VI

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ.

1882 ГОДА.

I.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.

1882.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *Г. Цѣхановецкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщеніе:

ПРОТОКОЛЪ

засѣданія математическаго общества

при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ, 26-го февраля 1882 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, А. А. Ключниковъ, М. С. Косенко, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Получены обществомъ слѣдующія изданія:

1) Bulletin de la société mathématique de France. T. IX, № 5.

2) Кіевскія университетскія извѣстія. № 12 (1881).

3) Sur les comètes *b* et *c* 1881 par *M. Bredichin* (оттискъ изъ астрон. журнала: «Copernicus»).

К. А. Андреевъ, представивъ послѣднюю книгу, сообщилъ объ ея содержаніи и вообще о теоріи г. Бредихина относительно хвостовъ кометъ.

Онъ-же сообщилъ обществу о брошюрѣ проф. Guccia, заключающей въ себѣ рядъ геометрическихъ предложеній, относящихся къ ученію о изображеніи поверхностей на плоскости.

А. П. Грузинцевъ сообщилъ свои доказательства невѣрности основныхъ уравненій теоріи дисперсіи и двойного преломленія проф. боннскаго универс. Dr. Кеттлера.

В. Г. Имшенецкій предложилъ въ члены общества г. Проскурникова; но баллотировка, вслѣдствіе недостаточнаго числа наличныхъ членовъ, отложена до слѣдующаго засѣданія.

О ДВОЙНОМЪ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНІИ

въ связи
съ свѣторазсѣяніемъ.

А. П. Грузинцева.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Теоретическая оптика считается одною изъ болѣе установленныхъ частей математической физики: основные механическіе принципы свѣтовыхъ явленій найдены и примѣнены къ дѣлу ихъ объясненія; составлены математическія теоріи главнѣйшихъ свѣтовыхъ явленій — теоріи, признанныя достаточными. Таково существующее въ настоящее время общее мнѣніе. Между-тѣмъ-какъ при достаточно внимательномъ изученіи дѣла положеніе теоретической оптики представляется далеко не столь законченнымъ; существуютъ свѣтовыя явленія, различныхъ теорій которыхъ столько же, сколько было авторовъ, писавшихъ о нихъ. Подобнаго обстоятельства намъ не представляется въ другихъ достаточно установленныхъ частяхъ математической физики. Такъ, динамическая теорія тепла представляетъ въ своей общей части и въ нѣкоторыхъ ея примѣненіяхъ уже нѣчто опредѣленно-законченное, между тѣмъ какъ теоріи, напримѣръ, двойнаго лучепреломленія и свѣторазсѣянія (дисперсіи) далеки отъ подобной степени совершенства. Дѣйствительно, въ послѣднихъ случаяхъ *мы не имѣемъ одной* законченной *теоріи*, а цѣлый рядъ теорій: Коши, Нейманна, Кеттелера, Ломмеля и др.; между тѣмъ какъ въ первомъ случаѣ существуетъ только *одна динамическая теорія тепла,* а не теоріи Клаузіуса, Гирна, Верде и др.; существуютъ, слѣдовательно, только различныя изложенія одной и той же теоріи, различные способы систематизаціи матеріала и т. п. Все это заставило меня заняться изученіемъ теорій такихъ явленій, какъ двойное лучепреломленіе въ связи съ свѣторазсѣяніемъ.

Изученіе дѣла показало, что въ настоящее время невозможно составить теоріи сказанныхъ явленій, не прибѣгая къ болѣе или менѣе вѣроятнымъ гипотезамъ, невозможно вслѣдствіе недостаточнаго знанія силъ, дѣйствующихъ внутри тѣла между его частицами. Все, что можно сдѣлать въ настоящее время, это— свести различныя теоріи къ одному общему источнику, показать къ какимъ частнымъ предположеніямъ о междумолекулярныхъ силахъ надо прибѣгнуть, чтобы получить ту или другую изъ существующихъ теорій, и наконецъ показать, въ какомъ направленіи слѣдуетъ работать для полученія окончательнаго рѣшенія. Поставивъ вопросъ на такую почву, можно будетъ ввести нѣкоторыя улучшенія въ современныя теоріи какъ со стороны постановки основаній, такъ и со стороны развитія слѣдствій изъ нихъ. Замѣчу еще одно обстоятельство.

Результаты, добытые тою или другою теоріей, провѣрялись сравненіемъ ихъ съ опытными данными; подобная провѣрка показала ихъ пригодность къ дѣлу; поэтому любопытны связь и способъ перехода отъ рѣшеній одной теоріи къ рѣшеніямъ другой.

Такова цѣль настоящаго труда; въ какой мѣрѣ онъ соотвѣтствуетъ истиннымъ нуждамъ науки и на-сколько удачно его выполненіе — судить не мнѣ[1].

---

[1] Сущность этой работы была сообщена въ засѣданіи 26 февраля 1882 г харьковскаго математическаго общества и въ мартовскомъ засѣданіи общества опытныхъ наукъ при харьковскомъ университетѣ.

Математическая теорія двойнаго лучепреломленія въ связи съ свѣторазсѣяніемъ.

ГЛАВА I.

§ 1. Всякое тѣло представляетъ сложную систему частицъ: матеріи и эфира. Какъ тѣ, такъ и другія находятся въ движеніи внутри самаго тѣла, хотя и послѣднее все, какъ цѣлое, можетъ имѣть движеніе, но для нашей цѣли можно принять, что тѣло находится въ покоѣ. Мы можемъ разсматривать совокупность матеріальныхъ частицъ и совокупность эфирныхъ, или какъ одну систему частицъ, или какъ двѣ отдѣльныя системы, для чего достаточно ввести, кромѣ силъ, дѣйствующихъ на каждую систему независимо отъ другой, еще силы, происходящія отъ взаимодѣйствія между тѣми и другими, вслѣдствіе ихъ совмѣстнаго существованія. Эти силы взаимодѣйствія проявляются подъ видомъ нѣсколькихъ силъ, какъ-то: силъ тренія, силъ сопротивленія и т. п. И такъ, пусть частицы матеріи и эфира находятся въ колебательномъ или какомъ другомъ движеніи; тогда, называя буквою T сумму живыхъ силъ (кинетическая энергія) движущихся частицъ, а символомъ δU сумму элементарныхъ работъ (потенціальная энергія) силъ, дѣйствующихъ внутри системы и происходящихъ или вслѣдствіе свойствъ тѣла, или вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ причинъ, на основаніи принципа Гамильтона имѣемъ уравненіе:

$$\int dt\,(\delta T + \delta U) = 0\,, \qquad (1)$$

гдѣ t время, а δT есть варіаціонное измѣненіе живой силы. Интегрированіе должно быть выполнено между нѣкоторыми двумя постоянными значеніями времени. Написанное уравненіе должно отдѣльно примѣнить къ системамъ матеріальныхъ частицъ и эфира.

Разсмотримъ теперь ближе тѣ силы, которыя дѣйствуютъ въ нашихъ системахъ частицъ, т. е. въ какомъ-нибудь физическомъ тѣлѣ. Эти силы мы раздѣлимъ сначала на двѣ большія группы, помѣстивъ въ первую тѣ, которыя обусловливаютъ свѣтовыя явленія, а во вторую тѣ, отъ которыхъ зависятъ явленія тепла и электричества (магнетизма и электромагнетизма). Означивъ живыя силы и элементарныя работы силъ первой группы соотвѣтственными буквами безъ указателя, а живыя силы и элементарныя работы силъ второй группы тѣми-же буквами съ указателемъ ($'$), мы имѣемъ по уравненію (1) слѣдующее:

$$\int dt\,(\delta T + \delta U + \delta T' + \delta U') = 0.$$

Но, имѣя въ виду изслѣдовать только свѣтовыя явленія извѣстнаго рода, мы можемъ съ полнымъ правомъ предположить, что какъ живая сила T, такъ и работа силъ второй группы суть величины постоянныя во всемъ объемѣ тѣла и за все время, лежащее внутри предѣловъ интеграла, и потому имѣемъ:

$$\int dt\,(\delta T' + \delta U') = 0.$$

И такъ, наше уравненіе значительно упрощается, сохраняя видъ уравненія (1) съ тою лишь существенною разницей, что подъ T и δU надо понимать живую силу колебательныхъ движеній и *элементарную работу* силъ первой группы, т. е. тѣхъ силъ, участію которыхъ мы приписываемъ свѣтовыя явленія.

§ 2. Разсмотримъ тѣ силы, которыя даютъ элементарную работу δU въ случаѣ эфира. Эти силы, дѣйствующія на каждую частицу эфира, суть слѣдующія:

1) Силы упругости частицъ эфира; ихъ элементарную работу обозначимъ символомъ $\delta U_e^{(a)}$.

2) Силы тренія эфирныхъ частицъ объ эфирныя и матеріальныя; элементарная ихъ работа $\delta U_{fa} + \delta U_{fm}$, или короче δU_f

3) Силы сопротивленія движущимся частицамъ эфира — сопротивленія, производимаго или эфиромъ, или матеріальными частицами, ихъ элементарную работу обозначимъ $\delta U_{ra} + \delta U_{rm}$ или короче δU_r.

4) Внѣшнія силы, дѣйствующія на эфирную частицу; ихъ работа будетъ обозначена δU_e.

5) Силы взаимодѣйствія между частицами эфира и матеріи — взаимодѣйствія отличнаго отъ того, которое производятъ силы 1, 2 и 3-й категорій. Ихъ элементарная работа $\delta U_{ma} + \delta U_{mm}$ или короче δU_a.

Подобныя же силы будутъ дѣйствовать на каждую матеріальную частицу. Элементарныя работы ихъ будемъ обозначать тѣмъ же символомъ δU съ указателемъ m вмѣсто a и обратно.

Разовьемъ теперь уравненіе (1). Положимъ:

$$\delta U_e^{(a)} + \delta U_r + \delta U_f + \delta U_a = \delta U_i, \tag{2}$$

тогда будемъ имѣть:

$$\int dt\,(\delta T + \delta U_i + \delta U_e) = 0. \tag{3}$$

Подобное же уравненіе имѣемъ и для матеріальныхъ частицъ. Если бы мы разсматривали совокупность эфирныхъ и матеріальныхъ частицъ, какъ одну систему, тогда уравненіе (3) было бы одно, стоитъ только въ немъ разсматривать δT, δU_i и δU_e одновременно относящимися и къ эфирнымъ частицамъ, и къ матеріальнымъ.

§ 3. Вычислимъ теперь члены уравненія (3).

Такъ-какъ мы предполагаемъ, что движенія частицъ эфира или матеріи суть движенія колебательныя, то слѣдовательно предстоитъ выразить δT и δU въ функціи колебанія, координатъ частицъ и времени.

Отнесемъ пока положеніе частицы къ какой-нибудь системѣ прямоугольныхъ осей и назовемъ координаты эфирной частицы въ положеніи равновѣсія буквами

$$\xi, \eta, \zeta,$$

составляющія колебанія вдоль тѣхъ же осей

$$\pi, \varrho, \omega.$$

Для матеріальной частицы подобныя же количества обозначимъ соотвѣтственно чрезъ

$$x, y, z, \text{ и}$$
$$u, v, w.$$

Пусть масса единицы объема эфира будетъ μ, тогда живая сила системы эфирныхъ частицъ будетъ опредѣляться равенствомъ:

$$T = {}^1/_2 \iiint \mu \left[\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \right] d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

причемъ интегрированіе должно быть распространено на весь объемъ тѣла, заключающаго эфиръ.

Называя составляющія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эфирную частицу вдоль координатныхъ осей, буквами

$$\Xi,\ H,\ Z,$$

и разсчитанныхъ на единицу объема, будемъ имѣть для δU_e слѣдующее выраженіе:

$$\delta U_e = \iiint (\Xi \delta\pi + H\delta\varrho + Z\delta\omega)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Вычислимъ теперь $\delta U_e^{(a)}$.

Такъ-какъ ниже намъ придется разсматривать или изотропныя средины, или кристаллическія (анизотропныя, вообще говоря), то здѣсь мы вычислимъ работу упругихъ силъ, дѣйствующихъ въ кристаллической срединѣ, ибо отъ послѣдняго случая легко перейдти къ случаю изотропныхъ тѣлъ.

Назовемъ упругія силы символами

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y,\ Y_z,\ Z_x,$$

а деформаціи элемента объема:

$$x_x,\ y_y,\ z_z,\ x_y,\ y_z,\ z_x,$$

тогда зависимости первыхъ отъ послѣднихъ, какъ извѣстно, суть слѣдующія:

$$X_x = ax_x + fx_y + ex_z\,,\ X_y = fx_y$$

$$Y_y = fy_x + by_y + dz_y\,,\ Y_z = dy_z$$

$$Z_z = ex_z + dy_z + cz_z\,,\ Z_x = ez_x;$$

причемъ a, b, c, d, e, f суть постоянные коеффиціенты, характеризующіе средину въ отношеніи ея упругости.

Тогда элементарная работа упругихъ силъ будетъ:

$$\delta U_e^{(a)} = \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + \right.$$
$$\left. + X_y \delta x_y + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x \right]$$

здѣсь x_x, y_y и т. п. выражаются, какъ извѣстно, въ функціи π, ϱ, ω слѣдующимъ образомъ:

$$x_x = \frac{\partial \pi}{\partial \xi}\,,\ y_y = \frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\,,\ z_z = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\,,$$

$$x_y = \frac{\partial \pi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varrho}{\partial \xi}\ ,\ y_z = \frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\ ,\ z_x = \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

Для матеріальной частицы надо π, ξ . . . замѣнить u, x и т. п.

Подставляемъ эти значенія въ выраженіе для $\delta U_e^{(a)}$ и интегрируя каждый членъ по частямъ*, имѣемъ:

---

* Интегрированіе совершается на основаніи слѣдующей формулы:

$$\iiint Q\delta \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iiint Q d\eta\, d\zeta \frac{\partial \delta f}{\partial \xi} d\xi = \iint Q d\eta\, d\zeta\, \delta f -$$
$$- \iiint \partial \xi\, d\eta\, d\zeta \frac{\partial Q}{\partial \xi} \delta f.$$

$$\delta U_e^{(a)} = \iint [X_x d\eta\, d\zeta\, \delta\pi + Y_y d\xi\, d\zeta\, \delta\varrho + Z_z d\xi\, d\eta\, \delta\omega + \\ + (Z_x d\xi\, d\eta + X_y d\xi\, d\zeta)\delta\pi + (Y_z d\xi\, d\eta + X_y d\eta\, d\zeta)\delta\varrho + \\ + (Y_z d\xi\, d\zeta + Z_x d\eta\, d\zeta)\delta\omega] - \\ - \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{ \left(\frac{\partial X_x}{\partial \xi} + \frac{\partial X_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_x}{\partial \zeta} \right)\delta\pi + \\ + \left(\frac{\partial X_y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y_z}{\partial \zeta} \right)\delta\varrho + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_z}{\partial \zeta} \right)\delta\omega \right\};$$

двойной интегралъ долженъ быть распространенъ на всю поверхность тѣла и его можно было бы написать въ иной болѣе удобной формѣ, введя косинусы направленія нормала къ поверхности тѣла; назвавъ эти косинусы буквами m_1, m_2, m_3, двойной интегралъ въ выраженіи $\delta U_e^{(a)}$ представится въ видѣ:

$$\iint d\sigma \left\{ (X_x m_1 + X_y m_2 + Z_x m_3)\delta\pi + (X_y m_1 + Y_y m_2 + \\ + Y_z m_3)\delta\varrho + (Z_x m_1 + Y_z m_2 + Z_z m_3)\delta\omega \right\};$$

причемъ $d\sigma$ есть элементъ поверхности тѣла.

Полагая:

$$X_x m_1 + X_y m_2 + Z_x m_3 = X$$
$$X_y m_1 + Y_y m_2 + Y_z m_3 = Y$$
$$Z_x m_1 + Y_z m_2 + Z_z m_3 = Z$$

и составляющія упругихъ силъ, дѣйствующихъ внутри средины, буквами E_x, E_y, E_z имѣемъ слѣдовательно:

$$\delta U_e^{(a)} = \iint d\sigma (X\delta\pi + Y\delta\varrho + Z\delta\omega) - \iiint (E_x\delta\pi + E_y\delta\varrho + \\ + E_z\delta\omega)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Опредѣлимъ δU_r и δU_f.

Назовемъ составляющія вдоль осей координатъ силъ тренія и сопротивленія, расчитанныхъ на единицу объема, соотвѣтственными буквами

$$R_x,\ R_y,\ R_z \text{ и}$$
$$F_x,\ F_y,\ F_z$$

тогда элементарныя работы δU_r и δU_f можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\delta U_r = \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\, (R_x \delta\pi + R_y \delta\varrho + R_z \delta\omega), \text{ и}$$
$$\delta U_f = \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\, (F_x \delta\pi + F_y \delta\varrho + F_z \delta\omega).$$

Относительно R_x, F_x и т. д. намъ ничего точнаго неизвѣстно; мы можемъ принимать на ихъ счетъ болѣе или менѣе вѣроятныя гипотезы; замѣтимъ, что при нѣкоторыхъ гипотезахъ δU_r и δU_f могутъ заключать части съ двойными интегралами.

Работы δU_r и δU_f можно соединить въ одну, полагая

$$R_x + F_x = N_x,\ R_y + F_y = N_y,\ R_z + F_z = N_z, \text{ тогда}$$
$$\delta U_r + \delta U_f = \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\, (N_x \delta\pi + N_y \delta\varrho + N_z \delta\omega).$$

Сопротивленіе и треніе можетъ проявляться въ измѣненіи упругихъ силъ E_x, E_y, E_z, и именно упругія силы частицъ могутъ быть уменьшены вслѣдствіе тренія и сопротивленія ихъ движенію.

