ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЯ

$$x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^\mu y = 0.$$

В. П. Алексѣевскаго.

---

1. Предметъ этой замѣтки составляетъ рѣшеніе слѣдующей задачи:

Найдти общій интегралъ уравненія:

$$x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^\mu y = 0, \qquad (1)$$

въ которомъ A, B, C и μ какія угодно постоянныя, и показать въ какихъ случаяхъ интегралъ этого уравненія содержитъ конечное число членовъ.

Если $C = 0$, или $\mu = -1$, ур. (1) принимаетъ весьма извѣстную форму, интегралъ которой легко находится и состоитъ изъ конечнаго числа членовъ, поэтому въ послѣдующемъ мы будемъ принимать C отличнымъ отъ нуля, а μ отличнымъ отъ -1.

2. Уравненіе (1) можетъ быть преобразовано въ другое того же вида, въ которомъ одно изъ постоянныхъ A, B, C и μ имѣетъ данное значеніе. Дѣйствительно, сдѣлавъ замѣну независимаго перемѣннаго, именно полагая

$$x = z^p$$

получаемъ

$$z^2y''' + A_1zy'' + B_1y' + C_1z^{\mu_1}y = 0, \qquad (2)$$

где

$$A_1 = Ap - 3(p-1),\ \ B_1 = Bp^2 - Ap(p-1) + (p-1)(2p-1)$$

$$C_1 = Cp^3,\ \ \mu_1 = \mu p + p - 1.$$

Изъ этихъ формулъ и видно, что всегда возможно выбрать p такъ, чтобы одно изъ постоянныхъ имѣло данное значеніе. Пусть же μ_1 есть данное число, тогда

$$x = z^{\frac{\mu_1+1}{\mu+1}} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{A_1(\mu+1) - 3(\mu-\mu_1)}{\mu_1+1}, \\ B &= \frac{B_1(\mu+1)^2 - A_1(\mu+1)(\mu-\mu_1) + (\mu-\mu_1)(2\mu-\mu_1+1)}{(\mu_1+1)^2} \\ C &= C_1\frac{(\mu+1)^3}{(\mu_1+1)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда слѣдуетъ, что для рѣшенія нашей задачи достаточно найдти интегралъ уравненія вида (1), въ которомъ μ есть произвольно выбранное число μ_1.

3. Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, мы тотчасъ получаемъ простѣйшее уравненіе вида (1), интегралъ котораго выражается конечнымъ числомъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ уравненіи (2)

$$A_1 = 0,\ B_1 = 0,\ \mu_1 = 2,$$

и для удобства означимъ корни $-\sqrt[3]{C}$ чрезъ ν_1, ν_2, ν_3, тогда легко замѣтить, что интегралъ этого уравненія будетъ:

$$y = K_1 e^{\frac{3\nu_1}{\mu+1}z} + K_2 e^{\frac{3\nu_2}{\mu+1}z} + K_3 e^{\frac{3\nu_3}{\mu+1}z}$$

На основаніи же формулъ (3) и (4) уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$x^2y''' - (\mu-2)xy'' + \frac{(\mu-2)(2\mu-1)}{9}y' + Cx^\mu y = 0 \qquad (5)$$

а интегралъ его:

$$y = K_1 e^{\frac{3\nu_1}{\mu+1} x^{\frac{\mu+1}{3}}} + K_2 e^{\frac{3\nu_2}{\mu+1} x^{\frac{\mu+1}{3}}} + K_3 e^{\frac{3\nu_3}{\mu+1} x^{\frac{\mu+1}{3}}} \qquad (6)$$

4. Уравненіе (1) можетъ быть преобразовано въ другое уравненіе того-же вида, гдѣ постоянныя A и B будутъ иныя, а C и μ тѣ-же. Дѣйствительно, полагая въ (1)

$$y = x^q u$$

находимъ:

$$x^{q+2}u''' + (3q + A)x^{q+1}u'' + [3q(q-1) + 2Aq + B]x^q u' +$$
$$+ [q(q-1)(q-2) + Aq(q-1) + Bq]x^{q-1}u + Cx^{\mu+q}u = 0.$$

