ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

О ЖЕСТКОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А. В. Погорелов

§ 1. Постановка вопроса

Говорят, что на фигуре F задано векторное поле v, если каждой точке x фигуры сопоставлен некоторый вектор $v(X)$. Векторное поле v называется тривиальным, если оно допускает представление вида:

$$v(X) = b + a \times r(X),$$

где $r(X)$ — вектор точки x, а b и a — векторы, не зависящие от x. Тривиальное векторное поле допускает простую механическую интерпретацию. Оно есть поле скоростей движения фигуры F как твердого тела.

Многогранник P называется **нежестким**, если на нем можно задать векторное поле v, тривиальное на каждой грани многогранника, но не тривиальное на всем многограннике. Если же любое векторное поле, тривиальное на каждой грани многогранника, будет также тривиальным на всем многограннике, то такой многогранник называется жестким.

Наглядное представление о жесткости многогранника можно получить следующим образом. Пусть многогранник P деформируется, переходя к моменту t в многогранник $P(t)$, но так, что при любом t граням P соответствуют грани $P(t)$. Такую деформацию многогранника P будем называть регулярной. Пусть x и y две произвольные точки многогранника P, $X(t)$ и $y(t)$ — соответствующие им точки на $P(t)$ и $\rho(x, y, t)$ — расстояние между ними. Говорят, что при деформации многогранника P его грани стационарны, если $\frac{d}{dt}\rho(X, y, t) = 0$ при $t = 0$ для каждой пары точек X и y, принадлежащих одной грани. Если же это имеет место для любых двух точек многогранника, то стационарен весь многогранник.

Теперь можно определить понятие жесткости многогранника следующим образом. Многогранник P называется нежестким, если существует регулярная деформация этого многогранника, при которой его грани стационарны, но сам многогранник не стационарен. Если же стационарность граней при любой регулярной деформации влечет за собой стационарность всего многогранника, то многогранник называется жестким.

Нетрудно видеть, что оба данные определения понятия жесткости многогранника эквивалентны. Для этого достаточно заметить, что регулярной деформации многогранника P, при которой грани стационарны, соответствует векторное поле — поле скоростей деформации, тривиальное на каждой грани многогранника. Это векторное поле тривиально на всем многограннике тогда и только тогда, когда при деформации, которой это поле соответствует, стационарен весь многогранник.

Обратно, если задано векторное поле v на многограннике, тривиальное на каждой его грани, то существует регулярная деформация многогранника P, при которой грани многогранника стационарны, а весь многогранник стационарен тогда и только тогда, когда поле v тривиально на всем многограннике. Такая деформация получается, например, когда точка x многогранника P к моменту t смещается на вектор $v(X)t$.

Первый результат, касающийся жесткости многогранников, был получен Коши в 1813 г. [1]. Коши доказал, что все замкнутые выпуклые многогранники являются жесткими. Другое доказательство этой теоремы было дано Деном [2].

Полное исследование вопроса о жесткости выпуклых многогранников дано А. Д. Александровым в его книге „Выпуклые многогранники“[3]. В ней рассматривается вопрос о жесткости не только замкнутых, но также бесконечных выпуклых многогранников.

Интерес, который в последнее время был проявлен к вопросу жесткости выпуклых многогранников, объясняется тем, что изучение жесткости многогранников находится в тесной связи с одним из основных вопросов теории общих выпуклых поверхностей — реализацией абстрактно заданной выпуклой метрики выпуклой поверхностью.

В настоящей заметке мы рассмотрим вопрос о жесткости основных типов выпуклых многогранников новым методом.

Рассматривая вопрос о жесткости многогранников, целесообразно с точки зрения приложений результатов расширить понятие грани многогранника следующим образом. Разобьем геометрические грани многогранника непересекающимися (внутри грани) диагоналями на многоугольники. Эти многоугольники будем называть условными гранями (или просто гранями) многогранника. Таким образом, один и тот же многогранник, вообще говоря, можно мыслить составленным из различных граней. С таким расширенным пониманием грани многогранника теорема Коши о жесткости замкнутых выпуклых многогранников применяется в доказательстве теоремы А. Д. Александрова о реализации абстрактно заданной выпуклой многогранной метрики замкнутым выпуклым многогранником.