Зная, что въ изотропной, несжимаемой, упругой срединѣ (см. § 8) количества E_x, E_y, E_z равны соотвѣтственно $e\Delta_2\pi$, $e\Delta_2\varrho$, $e\Delta_2\omega$, мы, на основаніи сейчасъ высказаннаго, можемъ допустить[1] для силъ N, происходящихъ вслѣдствіе сопротивленія и тренія частицъ кристаллической средины слѣдующія значенія:

$$N_x = -\beta_x \Delta_2 \pi,\ N_y = -\beta_y \Delta_2 \varrho,\ N_z = -\beta_z \Delta_2 \omega,$$

причемъ β_x, β_y, β_z суть коеффиціенты, зависящіе отъ свойствъ средины. Также:

$$N'_x = -\beta'_x \Delta_2 u,\ N'_y = -\beta_y \Delta_2 v,\ N'_z = -\beta' z \Delta_2 w.$$

При такомъ взглядѣ на силы N выраженіе для работы $\delta U_r + \delta U_f$ будетъ заключать членъ съ двойнымъ интеграломъ, подобнымъ двойному интегралу въ выраженіи $\delta U_e^{(a)}$, именно членъ:

[1] Подобныя допущенія дѣлали Буссинескъ и Кеттелеръ.

$$\iint d\sigma \left\{ \beta_x\, X\delta\pi + \beta_y\, Y\delta\varrho + \beta_z\, Z\delta\omega \right\},$$ такъ что:

$$\delta U_r + \delta U_f = \iint d\sigma\, (\beta_x\, X\delta\pi + \beta_y\, Y\delta\varrho + \beta_z\, Z\delta\omega) -$$
$$- \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\, (\beta_x \Delta_2 \pi\, \delta\pi + \beta_y \Delta_2 \varrho\, \delta\varrho + \beta_z \Delta_2 \omega\, \delta\omega).$$

Остаются теперь только силы категоріи 5-ой; совершенно такимъ-же образомъ мы можемъ взять

$$\delta U_a = \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\, (M_x \delta\pi + M_y \delta\varrho + M_z \delta\omega).$$

Зная по § 3 выраженіе T, мы по извѣстному способу преобразованія найдемъ:

$$\int dt\, \delta T = -\int dt \iiint \mu\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{ \frac{d^2\pi}{dt^2}\delta\pi + \frac{d^2\varrho}{dt^2}\delta\varrho + \frac{d^2\omega}{dt^2}\delta\omega \right\} +$$
$$+ \Big|_{t_0}^{t_1} \iiint \mu\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{ \frac{d\pi}{dt}\delta\pi + \frac{d\varrho}{dt}\delta\varrho + \frac{d\omega}{dt}\delta\omega \right\},$$

гдѣ знакомъ $\Big|_{t_0}^{t_1} M$ выражена разность значеній M для $t = t_0$ и $t = t_1$.

Но второй членъ въ выраженіи $\int dt\, \delta T$ равенъ нулю, ибо для обоихъ предѣловъ времени варіаціи $\delta\pi$, $\delta\varrho$, $\delta\omega$ предполагаются постоянными; остается слѣдовательно только первый членъ.

§ 4. Теперь найдены всѣ части выраженія (3) § 2; подставляя ихъ въ равенство (3) и приравнивая нулю коеффиціенты при $\delta\pi$, $\delta\varrho$, $\delta\omega$, вслѣдствіе произвольности послѣднихъ, находимъ слѣдующія *три уравненія для эфирной частицы внутри тѣла*:

$$\left.\begin{aligned}
&-\mu \frac{d^2\pi}{dt^2} - \left(\frac{\partial X_x}{\partial \xi} + \frac{\partial X_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_x}{\partial \zeta} \right) + R_x + F_x + M_x + \Xi = 0 \\
&-\mu \frac{d^2\varrho}{dt^2} - \left(\frac{\partial X_y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y_z}{\partial \zeta} \right) + R_y + F_y + M_y + \mathrm{H} = 0 \\
&-\mu \frac{d^2\omega}{dt^2} - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_z}{\partial \zeta} \right) + R_z + F_z + M_z + \mathrm{Z} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Подобнымъ образомъ составимъ уравненія для матеріальной частицы, замѣнивъ количества $\mu, \pi, \varrho, \omega, \xi, \eta, \zeta, \Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$ количествами $m, u, v, w, x, y, z, X, Y, Z$ и остальныя величины отмѣтивъ значкомъ ($'$). Напишемъ ихъ:

$$\left.\begin{aligned}
-m\frac{d^2u}{dt^2}-\left(\frac{\partial X'_x}{\partial x}+\frac{\partial X'_y}{\partial y}+\frac{\partial X'_z}{\partial z}\right)+R'_x+F'_x+M'_x+X=0\\
-m\frac{d^2v}{dt^2}-\left(\frac{\partial X'_y}{\partial x}+\frac{\partial Y'_y}{\partial y}+\frac{\partial Y'_z}{\partial z}\right)+R'_y+F'_y+M'_y+Y=0\\
-m\frac{d^2w}{dt^2}-\left(\frac{\partial Z'_x}{\partial x}+\frac{\partial Y'_z}{\partial y}+\frac{\partial Z'_z}{\partial z}\right)+R'_z+F'_z+M'_z+Z=0
\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

Назвавъ силы въ скобкахъ буквами E_x, E_y, E_z, напишемъ уравненія (I) и (II) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
-\mu\frac{d^2\pi}{dt^2}-E_x+R_x+F_x+M_x+\Xi=0;\ \ldots\\
-\mu\frac{d^2\varrho}{dt^2}-E_y+R_y+F_y+M_y+\mathrm{H}=0;\ \ldots\\
-\mu\frac{d^2\omega}{dt^2}-E_z+R_z+F_z+M_z+\mathrm{Z}=0;\ \ldots
\end{aligned}\right\}\text{(I bis)}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
-m\frac{d^2u}{dt^2}-E'_x+R'_x+F'_x+M'_x+X=0;\\
-m\frac{d^2v}{dt^2}-E'_y+R'_y+F'_y+M'_y+Y=0;\\
-m\frac{d^2w}{dt^2}-E'_z+R'_z+F'_z+M'_z+Z=0.
\end{aligned}\right\}\text{(II bis)}$$

Кромѣ этихъ уравненій остаются еще условія *на границахъ тѣла*, но они для нашей цѣли не нужны, замѣтимъ только, что они даютъ основанія для математической теоріи отраженія и преломленія свѣта на границахъ тѣлъ.

ГЛАВА II.

§ 5. Уравненія, написанныя въ предъидущемъ параграфѣ, и суть тѣ общія уравненія вопроса, которыя будутъ служить намъ; онѣ представляютъ обыкновенныя уравненія динамики, примѣненныя къ нашему случаю. Если-бы мы знали законы внутренняго тренія, развиваемаго при колебательномъ движеніи частицъ, — законы сопротивленія и остающагося взаимодѣйствія между частицами, то тогда вопросъ должно бы считать окончательно рѣшеннымъ, но, къ сожалѣнію, упомянутые законы неизвѣстны, и мы почти ничего точнаго не знаемъ о молекулярныхъ взаимодѣйствіяхъ внутри тѣла; поэтому намъ придется сдѣлать о силахъ R, F и M только болѣе или менѣе вѣроятныя гипотезы и провѣрить ихъ справедливость à posteriori, т. е. степенью согласія выводовъ съ данными опыта.

§ 6. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію примѣненій полученныхъ уравненій, полезно указать на то важное свойство уравненій § 4, которое состоитъ въ возможности вывода изъ этихъ уравненій тѣхъ, которыя служатъ основаніями главнѣйшихъ изъ существующихъ теорій, какъ-то теорій Коши, Неймана, Кеттелера, Ломмеля и др.*. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы увидимъ и недостаточность нѣкоторыхъ изъ этихъ теорій, и тѣ пункты, которые потребуютъ улучшеній.

§ 7. Одни изъ первыхъ по времени появленія теоріи Коши и Неймана основаны на предположеніяхъ, что матеріальныя частицы непосредственнаго участія въ явленіяхъ двойного преломленія не принимаютъ и что здѣсь дѣйствуютъ только однѣ силы упругости эфира. Полагая поэтому $u = v = w = 0$, также полагая, что силы R, F и M не имѣютъ мѣста, мы получимъ урав-

* О теоріяхъ Грина и Лямэ говорить не будемъ вслѣдствіе доказанной ихъ невѣрности. См. *Saint-Venant*, Sur les manières diverses etc.

ненія въ той формѣ, въ какой ихъ употреблялъ Нейманъ[1], подставивъ только значеніе упругихъ силъ, данныхъ въ § 3; что-же касается уравненій Коши[2], то они отличаются отъ уравненій Неймана только по формѣ выраженій для упругихъ силъ. Дѣйствительно, Коши выражаетъ силы X_x, Y_y..... въ функціяхъ междучастичнаго разстоянія и перемѣщеній частицы, но его выраженія могутъ быть, какъ извѣстно, преобразованы въ тѣ, которыя употреблены здѣсь; наши же уравненія (1 bis) не зависятъ отъ вида выраженій упругихъ силъ.

Однако необходимо замѣтить слѣдующую существенную разницу между тою и другою теоріями. Уравненія Коши не только позволяютъ дать теорію двойнаго лучепреломленія, но и теорію нормальнаго свѣторазсѣянія, хотя и не вполнѣ состоятельную; теорія же Неймана этимъ качествомъ не обладаетъ. За-тѣмъ существуютъ еще другія отличія обѣихъ теорій, отличія, обусловленныя способомъ вывода слѣдствій изъ основныхъ уравненій; такъ, плоскости поляризацій въ той и другой теоріи не совпадаютъ, а взаимно перпендикулярны.

Въ настоящее время теорія двойнаго преломленія Коши подверглась строгой критикѣ со стороны нѣкоторыхъ физиковъ; такъ, Лянгъ[3] доказываетъ, что исходя изъ уравненій Коши, мы приходимъ къ неправильнымъ заключеніямъ: получается равенство скоростей обоихъ лучей, идущихъ въ плоскости главнаго сѣченія кристалла. Надо прибавить, что тѣ измѣненія, которымъ подвергаетъ самъ Лянгъ уравненія Коши, крайне гипотетичны, именно — Лянгъ допускаетъ зависимость силы взаимодѣйствія между двумя эфирными частицами не только отъ разстоянія, но и отъ направленія. Матье же[4] вообще доказываетъ несостоятельность теоріи свѣта, данной Коши.

---

[1] Poggendorff's Annalen. Bd. XXV. S. 418—454.
[2] Mémoires de l'Académie de Paris. T. XVIII. p. 153—216.
[3] Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. St. S. 369 (1880).
[4] Journal de Liouville. 3 série. t. VII, p. 201 (1881).

ГЛАВА III.

§ 8. Перейдемъ къ теоріи Кеттелера, предложенной имъ въ различныхъ редакціяхъ.

Кеттелеръ полагаетъ сначала, что треніе и сопротивленіе среды выражается въ измѣненіи упругости ея частицъ; поэтому, на основаніи замѣчаній § 3 о силахъ R и F, мы должны взять:

$$F_x + R_x = -\alpha_x \varepsilon_x \Delta_2 \pi, \; F_y + R_y = -\alpha_y \varepsilon_y \Delta_2 \varrho,$$
$$F_z + R_z = -\alpha_z \varepsilon_z \Delta_2 \omega,$$

причемъ α и ε суть коеффиціенты, зависящіе отъ тренія и сопротивленія; подобнымъ образомъ:

$$F'_x + R'_x = \alpha_x \varepsilon'_x \Delta_2 u, \; F'_y + R'_y = \alpha_y \varepsilon'_y \Delta_2 v, \; F'_z + R'_z = \alpha_z \varepsilon'_z \Delta_2 w$$

причемъ коеффиціентъ α остается одинъ и тотъ-же вслѣдствіе *взаимности* происхожденія тренія и сопротивленія. За-тѣмъ, предполагая эфиръ изотропнымъ и несжимаемымъ внутри тѣла, а упругость матеріальной средины въ сравненіи съ упругостью эфира крайне незначительною, имѣемъ:

$$E_x = e\Delta_2 \pi, \; E_y = e\Delta_2 \varrho, \; E_z = e\Delta_2 \omega$$
$$E'_x = 0, \quad E'_y = 0, \quad E'_z = 0.$$

Что касается силъ взаимодѣйствія M, то можно принять, что эти силы пропорціональны самымъ перемѣщеніямъ; кромѣ того теорія Кеттелера вводитъ, не явно впрочемъ, еще нѣкоторыя неизвѣстныя *силы взаимодѣйствія эфира*[1]; назовемъ послѣднія U. И такъ:

---

[1] Ниже они будутъ разсмотрѣны подробнѣе. Въ другой своей работѣ о двойномъ преломленіи Кеттелеръ уже вводитъ ихъ явно. См. Wied. Ann. Bd. VII. S. 94 (1879).

$$M_x = -\alpha_x k_x \pi + U_x,\ M'_x = -\alpha_x k'_x u,$$
$$M_y = -\alpha_y k_y \varrho + U_y,\ M_y = -\alpha_y k'_y v,$$
$$M_z = -\alpha_z k_z \omega + U_z,\ M'_z = -\alpha_z k'_z u.$$

Подставляя все это въ основныя уравненія § 4, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\mu \cdot \frac{d^2\pi}{dt^2} &= e\Delta_2\pi - \alpha_x(\varepsilon_x\Delta_2\pi + k_x\pi) + U_x,\\
\mu \cdot \frac{d^2\varrho}{dt^2} &= e\Delta_2\varrho - \alpha_y(\varepsilon_y\Delta_2\varrho + k_y\varrho) + U_y,\\
\mu \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} &= e\Delta_2\omega - \alpha_z(\varepsilon_z\Delta_2\omega + k_z\omega) + U_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и для матеріальной частицы:

$$\left.\begin{aligned}
m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} &= \alpha_x(\varepsilon'_x\Delta_2 u + k'_x u) + U'_x\\
m \cdot \frac{d^2v}{dt^2} &= \alpha_y(\varepsilon'_y\Delta_2 v + k'_y v) + U'_y\\
m \cdot \frac{d^2w}{dt^2} &= \alpha_z(\varepsilon'_z\Delta_2 w + k'_z w) + U'_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Не вводя силъ U'_x, U_y, U'_z, уравненіе (4) не можетъ существовать, ибо приводитъ къ нелѣпости въ случаѣ поглощающихъ срединъ. Для непоглощающихъ

$$U'_x = U'_y = U'_z = 0.$$

Чтобы получить изъ этой системы основныя уравненія Кеттелеровой теоріи, умножимъ уравненія (1) по порядку на A_x, A_y, A_z, подразумѣвая подъ этими послѣдними амплитуды составляющихъ колебанія эфирной частицы; складываемъ результаты и допускаемъ, что неизвѣстныя силы U удовлетворяютъ равенству:

$$A_x U_x + A_y U_y + A_z U_z = 0, \qquad \text{(a)}$$

находимъ:

$$\mu\left(A_x\frac{d^2\pi}{dt^2}+A_y\frac{d^2\varrho}{dt^2}+A_z\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)-e(A_x\Delta_2\pi+A_y\Delta_2\varrho+A_z\Delta_2\omega)+$$
$$\alpha_x A_x(\varepsilon_x\Delta_2\pi+k_x\pi)+\alpha_y A_y(\varepsilon_y\Delta_2\varrho+k_y\varrho)+$$
$$+\alpha_z A_z(\varepsilon_z\Delta_2\omega+k_z\omega)=0. \qquad (3)$$

Это есть первое основное уравненіе теоріи Кеттелера, развитой имъ первоначально[1]. Умножая за-тѣмъ уравненія (2) на A'_x, A'_y, A'_z, гдѣ A'_x, A'_y, A'_z суть составляющія амплитуды колебанія матеріальной частицы, находимъ

$$\left.\begin{aligned} mA'_x\,.\,\frac{d^2u}{dt^2}&=A'_x\alpha_x(\varepsilon'_x\Delta_2u+k'_xu),\\ mA'_y\,.\,\frac{d^2v}{dt^2}&=A'_y\alpha_y(\varepsilon'_y\Delta_2v+k'_yv),\\ mA'_z\,.\,\frac{d^2w}{dt^2}&=A'_z\alpha_z(\varepsilon'_z\Delta_2w+k'_zw).\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Это суть вторыя уравненія разсматриваемой теоріи.

Изъ тѣхъ-же основныхъ уравненій (1) и (2) можно получить выраженіе, не вполнѣ правильно называемое интеграломъ живыхъ силъ, которымъ Кеттелеръ пользуется въ своей теоріи. Умножая эти уравненія по порядку на

$$2\frac{d\pi}{dt},\ 2\frac{d\rho}{dt},\ 2\frac{d\omega}{dt},$$

и складывая результаты, найдемъ:

$$\mu.d.\left[\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right]+$$
$$+m.d.\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]=$$
$$=2e(\Delta_2\pi.d\pi+\Delta_2\varrho.d\varrho+\Delta_2\omega.d\omega)-\{\alpha_x[(\varepsilon_x\Delta_2\pi+k_x\pi)d\pi-$$
$$-(\varepsilon'_x\Delta_2u+k'_xu)du]+\alpha_y[(\varepsilon_y\Delta_2\varrho+k_y\varrho)d\varrho-(\varepsilon'_y\Delta_2v+k'_yv)dv]+$$
$$+\alpha_z[(\varepsilon_z\Delta_2\omega+k_z\omega)d\omega-(\varepsilon'_z\Delta_2w+k'_zw)dw]\}+$$
$$U_xd\pi+U_yd\varrho+U_zd\omega.$$

[1] Pog. Ann. Ergb. VIII. S. 444—474 (1878).

$$\text{Но } \frac{d\pi}{A_x} = \frac{d\rho}{A_y} = \frac{d\omega}{A_z} = \frac{du}{A'_x} = \frac{dv}{A'_y} = \frac{dw}{A'_z}, \tag{b}$$

ибо можно взять: $\pi = A_x \cos Q$, $u = A'_x \cos Q$, и т. п.

гдѣ $Q = qt - \frac{q.r}{c}$, $q = \frac{2\pi}{\tau}$ и c — скорость свѣта вдоль направленія r, τ время одного колебанія частицы эфира, слѣдовательно въ силу равенствъ (a) и (b) остаются въ написанномъ уравненіи только первые три члена, именно:

$$\mu.\, d.\left[\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] +$$

$$+ m.\, d.\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= 2e(\Delta_2\pi . d\pi + \Delta_2\varrho . d\varrho + \Delta_2\omega . d\omega).$$

Подставляя сюда значенія π, u,... и интегрируя между нѣкоторыми двумя предѣлами t, находимъ:

$$2\pi^2\left(\frac{\mu A^2}{\tau^2} + \frac{mA'^2}{\tau^2}\right) . \sin^2 Q = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\, eA^2 . \int \cos Q . \sin Q\, dQ;$$

но $\int \cos Q \sin Q . dQ = \frac{\sin^2 Q}{2}$ + постоянное; слѣдовательно,

взявъ предѣлами t такія два значенія, чтобы имъ соотвѣтствовали значенія Q равныя 0 и Q, получимъ окончательно:

$$\frac{\mu A^2}{\tau^2} + \frac{mA'^2}{\tau} = \frac{eA^2}{l^2} \tag{8}$$

причемъ $l = c.\tau$ есть длина волны внутри тѣла.

Необходимо замѣтить, что послѣднее равенство справедливо только для случая колебаній непоглощаемыхъ, какъ это показываютъ равенства (b), равенства же (3), (4), (5) и (6) существуютъ для всякихъ срединъ — поглощающихъ и непоглощающихъ, хотя способъ вывода этихъ уравненій, предложенный самимъ Кеттелеромъ, основанъ на допущеніи перваго случая и только распространенъ безъ доказательства на второй.

