) = \varphi_0\varphi_0^*h = \frac{T - T^*}{i}h,$$

и узловое соотношение выполнено.

Рассмотрим расширенную за счет внешних пространств открытую систему (17),

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iT & \varphi_1 & 0 & \psi^* & 0 & \varphi_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \xi_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -iT \frac{dx(t)}{dt} + \varphi_1\xi_1 + \psi^*\xi_2 + \varphi_0\xi_0 \\ 0 \\ \varphi_1^* \frac{dx(t)}{dt} \\ 0 \\ \psi \frac{dx(t)}{dt} + I\xi_1 \\ \varphi_0^+ \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Если на вход расширенной системы подается сигнал вида $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то на

четвертом канале выхода расширенной системы получаем выход исходной системы

$$x(t) = -iT \frac{dx(t)}{dt} + \varphi_1 u_1(t);$$

$$v_1 = 0;$$

$$v_2 = \varphi_1^* \frac{dx}{dt};$$

$$v_3 = 0;$$

$$v_4 = \psi \frac{dx(t)}{dt} + u_1(t);$$

$$v_5 = \varphi_0^+ \frac{dx}{dt}.$$

Рассмотрим произвольную непрерывную линейную систему

$$\begin{cases} T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \Phi u(t); \\ v(t) = Ku(t) + \psi \frac{dx}{dt}; \\ x(t)|_{t=0} = x_0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(t) = -T \frac{dx(t)}{dt} + \Phi u(t); \\ v(t) = \psi \frac{dx(t)}{dt} + Ku(t). \end{cases} \quad (19)$$

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi \\ \psi & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ u(t) \end{pmatrix},$$

где операторы, действующие в соответствующих гильбертовых пространствах $T \in [H, H]$, $\Phi \in [E, H]$, $\psi \in [H, F]$ и $K \in [E, F]$ не связаны никакими соотношениями. Расширим открытую систему (19) за счет внешних пространств до ассоциированной с метрическим операторным узлом.

Введем оператор

$$B = \begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi & K & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

отображающий пространство $H \oplus E \oplus F$ в себя, и включим его в метрический операторный узел

$$\Delta_B = \left(J_{E_B}, ([H \oplus E \oplus F] \oplus E_B), \begin{pmatrix} B & N \\ M & Q \end{pmatrix}, ([H \oplus E \oplus F] \oplus F_B), J_{F_B} \right),$$

где J_{E_B} и J_{F_B} два оператора инволюции, действующие в соответствующих пространствах $J_{E_B} \in [E_B, E_B]$ и $J_{F_B} \in [F_B, F_B]$.

Обозначим $E \oplus F \oplus E_B = E'$ и $E \oplus F \oplus F_B = F'$ и определим метрики в пространствах E' и F' с помощью операторов

$$\sigma_{E'} = \begin{pmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_F & 0 \\ 0 & 0 & J_{E_B} \end{pmatrix} \text{ и } \sigma_{F'} = \begin{pmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_F & 0 \\ 0 & 0 & J_{F_B} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор, задающий расширенную систему, будет

$$\begin{pmatrix} B & N \\ M & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где операторы $N_1 \in [E_B, H]$, $N_2 \in [E_B, E]$, $N_3 \in [E_B, F]$ и $M_1 \in [H, F_B]$, $M_2 \in [E, F_B]$, $M_3 \in [F, F_B]$ и $Q \in [E_B, F_B]$ появляются в результате включения оператора B (20) в метрический операторный узел.

Теперь оператор, задающий расширенную систему (21),

$$\begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix}$$

удовлетворяет всем узловым соотношениям и система имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x(t) = -T \frac{dx}{dt} + \Phi u_1(t) + N_1 u_3(t); \\ v_1(t) = N_2 u_3(t); \\ v_2(t) = \psi \frac{dx}{dt} + K u_1(t) + N_3 u_3(t); \\ v_3(t) = M_1 \frac{dx}{dt} + M_2 u_1(t) + M_3 u_2(t) + Q u_3(t); \end{cases}$$

и если на вход расширенной системы подается сигнал специального вида $(u(t), 0, 0)$, то

$$\begin{cases} x(t) = -T \frac{dx}{dt} + \Phi u(t); \\ v_1(t) = 0; \\ v_2(t) = \psi \frac{dx}{dt} + Ku(t); \\ v_3(t) = M_1 \frac{dx}{dt} + M_2 u(t). \end{cases}$$

Таким образом, на втором канале выхода расширенной системы будет выход исходной системы.

Выводы. Рассмотренный в работе метод расширения линейных систем до ассоциированных с операторными узлами любого типа позволяет проводить дальнейший анализ таких систем методами теории операторных узлов. Например, при наличии цепочки инвариантных подпространств у оператора T исходную систему, предварительно расширив до ассоциированной, можно разложить на простейшие, тогда внутренние состояния простейших систем будут одномерные, а из таких систем при помощи операции сцепления конструируется исходная система. Предложенный в статье подход может быть использован для построения новых классов нестационарных случайных процессов и последовательностей, когда входной сигнал равен нулю (эволюционно представимые случайные процессы и последовательности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы, - М.: Наука, 1966. – 298с.
2. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, - Харьков: Изд. Харьк ун-та, 1971. – 160с.
3. Золотарев В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов, - Харьков: ХНУ, 2003. – 342с.