§ 2. Одна лемма о деформации выпуклого многогранного угла

Лемма. Пусть V — выпуклый многогранный угол и g — полупрямая, идущая из вершины внутри угла. Тогда, если при регулярной деформации $V(t)$ угла V его грани (условные грани) стационарны, а хотя бы один из углов, образуемых истинными ребрами угла V с полупрямой g уменьшается (увеличивается), то по крайней мере один из таких углов увеличивается (соответственно уменьшается).

С помощью понятия векторного поля лемме можно дать следующую эквивалентную формулировку.

Пусть на угле V задано векторное поле v, тривиальное на каждой его условной грани и равное нулю в вершине. Тогда, если составляющая этого поля в направлении g положительна (отрицательна) хотя бы на одном истинном ребре угла, то она отрицательна (соответственно положительна) хотя бы на одном истинном ребре.

Доказательство леммы. 1. Пусть V — многогранный угол и v — поле на нем, удовлетворяющее условиям леммы. Рассмотрим поле v', определяемое условиями:

а) v' — линейно на каждой геометрической грани угла V;

б) $v'=v$ — на каждом истинном ребре угла V.

Это поле тривиально на каждой геометрической грани угла V и удовлетворяет условиям лемы.

2. Не ограничивая общности, можно считать, что вершиной угла V является начало координат, а полупрямой g — положительная полуось z. Пусть составляющая ζ' поля v' по оси z неотрицательна, причем есть точки, в которых $\zeta'>0$. Покажем, что тогда существует поле v'', удовлетворяющее условиям леммы, причем $\zeta''\geqslant 0$ на всем угле V, кроме вершины.

Если $\zeta'>0$ на всех истинных ребрах угла, то по линейности поля $\zeta'>0$ на всем угле. Таким образом, в рассмотрении нуждается только тот случай, когда на некоторых истинных ребрах $\zeta'=0$.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — четыре последовательных ребра угла V, причем вдоль a_2 $\zeta'>0$, а вдоль a_3 $\zeta'=0$. Рассмотрим деформацию четырехгранного угла с ребрами a_1, a_2, a_3, a_4, при которой его ребра a_1 и a_4 остаются неподвижными, плоские углы — неизменными и скорость деформации угла вдоль ребра a_3 отлична от нуля. Пусть u — поле скоростей такой деформации. Так как вдоль a_3 $u\neq 0$, то его составляющая по оси z отлична от нуля, ибо вдоль a_3 u есть поле вращения около оси a_1.

Рассмотрим теперь поле v'', равное $v'+u\varepsilon$ на гранях $(a_1\,a_2)$, $(a_2\ a_3)$, $(a_3\ a_4)$ и равное v' на остальных гранях угла V. Очевидно, если взять достаточно малым ε и его знак выбрать из условия, чтобы составляющая поля $u\varepsilon$ на a_3 по оси z была положительна, то для поля v'' неравенство $\zeta''>0$ будет выполнено на всех ребрах, где была $\zeta'>0$, а также на ребре a_3.

Таким образом, применяя описанный выше способ построения поля v'', мы, в конце концов, приходим к такому полю, удовлетворяющему условиям леммы, для которого всюду на V, кроме его вершины, составляющая в направлении z положительна.

3. Пусть поле v на угле V удовлетворяет условиям леммы, пусть его составляющая по оси z всюду положительна, кроме начала координат, где она равна нулю. Покажем, что поле v не может быть тривиально на всем угле V.

Действительно, допустим поле v тривиально на всем V. Тогда оно есть поле вращения угла V около некоторой прямой, проходящей через вершину угла. Проведем плоскость σ через эту прямую и ось z. Плоскость σ пересечет угол V по двум полупрямым. На каждой из этих полупрямых составляющая поля v обращается в нуль, что противоречит предположению.

4. Пусть поле v на угле V удовлетворяет условиям леммы и его составляющая по оси z положительна всюду, кроме начала координат. Рассмотрим деформацию $V(t)$ угла V, при которой его произвольная точка X смещается к моменту t на вектор $v(X)\,t$. При такой деформации угла V его грани стационарны, плоские диагональные углы не могут быть все стационарны, так как тогда стационарен V и, следо-

вательно, тривиально поле v. Покажем, что при деформации $V(t)$ угла V все его диагональные углы не могут одновременно возрастать или убывать при $t=0$.

Допустим, утверждение неверно и при $t=0$ все диагональные углы возрастают. Так как в этом пункте рассуждений мы, кроме сделанного предположения относительно возрастания диагональных углов и тривиальности поля v на гранях угла V, ничем не будем пользоваться, то, не ограничивая общности, можно считать, что поле v на грани α_1 равно нулю.