§ 9. Умножимъ теперь уравненія (1) и (2) на A_x, A_y, A_z, A'_x, A'_y и A'_z и сложимъ; тогда получимъ уравненіе:

$$\mu.\left(A_x.\frac{d^2\pi}{dt^2}+A_y\frac{d^2\rho}{dt^2}+A_z\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)+m\left(A'_x\frac{d^2u}{dt^2}+A'_y\frac{d^2v}{dt^2}+A'_z\frac{d^2w}{dt^2}\right)=$$
$$=e(A_x\Delta_2\pi+A_y\Delta_2\rho+A_z\Delta_2\omega)-\{\alpha_x[A_x(\varepsilon_x\Delta_2\pi+\kappa_x\pi)-$$
$$-A'_x(\varepsilon'_x\Delta_2 u+\kappa'_x u)]+\alpha_y[A_y(\varepsilon_y\Delta_2\rho+\kappa_y\rho)-A'_y(\varepsilon'_y\Delta_2 v+$$
$$+\kappa'_y v)]+\alpha_z[A_z(\varepsilon_z\Delta_2\omega+\kappa_z\omega)-A'_z(\varepsilon'_z\Delta_2 w+\kappa'_z w)],$$ ибо
$$A_xU_x+A_yU_y+A_zU_z=0,\quad A'_xU'_x+A'_yU'_y+A'_zU'_z=0.$$

Кеттелеръ предполагаетъ, что если матеріальныя частицы отнесены къ своимъ осямъ упругости, то написанное уравненіе распадается на слѣдующія:

$$\mu.\left(A_x.\frac{d^2\pi}{dt^2}+A_y.\frac{d^2\rho}{dt^2}+A_z\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)+m\left(A'_x.\frac{d^2u}{dt^2}+A'_y.\frac{d^2v}{dt^2}+\right.$$
$$\left.+A'_z\frac{d^2w}{dt^2}\right)=e(A_x\Delta_2\pi+A_y\Delta_2\rho+A_z\Delta_2\omega);\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}A_x(\varepsilon_x\Delta_2\pi+\kappa_x\pi)&=A'_x(\varepsilon'_x\Delta_2 u+\kappa'_x u),\\A_y(\varepsilon_y\Delta_2\rho+\kappa_y\rho)&=A'_y(\varepsilon'_y\Delta_2 v+\kappa'_y v),\\A_z(\varepsilon_z\Delta_2\omega+\kappa_z\omega)&=A'_z(\varepsilon'_z\Delta_2 w+\kappa'_z w).\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Кеттелеръ даетъ выведенныя нами уравненія на основаніи теоремы о работѣ силъ внутри средины, предполагая, что работа каждой силы выражается произведеніемъ силы на соотвѣтствующее перемѣщеніе, пропорціональное амплитудѣ соотвѣтственнаго колебанія, причемъ однако въ способѣ вывода заключается много произвольнаго.

§ 10. Кромѣ уравненій, развитыхъ въ предъидущемъ параграфѣ, Кеттелеръ предложилъ еще другія, но, какъ сейчасъ убѣдимся, второй способъ рѣшенія дѣла несостоятеленъ.

Кеттелеръ[1] въ 1879 году далъ слѣдующія уравненія для дисперсіи:

[1] Wied. Ann. Bd. VII, S. 668 (1879).

$$\mu \, . \, SA_x \, . \, \frac{d^2\pi}{dt^2} + mf' \, . \, SA'_x \, \frac{d^2u}{dt^2} = e \, . \, SA_x \Delta_2 \pi \qquad (1)$$

$$\mu f \, . \, SA_x \, . \, \frac{d^2\pi}{dt^2} + m \, . \, SA'_x \, . \, \frac{d^2u}{dt^2} = S\left(\varkappa u + \gamma \frac{du}{dt} \right) A'_x \qquad (2)$$

причемъ f', f, $\varkappa$ и γ суть нѣкоторые постоянные коеффиціенты.

Чтобъ убѣдиться въ невѣрности уравненій (1) и (2), назовемъ составляющія силъ, дѣйствующихъ на эфирную частицу, буквами E_x, N_x... и на матеріальную — E'_x, N'_x,..., тогда *непремѣнно* существуютъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{d^2\pi}{dt^2} &= E_x + N_x, \quad m \frac{d^2u}{dt^2} = E'_x + N'_x; \\ \mu \frac{d^2\varrho}{dt^2} &= E_y + N_y, \quad m \, . \frac{d^2v}{dt^2} = E'_y + N'_y; \\ \mu \frac{d^2\omega}{dt^2} &= E_z + N_z, \quad m \, . \frac{d^2w}{dt^2} = E'_z + N'_z. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Здѣсь:

$$\begin{aligned} E_x &= e\Delta_2\pi, & E_y &= e\Delta_2\varrho, & E_z &= e\Delta_2\omega, \\ E'_x &= \varkappa u, & E'_y &= \varkappa v, & E'_z &= \varkappa w, \\ N'_x &= \gamma \frac{du}{dt} & N'_y &= \gamma \frac{dv}{dt} & N'_z &= \gamma \frac{dw}{dt}, \end{aligned}$$

силы же N_x, N_y, N_z суть неизвѣстныя силы реакціи матеріальной среды на эфиръ; можно также, кромѣ силъ E' и N', ввести еще какія-нибудь силы, но отъ этого ходъ разсужденій и выводы не измѣняются.

Умножая уравненія (A) соотвѣтственно на A_x, A_y, A_z и $f'A'_x$, $f'A'_y$, $f'A'_z$, по сложеніи результатовъ, принимая во вниманіе уравненіе (1), найдемъ:

$$SA_xN_x + f' \, . \, SA'_x(E'_x + N'_x) = 0. \qquad (a)$$

Точно такъ-же, умножая уравненія (A) соотвѣтственно на fA_x, fA_y, fA_z и A'_x, A'_y, A'_z и складывая результаты, найдемъ при помощи равенства (2):

$$f \,.\, S \,.\, A_x (E_x + N_x) = 0,$$

но f не равно нулю, слѣдовательно:

$$SA_x (E_x + N_x) = 0 \tag{b}$$

или

$$SA_x E_x = - SA_x N_x \tag{c}$$

И такъ, *уравненія Кеттелера* (1) и (2) *требуютъ существованія условій* (a) и (b) или (c).

Посмотримъ, къ чему они приводятъ:

Умножая (1) уравненіе на (f) и вычитая отсюда (2), имѣемъ:

$$mff' SA'_x \frac{d^2u}{dt^2} - mSA'_x \frac{d^2u}{dt^2} = f' \,.\, SA_x E_x - SA'_x (E'_x + N'_x),$$

или:

$$m(ff' - 1) \,.\, SA_x \frac{d^2u}{dt^2} = f' SA_x E_x - SA'_x (E'_x + N'_x) \tag{d}$$

Но по (c) и (a) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} f' \,.\, SA_x E_x &= - f' \,.\, SA_x N_x \\ S \,.\, A'_x (E'_x + N'_x) &= \frac{1}{f'} SA_x N_x \end{aligned} \right\} \tag{α}$$

поэтому (d) обращается въ слѣдующее:

$$m(ff' - 1) \,.\, SA'_x \frac{d^2u}{dt^2} = - \frac{f'^2 - 1}{f'} SA_x N_x \tag{e}$$

Коеффиціентъ ff' по теоріи Кеттелера не можетъ быть единицей[1]; относительно f' должно сказать то-же самое.

Также получимъ, умноживъ (2) уравненіе на f' и вычтя изъ (1), слѣдующее равенство:

$$(1 - ff') \mu \,.\, SA_x \frac{d^2\pi}{dt^2} = SA_x E_x - f' S(E'_x + N'_x) A'_x \tag{f}$$

[1] Wied. Ann. Bd. VII, S. 664.

или при помощи (α):

$$(1-ff')\mu \, . \, SA_x \, . \, \frac{d^2\pi}{dt^2} = 0, \quad \text{или}$$

$$SA_x \frac{d^2\pi}{dt^2} = 0 \qquad \text{(h)}$$

Поэтому и $SA_xE_x = 0$, слѣдовательно по (e) и (α)

$$SA'_x \, . \, \frac{d^2u}{dt^2} = 0 \qquad \text{(к)}$$

Но ясно, что условія (h) и (к) невозможны, ибо приводятъ по интегрированіи къ результатамъ:

$$A_x\pi + A_y\varrho + A_z\omega = Ct + C_1$$
$$A'_xu + A'_yv + A'_zw = C't + C'_1,$$

что невозможно въ случаѣ колебательныхъ движеній.

Такимъ образомъ заключаемъ, что *уравненія (1) и (2) Кеттелера не могутъ существовать*, а потому и выводы изъ нихъ не могутъ быть приняты, такъ что тѣ формулы, которыя провѣрялъ Кеттелеръ[1], имъ не получены раціональнымъ путемъ.

§ 11. Примѣняя уравненія (3) § 2 къ обѣимъ системамъ одновременно, и полагая:

$$u = \alpha_x\pi \, , \quad v = \alpha_y\varrho \, , \quad w = \alpha_z\omega \qquad (\alpha)$$

причемъ α_x, α_y, α_z, суть нѣкоторые коеффиціенты, найдемъ, по преобразованіи интеграла и приравниваніи нулю коеффиціентовъ при $\delta\pi$, $\delta\varrho$, $\delta\omega$, слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} (\mu + m\alpha_x^2) \, . \, \frac{d^2\pi}{dt^2} - U_x = e\Delta_2\pi \, , \\ (\mu + m\alpha_y^2) \, . \, \frac{d^2\varrho}{dt^2} - U_y = e\Delta_2\varrho \, , \\ (\mu + m\alpha_z^2) \, . \, \frac{d^2\omega}{dt^2} - U_z = e\Delta_2\omega \, , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

при этомъ было положено:

[1] Wied. Ann. Bd. XII, S. 363 und S. 481 (1881).

$$\delta U_i = (e\Delta_2\pi + U_x)\,.\,\delta\pi + (e\Delta_2\varrho + U_y)\,\delta\varrho + (e\Delta_2\omega + U_z)\,\delta\omega$$

или

$$\delta U_i = e(\Delta_2\pi\,\delta\pi + \Delta_2\varrho\,\delta\varrho + \Delta_2\omega\,\delta\omega) + (U_x\delta\pi + U_y\delta\varrho + U_z\delta\omega)$$

и ясно, что первый членъ въ скобкахъ представляетъ элементарную работу упругихъ силъ, а второй — остальныхъ силъ взаимодѣйствія.

Полагая въ уравненіяхъ (I):

$$m\alpha_x^2 = m_x\,,\ m\alpha_y^2 = m_y\,,\ m\alpha_z^2 = m_z$$

и допуская, что

$$AU_x + BU_y + CU_z = 0, \qquad \text{(b)}$$

тогда уравненія (I) дадутъ:

$$S.(\mu + m_x).\frac{d^2\pi}{dt^2}.A_x = eSA_x.\Delta_2\pi. \qquad \text{(II)}$$

Подставляя сюда значеніе π, ϱ, ω изъ § 25 въ предположеніи $K=0$, найдемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{m_x}{\mu}A^2 + \frac{m_y}{\mu}B^2 + \frac{m_z}{\mu}C^2 \quad \text{или}$$

$$n^2 - 1 = a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2. \qquad \text{(III)}$$

Это уравненіе[1] того-же вида, какъ и уравненіе (a) въ § 13, и даетъ выводы, помѣщенные въ §§ 13—18.

Замѣтимъ, что предположенія (a) суть упрощенныя предположенія Буссинеска[2].

Если въ уравненіяхъ (I) сдѣлаемъ:

$$U_x = \frac{\partial p}{\partial x}\,,\ U_y = \frac{\partial p}{\partial y}\,,\ U_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

---

[1] Замѣтимъ, что это уравненіе требуетъ перпендикулярности колебаній къ лучу.

[2] Journal de Liouville. 2 série, t. XIII, p. 330 (1868).

и затѣмъ положимъ:

$$p = P\cos Q,$$

то получимъ уравненія Кеттелера, данныя имъ въ 1879 г.[1]; они приводятъ къ тѣмъ-же результатамъ, что и уравненіе (II).

Если положимъ, что

$$\frac{m_x}{\mu} + 1 = n_x^2 - 1; \frac{m_y}{\mu} + 1 = n_y^2 - 1; \frac{m_z}{\mu} + 1 = n_z^2 - 1;$$

то n_x, n_y, n_z будутъ главными показателями преломленія тѣла.

Хотя въ этой теоріи мы получаемъ основаніе для двойнаго преломленія, но не имѣемъ зависимости показателей преломленія отъ длины волны, т. е. теоріи дисперсіи не получается.

И такъ, заключаемъ, что *и эта теорія Кеттелера не можетъ считаться вполнѣ состоятельною.*.

§ 12. Займемся теперь дальнѣйшимъ развитіемъ первоначальной теоріи Кеттелера, основанія которой изложены въ §§ 8 и 9.

Подставляя въ уравненія (3) и (4) значенія π, u... изъ § 25, въ предположеніи $K = 0$, находимъ:

$$\mu c^2 = e - [\alpha_x(\varepsilon_x - l^2\kappa_x)A^2 + \alpha_y(\varepsilon_y - l^2\kappa_y)B^2 + \\ + \alpha_z(\varepsilon_z - l^2\kappa_z)C^2] \qquad (1)$$

Здѣсь A, B, C суть косинусы направленія колебанія и для простоты письма написаны коеффиціенты $\kappa_x \ldots$, вмѣсто $\frac{4\pi^2}{\kappa_x}, \ldots$; потомъ

$$mc^2 = \alpha_x(\varepsilon'_x - \kappa'_x l^2) = \alpha_y(\varepsilon'_y - \kappa'_y l^2) = \alpha_z(\varepsilon'_z - \kappa'_z l^2). \quad (1)$$

Подставляя отсюда значеніе α_x... въ (1) находимъ:

$$\mu c^2 = e - mc^2\left[\frac{\varepsilon_x - \kappa_x l^2}{\varepsilon'_x - \kappa'_x l^2}A^2 + \frac{\varepsilon_y - \kappa_y l^2}{\varepsilon'_y - \kappa'_y l^2}B^2 + \frac{\varepsilon_z - \kappa_z l^2}{\varepsilon'_z - \kappa_z' l^2}C^2\right]$$

[1] Wied. Annalen. Bd. VII, S. 102 (1879).

Но $\frac{e}{\mu}=\Omega^2, \frac{\Omega}{c}=n$ — показатель преломленія среды, поэтому:

$$n^2-1=\frac{m}{\mu}\left[\frac{\varepsilon_x-\kappa_x l^2}{\varepsilon'_x-\kappa'_x l^2}A^2+\frac{\varepsilon_y-\kappa_y l^2}{\varepsilon'_y-\kappa'_y l^2}B^2+\frac{\varepsilon_z-\kappa_z{}^2}{\varepsilon'_z-\kappa'_z l^2}C^2\right] \quad (3)$$

Положимъ:

$\frac{\varepsilon'_x}{\kappa'_x}=l_x{}^2, \frac{\varepsilon'_y}{\kappa'_y}=l_y{}^2, \frac{\varepsilon'_z}{\kappa'_z}=l_z{}^2$, тогда уравненія (2) даютъ:

$$\kappa'_x\alpha_x(l^2{}_x-l^2)=\kappa'_y\alpha_y(l_y{}^2-l^2)=\kappa'_z\alpha_z(l_z{}^2-l^2).$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $l=0$ и $l=\infty$, найдемъ:

$$\kappa'_x\alpha_x l_x{}^2=\kappa'_y\alpha_y l_y{}^2=\kappa'_z\alpha_z l_z{}^2,$$

$$\kappa'_x\alpha_x=\kappa'_y\alpha_y=\kappa'_z\alpha_z, \text{ откуда}$$

$l_x^2=l_y{}^2=l_z^2=l_0^2$, полагая общее значеніе l_x, l_y, l_z равнымъ l_0; положимъ далѣе:

$$\frac{m}{\mu}\left(\frac{\kappa_x}{\kappa'_x}-\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x}\right)=a_x, \frac{m}{\mu}\left(\frac{\kappa_y}{\kappa'_y}-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon'_y}\right)=a_y,$$

$$\frac{m}{\mu}\left(\frac{\kappa_z}{\kappa'_z}-\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'_z}\right)=a_z,$$

тогда уравненіе (3) приметъ видъ:[1]

$$n^2-1=\frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{\varepsilon_x}{\kappa'_x}-\frac{\kappa_x}{\kappa'_x}l^2\right)A^2+\frac{m}{\mu}\left(\frac{\varepsilon_y}{\kappa'_y}-\frac{\kappa_y}{\kappa'_y}l^2\right)B^2+}{l_0{}^2-l^2}$$

$$\frac{+\frac{m}{\mu}\left(\frac{\varepsilon_z}{\kappa'_z}-\frac{\kappa_z}{\kappa'_z}l^2\right)C^2}{l_0-l^2}$$

Но

$$\frac{m}{\mu}\frac{\kappa_x}{\kappa'_x}A^2+\frac{m}{\mu}\frac{\kappa_y}{\kappa'_y}B^2+\frac{m}{\mu}\frac{\kappa_z}{\kappa'_z}C^2=a_xA^2+a_yB^2+a_zC^2+$$

$$+E_xA^2+E_yB^2+E_zC^2=a+E, \text{ если положимъ:}$$

[1] Необходимо помнить, что здѣсь вездѣ n есть показатель преломленія луча, т. е. принимаемъ, какъ и выше, перпендикулярность колебаній къ лучу.

$$a_x A^2 + a_y B^2 + a_z C^2 = a$$

$$\frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x} = E_x \,, \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon'_y} = E_y \,, \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'_z} = E_z \text{ и}$$

$$E_x \cdot A^2 + E_y \cdot B^2 + E_z \cdot C^2 = E; \text{ далѣе}$$

$$\frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\kappa'_x} \cdot A^2 + \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_y}{\kappa'_y} \cdot B^2 + \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_z}{\kappa'_z} \cdot C^2 =$$

$$= l_0^{\,2}(E_x \cdot A^2 + E_y \cdot B^2 + E_z \cdot C^2) = l_0^{\,2} E.$$

Слѣдовательно:

$$n^2 - 1 = \frac{al^2 + (l^2 - l_0^2)E}{l^2 - l_0^2}, \text{ или}$$

$$n^2 - 1 = E + \frac{al^2}{l^2 - l_0^{\,2}} \text{ (I) или еще}$$

$$n^2 - 1 = E + \frac{a}{1 - \dfrac{l_0^2}{l^2}} \qquad \text{(I)}$$

Полагая здѣсь $l = 0$ и $l = \infty$ и n_0 и n_∞ называя соотвѣтствующія значенія n, имѣемъ:

$$n_0^{\,2} - 1 = E$$

$$n^2_\infty - 1 = E + a.$$

Вычитая эти уравненія изъ (I), найдемъ:

$$n^2 - n_0^{\,2} = \frac{al^2}{l^2 - l_0^{\,2}},\; n^2 - n^2_\infty = \frac{al_0^{\,2}}{l^2 - l_0^{\,2}}. \qquad \text{(II)}$$

Послѣднія двѣ формулы найдены Кеттелеромъ.

