УДК 517. 982

М. В. ЛЕЙБОВ

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА VMO

Рассмотрим пространства BMO и VMO функций, заданных на отрезке $[0,1]$ или окружности S длины 1 (S — обозначим отрезок $[0,1]$ с отождествленными концами, и соответственно будем использовать аддитивные обозначения, $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве BMO). Пусть $f \in \mathrm{BMO}$, I — подынтервал. Положим для $h \in (0,1/2)$ $S_h = S$ в случае $\mathrm{BMO}(S)$, и $S_h = [h, 1-h]$ в случае $\mathrm{BMO}\,[0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f;\ f_*(I) = \frac{1}{|I|}\int\limits_I |f - f_I|;\ f_h(x) = f_*[x-h,\ x+h];$$

$$f^*(h) = \sup_{x \in S_h} f_h(x);\ f_*(\varepsilon) = \sup_{0<h\leqslant\varepsilon} f^*(h).$$

Тогда $\|f\|_* = \sup\limits_h f^*(h)$. Известно, что $f \in \mathrm{VMO}$ тогда и только тогда, когда $f_*(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0)$ [1], или, что то же самое, $f^*(h) \to 0\ (h \to 0)$.

Лемма 1. *Если $f \in \mathrm{VMO}$, то существует интервал I такой, что $\|f\|_* = f_*(I)$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для функции $f \in L_1$ функции $f_h(x)$ (при фиксированном $h > 0$) и $f^*(h)$ при $h \in (0,\ 1/2)$ непрерывны. Положим $f^*(0) = 0$. Тогда для $f \in \mathrm{VMO}$ $f^*(h)$ непрерывна на $[0,\ 1/2]$ и, следовательно, достигает максимума в некоторой точке $h' > 0$.

Функция $f_{h'}(x)$ достигает максимума в некоторой точке $x' \in S_{h'}$. Тогда $\|f\|_* = \sup\limits_h f^*(h) = f^*(h') = \sup\limits_{x \in S_{h'}} f_{h'}(x) = f_{h'}(x') = f_*(I)$ для $I = [x'-h',\ x'+h']$, что и требовалось доказать.

Пусть $f \in BMO$. Положим $\Omega(f) = \{\varepsilon \mid f_*(I) \leqslant \varepsilon \| f \|_*$ для любого интервала I, $|I| \geqslant \varepsilon\}$. Заметим, что если $\varepsilon' \in \Omega(f)$ и $\varepsilon'' > \varepsilon'$, то $\varepsilon'' \in \Omega(f)$. Действительно, в этом случае для любого интервала I, $|I| \geqslant \varepsilon''$, выполняется $|I| > \varepsilon'$, $f_*(I) \leqslant \varepsilon' \| f \|_* < \varepsilon'' \| f \|_*$. Далее, $\Omega(f)$ непусто, так как $\varepsilon = 1$ всегда принадлежит $\Omega(f)$. Обозначим $\omega(f) = \inf\{\varepsilon \in \Omega(f)\}$. Если $F \subset BMO$, положим $\omega(F) = \inf\{\omega(f) \mid f \in \in F\}$.

Лемма 2. *Пусть* $F = \{f_i\}_1^\infty \subset VMO$ — *нормированная базисная последовательность*, $\omega(F) = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует подпоследовательность* $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$, $(1+\varepsilon)$ — *эквивалентная естественному базису пространства* c_0.

Доказательство. Положим $\varepsilon_0 = 2^{-1}\varepsilon$. Выберем i_1 так, что $\omega(f_{i_1}) < \varepsilon_0$. Рассмотрим $\varepsilon_1 \leqslant 2^{-2}\varepsilon$ такое, что $(f_{i_1})_*(\varepsilon_1) < 2^{-1}\varepsilon_1$. Выберем $i_2 > i_1$ так, что $\omega(f_{i_2}) < \varepsilon_1$. Рассмотрим $\varepsilon_2 \leqslant 2^{-3}\varepsilon$ такое, что $(f_{i_2})_*(\varepsilon_2) < 2^{-2}\varepsilon$. Выберем $i_3 > i_2$ так, что $\omega(f_{i_3}) < \varepsilon_2$, и т. д. Если последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{f_{i_j}\}_{j=1}^{m}$ уже построены, рассмотрим $\varepsilon_m \leqslant 2^{-m-1}\varepsilon$ такое, что $(f_{i_m})_*(\varepsilon_m) < 2^{-m}\varepsilon$ и выберем $i_{m+1} > i_m$ так, что $\omega(f_{i_{m+1}}) < \varepsilon_m$. Таким образом, построены последовательности $\{\varepsilon_j\}_0^\infty$, $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$, обладающие следующими свойствами: $\varepsilon_j < \min(\varepsilon_{j-1}, 2^{-j}\varepsilon)$ и если $|I| \bar{\in} (\varepsilon_j, \varepsilon_{j-1}]$, то $(f_{i_j})_*(I) < 2^{-j}\varepsilon$. Обозначим $N(I)$ номер n такой, что $|I| \in (\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}]$. Тогда последнее свойство переформулируется так: если $n \neq N(I)$, то $(f_{i_n})_*(I) < 2^{-n}\varepsilon$. Покажем теперь, что $\{f_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ — требуемая последовательность, т. е. что для любых $m > 0$, $\{\alpha_j\}_1^m \subset R$

$$(1-\varepsilon)\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j} \right\|_* \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|.$$

Пусть $f = \sum\limits_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}$, I - интервал. Оценим $f_*(I)$ сверху.