Пусть w_k — тривиальное векторное поле в пространстве, совпадающее с v на грани α_k угла V. Поле w_k есть поле вращения относительно некоторой прямой, проходящей через вершину угла V. Имеем:

$$w_n = (w_n - w_{n-1}) + (w_{n-1} - w_{n-2}) + \ldots + (w_2 - w_1) \quad (w_1 = 0).$$

Поле $w_k - w_{k-1}$ есть поле вращения около ребра, принадлежащего граням α_{k-1} и α_k.

Возьмем на ребре $\alpha_n \alpha_1$ произвольную точку N. Эта точка при деформации угла V сместится на вектор $\overline{\delta_n} + \overline{\delta_{n-1}} + \ldots + \overline{\delta_2}$, где $\overline{\delta_i}$ — смещение, вызванное вращением около ребра $\alpha_k \alpha_{k-1}$. Если при деформации угла V все двугранные углы одновременно убывают или возрастают, то все векторы $\overline{\delta_i}$ направлены в одно полупространство и, следовательно, их сумма может быть равна нулю (ребро $\alpha_n \alpha_1$ неподвижно) тогда и только тогда, когда все $\overline{\delta_i}$ равны нулю, что невозможно. Итак, при деформации $V(t)$ диагональные углы V не могут одновременно возрастать или одновременно убывать.

5. Пусть поле v на угле V удовлетворяет условиям леммы и его составляющая в направлении полупрямой g, выходящей из вершины внутри угла V, положительна всюду, кроме самой вершины, где она равна нулю. Очевидно, это будет иметь место и по отношению любой другой полупрямой g', достаточно близкой к g. Согласно п. 4 при деформации $V(t)$, при которой точка $\mathbf{x}$ угла V к моменту t смещается на вектор $v(x)t$, либо найдутся стационарные диагональные углы, либо найдутся смежные диагональные углы, из коих один возрастает, а другой убывает. Рассмотрим обе эти возможности.

Допустим диагональный угол θ стационарен. Тогда мы разобьем угол V на два угла (V' и V'') плоскостью угла θ. В силу предыдущего замечания можно считать, что эта плоскость не проходит через полупрямую g. Пусть для определенности полупрямая g проходит внутри V'. Зададим поле v' на угле V' следующими условиями: $v'(X) = v(X)$, если x принадлежит V, v' на θ — линейно. Построенное на угле V' поле v' обладает теми же свойствами, что и поле v на угле V.

Допустим теперь, что существуют два смежных диагональных угла θ_1 и θ_2 с общим ребром $k_{1,2}$, причем при деформации $V(t)$ угол θ_1 возрастает, а угол θ_2 убывает. Пусть k_1 и k_2 — другие стороны углов. На грани $(k_1 k_2)$ угла V можно указать полупрямую k, идущую из вершины угла V, и такую, что угол θ со сторонами $k_{1,2}$ и k стационарен при деформации $V(t)$ угла V. Плоскость угла θ разбивает угол V на два угла V' и V''. Пусть полупрямая g находится внутри V'. Тогда подобно тому, как в рассмотренном выше случае, на угле V' можно указать поле v', обладающее теми же свойствами, что и поле v на угле V.

Теперь нетрудно завершить доказательство леммы. В самом деле, допустим лемма неверна. Пусть v векторное поле на угле V тривиальное на каждой условной грани и равное нулю в вершине. Пусть составляющая поля в направлении полупрямой g, проходящей внутри угла из его вершины, неотрицательна, причем существенно положительна, по крайней мере на одном истинном ребре угла V.

Согласно п. 1 существует поле v' на угле V, обладающее свойствами поля v и тривиальное на каждой истинной грани угла V. Не ограничивая общности, можно считать, что этим свойством обладает поле v.

Согласно п. 2 на угле V существует поле v'', обладающее свойствами поля v, причем составляющая этого поля в направлении g всюду положительна, кроме вершины угла V, где она равна нулю. Не ограничивая общности, можно считать что поле v уже обладает этим свойством.

Согласно п. 5 существует угол V' с меньшим числом ребер, чем V, на котором существует поле v', обладающее теми же свойствами, что и поле v на углу V. Таким образом, мы приходим к трехгранному углу. Но если V трехгранный угол, то из стационарности его плоских углов при деформации $V(t)$ немедленно следует стационарность всего угла и, следовательно, тривиальность поля v на всем угле V, что невозможно, как показано в п. 3.