Это уравненіе будетъ того-же вида какъ (1), если

$$q(q-1)(q-2) + Aq(q-1) + Bq = 0, \qquad (7)$$

именно

$$x^2u''' + A_2xu'' + B_2u' + Cx^\mu u = 0, \qquad (8)$$

гдѣ

$$A_2 = 3q + A, \qquad B_2 = 3q(q-1) + 2Aq + B. \qquad (9)$$

Уравненіе (7) имѣетъ три корня; при $q = 0$, уравненіе (8) тождественно съ (1), если остальные 2 корня уравненія (7) различны, то уравненіе (8) имѣетъ два вида, если-же эти корни равны, то уравненіе (8) имѣетъ единственный видъ.

5. На основаніи сказаннаго въ § 2, для рѣшенія нашей задачи, достаточно найдти случаи интегрируемости уравненія:

$$z^2y''' + azy'' + by' + cy = 0. \qquad (10)$$

Дифференцируя это уравненіе n разъ и полагая

$$y_n = D^n y, \tag{11}$$

получаемъ

$$z^2 y'''_n + a_n z y''_n + b_n y'_n + c y_n = 0, \tag{12}$$

гдѣ

$$a_n = 2n + a, \qquad b_n = n(n-1) + na + b. \tag{13}$$

И такъ, если извѣстенъ интегралъ одного изъ уравненій (10) или (12), то легко вычислить и интегралъ другаго. Но полагая въ формулѣ (5) $\mu = 0$, мы видимъ, что уравненіе (5) принимаетъ форму уравненія (10) или (12), и такъ какъ интегралъ уравненія (5) извѣстенъ при всякомъ значеніи μ, то заключаемъ, что уравненіе (10) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если

$$a = 2, \qquad b = \frac{2}{9} \tag{14}$$

и интегралъ его по формулѣ (6) будетъ:

$$y_0 = K_1 e^{3\nu_1 z^{1/3}} + K_2 e^{3\nu_2 z^{1/3}} + K_3 e^{3\nu_3 z^{1/3}} \tag{15}$$

Слѣдовательно, согласно съ формулой (11), интегралъ уравненія (12) будетъ:

$$y_n = D^n y_0,$$

если только коэффиціенты его будутъ:

$$a_n = 2n + 2\,, \quad b_n = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9}\,.$$

Точно также уравненіе (12) интегрируется, если

$$a_n = 2\,, \quad b_n = \frac{2}{9}\,,$$

слѣдовательно уравненіе (10) будетъ имѣть интеграломъ

$$y = D^{-n} y_0 ,$$

если по (13)

$$a = -2n + 2 \; , \quad b = \frac{(3n-1)(3n-2)}{9} .$$

Легко замѣтить, что второй случай выводится изъ перваго чрезъ замѣну n на $-n$. Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что уравненіе

$$z^2 y''' + 2(n+1) z y'' + \frac{(3n+1)(3n+2)}{9} y' + cy = 0 \tag{16}$$

интегрируется, если n цѣлое положительное или отрицательное число, интегралъ его будетъ

$$y = D^n y_0 , \tag{17}$$

гдѣ y_0 выражается формулой (15).

6. При помощи формулъ (7) и (9) уравненіе (16) преобразуется въ два слѣдующихъ:

$$z^2 u''' - (n-3) z u'' - \frac{2}{9}(3n-4) u' + cu = 0 \tag{18}$$

$$z^2 v''' - (n-4) z v'' - \frac{4}{9}(3n-5) v' + cv = 0, \tag{19}$$

интегралы которыхъ соотвѣтственно выражаются:

$$u = z^{n-1/3} D^n y_0 \quad (20) , \qquad v = z^{n-2/3} D^n y_0 . \quad (21)$$

А такъ какъ уравненія (18) и (19) того-же вида, какъ уравненіе (10), то, дифференцируя ихъ m разъ, находимъ два уравненія:

$$z^2 u'''_m + (2m - n + 3) z u''_m +$$

$$+ \frac{(3m+2)(3m-3n+4)}{9} u'_m + c u_m = 0 \qquad (22)$$

$$z^2 v'''_m + (2m - n + 4) z v''_m +$$

$$+ \frac{(3m+4)(3m-3n+5)}{9} v'_m + c v_m = 0, \qquad (23)$$

интегралы которыхъ будутъ:

$$u_m = D^m z^{n-{}^1\!/_3} D^n y_0 \quad (24)\ , \quad v_m = D^m z^{n-{}^2\!/_3} D^n y_0 \quad (25)$$