Формула (II) была подвергнута опытной повѣркѣ Клаесомъ[1] и Зибеномъ[2].

[1] Wied. Ann. Bd. III, S. 389 (1878).

[2] Wied. Ann. Bd. VII, S. 137 (1879).

§ 13. Перейдемъ теперь къ двойному преломленію свѣта.

Равенство (I), послѣ обратной подстановки въ него значеній E и a, обращается въ слѣдующее:

$$n^2-1=\left(E_x+\frac{a_x}{1-\frac{l_0^2}{l^2}}\right)A^2+\left(E_y+\frac{a_y}{1-\frac{l_0^2}{l^2}}\right)B^2+$$
$$+\left(E_z+\frac{a_z}{1-\frac{l_0^2}{l^2}}\right)C^2 \qquad (a)$$

Замѣняя единицу лѣвой части этого уравненія трехчленомъ $A^2+B^2+C^2$, перенося его въ правую и полагая:

$$\left.\begin{aligned} E_x+\frac{a_x}{1-\frac{l_0^2}{l^2}}&=n_x^2-1,\\ E_y+\frac{a_y}{1-\frac{l_0^2}{l^2}}&=n_y^2-1,\\ E_z+\frac{a_z}{1-\frac{l_0^2}{l^2}}&=n_z^2-1,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

имѣемъ:

$$n^2=n_x^2A^2+n_y^2B^2+n_z^2C^2 \qquad (2)$$

Физическій смыслъ n_x, n_y, n_z очевиденъ: это суть главные показатели преломленія тѣла, и уравненія (1) даютъ формулы для вычисленія дисперсіи осей кристалла.

§ 14. Уравненіе (2) послужитъ намъ исходнымъ пунктомъ для дальнѣйшихъ выводовъ теоріи.

Проведемъ изъ какой-нибудь точки внутри тѣла прямую, параллельную колебанію эфирной частицы, и отложимъ на ней длину равную $\frac{1}{n}$, тогда, если x, y, z будутъ координаты конца этой прямой, имѣемъ:

$$\frac{A}{n}=x\,,\ \frac{B}{n}=y\,,\ \frac{C}{n}=z.$$

Подставляя отсюда значеніе A, B, C въ уравненіе (2), имѣемъ:

$$n_x^2 \cdot x^2 + n_y^2 \cdot y^2 + n_z \cdot z^2 = 1. \qquad (3)$$

Послѣднее уравненіе представляетъ эллипсоидъ, отнесенный къ своимъ осямъ, поэтому, если черезъ данную точку будутъ передаваться колебанія во всѣ стороны, то геометрическое мѣсто концовъ прямыхъ длины $\frac{1}{n}$ будетъ эллипсоидъ (3). Такимъ образомъ получимъ слѣдующее правило: *чтобы опредѣлить показатель преломленія свѣтовой волны, распространяющейся въ данномъ направленіи, надо провести радіусъ-векторъ эллипсоида (3), параллельный направленію колебанія въ этой волнѣ, и обратная величина этого радіуса-вектора будетъ искомымъ показателемъ преломленія.*

Такъ-какъ эллипсоидъ (3) даетъ $\frac{1}{n}$, а $n = \frac{c_0}{c}$ и c_0 извѣстно, то слѣдовательно его можно назвать *эллипсоидомъ показателей преломленія.* По старой терминологіи, это есть эллипсоидъ Фрэнэля.

Принявъ $c_0 = 1$, тогда всякій радіусъ-векторъ эллипсоида (3) будетъ равенъ скорости c въ данномъ направленіи радіуса-вектора.

§ 15. Найдемъ сѣченіе эллипсоида показателей преломленія плоскостью параллельной элементарной волнѣ и проведенной черезъ центръ его.

Уравненіе этой плоскости есть:

$$mx + ny + pz = 0\,[1]. \qquad (4)$$

Въ сѣченіи эллипсоида (3) плоскостью (4) получимъ эллипсисъ, полуоси котораго суть корни, какъ извѣстно изъ геометріи [2], слѣдующаго уравненія:

---

[1] Не надо смѣшивать косинуса n съ показателемъ n.

[2] См. напр. *Salmon,* A treatise on the analytic geometry of three dimensions. 3 ed., p. 67, § 101.

$$\frac{m^2}{1-n^2{}_x.s^2}+\frac{n^2}{1-n^2{}_y\, s^2}+\frac{p^2}{1-n^2{}_z.s^2}=0, \tag{5}$$

въ которомъ s и есть какая-нибудь изъ полуосей; но если положимъ:

$$n_x=\frac{c_0}{\alpha},\ n_y=\frac{c_0}{\beta},\ n_z=\frac{c_0}{\gamma},$$

причемъ физическое значеніе α, β, γ понятно, тогда уравненіе (5) превращается въ слѣдующее:

$$\frac{\alpha^2m^2}{\alpha^2-c^2{}_0s^2}+\frac{\beta^2n^2}{\beta^2-c^2{}_0s^2}+\frac{\gamma^2p^2}{\gamma^2-c^2{}_0s^2}=0.$$

Но по предъидущему

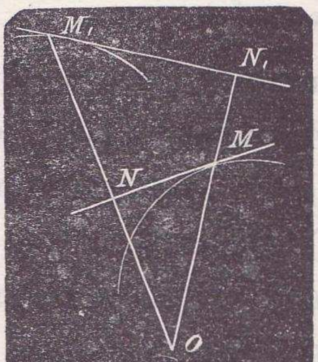
$$m=\frac{x}{c_0s},\ n=\frac{y}{c_0s},\ p=\frac{z}{c_0s},$$

и положивъ для удобства:

$x^2+y^2+z^2=\varrho^2$, имѣемъ:

$$\frac{\alpha^2x^2}{\alpha^2-\rho^2}+\frac{\beta^2y^2}{\beta^2-\rho^2}+\frac{\gamma^2z^2}{\gamma^2-\rho^2}=0. \tag{I}$$

Это, какъ извѣстно и какъ ниже будетъ показано, есть поверхность волны внутри кристалла.



§ 16. Построимъ поверхность взаимно полярную эллипсоиду (3). Пусть M будетъ точка касанія на эллипсоидѣ (3) и ON нормалъ къ касательной плоскости изъ центра O. Найдемъ геометрическое мѣсто точекъ M_1 такихъ, что $OM_1 . ON=1$.

Если x_1, y_1, z_1 будутъ координаты M, X, Y, Z перемѣнныя координаты какой-нибудь точки касательной плоскости, напр. точки N, и x, y, z координаты M_1, тогда имѣемъ для рѣшенія задачи слѣдующія уравненія:

(α) $n_x{}^2.x_1{}^2+n_y{}^2.y_1{}^2+n_z{}^2.z_1{}^2=1$ уравненіе эллипсоида (3)

(β) $n_x{}^2 . x_1 . X + n_y{}^2 . y_1{}^2 . Y + n_z{}^2 . z_1 = 1$ — уравненіе касательной плоскости,

(γ) $\dfrac{X}{n_x{}^2 . x_1} = \dfrac{Y}{n_y{}^2 . y_1} = \dfrac{Z}{n_z{}^2 . z_1}$ уравненіе нормала къ ней и

(δ) $\dfrac{x}{X} = \dfrac{y}{Y} = \dfrac{z}{Z} = \dfrac{OM_1}{ON} = \dfrac{1}{ON^2}$.

Опредѣляя X, Y, Z изъ (β) и (γ), найдемъ:

$$X = \frac{n_x{}^2 . x_1}{L},\ Y = \frac{n_y{}^2 . y_1}{L},\ Z = \frac{n_z{}^2 . z_1}{L}, \text{ гдѣ}$$

$$L = \frac{1}{n_x{}^4 . x_1{}^2 + n_y{}^4 . y_1 + n_z{}^4 . z_1}$$

Но $ON^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, или:

$$ON^2 = \frac{1}{L}.$$

Подставляя значеніе X, Y, Z и ON въ уравненія (δ), найдемъ:

$$x = n_x{}^2 . x_1,\quad y = n_y{}^2 . y_1,\quad z = n_z{}^2 . z_1$$

Подставляя же отсюда значенія x_1, y_1, z_1 въ уравненіе (α), найдемъ:

$$\frac{x^2}{n_x{}^2} + \frac{y^2}{n_y{}^2} + \frac{z^2}{n_z{}^2} = 1. \tag{6}$$

Этотъ эллипсоидъ предложенъ Плюкеромъ[1] и носитъ его имя. Онъ же названъ Коши поляризаціоннымъ эллипсоидомъ. Радіусы-векторы OM_1 этого эллипсоида даютъ величину $\dfrac{n}{\cos\delta}$, если δ уголъ между OM и ON. Но $n = \dfrac{c_0}{c}$, слѣдовательно

$$OM_1 = \frac{c_0}{c . \cos\delta} = \frac{c_0}{c_1}$$

---

1 Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XIX, S. 10. (1838).

а c_1 есть проэкція скорости c на нормалъ касательной плоскости къ эллипсоиду (3), слѣдовательно OM_1 есть показатель преломленія вдоль нормала къ этой плоскости; называя его n_1 имѣемъ:

$$OM_1 = n_1 .$$

§ 17. Если будемъ искать полуоси сѣченія эллипсоида (6) плоскостью (4), то какъ и въ § 16, найдемъ[1]:

$$\frac{n_x^2 . m_1^2}{n_x^2 - r^2} + \frac{n_y^2 . n_1^2}{n_y^2 - r^2} + \frac{n_z^2 . p_1^2}{n_z^2 - r^2} = 0.$$

Корни r и будутъ значеніями обѣихъ полуосей.

Но:

$$n_x = \frac{c_0}{\alpha} , \ n_y = \frac{c_0}{\beta} , \ n_z = \frac{c_0}{\gamma} \text{ и } r = n_1$$

слѣдовательно:

$$\frac{m_1^2}{\alpha^2 - c_1^2} + \frac{n_1^2}{\beta^2 - c_1^2} + \frac{p_1^2}{\gamma^2 - c_1^2} = 0. \tag{II}$$

Это есть извѣстное уравненіе Фрэнэля для опредѣленія скорости c_1; оси эллипсоида даютъ направленіе колебанія въ обоихъ случаяхъ.

§ 18. Получивъ его, можно опредѣлить поверхность волны какъ обертку плоской волны, уравненіе которой можно написать въ видѣ:

$$m_1 x + n_1 y + p_1 z = c_1 \tag{7}$$

причемъ перемѣнные параметры m_1, n_1, p_1 и c_1 удовлетворяютъ соотношеніямъ (7), (II) и слѣдующему:

$$m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 1. \tag{8}$$

Дѣйствуя по общему правилу, найдемъ уравненіе поверхности въ видѣ:

$$\frac{\alpha^2 x^2}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 y^2}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2 z^2}{\rho^2 - \gamma^2} = 0, \tag{III}$$

1 Подразумѣвая подъ m, n, p косинусы направленія нормала къ плоской волнѣ, т. е. m_1, n_1, p_1 (§ 18).

гдѣ

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Такимъ образомъ получаемъ все, что уже установлено въ теоріи двойнаго преломленія въ кристаллическихъ непоглощающихъ срединахъ.

§ 19. Перейдемъ теперь къ срединамъ, поглощающимъ свѣтъ. Подставляя значенія[1] π, u,... въ уравненія (5), по сравненіи коэффиціентовъ при $\cos Q$ и $\sin Q$, найдемъ:

$$Uc_0{}^2 + q^2 = -\frac{mq^2 SA'_x{}^2 \cos\psi_x}{\mu SA_x{}^2} \tag{1}$$

$$Vc_0{}^2 = -\frac{mq^2 SA'_x{}^2 \sin\psi_x}{\mu SA_x{}^2}. \tag{2}$$

Подставляя же π, u,... въ (6), найдемъ:

$$\frac{m}{\mu} SA'_x{}^2 \cos\psi_x = E_1 + \frac{a_1(1+l_0{}^2U)}{(1+l_0{}^2U)^2 + l_0{}^4V^2} \tag{3}$$

$$\frac{m}{\mu} SA'_x{}^2 \sin\psi_x = -\frac{a_1 l_0{}^2 V}{(1+l_0{}^2U)^2 + l_0{}^4V^2}. \tag{4}$$

Здѣсь положено было:

$$\frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x} = E_x\,, \quad \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\kappa_x}{\kappa'_x} = a_x + E_x\,, \text{ т. е.}$$

$$\frac{m}{\mu}\left(\frac{\kappa_x}{\kappa'_x} - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x}\right) = a_x\,,$$

и за-тѣмъ *по предположенію* Кеттелера

$$\frac{\varepsilon'_x}{\kappa'_x} = \frac{\varepsilon'_y}{\kappa'_y} = \frac{\varepsilon'_z}{\kappa'_z} = l_0{}^2\,; \tag{a}$$

кромѣ того положено:

$$Sa_x \cdot A_x{}^2 = a_1\,, \quad SE_x \cdot A_x{}^2 = E_1$$

[1] Здѣсь $\pi = A_x e^{-Kr} . \cos Q$, $u = A'_x . e^{-Kr} . \cos(Q - \psi_x)$ и т. п.

Подставляя значенія $\frac{m}{\mu} SA'^{\,2}_x . \cos\psi_x$, $\frac{m}{\mu} SA'^{\,2}_x . \sin\psi_x$ изъ равенствъ (3) и (4) въ равенства (1) и (2), найдемъ, положивъ предварительно:

$$\frac{Sa_x A_x^2}{SA_x^2} = a, \quad \frac{SE_x A_x^2}{SA_x^2} = E,$$

слѣдующія равенства для опредѣленія U и V:

$$Uc_0^{\,2} + q^2 = -Eq^2 - \frac{aq^2(1+l_0^2 U)}{(1+l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2} \tag{5}$$

$$Vc_0^{\,2} = \frac{q^2 . a . V}{(1+l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2}. \tag{6}$$

Такъ какъ V не равно нулю, то (6) даетъ:

$$(1+l_0^{\,2} U)^2 + l_0^{\,4} V^2 = \frac{aq^2}{c_0^{\,2}}. \tag{6}$$

Подставляя это въ (5), найдемъ изъ получаемаго при этомъ равенства:

$$U = -\frac{c_0^{\,2} + q^2 l_0^2 (1+E)}{2l_0^2 . c_0^2}, \text{ но}$$

$U = -\frac{q^2}{c^2} + K^2$, $q = \frac{2\pi c_0}{\lambda}$, $\frac{c_0}{c} = n$ и, положивъ вмѣстѣ съ Кеттелеромъ:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} . p, \text{ слѣдовательно}$$

найдемъ:

$$n^2 - p^2 = \frac{\lambda^2 + 4\pi^2 l_0^2 (1+E)}{8\pi^2 l_0^2}. \tag{c}$$

Но несогласіе этой формулы съ фактами очевидно, слѣдовательно *принять теорію Кеттелера* въ томъ видѣ, въ какомъ онъ ее даетъ, *невозможно.*

Хотя можно предположить, что невѣрность вывода зависитъ отъ произвольнаго предположенія (а), но, не сдѣлавъ этого предположенія, получаемъ столь сложныя формулы, что одна уже эта сложность подрываетъ довѣріе къ нимъ.

Посмотримъ лучше: не заключается ли причина этого въ допущеніи справедливости равенствъ (6); не допуская ихъ, мы должны имѣть слѣдующее равенство:

$$SA_x(E_x\Delta_2\pi+\kappa_x\pi)=SA'_x(E'_x\Delta_2 u+\kappa'_x u). \qquad (b')$$

Но тогда мы не можемъ опредѣлить синусовъ и косинусовъ ψ и исключить ихъ; отсюда должны заключить, что вообще *основныя уравненія, данныя Кеттелеромъ* для поглощающихъ срединъ, *несостоятельны.*

Полагая въ (6) равенствѣ $V=0$, мы придемъ къ найденной уже формулѣ для поглощающихъ срединъ (прозрачныхъ).

ГЛАВА IV.

§ 20. Положимъ въ уравненіяхъ (I) и (II) § 5:

$$R_x+F_x=-\alpha_x\varepsilon_x\Delta_2\pi\,,\ R_y+F_y=-\alpha_y\varepsilon_y\Delta_2\varrho\,,$$

$$R_z+F_z=-\alpha_z\varepsilon_z\Delta_2\omega\,,\ M_x=\mu\frac{\partial P}{\partial x}\,,M_y=\mu\frac{\partial P}{\partial y}\,,\ M_z=\mu\frac{\partial P}{\partial z}\,;$$

причемъ на P можно смотрѣть, какъ на потенціалъ гидростатическаго давленія внутри эфира, и всегда можно взять: $P=\frac{d\psi}{dt}$, ибо P есть періодическая функція времени, и потому, если $P=F(t)$, то, опредѣливъ ψ изъ уравненія:

$$\psi=\int F(t)\,dt, \text{ имѣемъ:}$$

$$P=\frac{d\psi}{dt}.$$

Предполагая эфиръ изотропнымъ, имѣемъ вмѣсто 1-го уравненія системы (I) слѣдующее:

$$\frac{\mu}{e-\alpha_x\varepsilon_x}\left(\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{d^2\psi}{dt\,.\,dx}\right)=\Delta_2\pi,$$ или, полагая

$$\frac{\mu}{e-\alpha_x\varepsilon_x}=\frac{1}{\alpha^2},\ \frac{\mu}{e-\alpha_y\varepsilon_y}=\frac{1}{\beta^2},\ \frac{\mu}{e-\alpha_z\varepsilon_z}=\frac{1}{\gamma^2},$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{d^2\psi}{dx\,.\,dt}&=\alpha^2\Delta_2\pi;\\ \frac{d^2\varrho}{dt^2}-\frac{d^2\psi}{dy\,.\,dt}&=\beta^2\Delta_2\varrho;\\ \frac{d^2\omega}{dt^2}-\frac{d^2\psi}{dz\,.\,dt}&=\gamma^2\Delta_2\omega.\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

Что касается уравненій (II), то можно предположить, что воздѣйствіе матеріальныхъ частицъ обнаруживается лишь введеніемъ силъ $R+F$ въ уравненія движенія эфирной частицы, такъ что надо принять, что $u=v=w=0$. Тогда интересно замѣтить, что уравненія (a) того же вида, какъ и данныя Максуэллемъ въ его электромагнитной теоріи свѣта[1]. Положимъ вмѣстѣ съ Максуэллемъ:

$mx+ny+pz-ct=s$, и примемъ s за новое независимое перемѣнное; также положимъ:

$$\pi=A\sigma$$
$$\varrho=B\sigma$$
$\omega=C\sigma$ и $\sigma=f(mx+ny+pz-ct)$ или
$\sigma=f(s)$, гдѣ f есть знакъ періодической функціи.