Лемма доказана.

§ 3. Жесткость выпуклых многогранных шапок

Выпуклой многогранной шапкой мы будем называть такой выпуклый многогранник с плоским краем, что его ортогональная проекция на плоскость края не выходит за пределы плоского выпуклого многоугольника, ограниченного краем этого многогранника.

Выпуклые многогранные шапки вообще не являются жесткими. Однако представляется возможным естественным образом ограничить допустимые деформации шапки, по отношению к которым шапка оказывается жесткой. Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Многогранная выпуклая шапка с краем, фиксированным плоскостью, жесткая.

Иначе говоря, если при регулярной деформации шапки ее грани стационарны, а граница находится в фиксированной плоскости, то стационарна вся шапка.

Еще иначе: векторное поле, тривиальное на каждой грани шапки и на ее границе лежащее в плоскости границы, — тривиально на всей шапке.

Доказательство. Допустим, теорема неверна и на выпуклой многогранной шапке P существует векторное поле v, тривиальное на каждой грани шапки, не тривиальное на всей шапке, и составляющая этого поля вдоль края шапки, перпендикулярная плоскости этого края, равна нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскостью края шапки является плоскость xy.

1. Пусть составляющая ζ поля v по оси z равна нулю тождественно. Покажем, что поле v тривиально на той части шапки P, которая образуется гранями, не перпендикулярными плоскости xy.

Пусть α' и α'' — две грани шапк , не перпендикулярные плоскости xy и имеющие общее ребро k. Обозначим v' и v'' — тривиальные поля в пространстве, совпадающие с v на гранях α' и α'' соответственно. Поле $v'-v''$ на ребре k равно нулю, на гранях α' и α'', оно есть поле вращения около ребра k. И так как составляющая этого поля по оси z равна нулю, а ребро k не перпендикулярно плоскости xy, то $v'-v''$ равно нулю на α' и α''. Но это значит, что поле v тривиально на $\alpha'+\alpha''$ и следовательно, тривиально на всей части шапки P, составленной из граней, не перпендикулярных плоскости xy.

2. Покажем теперь, что если составляющая ζ поля v по оси z равна нулю тождественно, то поле v тривиально на всей шапке.

Пусть $\bar{v}$ — тривиальное поле, совпадающее с полем v на гранях шапки, не перпендикулярных xy. Покажем, что поле $v-\bar{v}$ равно нулю на всей шапке P. Очевидно, для этого достаточно показать, что $v-\bar{v}$ равно нулю во всех вершинах шапки P. Обозначим $\bar{P}$ — часть шапки P, составленную из граней, не перпендикулярных xy.

Каждая вершина E шапки P либо принадлежит $\bar{P}$, и тогда в ней $v-\bar{v}=0$ по определению $\bar{v}$, либо E лежит на границе шапки, причем из E исходит истинное ребро k шапки, перпендикулярное xy. Пусть α' и α'' — грани шапки, примыкающие к ребру k и k', k'' — ребра этих граней, принадлежащие $\bar{P}$.

Поле $v-\bar{v}$ на α' и α'' — суть поля вращения около осей k' и k''. Отсюда следует, что поле $v-\bar{v}$ в вершине E должно быть перпендикулярно трем направлениям k, k' и k'', что невозможно, так как эти три направления заведомо не параллельны одной плоскости и, следовательно, $v-\bar{v}=0$ в E.

Итак, $v-\bar{v}=0$ во всех вершинах шапки. Но тогда $v-\bar{v}$ равно нулю тождественно. А так как поле тривиально, то тривиально поле v.

3. Пусть поле v удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что составляющая ζ этого поля по оси z на границе части $\bar{P}$ шапки P равна нулю. Для этого, очевидно, достаточно показать, что ζ равна нулю в каждой вершине границы $\bar{P}$. Если вершина E на границе $\bar{P}$ будет также на границе шапки, то в ней $\zeta=0$ по условию. Допустим, E не принадлежит границе P. Тогда перпендикуляр EM, опущенный из вершины E на плоскость xy, лежит в некоторой грани шапки P. А так как составляющая ζ в M равна нулю, то она равна нулю и в E.