Уравненія (22) и (23) различны только по виду; ихъ легко представить однимъ уравненіемъ; для этого полагаемъ въ (22)

$$m - n = p_2 - 2 \quad , \quad m = p_1 - 1 ,$$

а въ (23) $\quad m - n = p_1 - 2 \quad , \quad m = p_2 - 2,$

и называя перемѣнное зависимое чрезъ y, получаемъ:

$$z^2 y''' + (p_1 + p_2) z y'' + \frac{(3p_1-1)(3p_2-2)}{9} y' + c y = 0. \qquad (26)$$

Интегралъ же этого уравненія на основаніи формулъ (24) и (25) представится въ двухъ видахъ:

$$y = D^{p_1-1} z^{\frac{3(p_1-p_2)+2}{3}} D^{p_1-p_2+1} y_0 \qquad (27)$$

$$y = D^{p_2-2} z^{-\frac{3(p_1-p_2)+2}{3}} D^{-(p_1-p_2)} y_0 . \qquad (28)$$

Такъ какъ въ коэффиціенты уравненія (26) входятъ два произвольныхъ числа, то заключаемъ, что это уравненіе и есть общее уравненіе вида (10), интегралъ котораго будетъ выражаться конечнымъ числомъ членовъ, если p_1 и p_2 — цѣлыя числа.

7. До сихъ поръ мы принимали n и m, а слѣдовательно p_1 и p_2 — цѣлыми числами, но легко видѣть, что это ограниченіе совершенно излишне. Мы вывели уравненіе (26) изъ уравненія (10) рядомъ дифференцированій и подстановокъ; при дифференцированіи мы пользовались формулой Лейбница, а эта послѣдняя, какъ извѣстно, справедлива, каковъ бы ни былъ указатель производной, цѣлый или дробный, положительный или отрицательный, наконецъ, вещественный или мнимый. Подстановки тоже не требовали, чтобы постоянныя, входящія въ нихъ и въ уравненіе, были цѣлыми, слѣдовательно уравненіе (26) есть общее, въ немъ числа p_1 и p_2 могутъ быть какія угодно, и, значитъ, интегралъ всякаго уравненія вида (26) или (10) можетъ быть представленъ формулами (27) или (28).

8. Зная интегралъ уравненія (10), мы найдемъ и интегралъ всякаго уравненія (1) при помощи формулъ (3) и (4), положивъ въ нихъ предварительно $\mu_1 = 0$. Теперь выведемъ нѣкоторые частные виды уравненія (1). Для этого выразимъ коэффиціенты уравненія (1) въ коэффиціентахъ уравненія (26); по формуламъ (4) находимъ:

$$A = (p_1 + p_2)(\mu + 1) - 3\mu$$

$$B = \frac{(3p_1-1)(3p_2-2)}{9}(\mu+1)^2 - (p_1+p_2)(\mu+1)\mu + \mu(2\mu+1) \quad \text{(a)}$$

$$C = c(\mu + 1)^3.$$

Пусть $A = 0$, тогда ур. (1) приметъ слѣдующую форму:

$$x^2y''' + \frac{(p_1-2p_2+2)(p_2-2p_1+1)}{(p_1+p_2-3)^2} y' - \frac{27c}{(p_1+p_2-3)^3} x^{-\frac{p_1+p_2}{p_1+p_2-3}} y = 0. \quad (29)$$