Продифференцировавъ π, ϱ, ω и ψ по отношенію s, найдемъ

$$\Delta_2\pi=\frac{d^2\pi}{ds^2}=\pi'',\ \frac{d^2\pi}{dt^2}=-c^2\pi'',\ \frac{d^2\psi}{dx.dt}=-mc.\frac{d^2\psi}{ds^2}=-mc\psi''.$$

[1] J. C. *Maxwell*, A treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II. p. 393.

Подставляя въ первое изъ уравненій (a), имѣемъ:

$$(c^2-\alpha^2).A\sigma''+cm\psi''=0.$$ Также:

$$\left.\begin{aligned}(c^2-\beta^2).B\sigma''+cn\psi''=0.\\(c^2-\gamma^2).C\sigma''+cp\psi''=0.\end{aligned}\right\}\quad(c)$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на

$\frac{m}{c^2-\alpha^2}, \frac{n}{c^2-\beta^2}, \frac{p}{c^2-\gamma^2}$ и складывая результаты, находимъ:

$$c\psi''\left\{\frac{m^2}{c^2-\alpha^2}+\frac{n^2}{c^2-\beta^2}+\frac{p^2}{c^2-\gamma^2}\right\}=-\sigma''(Am+Bn+Cp),$$

но $Am+Bn+Cp=0$, слѣдовательно:

$$\frac{m^2}{c^2-\alpha^2}+\frac{n^2}{c^2-\beta^2}+\frac{p^2}{c^2-\gamma^2}=0; \qquad (1)$$

такъ какъ ψ'' нулемъ быть не можетъ по положенію.

§ 21. Полагая:

$$\sigma=M.\cos\frac{2\pi}{\lambda}(ct-mx-ny-pz)=M.\cos\frac{2\pi s}{\lambda},$$

имѣемъ: $\sigma''=-\frac{4\pi}{\lambda}.\sigma$; подставивъ это значеніе въ уравненія (c)

и положивъ:

$$F=\frac{c\lambda^2}{4\pi^2\sigma}.\psi'', \text{ найдемъ:}$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha^2-c^2).A=F.m\\(\beta^2-c^2).B=F.n\\(\gamma^2-c^2).C=F.p\end{aligned}\right\}\quad(d)$$

Эти уравненія были получены Лянгомъ[1] и Стефаномъ[2] на основаніи иныхъ соображеній.

---

[1] Einleitung in die theoretische Physik. S. 330. и der Wiener Academie der Wissenschaften Sitzungsberichte. Bd. 43, S. 306 (1861).

[2] Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. 50, S. 518 (1865).

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что по теоріи Максуэлля или Лянга эфиръ не приводитъ матеріальныхъ частицъ въ колебательное движеніе и эти послѣднія участвуютъ въ явленіи лишь тѣмъ, что измѣняютъ упругость эфира, и эти измѣненія зависятъ отъ направленія, т. е. измѣненія упругости эфира вдоль различныхъ осей различны.

Что касается свѣторазсѣянія, то разбираемыя теоріи имъ не занимаются, и основныя формулы ихъ не могутъ служить подобной цѣли; другими словами: тѣла, двойнымъ преломленіемъ коихъ онѣ занимаются, не обладаютъ свойствомъ свѣторазсѣянія.

§ 22. Теорія Бріо[1]. Бріо, развивая основанія теоріи Коши, хотя и пришелъ къ установленнымъ опытомъ уравненіямъ двойнаго преломленія, но въ теоріи свѣторазсѣянія встрѣтилъ препятствіе: свободный эфиръ (міровой эфиръ) оказался обладающимъ дисперсіей[2], что противорѣчитъ наблюденіямъ. Измѣнивъ теорію Коши введеніемъ воздѣйствія матеріальныхъ частицъ, Бріо получилъ выводъ, тоже несогласный съ опытомъ: онъ нашелъ, что показатель преломленія увеличивается съ длиною волны. Такія обстоятельства заставили Бріо прибѣгнуть къ новой гипотезѣ — гипотезѣ періодическаго распредѣленія эфира внутри тѣла, другими словами, къ гипотезѣ перемѣнной плотности эфира, т. е. къ предположенію сжимаемости эфира внутри среды; послѣднее же равносильно положенію, что колебанія эфира *внутри тѣла* не строго поперечны, съ чѣмъ согласиться нельзя.

Въ виду подобныхъ недостатковъ теоріи Бріо, мы излагать ее не будемъ.

§ 23. Теорія Буссинеска[3]. Основныя положенія теоріи слѣдующія:

---

[1] Essays sur la théorie mathématique de la lumière. 1864.

[2] Essays etc. p. 171.

[3] Journal de Liouville, 2 série, t. XIII, p. 330 (1868). Также т. XVIII, p. 361 (1873).

1) Дѣйствіе матеріальныхъ частицъ на эфирныя выражается увеличеніемъ (алгебраическимъ) ускорительной силы эфирной частицы на ускорительную силу матеріальной частицы.

2) Упругость эфира внутри кристалла отличается отъ упругости мірового эфира, но очень мало и по различнымъ направленіямъ различна.

3) Между колебаніями эфирной и матеріальной частицъ существуетъ зависимость вида:

$$u = A(1+\alpha)\pi + B\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \theta}{\partial x} + D\Delta_2 \pi \qquad \text{и т. п.,}$$

гдѣ A, B, C, D суть нѣкоторые коеффиціенты и α для различныхъ осей различны; θ — коеффиціентъ кубическаго разширенія эфира.

4) Внутри эфирной среды существуютъ продольныя колебанія.

Разсматривая эти положенія, безъ труда замѣтимъ, что второе и четвертое положенія нельзя принять, какъ и было уже замѣчено въ предъидущемъ параграфѣ и какъ показалъ Кеттелеръ въ своихъ работахъ по теоріи поляризаціи свѣта.

Что касается положенія 3-го, то, кажется, вѣрнѣе было бы разсматривать всѣ коеффиціенты $A, B, \ldots$ для различныхъ осей различными, вслѣдствіе положенія 2-го; однако, впрочемъ, какъ приближенныя зависимости, ихъ можно принять.

Первое же положеніе остается гипотезой, которую можемъ повѣрить только à posteriori, и не трудно убѣдиться, что оно лишнее при существованіи положенія 3-го.

Основавъ на этихъ положеніяхъ свою теорію дисперсіи и двойнаго преломленія, Буссинескъ пришелъ въ первомъ случаѣ къ выводамъ, отличающимся отъ найденныхъ Кеттелеромъ или Ломмелемъ[1] тѣмъ, что въ нихъ нѣтъ члена съ λ^2, что невполнѣ согласно съ опытами; въ случаѣ же двойнаго преломленія онъ нашелъ, что извѣстныя рѣшенія Фрэнэля суть только приблизительныя.

[1] См. также главу VII.

На основаніи всего сказаннаго выше должно заключить, что теоріи Буссинеска въ томъ видѣ, въ какомъ онъ самъ далъ ихъ, не могутъ быть приняты за вполнѣ удовлетворительныя; однако справедливость требуетъ сказать, что своими изслѣдованіями Буссинескъ вывелъ теоріи двойнаго преломленія и дисперсіи на новую дорогу, болѣе плодотворную, чѣмъ та, которою шли Коши и его послѣдователи (Бріо, Сарро[1], Галопенъ[2] и др.).

ГЛАВА V.

§ 24. Покажемъ теперь, какимъ образомъ изъ нашихъ уравненій § 5 вытекаютъ основанія теоріи, предложенной Ломмелемъ. Допустимъ, что силы тренія пропорціональны относительной скорости трущейся частицы, а силы сопротивленія пропорціональны ея абсолютной скорости. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$F_x = 2\nu m\left(\frac{d\pi}{dt} - \frac{du}{dt}\right),\ R_x = 0,\ R'_x = 2\kappa m\frac{du}{dt},\ M_x = 0;$$

$$F'_x = -F_x.$$

$$F_y = 2\nu m\left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{dv}{dt}\right),\ R_y = 0,\ R'_y = 2\kappa m\frac{dv}{dt},\ M_y = 0;$$

$$F'_y = -F_y.$$

$$F_z = 2\nu m\left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{dw}{dt}\right),\ R_z = 0,\ R'_z = 2\kappa m\frac{dw}{dt},\ M_z = 0;$$

$$F'_z = -F_z.$$

причемъ слѣдовательно треніе и сопротивленіе эфира принимаются ничтожными, что прямо вытекаетъ изъ свойствъ, всѣми приписываемыхъ эфиру. Количества ν и κ суть коеффиціенты тренія и сопротивленія частицъ матеріи.

---

[1] Journal de Liouville, 2 série, t. XII et XIII (1867—68).

[2] Thèse de Mécanique. (1858).

Что касается до силъ упругости, то принимаемъ, что эфиръ внутри тѣла изотропенъ, а само тѣло кристаллическаго строенія и за координатныя оси возьмемъ систему какихъ-нибудь трехъ прямоугольныхъ осей. Тогда, зная уже, что

$$\frac{\partial\pi}{\partial\xi}+\frac{\partial\rho}{\partial\eta}+\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}=0,$$ т. е. что эфиръ

несжимаемъ, имѣемъ:

$$X_x=-2\Omega^2\cdot\frac{\partial\pi}{\partial\xi},\ Y_y=-2\Omega^2\frac{\partial\rho}{\partial\eta},\ Z_z=-2\Omega^2\frac{\partial\omega}{\partial\zeta},$$

$$X_y=-\Omega^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}+\frac{\partial\pi}{\partial\eta}\right),\ Z_x=-\Omega^2\left(\frac{\partial\pi}{\partial\zeta}+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right),$$

$$Y_z=-\Omega^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\right),$$

гдѣ Ω — коэффиціентъ упругости и притомъ $\frac{\Omega}{\sqrt{\mu}}$ будетъ скорость свѣта (передачи колебательныхъ движеній) въ свободномъ эфирѣ, въ такъ-называемомъ міровомъ эфирѣ.

Что касается упругихъ силъ частицъ самаго тѣла, то Ломмель принимаетъ, что

$$E'_x=m(N_1u+T_3v+T_2w);$$
$$E'_y=m(T_3u+N_2v+T_1w);$$
$$E'_z=m(T_2u+T_1v+N_3w);$$

причемъ $N_1, T_1 \ldots$ суть извѣстныя въ теоріи упругости выраженія, зависящія отъ главныхъ коэффиціентовъ упругости и направленій колебанія. Необходимо замѣтить, чего впрочемъ Ломмель не сдѣлалъ, что подобныя выраженія возможны лишь въ случаѣ непоглощающихъ срединъ. Однако, вслѣдствіе малости коэффиціента поглощенія, можно какъ приближеніе допустить подобныя выраженія для силъ упругости матеріальныхъ частицъ. При этихъ положеніяхъ имѣемъ вмѣсто уравненій (I) и (II) слѣдующія:

$$\mu\frac{d^2\pi}{dt^2}=\Omega^2\Delta_2\pi+2m\nu\left(\frac{d\pi}{dt}-\frac{du}{dt}\right);$$

$$\mu\frac{d^2\rho}{dt^2}=\Omega^2\Delta_2\rho+2m\nu\left(\frac{d\rho}{dt}-\frac{dv}{dt}\right);$$

$$\mu\frac{d^2\omega}{dt^2}=\Omega^2\Delta_2\omega+2m\nu\left(\frac{d\omega}{dt}-\frac{dw}{dt}\right).$$

Символъ Δ_2 имѣетъ извѣстный смыслъ.

Также:

$$m.\frac{d^2u}{dt^2}=-2\kappa m.\frac{du}{dt}-m(N_1u+T_3v+T_2w)-2m\nu\left(\frac{d\pi}{dt}-\frac{du}{dt}\right);$$

$$m.\frac{d^2v}{dt^2}=-2\kappa m.\frac{dv}{dt}-m(T_3u+N_2v+T_1w)-2m\nu\left(\frac{d\rho}{dt}-\frac{dv}{dt}\right);$$

$$m.\frac{d^2w}{dt^2}=-2\kappa m.\frac{dw}{dt}-m(T_2u+T_1v+N_3w)-2m\nu\left(\frac{d\omega}{dt}-\frac{dw}{dt}\right).$$

Это суть уравненія Ломмеля[1], полученныя имъ путемъ частныхъ преобразованій.

§ 25. Остается теперь только ввести выраженія для составляющихъ колебаній. Положимъ, что имѣемъ общій случай средины, поглощающей въ большей или меньшей степени свѣтовыя колебанія, смотря по толщинѣ слоя, проходимаго лучемъ; тогда, если K — коэффиціентъ поглощенія даннаго луча, соотвѣтствующаго волнѣ извѣстной длины; r путь, пройденный волной внутри средины, c скорость свѣта внутри ея и τ время одного колебанія эфирной частицы; то полагая $\frac{2\pi}{\tau}=q$, имѣемъ, какъ извѣстно:

$$\frac{\pi}{JA}=\frac{\rho}{JB}=\frac{\omega}{JC}=e^{-Kr}\cos\left(qt-\frac{q}{c}.r\right);$$

[1] Wied. An. Bd. IV. S. 56 и 58.

гдѣ J, ясно, есть амплитуда колебанія, а A, B, C косинусы направленія колебанія.

Замѣтимъ, что если m, n, p косинусы направленія r, тогда:

$$r = m\xi + n\eta + p\zeta.$$

Для колебаній u, v, w, можемъ принять:

$$\frac{u}{J'A'} = \frac{v}{J'B'} = \frac{w}{J'C'} = e^{-Kr'} . \cos\left(qt - \frac{q}{c} r'\right),$$

гдѣ

$$r' = mx + ny + pz.$$

Но такъ-какъ матеріальныя частицы приходятъ въ движеніе, благодаря движенію эфирныхъ или обратно, то должно взять:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{J'A'}{JA} = \dfrac{J'B'}{JB} = \dfrac{J'C'}{JC} = R' \text{ и кромѣ того} \\ r' = m\xi + n\eta + p\zeta - \psi, \end{array} \right.$$

и ψ есть количество, обусловливаемое геометрическимъ положеніемъ эфирныхъ частицъ относительно матеріальныхъ.

И такъ

$$\frac{u}{JA} = \frac{v}{JB} = \frac{w}{JC} = R.e^{-Kr} . \cos\left(qt - \frac{q}{c} r + \psi\right) \text{ и}$$

$$R = R' . e^{+K\psi}$$

Подставляя теперь въ уравненія § 23 значенія π, u и т. п., сокративъ общихъ множителей и сравнивая коэффиціенты при $\cos\left(qt - \frac{q}{c} r\right)$ и $\sin\left(qt - \frac{q}{c} r\right)$, получимъ:

$$\left. \begin{array}{l} -\mu . q^2 = \Omega^2\left(K^2 - \dfrac{q^2}{c^2}\right) + 2m\nu q . R \sin\psi \\ 0 = 2\Omega^2 K . \dfrac{q}{c} - 2m\nu q\,(1 - R\cos\psi) . \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}&-Aq^2 \,.\, \cos\psi = 2\varkappa Aq \,.\, \sin\psi - P_1 \cos\psi - 2\nu q \,.\, A \,.\, \sin\psi\\ &Raq^2 \,.\, \sin\psi = 2\varkappa ARq \,.\, \cos\psi + RP_1 \sin\psi + 2\nu q A(1 - R\cos\psi)\end{aligned}\right\}(2)$$

Подобныя же уравненія для двухъ другихъ осей, замѣняя A и P_1 соотвѣтственно количествами B и P_2, C и P_3; полагая предварительно для краткости письма и удобства вычисленій:

$$\begin{aligned}P_1 &= AN_1 + BT_3 + CT_2;\\ P_2 &= AT_3 + BN_2 + CT_1;\\ P_3 &= AT_2 + BT_1 + CN_3.\end{aligned}$$

Систему уравненій (2) удобнѣе будетъ представить въ другомъ видѣ, именно въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}(P_1 - Aq^2) \cos\psi &= 2Aq\,(\varkappa - \nu) \sin\psi\\ (P_2 - Bq^2) \cos\psi &= 2Bq\,(\varkappa - \nu) \sin\psi\\ (P_3 - Cq^2) \cos\psi &= 2Cq\,(\varkappa - \nu) \sin\psi\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}-(P_1 - Aq^2) R \sin\psi &= 2(\varkappa - \nu) q \,.\, AR \cos\psi + 2\nu q A;\\ -(P_2 - Bq^2) R \sin\psi &= 2(\varkappa - \nu) q \,.\, BR \cos\psi + 2\nu q B;\\ -(P_3 - Cq^2) R \sin\psi &= 2(\varkappa - \nu) q \,.\, CR \cos\psi + 2\nu q C.\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Уравненія (A) и (B) послужатъ для опредѣленія A, B, C, R и ψ, присоединивъ только къ нимъ еще соотношеніе:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1. \qquad (c)$$

Система же (1) дастъ K и c.

Равенства (A) даютъ:

$$\frac{P_1 - Aq^2}{A} = \frac{P_2 - Bq^2}{B} = \frac{P_3 - Cq^2}{C} \qquad (a)$$

или каждое изъ этихъ отношеній равно

$AP_1 + BP_2 + CP_3 - q^2$, что получится, умножая оба члена каждаго отношенія соотвѣтственно на A, B, C и складывая результаты.

Положимъ

$$AP_1 + BP_2 + CP_3 = s,$$

тогда равенства (a) даютъ:

$$\left.\begin{array}{l} A(N_1 - s - q^2) + BT_3 + CT_2 = 0; \\ AT_3 + B(N_2 - s - q^2) + CT_1 = 0; \\ AT_2 + BT_1 + C(N_3 - s - q^2) = 0; \end{array}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Опредѣляя изъ двухъ равенствъ отношенія A, B, C къ одному изъ нихъ и подставляя въ третье, находимъ равенство, которое можно представить, какъ извѣстно, въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} N_1 - s - q^2, & T_3, & T_2 \\ T_3, & N_2 - s - q^2, & T_1 \\ T_2, & T_1 & N_3 - s - q^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Корни этого уравненія дѣйствительны [1], ихъ три; но ниже мы покажемъ, что изъ нихъ для нашего вопроса годятся только два. Замѣтимъ, что Ломмель, вслѣдствіе ошибочнаго анализа [2], нашелъ уравненіе 2-й степени для $s + q^2$.