4. Теперь нетрудно закончить доказательство теоремы. Если поле v не тривиально на всей шапке, то в силу п. 2 ζ не может быть равна нулю тождественно. Пусть $m=\max|\zeta|$. Тогда, если точка X является внутренней точкой грани и в этой точке $|\zeta|=m$, то $|\zeta|=m$ на всей грани α; если точка X является внутренней точкой ребра k и в точке X $|\zeta|=m$, то $|\zeta|=m$ вдоль всего ребра k. Отсюда следует, что найдется вершина E, в которой $|\zeta|=m$.

Соединим эту вершину с какой-нибудь вершиной E', лежащей на границе $\bar{P}$, ломаной Γ, составленной из истинных ребер шапки P. Пусть E'' — первая вершина Γ на пути следования из E в E', в которой $|\zeta|<m$, а E^* — предшествующая ей вершина этой ломаной.

Рассмотрим теперь многогранный угол V, образуемый гранями шапки, примыкающими к вершине E^*. Зададим на угле V векторное поле v^* следующими условиями:

1) $v^*(X)=v(X)-v(E^*)$, если точка X угла V принадлежит одной из граней шапки, сходящихся в E^*,

2) поле v^* тривиально на каждой грани угла V. Очевидно, такое поле может быть построено.

Для поля v^* на угле V и полупрямой g, проходящей внутри V из его вершины параллельно оси, выполнены условия леммы предыдущего параграфа. Но тогда составляющая ζ^* поля v^* по оси z меняет знак. А это противоречит тому, что $|\zeta|$ достигает максимума в E^*.

Теорема доказана.

§ 4. Жесткость бесконечных выпуклых многогранников

Теорема 2. Бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной 2π — жесткие.

Доказательство. Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник с полной кривизной 2π. Сферическое изображение такого многогранника покрывает единичную полусферу и, следовательно, все его бесконечные ребра (полупрямые) параллельны и направлены в одну сторону.

Если взять плоскость σ, перпендикулярную направлениям бесконечных ребер так, чтобы она пересекала многогранник только по бесконечным граням, то она разобьет его на две части — выпуклую многогранную шапку ω и бесконечный многогранный полуцилиндр z.

Допустим, многогранник P нежесткий и v — поле на нем, тривиальное на каждой грани многогранника, но не тривиальное на всем многограннике. Пусть α' и α'' — две смежные бесконечные грани многогранника P а v', v'' — тривиальные поля в пространстве, совпадающие с v на гранях α' и α'' соответственно. Поле $v' - v''$ на ребре k, по которому пересекаются грани α' и α'', равно нулю. Отсюда следует, что составляющая поля $v' - v''$ в направлении k равна нулю на $\alpha' + \alpha''$.

Занумеруем бесконечные грани многогранника так, чтобы грани α_i и α_{i+1} имели общее ребро. Пусть v_i — тривиальное поле в пространстве, совпадающее с v на грани α_i. Имеем:

$$v_i - v_1 = (v_i - v_{i-1}) + \ldots + (v_2 - v_1).$$

Так как составляющие полей $v_s - v_{s-1}$ в направлении бесконечных ребер равны нулю, то составляющая поля $v_i - v_1$ тоже равна нулю. Отсюда следует, что составляющая поля $v - v_1$ в направлении бесконечных ребер равна нулю на всех бесконечных гранях.

Поле $v - v_1$ на шапке ω удовлетворяет условиям теоремы 1. Но в силу этой теоремы поле $v - v_1$ должно быть тривиально на шапке ω, а следовательно, на всем многограннике P. А так как поле v_1 тривиально по условию, то тривиально поле v.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной меньше 2π.

Бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной меньше 2π не жесткие. Мы не будем доказывать этого в общем случае и укажем только на простой пример такого нежесткого многогранника. Выпуклый многогранный угол, очевидно, допускает регулярную деформацию, при которой его грани стационарны, но не стационарен угол в целом.

Бесконечные выпуклые многогранники с полной кривизной меньше 2π оказываются жесткими, если деформации на достаточно большом удалении подчинить некоторым дополнительным ограничениям. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Бесконечный нецилиндрический выпуклый многогранник P с кривизной меньше 2π и слабо-закрепленный в направлении прямой g, которая пересекает его в одной точке, — жесткий.

Иначе говоря: поле v, тривиальное на каждой грани многогранника с ограниченной составляющей в направлении g, тривиально на всем многограннике.