Въ этомъ уравненіи коэффиціентъ при y' можетъ быть нулемъ въ двухъ случаяхъ:

$$p_1 = 2p_2 - 2 \quad , \quad p_2 = 2p_1 - 1.$$

При такихъ значеніяхъ p_1 и p_2, ур. (29) принимаетъ два слѣдующихъ вида:

$$y''' = \frac{27c}{(3p_2-5)^3} x^{-3 \cdot \frac{3p_2-4}{3p_2-5}} y,$$

$$y''' = \frac{27c}{(3p_1-4)^3} x^{-3 \cdot \frac{3(p_1-1)}{3(p_1-1)-1}} y,$$

или, полагая въ 1-омъ $p_2 = i + 2$, а во 2-омъ $p_1 - 1 = -k$,

$$y''' = \frac{27c}{(3i+1)^3} x^{-\frac{3(3i+2)}{3i+1}} y \qquad (30)$$

$$y''' = -\frac{27c}{(3k+1)^3} x^{-\frac{3 \cdot 3k}{3k+1}} y. \qquad (31)$$

Интегралы этихъ уравненій вычислятся по формуламъ (27) и (28). Интегралъ уравненія (30):

$$y = D^{2i+1} z^{\frac{3i+2}{3}} D^{i+1} y_0 \text{ или } y = D^{i+1} z^{-\frac{3i+2}{3}} D^{-i} y_0 \qquad (32)$$

гдѣ по совершеніи дѣйствій надо подставить:

$$z = x^{-\frac{3}{3i+1}}.$$

Интегралъ уравненія (31) будетъ:

$$y = D^{-k}\, z^{\frac{3k+2}{3}}\, D^{k+1}\, y_0, \text{ или } y = D^{-(2k+1)}\, z^{-\frac{3k+2}{3}}\, D^{-k}\, y_0 \qquad (33)$$

гдѣ

$$z = x^{\frac{3}{3k+1}}.$$

Въ равенствахъ (30) . . . (33) i и k суть числа какія угодно.

Теперь положимъ въ формулахъ (a) $\mu = 2$, тогда уравненія (1) будетъ:

$$x^2 y''' + 3(p_1 + p_2 - 2)\, x y'' +$$
$$+ (3p_1 - 3)(3p_2 - 4)\, y' + 27 c x^2 y = 0 \qquad (34)$$

и легко выразить интегралъ этого уравненія при помощи предыдущихъ формулъ.

9. На основаніи сказаннаго въ § 2 можно взять ур. (34) и при помощи его вывести случаи интегрируемости ур. (1), но только тѣ случаи, въ которыхъ интегралъ его выражается при помощи производныхъ съ цѣлыми указателями. Уравненіе (34) можно написать такъ:

$$z^2 y''' + \alpha z y'' + \beta y' + \gamma z^2 y = 0. \qquad (35)$$

Это уравненіе, будучи подвергнуто тѣмъ преобразованіямъ, которыя указаны Эйлеромъ и акад. Импенецкимъ*, переходитъ въ новое уравненіе того-же вида, въ которомъ коэффиціенты α и β иные, а γ — тотъ же. Дѣйствительно, интегрируя это уравненіе и за-тѣмъ дифференцируя, находимъ:

$$[\, z^2 y'' + (\alpha - 2) z y' + (\beta - \alpha + 2)\,]' + \gamma x^2 y = 0 \qquad (36)$$

и полагая

* См. академика *Имшенецкаго,* «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера, для изслѣдованія всѣхъ случаевъ интегрируемости одного частнаго вида линейныхъ уравненій втораго порядка». Спб. 1882.

$$y_1 = z^2 y'' + (\alpha - 2) z y' + (\beta - \alpha + 2) \qquad (37)$$

приведемъ его къ такому виду:

$$\frac{1}{\gamma} x^{-2} y_1 + y = 0. \qquad (38)$$

Дифференцируя послѣднее два раза и за-тѣмъ исключая y изъ полученныхъ уравненій и (37) и (38), получаемъ:

$$z^2 y'''_1 + (\alpha - 6) z y''_1 + (\beta - 3\alpha + 3.4) y'_1 + \gamma z^2 y_1 = 0.$$

Повторяя эту операцію n разъ, находимъ:

$$z^2 y'''_n + \alpha_n z y''_n + \beta_n y'_n + \gamma z^2 y_n = 0, \qquad (39)$$

гдѣ $\qquad \alpha_n = \alpha - 6n \;,\; \beta_n = \beta - 3n\alpha + 3n(3n+1). \qquad (40)$

Очевидно, что здѣсь n можетъ быть и отрицательнымъ.