Опредѣливъ изъ уравненія (I) $s + q^2$, а слѣдовательно s, мы изъ уравненій (b) найдемъ напримѣръ $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ и, подставивъ эти значенія въ соотношеніе (c), найдемъ C, а слѣдовательно A и B.

§ 26. Для опредѣленія ψ и R поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Умножая уравненія (A) и (B) по порядку на A, B, C и складывая результаты, находимъ:

$$s \,.\, \cos\psi = 2(\varkappa - \nu)q \,.\, \sin\psi$$

$$-s \,.\, R\sin\psi = 2\nu q + 2(\varkappa - \nu) \,.\, q \,.\, R\cos\psi.$$

Первое изъ этихъ равенствъ даетъ:

---

[1] См. § 30.

[2] Wied. Ann. Bd. IV. S. 60, уравненіе (12).

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{s}{2(\varkappa - \nu) \, . \, q} \, . \tag{I}$$

Опредѣляя $\sin\psi$ и $\cos\psi$ по $\operatorname{tg}\psi$ и подставляя во второе изъ написанныхъ сейчасъ равенствъ, имѣемъ:

$$R = \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2 + 4(\varkappa - \nu)^2 q^2}} \, . \tag{II}$$

§ 27. Зная ψ и R, приступимъ къ опредѣленію c и K.

Подставляя въ уравненіе (1) значеніе $R\sin\psi$ и $R\cos\psi$ изъ равенствъ (I) и (II), получимъ послѣ простаго преобразованія:

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\mathrm{K}}{q^2} = \frac{\mu}{\Omega^2}\left(1 + \frac{4m\nu^2 s}{\mu\,[\,s^2 + 4(\varkappa - \nu)^2 q^2\,]}\right) \text{ и}$$

$$\frac{\mathrm{K}}{q} \, . \, \frac{1}{c} = \frac{\mu}{\Omega^2} \, . \, \frac{m\nu}{\mu q}\left(1 + \frac{4\nu q^2(\varkappa - \nu)}{[s^2 + 4(\varkappa - \nu)^2 q^2]}\right).$$

Положимъ теперь:

$$1 + \frac{4ms \, . \, \nu^2}{\mu\,[s^2 + 4(\varkappa - \nu)^2 q^2]} = F$$

$$\frac{2m\nu}{\mu q}\left(1 + \frac{4\nu q^2(\varkappa - \nu)}{s^2 + 4(\varkappa - \nu)^2 q^2}\right) = G$$

или:

$$G = \frac{2m\nu}{\mu q} \, . \, \frac{s^2 + 4\varkappa(\varkappa - \nu)\,q^2}{s^2 + 4(\varkappa - \nu)^2 q^2}, \text{ и}$$

зная, что $\frac{\Omega}{\sqrt{\mu}} = c_0$, скорости свѣта въ міровомъ эфирѣ, находимъ:

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\mathrm{K}^2}{q^2} = \frac{F}{c_0^2}$$

$$-\frac{1}{c} \, . \, \frac{\mathrm{K}}{q^2} = \frac{G}{2c_0^2}. \text{ Отсюда:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2c_0^2}\left\{\sqrt{F^2 + G^2} + F\right\} \\ \frac{\mathrm{K}^2}{q^2} &= \frac{1}{2c_0^2}\left\{\sqrt{F^2 + G^2} - F\right\} \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Подобныя выраженія для c и K найдены были еще Гельмгольтцемъ[1], только его коэффиціенты F и G выражались болѣе сложными формулами. Ломмель[2] выраженіямъ F и G придаетъ другой болѣе удобный видъ.

Положимъ $s+q^2=j$, и $\frac{q^2}{j}=\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$, тогда

$$s=j\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right).$$

Далѣе: $\frac{4(\varkappa-\nu)^2}{j}=\varepsilon^2$, $\frac{4\varkappa(\varkappa-\nu)}{j}=\varkappa\varepsilon$, тогда

$$F=1+(\varkappa-\varepsilon)^2\varrho\,.\frac{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2+\varepsilon^2\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

$$G=(\varkappa-\varepsilon)\varrho\frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)+\varkappa\varepsilon\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2+\varepsilon^2\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

Пренебрегая G^2 въ сравненіи съ F^2, имѣемъ: $n^2=F$ и далѣе, пренебрегая въ знаменателѣ вторымъ членомъ въ сравненіи съ первымъ и полагая $(\varkappa-\varepsilon)^2\varrho=a$, найдемъ:

$$n^2-1=\frac{a}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \qquad \text{(IV')}$$

§ 28. Разлагая F и G по степенямъ малыхъ множителей $(\varkappa-\varepsilon)$, ε, λ_0, найдемъ:

$$G=(\varkappa-\varepsilon)\varrho.\frac{\lambda}{\lambda_0}+(\varkappa-\varepsilon)^2\varepsilon.\varrho+\frac{\frac{\lambda_0}{\lambda}}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}+\ldots.$$

---

[1] Pog. Ann. Bd. CLIV. S. 582.

[2] Wied. Annalen. Bd. VIII. S. 629. Ср. также Bd. III, S. 339 (1878).

$$F = 1 + \frac{(\varkappa-\varepsilon)^2\varrho}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \ldots, \text{ также:}$$

$$\frac{1}{F} = 1 - \frac{(\varkappa-\varepsilon)^2\varrho}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \ldots.$$

Формула (IV') даетъ:

$$\frac{c_0^2}{c^2} = n^2 = F + \frac{1}{4}\frac{G^2}{F} + \ldots.$$

Подставляя значенія F и G, найдемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{\alpha}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \beta + \gamma\lambda^2 + \frac{\delta}{\lambda^2} + \ldots{}^* \qquad \text{(V)}$$

гдѣ

$$\alpha = (\varkappa-\varepsilon)^2\varrho + \ldots.\ \beta = \frac{1}{2}(\varkappa-\varepsilon)\varrho + \ldots$$

$$\gamma = (\varkappa-\varepsilon)^2\varrho^2 + \ldots.\ \delta = \frac{1}{4}\lambda_0^2 + \ldots,$$

приводя (V) къ одному знаменателю и полагая:

$$a = \alpha + \beta - \gamma\lambda_0^2 + \ldots,\ b = \gamma + \ldots,\ c = \delta - \beta\lambda_0^2 + \ldots.$$

имѣемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2}}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \qquad \text{(VI)}$$

Формулу (VI) можно еще преобразовать въ формулу, данную Кеттелеромъ.

Сначала имѣемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a\lambda^2 + b\lambda^4 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \text{ и отсюда дѣленіемъ}$$

находимъ:

* См. *Lommel*, Wied. Ann. Bd. XIII, S. 353 und ff. 1881.

$n^2 - 1 = a + b\lambda^2 + \frac{a\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$, пренебрегая членами съ $b\lambda_0^2$, ибо b величина 2-го порядка малости, λ_0^2 то-же, слѣдовательно $b\lambda_0^2$ есть количество 4-го порядка малости, а оставленные члены нисшихъ порядковъ, именно a — 1-го, c — 2-го и, слѣд., $a\lambda_0^2$ — 3-го

Но $$a + b\lambda^2 = a\left(1 + \frac{b}{a}\lambda^2\right) = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}\lambda^2}$$

съ тѣмъ же приближеніемъ. Полагая же

$$A = \frac{a^2}{b},\ B = \frac{a}{b},\ C = a\lambda_0^2 + c,\ D = \lambda_0^2,$$

найдемъ формулу Кеттелера[1], провѣренную имъ:

$$n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{C}{\lambda^2 - D}. \tag{VII}$$

§ 29. Формулы (IV) и (VI) провѣрялъ Ломмель при помощи опредѣленій Маскара главныхъ показателей преломленія исландскаго шпата для обыкновеннаго и необыкновеннаго лучей отъ линіи A спектра до R; совпаденіе было вполнѣ достаточно, разница въ немногихъ только случаяхъ достигала до 1-цы 4-го десятичнаго знака, въ остальныхъ же была меньше. Формулу (IV) провѣрилъ Ломмель еще раньше и результаты сравнилъ съ тѣми, которые даютъ извѣстныя формулы Коши и Кристоффля; оказалось, что формула (IV) столь-же надежна, какъ и формулы Коши (двухчленная) и Кристоффля.

[1] Wied. Ann. Bd. XII, S. 367 (1881).

ГЛАВА VI.

§ 30. Разовьемъ теперь предъидущую теорію безъ допущенія § 23. Положимъ, что силы упругости внутри системы матеріальныхъ частицъ выражаются формулами § 3, т. е. допускаемъ, что тѣло представляетъ кристаллъ съ тремя осями симметріи.

Тогда имѣемъ уравненія для упругихъ силъ матеріальной частицы по подстановкѣ въ нихъ значеній u, v, w изъ формулъ § 9, именно для силы, дѣйствующей вдоль оси x:

$$\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} = -MRe^{-kr}.m\left\{U\cos(Q+\psi) - \right.$$

$$\left. - V\sin(Q+\psi)\right\}.\left(An_1 + Bt_3 + Ct_2\right),$$

гдѣ положено:

$$K^2 - \frac{q^2}{c^2} = U, \quad 2K\frac{q}{c} = V,$$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = am^2 + fn^2 + ep^2, \quad t_1 = 2np.\partial \\ n_2 = fm^2 + bn^2 + \partial p^2, \quad t_2 = 2mp.e \\ n_3 = em^2 + \partial n^2 + cp^2, \quad t_3 = 2mn.f \end{array}\right\} \qquad \text{(a)}$$

подобныя выраженія получимъ для другихъ составляющихъ упругихъ силъ.

Подставляя эти значенія и значенія количествъ изъ § 9 въ уравненія § 3 для матеріальной частицы, найдемъ по сокращеніи общихъ множителей и приравниваніи нулю коеффиціентовъ при $\cos Q$ и $\sin Q$ слѣдующія условія уравненія.

$$\left.\begin{array}{l} (S_1U - Aq^2)\cos\psi = (S_1V + 2(\varkappa-\nu).Aq)\sin\psi \\ (S_2U - Bq^2)\cos\psi = (S_2V + 2(\varkappa-\nu).Bq)\sin\psi \\ (S_3U - Cq^2)\cos\psi = (S_3V + 2(\varkappa-\nu).Cq)\sin\psi \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

и

$$\left.\begin{array}{l}(S_1U-Aq^2)R\sin\psi+2\nu Aq=-(S_1V+2(\varkappa-\nu).Aq)R\cos\psi\\(S_2U-Bq^2)R\sin\psi+2\nu Bq=-(S_2V+2(\varkappa-\nu).Bq)R\cos\psi\\(S_3U-Cq^2)R\sin\psi+2\nu Cq=-(S_3V+2(\varkappa-\nu)Cq)R\cos\psi\end{array}\right\}\text{(II)}$$

здѣсь для краткости письма положено:

$$S_1=An_1+Bt_3+Ct_2$$
$$S_2=At_3+Bn_2+Ct_1$$
$$S_3=At_2+Bt_1+Ct_3$$

уравненіе (I) можно представить въ видѣ:

$$S_1[U\cos\psi-V\sin\psi]=A[q^2\cos\psi+2(\varkappa-\nu)q\sin\psi];$$
$$S_2[U\cos\psi-V\sin\psi]=B[q^2\cos\psi+2(\varkappa-\nu)q\sin\psi];$$
$$S_3[U\cos\psi-V\sin\psi]=C[q^2\cos\psi+2(\varkappa-\nu)q\sin\psi].$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{S_1}{A}=\frac{S_2}{B}=\frac{S_3}{C}=S$$

здѣсь положено:

$$S=AS_1+BS_2+CS_3.$$

Такой же результатъ получаемъ и изъ (II) системы.

И такъ, имѣемъ три слѣдующихъ уравненія:

$$S_1-AS=0$$
$$S_2-BS=0$$
$$S_3-CS=0,$$ или, подставляя значеніе S:

$$\left.\begin{array}{l}(n_1-S)A+t_3B+t_2C=0\\t_3A+(n_2-S)B+t_1C=0\\t_2A+t_1B+(n_3-S)C=0\end{array}\right\}\text{(IV)}$$

Исключая отсюда отношенія A, B, C къ одному изъ нихъ, найдемъ:

$$\begin{vmatrix}n_1-S\ , & t_3\ , & t_2\\ t_3\ , & n_2-S\ , & t_1\\ t_2\ , & t_1\ , & n_3-S\end{vmatrix}=0.\qquad\text{(V)}$$

*

По развертываніи этого опредѣлителя, найдемъ для S уравненіе 3-й степени съ дѣйствительными корнями[1], которое, какъ ниже будетъ показано, дастъ *только два,* удовлетворяющихъ требованіямъ нашего вопроса, *корня.* Пусть эти корни будутъ S' и S''. Изъ уравненій (IV) опредѣлимъ отношенія напр. $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ и подставляя ихъ въ соотношеніе

$$A^2+B^2+C^2=1,$$

найдемъ C, а слѣдовательно A и B.

Не трудно убѣдиться, что колебанія, соотвѣтствующія корнямъ S' и S'', взаимно перпендикулярны. Дѣйствительно, если

$$A',\ B',\ C',\ \text{и}$$
$$A'',\ B'',\ C''$$

будутъ косинусы направленія колебаній, соотвѣтствующихъ S' и S'', то имѣемъ по системѣ (IV):

$$\begin{aligned} n_1A' + t_3B' + t_2C' &= S'A' \\ t_3A' + n_2B' + t_1C &= S'B' \\ t_2A' + t_1B' + n_3C &= S'C' \quad \text{и} \\ n_1A'' + t_3B'' + t_2C'' &= S''A'' \\ t_3A'' + n_2B'' + t_1C'' &= S''B'' \\ t_2A'' + t_1B'' + n_3C'' &= S''C''. \end{aligned}$$

Умножая уравненія первой группы соотвѣтственно на A'', B'', C'', а уравненія второй группы на A', B', C', по вычитаніи результатовъ и сокращеніи на $S'-S''$, находимъ:

$$A'A''+B'B''+C'C''=0,$$

что и доказываетъ высказанное выше предложеніе.

§ 31. Остается теперь опредѣлить R и ψ.

---

[1] См. напр. *Brioschi,* Théorie des déterminants, p. 29.

Подставляя значенія S_1, S_2, ... въ уравненія системы (I) и (II), находимъ сначала:

$$(SU-q^2)\cos\psi=(SV+2(\varkappa-\nu)q)\sin\psi,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{SU-q^2}{SV+2(\varkappa-\nu)q} \tag{1}$$

Потомъ:

$$(SU-q^2)\sin\psi+2\nu_1 q=-(SV+2(\varkappa-\nu)q)\cos\psi.$$

Откуда, по подстановкѣ $\sin\psi$ и $\cos\psi$ изъ (1), имѣемъ:

$$-2\nu_1 q=\sqrt{(SU-q^2)^2+2(SV+2(\varkappa-\nu)q)^2},$$

но $\nu_1=\frac{\nu}{R}$, слѣдовательно:

$$R=-\frac{2\nu q}{\sqrt{(SU-q^2)^2+(SV+2(\varkappa-\nu)q)^2}} \tag{2}$$

И такъ ψ и R имѣютъ по два значенія, соотвѣтствующія корнямъ S' и S''.

Преобразуемъ формулы для $\operatorname{tg}\psi$ и R.

Внося въ формулу для $\operatorname{tg}\psi$ и R значенія U и V и полагая:

$$S=-\frac{s+q^2}{q^2}c^2,\ 2K\frac{c}{q}=\Delta,$$

найдемъ:

$$\operatorname{ctg}\psi=\frac{2(\varkappa-\nu)q-(s+q^2)\Delta}{s-(s+q^2)\Delta^2},$$

$$-\frac{R}{2\nu q}=\frac{1}{\left\{s^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2-4(\varkappa-\nu)q(s+q^2)\Delta-(s^2-q^4)\Delta^2\right\}^{1/2}}$$

Но количество Δ очень мало, ибо, съ одной стороны, коеффиціентъ поглощенія K вообще малъ, а съ другой $\frac{c}{q}$ есть величина порядка длины свѣтовой волны, т. е. величина тоже очень малая; поэтому, разлагая $\operatorname{ctg}\psi$ и $-\frac{R}{2\nu q}$ въ строки по степенямъ Δ, можно ограничиться первою степенью Δ.

Такимъ образомъ найдемъ:

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{2(\varkappa-\nu)q}{s} - \frac{s+q^2}{s}\Delta \tag{1}$$

Потомъ:

$$R = \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2+4(\varkappa-\nu)q^2}}\left(1+\frac{2(\varkappa-\nu)(s+q^2)q}{s^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2}\Delta\right). \tag{2}$$

Какъ первое приближенiе можно даже отбросить члены съ Δ, какъ очень малые; тогда найдемъ:

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{2(\varkappa-\nu)q}{s} \tag{1 bis}$$

$$R = \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2}} \tag{3 bis}$$

Послѣднiя двѣ формулы и суть уже формулы Ломмеля[1], найденныя нами въ § 26.

Для опредѣленiя U и V подставимъ найденныя приближенныя значенiя $\operatorname{tg}\psi$ и R въ уравненiя (1) § 25, такъ-какъ эти уравненiя въ обоихъ способахъ остаются въ одномъ и томъ же видѣ; найдемъ тогда тѣ-же формулы, что и приведенныя въ началѣ § 27.

§ 32. Опредѣлимъ теперь U и V, т. е. c и K. Уравненiя (1) § 25, которыя сохраняютъ свой видъ и въ томъ способѣ, коимъ мы занимаемся теперь, даютъ:

$$R\sin\psi = -\frac{q^2+Uc_0^2}{e},\ R\cos\psi = 1-\frac{Vc_0^2}{e}, \tag{1}$$

гдѣ положено

$$e = 2\nu q\varrho \text{ и } \varrho = \frac{m}{\mu}. \tag{a}$$

[1] Wied. Annalen. Bd. IV. 1878. S. 63.