Еще иначе: если при регулярной деформации составляющие скорости деформации многогранника ограничены в направлении g и грани многогранника стационарны, то стационарен весь многогранник.

Доказательство. 1. Так как прямая g пересекает многогранник в одной точке, то любая параллельная g прямая, пересекающая многогранник, либо пересекает его в одной точке, либо имеет с многогранником общую полупрямую. Не ограничивая общности, можно считать, что прямая g является осью z.

Обозначим $\bar{P}$ проекцию многогранника P на плоскость xy. $\bar{P}$ представляет собой либо всю плоскость xy, либо бесконечный многоугольник, который, в частности, может вырождаться в полуплоскость или полосу между двумя параллельными прямыми. Рассмотрим каждый из этих случаев.

2. Пусть $\bar{P}$ есть вся плоскость xy. Обозначим $\zeta(X)$ составляющую поля $v(X)$ в направлении оси z. Будем различать два случая: 1) $\zeta(x) = \mathrm{const}$ и 2) $\zeta(X)$ не постоянна.

В первом случае $\zeta = \mathrm{const}$; не ограничивая общности, можно считать, что $\zeta \equiv 0$. И заключение о тривиальности поля v на всем многограннике P делается дословно так же, как и для шапок в п. 2 § 3.

Во втором случае ζ не постоянна на P. Обозначим $m = \max|\zeta|$. По соображениям, которые были указаны в п. 4 § 3, ζ принимает значение m, по крайней мере, в одной вершине многогранника P. При этом, если ζ не постоянна, найдутся вершины, в которых $|\zeta| < m$. Дальнейшее рассмотрение этого случая ничем не отличается от рассмотрения доказательства для шапок, приведенного в п. 4 § 3. Мы приходим к заключению, что поле v должно быть тривиально на всем многограннике P.

3. Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{P}$ — бесконечный многоугольник, не вырождающийся в полуплоскость или полосу между двумя параллельными прямыми. В этом случае многогранник P имеет бесконечные грани, перпендикулярные плоскости xy. Эти грани проектируются на плоскость xy в стороны многоугольника $\bar{P}$, а бесконечные ребра, по которым пересекаются такие грани, — в вершины многоугольника $\bar{P}$.

Пусть, как и раньше, ζ — составляющая поля v по оси z. Если $\zeta = \mathrm{const}$, то заключение о тривиальности поля v делается так же, как и в случае шапок. Рассмотрим случай, когда ζ не постоянна.

Обозначим; $\tilde{P}$ — ту часть многогранника P, которая составлена из граней, не перпендикулярных плоскости xy, а Z — ту часть многогранника, которая составлена из граней, перпендикулярных плоскости xy. Пусть v_0 — тривиальное векторное поле в пространстве, совпадающее с полем v на какой-нибудь бесконечной грани α_0 многогранника P. Покажем, что составляющая ζ поля $v - v_0$ на границе $\overline{P}$ или, что то же, на границе Z в направлении оси z равна нулю.

Занумеруем бесконечные грани многогранника P, расположенные между бесконечными гранями α_0 и α: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_s = \alpha$. Пусть v_k — тривиальное векторное поле в пространстве, совпадающее с полем v на грани α_k. Имеем:

$$v_s - v_0 = (v_s - v_{s-1}) + \ldots + (v_1 - v_0).$$

Так как грани α_{k-1} и α_k примыкают к бесконечному ребру, перпендикулярному плоскости xy, и на этом ребре $v_k - v_{k-1} = 0$, то составляющая по оси z поля $v_k - v_{k-1}$ равна нулю. Отсюда следует, что составляющая поля $v - v_0$, равного $v_s - v_0$ на α_s, по оси z равна нулю.

Дальнейшее рассмотрение этого случая — как и в случае выпуклых шапок в п. 4 § 3.

4. Рассмотрение случая, когда $\overline{P}$ — полуплоскость принципиально не отличается от случая, когда $\overline{P}$ — бесконечный выпуклый многоугольник, и мы его приводить не будем.

5. Рассмотрим, наконец, случай, когда $\overline{P}$ — полоса между двумя параллельными прямыми.