На основаніи этого свойства и примѣняя подстановку, указанную въ § 4, мы и найдемъ всѣ случаи интегрируемости уравненія (35); ходъ разсужденій останется прежній; разница же будетъ только въ томъ, что тамъ, гдѣ въ предыдущемъ мы дифференцировали, здѣсь надо дѣлать преобразованіе по формуламъ (40).

10. Можно еще предложить пріемъ, отличный отъ предыдущихъ и интересный въ томъ отношеніи, что интеграція ур. (35) сводится на интегрированіе уравненія 2-го порядка, опредѣляющаго функціи Бесселя.

Для упрощенія въ (35) сдѣлаемъ

$$z = -\frac{x}{\sqrt[3]{\gamma}}, \qquad (41)$$

тогда уравненіе (35) обратится въ такое

$$x^2 y''' + \alpha x y'' + \beta y' = x^2 y. \qquad (42)$$

Для разысканія случаевъ интегрируемости этого уравненія, найдемъ сначала интегралъ уравненія этого при $\beta=0$, т. е. уравненія

$$xy''' + \alpha y'' = xy. \tag{43}$$

Полагая здѣсь

$$y = e^x u \tag{44}$$

находимъ:

$$xu''' + (3x + \alpha)u'' + (3x + 2\alpha)u' + \alpha u = 0. \tag{45}$$

Дифференцируя это ур. k разъ, получаемъ:

$$xD^{k+3}u + (3x + \alpha + k)D^{k+2}u +$$
$$+ [3x + 2\alpha + 3k]D^{k+1}u + (\alpha + 3k)D^k u = 0.$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$\alpha + 3k = 0$$

$$D^{k+1}u = e^{\lambda x}.\eta$$

находимъ:

$$x\eta'' + [-2k + (2\lambda + 3)x]\eta' +$$
$$+ [-(2\lambda + 3)k + (\lambda^2 + 3\lambda + 3)x]\eta = 0.$$

Выбирая λ такъ, чтобы

$$2\lambda + 3 = 0,$$

получаемъ

$$x\eta'' - 2k\eta' + \frac{3}{4}x\eta = 0. \tag{46}$$

Такимъ образомъ при $\alpha = -3k$, уравненіе (43) сводится на уравненіе (46), которое и служитъ опредѣленіемъ функцій Бесселя. Интегралъ (43) будетъ:

$$y = e^x D^{-(k+1)}\left[e^{-\frac{3}{2}x}\eta\right]. \tag{47}$$

Если k цѣлое, уравненіе (46) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ; слѣдовательно, при этомъ же условіи уравненіе (43) тоже интегрируется конечнымъ числомъ членовъ. Если-же, умноживъ уравненіе (43) на x, мы подвергнемъ его преобразованіямъ по способу Эйлера и Имшенецкаго и повторимъ эту операцію n разъ, то по формуламъ (40) получимъ слѣдующее уравненіе

$$x^2 y'''_n - 3(2n+k) x y''_n + 3n(3n+3k+1) y'_n = x^2 y_n. \quad (48)$$

Ясно, что послѣ замѣны x чрезъ z по формулѣ (41) можно считать это уравненіе тождественнымъ съ (34), такъ какъ различіе между ними только въ обозначеніяхъ.

Пользуясь же формулой (38), интегралъ уравненія (48) будетъ при n положительномъ:

$$y_n = \Big[D^{-1} x^2 \Big]^n y, \quad (49)$$

при n отрицательномъ

$$y_{-n} = \Big[x^{-2} D \Big]^n y. \quad (50)$$

Символы здѣсь означаютъ повтореніе n разъ операціи, указанной въ скобкахъ, надъ y-омъ, а y опредѣляется формулой (47). Изъ предыдущаго ясно, что первые два пріема можно приложить къ уравненіямъ болѣе высокихъ порядковъ, но аналогичныхъ съ (1), и такимъ образомъ разыскать случаи интегрируемости этихъ уравненій, а также ихъ интегралы.