Если $N(I) > m$, то

$$f_*(I) = \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}\right)_*(I) \leqslant \sum_{j=1}^m |\alpha_j| (f_{i_j})_*(I) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|) \left(\sum_{j=1}^m (f_{i_j})_*(I)\right) \leqslant (\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|) \left(\sum_{j=1}^m 2^{-j-1}\varepsilon\right) \leqslant \varepsilon \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|.$$

Если $N(I) \leqslant m$, то, аналогично,

$$f_*(I) \leqslant (\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|)\left((f_{i_{N(I)}})_*(I) + \sum_{j \neq N(I)} (f_{i_j})_*(I)\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|)\left(\| f_{i_{N(I)}} \|_* + \sum_{j \neq N(I)} 2^{-j}\varepsilon \| f_{i_j} \|_*\right) \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|.$$

Итак, $\| f \|_* \leqslant (1+\varepsilon)\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|$. Оценим $\| f \|_*$ снизу. Пусть n — номер такой, что $|\alpha_n| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\alpha_j|$, I — интервал, для которого

$\|f_{i_n}\|_* = (f_{i_n})_*(I)$. Заметим, что в этом случае $N(I) = n$ и, следовательно, $(f_{i_j})_*(I) < 2^{-j}\varepsilon$ для $j \neq n$.
Тогда

$$\|f\|_* \geqslant f_*(I) = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{i_j})_*(I) \geqslant (\alpha_n f_{i_n})_*(I) -$$
$$-(\sum_{j\neq n} \alpha_j f_{i_j})_*(I) \geqslant |\alpha_n| \cdot \|f_{i_n}\|_* - \sum_{j\neq n} |\alpha_j| (f_{i_j})_*(I) \geqslant$$
$$\geqslant |\alpha_n| - (\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\alpha_j|) \cdot (\sum_{j\neq n} (f_{i_j})_*(I)) \geqslant (\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\alpha_j|) \times$$
$$\times (1 - \sum_{j=1}^{m} 2^{-j}\varepsilon) \geqslant (1-\varepsilon) \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\alpha_j|.$$

Итак $\|f\|_* \geqslant (1-\varepsilon)\max|\alpha_j|$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $F = \{f_n\}_1^\infty \subset \mathrm{VMO}$, $\|f\|_* = 1$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\omega(F) = 0$. *Тогда* F *содержит базисную последовательность.*

Доказательство. Будем сразу считать, что $\omega(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда $\|f_n\|_1 = (f_n)_*[0, 1] \leqslant \omega(f_n) \cdot \|f_n\|_* = \omega(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве L_1. Следовательно, $f_n \to 0$ слабо* в BMO или, что то же самое (поскольку $\mathrm{VMO}^{**} = \mathrm{BMO}$), $f_n \to 0$ слабо в VMO. Тогда ([2], теорема 1.17) $\{f_n\}_1^\infty$ содержит базисную подпоследовательность, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть* $\omega(F) = 0$, $F \subset \mathrm{VMO}$ — *замкнутое подпространство. Тогда* F *содержит подпространство,* ε — *изометричное пространству* c_0.

Обозначим U естественное вложение пространства BMO в пространство L_1.

Лемма 4. *Пусть* $F \subset \mathrm{BMO}$ — *замкнутое подпространство,* $\omega(F) > 0$. *Тогда* $U|F$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Условие $\omega(F) > 0$ означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $f \in F$ существует интервал I, $|I| \geqslant \varepsilon$, для которого $f_*(I) \geqslant \varepsilon\|f\|_*$. Тогда

$$f_*(I) = \frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I| \leqslant \frac{1}{|I|}\int_I |f| + |f_I| \leqslant \frac{2}{|I|}\int_I |f|$$

и

$$\|f\|_1 \geqslant \int_I |f| \geqslant \frac{|I|}{2} f_*(I) > \frac{\varepsilon^2}{2}\|f\|_*$$

для любой функции $f \in F$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $F \subset \mathrm{VMO}$ — *замкнутое подпространство. Тогда либо* F *дополняемо в* BMO *и изоморфно* l_2, *либо для любого* $\varepsilon > 0$ *содержит подпространство, дополняемое в* VMO *и изометричное* c_0.

Доказательство. Если $\omega(F) > 0$, то, по лемме 4, $U|F$ — изоморфизм и, следовательно, F изоморфно l_2 и дополняемо в BMO. Если $\omega(F) = 0$, то по следствию 1 F для любого $\varepsilon > 0$ содержит подпространство G, ε — изометричное c_0. Дополняемость G в VMO следует из теоремы Собчика [3]. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $F \subset$ VMO — замкнутое подпространство. Тогда следующие свойства F эквивалентны*:

(1) *F не содержит подпространств, изоморфных c_0*;
(2) *F изоморфно сопряженному пространству*;
(3) *F рефлексивно*;
(4) *F изоморфно l_2*;
(5) *F дополняемо в* BMO;
(6) *$U|F$ — изоморфизм.*

Список литературы: 1. *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation. — Trans. of the Amer. Math. Soc., 1975, 207, p. 391—405. 2. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха. 4.1. — Успехи мат. наук, 1970, **25**, № 3, с. 113—174 3. *Sobszyk A.* Projections of the space m on its subspace c_0. — Bull. of the Amer. Math. cal Soc., 1941, **47**, p. 938—947.

Поступила в редколлегию 18.10.84.