Обозначим Z_1 и Z_2 части многогранника P, проектирующиеся в параллельные прямые, ограничивающие полосу $\overline{P}$. Покажем, что составляющая поля v в направлении оси z постоянна на каждой из частей Z_1 и Z_2. Пусть α — бесконечная грань, принадлежащая Z_1, проектирующаяся на плоскость xy в полупрямую. Занумеруем грани P, принадлежащие Z_1, в порядке их следования от α_1: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Обозначим v_k — тривиальное поле, совпадающее с v на грани α_k. Тогда составляющая поля $v_k - v_{k-1}$ по оси z равна нулю. Отсюда следует, что составляющая по оси z поля $v_k - v_1$ равна нулю. И так как k произвольно, то это значит, что составляющая поля $v - v_1$ по оси z на всей части Z_1 равна нулю. Далее, так как α_1 проектируется на плоскость xy в полупрямую, то v_1 есть поле переноса и вращения около оси, лежащей в плоскости α_1, и, следовательно, его составляющая по оси z — постоянна. Но тогда составляющая поля $v - v_1$ по оси z тоже постоянна.

Аналогичное рассуждение можно провести и для части Z_2.

Обозначим $\overline{v}$ — поле вращения около одной из прямых, ограничивающих полосу $\overline{P}$. Можно подобрать число λ таким образом, чтобы поле $v + \lambda\overline{v}$ было постоянно на $Z_1 + Z_2$. Если теперь в отношении поля $v + \lambda\overline{v}$ провести то же рассуждение, что и в п. 2 настоящего параграфа, то придем к заключению, что это поле тривиально, а следовательно, тривиально и поле v.

Итак, во всех случаях поле v оказывается тривиальным на всем многограннике P.

Теорема доказана полностью.

§ 5. Жесткость замкнутых выпуклых многогранников

Теорема 4. Замкнутые выпуклые многогранники жесткие.

Доказательство. Пусть F — произвольная фигура в пространстве и v — заданное на ней векторное поле. Пусть F' — фигура, полученная проективным преобразованием из F. Дарбу указал способ построения векторного поля v' на F', которое оказывается тривиальным на части F'_1 фигуры F' тогда и только тогда, когда тривиально поле v на соответствующей части F_1 фигуры F.

Мы не будем касаться этого вопроса во всей общности и укажем только на один частный случай. Пусть фигура F' получается из F проективным преобразованием, которое точку $X(x, y, z)$ фигуры F переводит в точку с кординатами:

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Пусть: v — векторное поле, заданное на F; ξ, η, ζ — компоненты вектора v. Построим векторное поле v' на F', сопоставляя точке x' вектор v' с компонентами;

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{z\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

Поле v' на фигуре F' обладает указанным выше свойством. Именно, на части фигуры F' оно тривиально тогда и только тогда, когда на соответствующей части фигуры F тривиально поле v.

Действительно, так как фигура F из F' получается тем же проективным преобразованием и поле v получается из v' так же, как v' из v, то достаточно показать, что если поле v тривиально на части F_1 фигуры F, то поле v' тривиально на соответствующей части F'_1 фигуры F'. А это, в свою очередь, достаточно показать для простейших тривиальных полей — полей смещения вдоль координатных осей и полей вращения около этих осей, что не составляет труда.

Перейдем к доказательству теоремы. Допустим, теорема не верна. Тогда существует поле v, тривиальное на каждой грани замкнутого выпуклого многогранника P, но не тривиальное на всем многограннике. Проведем через какую-нибудь вершину E многогранника плоскость σ так, чтобы многогранник был с одной стороны этой плоскости и вершина E была единственной общей точкой многогранника и плоскости σ. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, приняв точку E за начало координат и плоскость σ — за плоскость xy.

Подвергнем многогранник P проективному преобразованию, при котором точке (x, y, z) сопоставляется точка с координатами:

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

При этом мы получим бесконечный выпуклый многогранник P' с полной кривизной 2π. Его бесконечные грани, соответствующие граням P, сходящимся в E, перпендикулярны плоскости xy.

Так как на многограннике P существует поле v, тривиальное на каждой грани, но не тривиальное на всем многограннике, то и на многограннике P' можно указать такое поле, т. е. тривиальное на каждой грани, но не тривиальное на всем многограннике. Мы пришли к противоречию: согласно теореме 3 на многограннике P' такого поля задать нельзя.

Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Cauchy. Sur les polygones et les polyèdres. Second Mèmoire. Journale Ecole Polytechn., т. 9, 1813, стр. 87.

2. Dehn. Über die Starrheit konvexer Polyeder. Math. Ann. т. 77. 1915.

3. А. Д. Александров. Выпуклые многограники. Гостехиздат, 1951.