Изъ равенствъ (1) находимъ:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{Uc_0^2+q^2}{Vc_0^2-e},\ R = \frac{\sqrt{(Uc_0^2+q^2)^2+(Vc_0^2-e)^2}}{e}$$

Сравнивая эти значенія $\operatorname{tg}\psi$ и R съ значеніями ихъ, найденными въ § 34, имѣемъ:

$$\frac{SU-q^2}{SV+2(\varkappa-\nu)q} = \frac{Uc_0^2+q^2}{Vc_0^2-e} \qquad (\alpha)$$

$$\frac{2\nu q}{\sqrt{(SU-q^2)^2+(SV+2(\varkappa-\nu)q)^2}} = \frac{\sqrt{(Uc_0^2+q^2)^2+(Vc_0^2-e)^2}}{e} \qquad (\beta)$$

Положимъ здѣсь для удобствъ вычисленій:

$$\frac{q^2}{c_0^2} = a,\ \frac{e}{c_0^2} = b,\ \frac{2\nu q e}{c_0^2} = h,\ 2(\varkappa-\nu)q = \partial \qquad (\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(SV+\partial)^2+(SU-q^2)^2} = X\\ \sqrt{(U+a)^2+(V-b)^2} = Y\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{c})$$

При помощи этихъ положеній изъ равенствъ (α) и (β) находимъ слѣдующія

$$\frac{X}{Y} = \frac{SU-q^2}{U+a}$$

$$X\,.\,Y = h.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ опредѣляемъ X^2 и Y^2 и получаемъ:

$$X^2 = h\,.\,\frac{SU-q^2}{U+a},$$

$$Y^2 = h\,.\,\frac{U+a}{SU-q^2}.$$

Подставимъ значенія X^2 и Y^2, найдемъ:

$$(SV+\partial)^2+(SU-q^2)^2 = h\,.\,\frac{SU-q^2}{U+a} \qquad (\gamma)$$

$$(V-b)^2+(U+a^2)=h\cdot\frac{U+a}{SU-q^2}.$$

Но послѣднее равенство при помощи соотношенія (α), написаннаго въ видѣ:

$$\frac{SU-q^2}{U+a}=\frac{SV+\partial}{V-b},\qquad (\delta)$$

превращается въ слѣдующее:

$$(V-b)^2+(U+a)^2=h\cdot\frac{V-b}{SV+\partial}\qquad (\varepsilon)$$

далѣе изъ равенства (δ) находимъ:

$$U+a=-\frac{q^2+aS}{\partial+bS}(V-b)\qquad (\varkappa)$$

$$SV+\partial=-\frac{\partial+bS}{q^2+aS}(SU-q^2).\qquad (\lambda)$$

Подставляя значеніе $SV+\partial$ изъ выраженія (λ) въ равенство (γ) и значеніе $U+a$ изъ выраженія ($\varkappa$) въ уравненіе (ε) по сокращеніи на общихъ множителей, которые очевидно не равны нулю, найдемъ уравненіе для U и V.

Мы займемся послѣднимъ.

Имѣемъ, подставляя ($\varkappa$):

$$SV^2+(\partial-bS).V=\frac{(\partial b+h)(\partial+bS)^2+b\partial(q^2+aS)^2}{(\partial+bS)^2+(q^2+aS)^2}\qquad (2)$$

подобное уравненіе получили бы и для U.

Положимъ въ уравненіи (2):

$$S=\frac{\sigma-q^2}{q^2}c_0{}^2,\qquad (3)$$

причемъ σ будетъ новое перемѣнное, вводимое вмѣсто S.

Вычисляя при помощи равенствъ (3), (a) и (b) коэффиціенты (2), найдемъ:

$$V^2+\frac{2q[(\varkappa-\nu)q^2-\rho(\sigma-q^2)]}{\sigma-q^2}V=$$

$$=\frac{4\nu\rho q^2(\varkappa-\nu)[\sigma^2+4\varkappa(\varkappa-\nu)q^2](1+\varepsilon_1)q^2}{c_0^2[\sigma^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2](1+\varepsilon_2)(\sigma-q^2)}, \qquad (4)$$

гдѣ положено для краткости письма:

$$(\sigma^2+4\varkappa(\varkappa-\nu)q^2)\varepsilon_1=16\varkappa\nu\varrho^2(\sigma-q^2)[\varrho(\sigma-q^2)+2(\varkappa-\nu)q^2],$$

$$(\sigma^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2)\varepsilon_2=\frac{4(\sigma-q^2)^2}{q^2}-8(\varkappa-\nu)(\sigma-q^2)\varrho.$$

Уравненіе (4) даетъ два корня для V; зная ихъ по уравненію ($\varkappa$), опредѣлимъ два корня U. Одна пара корней U и V относится къ волнѣ, обыкновенной или необыкновенной, распространяющейся въ данномъ направленіи, а другая къ волнѣ противуположной.

Точные корни U и V довольно сложны, но мы можемъ получить сравнительно простыя, приближенныя рѣшенія.

Такъ какъ V очень мало, то, пренебрегая въ уравненіи (4) его квадратомъ, найдемъ:

$$V=\frac{2\nu\rho q[\sigma^2+4\varkappa(\varkappa-\nu)q^2](1+\varepsilon_1)q^2(\varkappa-\nu)}{c_0^2[\sigma^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2](1+\varepsilon_2)[(\varkappa-\nu)q^2-\rho(\sigma-q^2)]}$$

Эту формулу можно еще упростить; пренебрегая нѣкоторыми множителями, какъ очень малыми въ сравненіи съ оставленными, найдемъ:

$$V=\frac{2\nu\rho q}{c_0^2}\,\frac{\sigma^2+4\varkappa(\varkappa-\nu)q^2}{\sigma^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2}. \qquad (\mathrm{I})$$

Подобнымъ образомъ для U найдемъ приближенное выраженіе:

$$U=-\frac{q^2}{c_0^2}-\frac{4\nu^2\rho q^2}{c_0^2}\,\frac{\sigma}{\sigma^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2}. \qquad (\mathrm{II})$$

При помощи найденныхъ сейчасъ U и V опредѣлимъ F и G § 27 и за-тѣмъ найдемъ показатель преломленія и коэффиціентъ поглощенія.

Такимъ образомъ видимъ, что формулы Ломмеля суть формулы приближенныя.

§ 33. Займемся изученіемъ уравненія (V) § 30.

По развертываніи опредѣлителя (V) имѣемъ:

$$S^3-(n_1+n_2+n_3)S^2+(n_1n_2+n_1n_3\pm n_2n_3-t_1{}^2-t_2{}^2-t_3{}^2)S-$$
$$-(n_1n_2n_3+2t_1t_2t_3-n_1t_1{}^2-n_2t_2{}^2-n_3t_3{}^2)=0. \qquad (1)$$

Значенія n_1, t_1, ... даны равенствами (a) § 30. Можно установить нѣкоторыя зависимости между коэффиціентами a, b,..., основываясь на предположеніи, что *данная кристаллическая средина можетъ быть получена изъ изотропной, подвергая послѣднюю нѣкоторымъ малымъ деформаціямъ* вдоль координатныхъ осей.

Пусть ε, ε' ε'' будутъ величины тѣхъ сжатій или расширеній (деформацій), параллельныхъ координатнымъ осямъ, подвергая которымъ тѣло, мы превращаемъ его изъ изотропнаго въ кристаллическое; тогда по закону линейности имѣемъ:

$$a=\alpha+m\varepsilon+n\varepsilon'+p\varepsilon''; \quad d=\delta+k\varepsilon+h\varepsilon'+l\varepsilon'';$$

$$b=\alpha+m'\varepsilon+n'\varepsilon'+p'\varepsilon''; \quad e=\delta+k'\varepsilon+h'\varepsilon'+l'\varepsilon'';$$

$$c=\alpha+m''\varepsilon+n''\varepsilon'+p''\varepsilon''; \quad f=\delta+k''\varepsilon+h''\varepsilon'+l''\varepsilon'';$$

причемъ m, n, ..., k, h, l, ... суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, а α и δ значенія a, b, c и d, e, f въ изотропной срединѣ.

Пользуясь свойствомъ симметріи среды, мы получимъ между коэффиціентами m, n, ... слѣдующія зависимости[1]:

---

[1] *Saint-Venant*, Journal de Liouville, 1868. p. 246 et suiv.

$$n=p,\ h=l,\ k'=l',\ k''=l'',\ m'=p',\ m''=n'',\ m'=n=m'',$$
$$p''=m=n',\ k'=l'=h,\ k''=h''=h,\ k=h'=l''.$$

На основаніи этихъ зависимостей имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{ll} a=\alpha+m\varepsilon+n(\varepsilon'+\varepsilon''), & d=\delta+k\varepsilon+h(\varepsilon'+\varepsilon''). \\ b=\alpha+m\varepsilon'+n(\varepsilon+\varepsilon'), & e=\delta+k\varepsilon'+h(\varepsilon+\varepsilon''). \\ c=\alpha+m\varepsilon''+n(\varepsilon+\varepsilon'), & f=\delta+k\varepsilon''+h(\varepsilon+\varepsilon'). \end{array}\right\} \quad (a)$$

Предполагая, что деформаціи симметричны относительно оси x-въ, тогда

$\varepsilon'=\varepsilon''$ и на основаніи извѣстной теоремы теоріи упругости[1]

$$b=c,\ e=f \text{ и } b=3d.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значенія b и d изъ уравненій (a), найдемъ по сравненіи членовъ

$$\alpha=3\delta,\ n=3k,\ m+n=6h. \qquad (\alpha)$$

Предполагая симметрію около осей y—овъ и z—овъ, найдемъ тѣ-же соотношенія (α). Отсюда заключаемъ, что количества α, δ, m, n, k и h удовлетворяютъ вообще соотношеніямъ (α) при всякихъ значеніяхъ ε, ε' и ε''.

Равенства (α) при помощи (a) даютъ:

$$a+b=6f,\ a+c=6e,\ b+c=6d. \qquad (I)$$

Эти зависимости между a, b, . . . найдены были иными путями Коши и Нейманомъ[2].

Такъ-какъ d, e, f мало отличаются другъ отъ друга, то можно изъ равенствъ (I) получить другія очень пригодныя для насъ. Изъ равенствъ (I) находимъ:

[1] См. напр. *Moigno,* Statique, p. 665, § 272.

[2] Cauchy въ Mémoires de l'Académie de Paris. T. XVIII, p. 191, éq. 169. Neumann въ Pog. Annalen. Bd. XXV, S. 443, Gl. XIX.

**

$$a = 3f + 3e - 3d,\ b = 3d + 3f - 3e,\ c = 3d + 3e - 3f,$$

а отсюда

$$ab = 9f^2 - 9(e-d)^2, ac = 9e^2 - 9(d-f)^2, bc = 9d^2 - (f-e)^2; (\beta)$$

пренебрегая квадратами разностей коэффиціентовъ d, e, f, находимъ изъ (β) и (I):

$$ab - (a+b)f = 3f^2,\ ac - (a+c)e = 3e^2,\ bc - (b+c)d = 3d^2. \quad \text{(II)}$$

Эти соотношенія вмѣстѣ съ отношеніями (I) и послужатъ намъ для упрощенія уравненія (1).

§ 34. Вычисляя коэффиціенты уравненія (1) при помощи (I), (II) и равенствъ (a) § 30, находимъ:

$$n_1 + n_2 + n_3 = am^2 + bn^2 + cp^2 + (f+e)m^2 + (f+d)n^2 + (e+d)p^2;$$

$$n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 - t_1^{\,2} - t_2^{\,2} - t_3^{\,2} = fem^2 + fdn^2 + dep^2 + \\ + (am^2 + bn^2 + cp^2)\{(f+e)m^2 + (f+d)n^2 + (d+e)p^2\};$$

$$n_1n_2n_3 + 2t_1t_2t_3 - n_1t_1^{\,2} - n_2t_2^{\,2} - n_3t_3^{\,2} = \\ = (am^2 + bn^2 + cp^2)(fem^2 + fdn^2 + dep^2).$$

Полагая для краткости письма:

$$P = (f+e)m^2 + (f+d)n^2 + (d+e)p^2,$$

$$Q = fem^2 + fdn^2 + dep^2,$$

$$R = am^2 + bn^2 + cp^2,$$

превратимъ уравненіе (1) въ слѣдующее:

$$S^3 - (R+P)S^2 + (Q+RP)S - RQ = 0,$$

или

$$(S-R)(S^2 - PS + Q) = 0.$$

Это уравненіе распадается на два:

$$S - R = 0 \quad (2)$$

$$S^2 - PS + Q = 0. \quad (3)$$

Не трудно убѣдиться, что уравненіе (2) удовлетворяется значеніемъ S, соотвѣтствующимъ условіямъ:

$$A = m, \quad B = n, \quad C = p. \qquad (c)$$

Дѣйствительно, равенства (IV) § 30 даютъ:

$$n_1 A + t_3 B + t_2 C = AS$$

$$t_3 A + n_2 B + t_1 C = BS$$

$$t_2 A + t_1 B + n_3 C = CS.$$

Умножая эти равенства на A, B, C и складывая результаты, найдемъ:

$$S = A^2 n_1 + B^2 n_2 + C^2 n_3 + 2ABt_3 + 2ACt_2 + 2BCt_1.$$

Вводя сюда значенія n_1, n_2,... изъ равенствъ (а) § 30 и пользуясь равенствами (с), по раскрытіи скобокъ найдемъ:

$$S = am^4 + bn^4 + cp^4 + 6fm^2n^2 + 6em^2p^2 + 6dn^2p^2.$$

или, подставляя значенія $6f$, $6e$, $6d$ изъ уравненій (I) предъидущаго параграфа,

$$S = am^2 + bn^2 + cp^2 = R.$$

И такъ заключаемъ, что S равно R только въ случаѣ существованія условій (с), а такъ какъ послѣднія въ нашемъ вопросѣ не имѣютъ мѣста, то заключаемъ, что S можетъ удовлетворять только уравненію

$$S^2 - PS + Q = 0.$$

Послѣднему равенству полезно придать иную форму.

Положимъ

$$d = -\alpha^2, \quad e = -\beta^2, \quad f = -\gamma^2,$$

тогда

$$-P=(\beta^2+\gamma^2)m^2+(\gamma^2+\alpha^2)n^2+(\alpha^2+\beta^2)p^2,$$

$$Q=\beta^2\gamma^2m^2+\gamma^2\alpha^2n^2+\alpha^2\beta^2p^2$$

и уравненіе для S будетъ:

$$S^2+[(\beta^2+\gamma^2)m^2+(\gamma^2+\alpha^2)n^2+(\alpha^2+\beta^2)p^2]S+$$
$$+\beta^2\gamma^2m^2+\gamma^2\alpha^2n^2+\alpha^2\beta^2p^2=0.$$

Введя при S^2 множитель $m^2+n^2+p^2$ равный единицѣ, представимъ это уравненіе въ видѣ:

$$m^2(S+\beta^2)(S+\gamma^2)+n^2(S+\alpha^2)(S+\gamma^2)+$$
$$+p^2(S+\alpha^2)(S+\beta^2)=0,$$

или, наконецъ, раздѣляя на $(S+\alpha^2)(S+\beta^2)(S+\gamma^2)$, въ видѣ:

$$\frac{m^2}{S+\alpha^2}+\frac{n^2}{S+\beta^2}+\frac{p^2}{S+\gamma^2}=0. \qquad \text{(III)}$$

§ 35. Пренебрегая поглощеніемъ, мы получимъ:

$\frac{1}{c^2}=\frac{F}{c_0^2}$, или еще пренебрегая членомъ

$4(\varkappa-\nu)^2q^2$ въ сравненіи съ S^2, найдемъ:

$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c_0^2}-\frac{4m\nu^2}{\mu S}=\frac{1}{c_0^2}-\frac{g}{S},$$

отсюда имѣемъ:

$$S=\frac{gc^2c_0^2}{c^2-c_0^2}; \text{ а потому:}$$

$$-\frac{S}{c^2}-1=\frac{gc_0^2\lambda^2}{4\pi^2(c^2-c_0^2)}=-\frac{g\lambda^2}{4\pi^2\left(1-\frac{c^2}{c_0^2}\right)};$$ но, съ одной стороны, λ^2 есть количество очень малое, съ другой же количество g пропорціонально квадрату коеффиціента тренія, поэтому мы можемъ въ уравненіи для S поставить $-c^2$; тогда найдемъ:

$$\frac{m^2}{\alpha^2-c^2}+\frac{n^2}{\beta^2-c^2}+\frac{p^2}{\gamma^2-c^2}=0,$$

уравненія Фрэнэля.

Разсматривая это уравненіе, встрѣчаемся съ однимъ обстоятельствомъ, трудно разрѣшимымъ при настоящемъ уровнѣ нашихъ знаній. Именно, видимъ, что α, β, γ, будучи съ одной стороны коеффиціентами упругости даннаго тѣла, съ другой же даютъ скорости свѣта вдоль его осей упругости; мы не знаемъ этихъ коеффиціентовъ, а скорости намъ извѣстны, и такъ какъ послѣднія суть очень большія величины, то должно заключить, что и первыя таковы же. Послѣднее заключеніе можетъ подорвать довѣріе къ развиваемой теоріи, а слѣдовательно и къ теоріи Ломмеля.

§ 36. Опредѣлимъ точныя значенія U и V.

Подставляя значеніе $SV+\partial$ изъ формулы (λ) параграфа 32 въ равенство (γ) и сокращая на общій множитель $SU-q^2$, который, очевидно, не равенъ нулю, найдемъ для опредѣленія U уравненіе:

$$SU^2-(q^2-aS)U=aq^2+\frac{h}{1+\left(\frac{\partial+bS}{q^2+aS}\right)^2} \qquad (1)$$

Но полагая $S=c_0{}^2s$, найдемъ:

$$q^2-aS=\frac{4\pi^2c_0{}^2}{\lambda^2}(1-s);\left(\frac{\partial+bS}{q^2+aS}\right)^2=\frac{\lambda^2}{\pi^2c_0{}^2}\left(\frac{\varkappa-\nu+s\rho}{1+s}\right)^2;$$

$$aq^2=\frac{16\pi^4c_0{}^2}{\lambda^4},\ h=\frac{16\pi^2\nu^2\rho}{\lambda^2}.$$

Затѣмъ положимъ на-время:

$$A=\frac{4\pi^2(1-s)}{s},\ B=\frac{16\pi^4}{s},\ C=\frac{16\pi^2\nu^2\rho}{c_0{}^2s} \text{ и } D=\frac{\pi c_0(1+s)}{\varkappa-\nu+s\rho};$$

тогда уравненіе (1) обращается въ слѣдующее:

$$U^2-\frac{A}{\lambda^2}U=\frac{B}{\lambda^4}+\frac{CD^2}{(D^2+\lambda^2)\lambda^2}.$$

Откуда находимъ:

$$U=\frac{A}{2\lambda^2}\pm\sqrt{\frac{A^2+4B}{4\lambda^4}+\frac{CD^2}{(D^2+\lambda^2)\lambda^2}} \quad (2)$$

Но $U=K^2-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}n^2$, если возьмемъ:

$$K=\frac{2\pi}{\lambda}p, \text{ то}$$

$$U=-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}(n^2-p^2).$$

Слѣдовательно:

$$n^2-p^2=-\frac{A}{8\pi^2}\mp\sqrt{\frac{A^2+4B}{64\pi^4}+\frac{CD\lambda^2}{16\pi^4(D^2+\lambda^2)}}$$

или, удобнѣе:

$$n^2-p^2-1=-\frac{A+8\pi^2}{8\pi^2}\mp\sqrt{\frac{A^2+4B}{64\pi^4}+\frac{CD^2\lambda^2}{16\pi^4(D^2+\lambda^2)}}$$

Но положивъ:

$$\frac{1+s}{2s}=\alpha,\ \frac{\nu^2\rho s}{(\varkappa-\nu+s\rho)^2}=\beta,$$

безъ труда найдемъ:

$$\frac{A+8\pi^2}{8\pi^2}=\alpha;\ \frac{A^2+4B}{64\pi^4}=\alpha^2;\ \frac{CD^2}{16\pi^4}=\alpha^2\beta;$$

слѣдовательно:

$$n^2-p^2-1=-\alpha\mp\alpha\sqrt{1+\frac{\beta\lambda^2}{D^2+\lambda^2}}.$$

Разлагая корень въ строку и замѣчая, что количество D очень мало, безъ труда найдемъ:

$$n^2-p^2-1=a+b\lambda^2+\frac{c}{\lambda^2}+\frac{\partial}{\lambda^4}+\ldots\ldots, \quad (a)$$

Замѣтимъ, что радикалъ взятъ съ —, въ справедливости чего убѣдимся ниже; количества b, c, ∂ очень малы и идутъ уменьшаясь; и они сами суть строки, расположенныя по степенямъ D^2; коэффиціентъ b, какъ показываетъ его значеніе, отрицателенъ.

Строку (a) можно представить въ другой, болѣе удобной формѣ. Можно положить съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$a+b\lambda^2=a\left(1+\frac{b}{a}\lambda^2\right)=\frac{a}{1-\frac{b}{a}\lambda^2}=\frac{-\frac{a^2}{b}}{\lambda^2-\frac{a}{b}}=$$

$$=\frac{A}{\lambda^2-B},\text{ положивъ:}$$

$$A=-\frac{a^2}{b},\; B=\frac{a}{b}.$$

Точно такъ-же съ тѣмъ-же приближеніемъ можемъ взять послѣдовательно:

$$\frac{c}{\lambda^2}+\frac{\partial}{\lambda^4}=\frac{c}{\lambda^2}\left(1+\frac{\frac{\partial}{c}}{\lambda^2}\right)=\frac{c}{\lambda^2}\,\frac{1}{1-\frac{\partial:c}{\lambda^2}}=$$

$$=\frac{c}{\lambda^2-\frac{\partial}{c}}=\frac{D}{\lambda^2-C};\text{ положивъ:}$$

$$c=D,\;\frac{\partial}{c}=C.$$

Такимъ образомъ находимъ окончательно:

$$n^2-p^2-1=\frac{A}{\lambda^2-B}+\frac{D}{\lambda^2-C}. \tag{I}$$

Подобную формулу далъ эмпирически и повѣрилъ Кеттелеръ[1]; повѣрку онъ производилъ, вычисляя по формулѣ (I) показатели преломленія обыкновеннаго луча въ исландскомъ шпатѣ, опре-

[1] Wied. Ann. Bd. XII. S. 367.

дѣленные Маскаромъ; разности между вычисленіемъ и опытомъ достигали вообще немногихъ единицъ 5-го десятичнаго знака.

Замѣтимъ, что у насъ B отрицательно, и Кеттелеръ въ разсматриваемомъ примѣрѣ дѣйствительно нашелъ то-же самое.

Подобнымъ образомъ найдемъ для V уравненіе:

$$V^2 + \frac{A}{\lambda} V = \frac{B}{\lambda^2} + \frac{\frac{C}{\lambda^2}}{1+\frac{D^2}{\lambda^2}} \tag{3}$$

гдѣ
$$A = \frac{4\pi}{sc_0}[\varkappa - \nu - s\varrho], \quad B = \frac{16\pi^2}{sc_0{}^2}\nu(\varkappa - \nu)\varrho,$$

$$C = \frac{16\pi^2}{sc_0{}^2}\nu^2\varrho, \quad D = \pi c_0 \frac{1+s}{\varkappa - \nu + s\rho}.$$

Опредѣляя V изъ (3), разлагая корень въ строку и полагая:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} p,$$

найдемъ:

$$2\, np = \lambda \left\{ \frac{A_1}{\lambda^2 - B_1} + \frac{D_1}{\lambda^2 - C_1} \right\} \tag{II}$$

Получаемъ формулу, которую повѣряли многіе физики: Гессе[1], Кеттелеръ[2] и др.

Замѣтимъ, что количества B_1, C_1 въ формулѣ (II) можемъ замѣнить B, C формулы (I), сохраняя ту-же степень приближенія.

§ 37. Если вмѣсто гипотезы Ломмеля (§ 24) относительно силъ тренія и сопротивленія введемъ гипотезу, аналогичную предложенной Стоксомъ для жидкостей, т. е. положимъ:

$$F_x = 2m\nu\left(\frac{d\Delta_2\pi}{dt} - \frac{d\Delta_2 u}{dt}\right), \quad F_y = \ldots, F_z = \ldots$$

---

[1] Wied. Ann. Bd. XI, S. 871 (1880).

[2] Wied. Ann. Bd. XII. S. 481 (1881).

$$F'_x = 2\kappa m \frac{d\Delta_2 u}{dt}, \ldots .$$

то при прежнихъ обозначеніяхъ найдемъ уравненія:

$$VR\cos\psi + UR\sin\psi = V + \frac{Uc_0^2 - q^2}{2\nu\rho q} \quad (1)$$

$$UR\cos\psi - VR\sin\psi = U - \frac{Vc_0^2}{2\nu\rho q} \quad (2)$$

$$(Aq^2 + L_1)\cos\psi + G_1\sin\psi + 2\nu_1 qAV = 0 \quad (3)$$

и такихъ уравненій три; далѣе

$$G_1\cos\psi - (Aq^2 + L_1)\sin\psi + 2\nu_1 qAU = 0 \quad (4)$$

такихъ уравненій тоже три; причемъ положено:

$$L_1 = -S_1 U + 2(\kappa - \nu)qAV, L_2 = \ldots, L_3 = \ldots$$

$$G_1 = S_1 V + 2(\kappa - \nu)qAU, G_2 = \ldots, G_3 = \ldots$$

Изъ системъ (3) и (4) совершенно такимъ же путемъ, какъ въ § 30, найдемъ для S уравненіе (I) § 33.

Уравненія (3) и (4), по умноженіи соотвѣтственно на A, B, C и складываніи результатовъ, даютъ:

$$\left.\begin{aligned} (q^2 + L)R\cos\psi + GR\sin\psi &= -2\nu qV \\ GR\cos\psi - (q^2 + L)R\sin\psi &= -2\nu qU \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

здѣсь:

$$L = -US + 2(\kappa - \nu)qV;$$

$$G = VS + 2(\kappa - \nu)qU.$$

Изъ уравненій (а) находимъ:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{S(U^2 + V^2) - q^2 U}{2(\kappa - \nu)q(U^2 + V^2) + q^2 V}. \quad (b)$$

Отсюда находимъ приближенную формулу:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{S}{2(\varkappa-\nu)q} \tag{b'}$$

пренебрегая членами $\frac{U}{U^2+V^2}$ и $\frac{V}{U^2+V^2}$ какъ малыми.

Также находимъ:

$$R = \frac{2\nu q\sqrt{U^2+V^2}}{\sqrt{(U^2+V^2)(S^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2)+2q^2L+q^4}} \tag{c}$$

или съ тѣмъ же приближеніемъ:

$$R = \frac{2\nu q}{\sqrt{S^2+4(\varkappa-\nu)^2q^2}} \tag{c'}$$

Формулы (b') и (c') показываютъ связь настоящей теоріи съ теоріей Ломмеля.

Внося значенія ψ и R изъ равенствъ (b) и (c) въ уравненія (1) и (2), получимъ для U и V два уравненія 4-й степени весьма сложнаго вида, поэтому мы ими заниматься не будемъ.

ГЛАВА VII.

§ 38. Въ-виду существенныхъ недостатковъ теорій, развитыхъ въ предъидущихъ главахъ, необходимо поискать — нельзя ли все-таки дать теорію свѣторазсѣянія и двойнаго преломленія болѣе состоятельную, чѣмъ предъидущія. Мнѣ кажется, что это можно сдѣлать и при настоящемъ нашемъ незнаніи внутреннихъ молекулярныхъ силъ тѣлъ.

Займемся поэтому изложеніемъ новой теоріи двойнаго преломленія и свѣторазсѣянія.

§ 39. На основаніи равенства (3) § 2 мы можемъ написать[1].

---

[1] При этомъ знакъ S обозначаетъ сумму трехъ членовъ, аналогичныхъ написанному.

$$\iiiint dx.dy.dz.dt\left\{\mu.\mathrm{S}\frac{d^2\pi}{dt^2}\delta\pi+\right.$$

$$\left.+m.\mathrm{S}\frac{d^2u}{dt^2}\delta u-\mathrm{S}E_x\delta\pi-\mathrm{S}M_x\delta\pi\right\}=0. \qquad (1)$$

При этомъ предполагаемъ, что силы упругости матеріальной среды безконечно малы въ сравненіи съ упругостью эфира; то-же полагаемъ и относительно силъ, дѣйствующихъ со стороны эфирныхъ частицъ на матеріальныя; силы же M_x, M_y, M_z суть составляющія силы, обусловленной воздѣйствіемъ матеріальной среды на эфирную.

Это воздѣйствіе матеріальныхъ частицъ на эфирную проявляется двояко: 1) въ видѣ сопротивленія уже существующему движенію эфирной частицы и 2) въ измѣненіи упругости эфира.

Обозначимъ составляющія силы 1-го рода буквами

$$R_x, R_y, R_z,$$

а 2-го буквами:

$$F_x, F_y, F_z;$$

тогда:

$$\begin{aligned} M_x &= R_x + F_x \\ M_y &= R_y + F_y \\ M_z &= R_z + F_z. \end{aligned}$$

Относительно силъ M_x,... мы можемъ сдѣлать только болѣе или менѣе вѣроятныя гипотезы; эти гипотезы должны быть различны, смотря по тому, какова разсматриваемая средина: поглощающая свѣтъ, или нѣтъ.

Разсмотримъ сначала послѣднія.

§ 40. Положимъ, что весьма вѣроятно:

$$R_x=\delta_x\pi, \quad R_y=\delta_y\varrho, \quad R_z=\delta_z\omega. \qquad (1)$$

Что-же касается силы F, то мы можемъ предположить, что измѣненіе упругости эфира, находящагося въ движеніи, зависитъ отъ самой силы его упругости, и такъ-какъ видъ этой зависимости намъ неизвѣстенъ, то, какъ приближеніе, мы можемъ полагать:

$$F_x = \alpha_x E_x + \sum \alpha_x{}^{(i)} \cdot \frac{\partial^{(i)} E_x}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial z^r} \tag{2}$$

и подобныя формулы для F_y и F_z, при этомъ

$$p + q + r = i.$$

Ясно, что выраженіе (2) можетъ содержать, во-первыхъ, только члены съ производными четныхъ порядковъ и, во-вторыхъ, коэффиціенты при производныхъ одного и того-же порядка равны; это суть необходимыя слѣдствія симметричности строенія срединъ, коими мы занимаемся.

Подставивъ въ (1) и (2) значенія π, ϱ, ω изъ § 25, мы можемъ представить ихъ въ видѣ:

$$R_x = -\frac{c^2}{q^2} \delta_x E_x \tag{3}$$

и

$$F_x = \left[\alpha_x + \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_x{}^{(i)} \cdot \frac{q^{2i}}{c^{2i}}\right] \cdot E_x\,, \tag{4}$$

причемъ δ и α суть нѣкоторые коэффиціенты и $\alpha_x{}^{(i)}$ съ возрастаніемъ нумера (i) уменьшается.

Подобныя формулы имѣемъ и для R_y, F_y, . . .

Соединяя (3) и (4), имѣемъ:

$$M_x = M_x{}' E_x\,, \quad M_y = M_y{}' E_y\,, \quad M_z = M_z{}' E_z\,, \tag{5}$$

гдѣ

$$M_x{}' = \alpha_x - \delta_x \cdot \frac{c^2}{q^2} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_x{}^{(i)} \cdot \frac{q^{2i}}{c^{2i}}. \tag{6}$$

Подобныя выраженія будемъ имѣть для M'_y и M'_z.

Замѣтимъ здѣсь одно важное обстоятельство.

Если-бы средина не обладала симметріей, то въ выраженія M_x, M_y и M_z взошли бы члены съ производными нечотныхъ порядковъ отъ E_x, E_y, E_z, что соотвѣтствовало бы новымъ оптическимъ явленіямъ въ такихъ срединахъ, именно явленіямъ эллиптической или вращательной поляризаціи.

Допустимъ далѣе, что u, v, w суть функціи π, ϱ, ω, и предположимъ вмѣстѣ съ Буссинескомъ[1], что

$$u = m_x\pi, \quad v = m_y\varrho, \quad w = m_z\omega,$$

гдѣ

$$m_x = \gamma_x + \sum_{i=1}^{i=\infty} \gamma_x^{(i)} \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^{2i}, \quad m_y = \ldots, \quad m_z = \ldots.$$

Коеффиціенты $\gamma_x^{(i)}$ того же свойства, что и $\alpha_x^{(i)}$.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ силъ, для полноты рѣшенія введемъ еще силы давленія (гидростатическаго), существующаго въ эфирной средѣ:

$$U_x = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad U_z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Положимъ, что

$$P = P_0 \sin Q.$$

§ 41. Внеся все найденное въ послѣднемъ параграфѣ въ уравненіе (1) § 39, найдемъ, приравнивая нулю коеффиціенты при $\partial\pi$, $\partial\varrho$, $\partial\omega$:

$$\left(\mu + mm_x^2\right)\frac{d^2\pi}{dt^2} = e\Delta_2\pi + M'_x\Delta_2\pi + \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\left(\mu + mm_y^2\right)\frac{d^2\varrho}{dt^2} = e\Delta_2\varrho + M'_y\Delta_2\varrho + \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\left(\mu + mm_z^2\right)\frac{d^2\omega}{dt^2} = e\Delta_2\omega + M'_z\Delta_2\omega + \frac{\partial P}{\partial z},$$

или подставляя значеніе π, ϱ, ω и дѣлая очевидныя приведенія:

[1] Journal de Liouville, T. XIII, p. 319 (1868).

$$\left.\begin{aligned}\left[c^2(\mu+mm_x^2)-(e+M'_x)\right]A&=mP_0\frac{c}{q}\\ \left[c^2(\mu+mm_y^2)-(e+M'_y)\right]B&=nP_0\frac{c}{q}\\ \left[c^2(\mu+mm_z^2)-(e+M'_z)\right]C&=pP_0\frac{c}{q}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

§ 42. Какъ первое приближенiе допустимъ въ уравненiяхъ (1) предъидущаго §:

$$m_x=m_y=m_z=M$$

и положимъ:

$$\frac{e+M'_x}{\mu+mM^2}=\alpha^2,\ \frac{e+M'_y}{\mu+mM^2}=\beta^2,\ \frac{e+M'_z}{\mu+mM^2}=\gamma^2,\quad(a)$$

$$\frac{P_0c}{q(\mu+mM^2)}=F,$$

тогда уравненiя (1) превращаются въ слѣдующiя:

$$\left.\begin{aligned}(c^2-\alpha^2)A^2&=mF\\ (c^2-\beta^2)B^2&=nF\\ (c^2-\gamma^2)C^2&=pF\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Эти уравненiя даютъ извѣстные законы двойнаго преломленiя; умножая ихъ по порядку на

$$\frac{m}{c^2-\alpha^2},\ \frac{n}{c^2-\beta^2},\ \frac{p}{c^2-\gamma^2},$$

складывая и помня, что

$$Am+Bn+Cp=0,$$

найдемъ:

$$\frac{m^2}{c^2-\alpha^2}+\frac{n^2}{c^2-\beta^2}+\frac{p^2}{c^2-\gamma^2}=0.\quad(2)$$

Это есть извѣстное уравненiе Фрэнэля, найденное имъ въ 1821 году въ немного иной формѣ[1].

[1] Oeuvres complètes d'Aug. Fresnel, T. II. p. 296.

Получивъ уравненіе (2), безъ труда найдемъ всѣ извѣстные законы двойнаго лучепреломленія.

§ 43. Что касается свѣторазсѣянія, то уравненія (1) § 41 даютъ, будучи предварительно умножены на A, B, C и сложены, послѣ простыхъ преобразованій:

$$n^2-1=-K^2\lambda^2+a+\frac{bn^2}{\lambda^2}+\frac{cn^4}{\lambda^4}+\ldots \qquad (1)$$

Формула (1) представляетъ въ первой части безконечную строку; законъ составленія членовъ ея неизвѣстенъ и употреблять ее въ такомъ видѣ неудобно, поэтому постараемся замѣнить ее другими, болѣе удобными для употребленія.

Введемъ длину внутренней волны; называя ее l, имѣемъ:

$$l=\frac{\lambda}{n} \text{ или } \frac{n}{\lambda}=\frac{1}{l}.$$

Подставляя въ (1), получимъ:

$$n^2-1=-K^2n^2l^2+a+\frac{b}{l^2}+\frac{c}{l^4}+\frac{d}{l^6}+\ldots \qquad (2)$$

Отсюда:

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1+K^2l^2}{1+a+\frac{b}{l^2}+\frac{c}{l^4}+\ldots}$$

или, полагая:

$$\frac{1}{1+a}=a_1,\ \frac{K^2}{1+a}=K_1^{\,2},\ \frac{b}{1+a}=b_1,\ \frac{c}{1+a}=c_1,$$

$$\frac{1}{n^2}=\frac{a_1+K_1^{\,2}l^2}{1+\frac{b_1}{l^2}+\frac{c_1}{l^4}+\ldots}=\alpha_1+\varkappa_1l^2+\frac{\beta_1}{l^2}+\frac{\gamma_1}{l^4}+\ldots.$$

но вслѣдствіе малости $\varkappa_1$ и $\gamma_1:\beta_1$ можно взять:

$$\alpha_1+\varkappa_1l^2=\frac{\alpha_1}{1-\frac{\varkappa_1}{\alpha_1}l^2}=\frac{\alpha_1^{\,2}:\varkappa_1}{\alpha_1:\varkappa_1-l^2}=\frac{A_1}{B_1-l^2}.$$

Точно такъ-же:

$$\frac{\beta_1}{l^2}+\frac{\gamma_1}{l^4}=\frac{\beta_1}{l^2}\left(1+\frac{\gamma_1:\beta_1}{l^2}\right)=\frac{\beta_1:l^2}{1-\frac{\gamma_1:\beta_1}{l^2}}=\frac{\beta_1}{l^2-(\gamma_1:\beta_1)}=$$

$$=\frac{C_1}{D_1-l^2}.$$

Ограничиваясь 4-мя членами въ формулѣ (2), имѣемъ:

$$\frac{1}{n^2}=\frac{A_1}{B_1-l^2}+\frac{C_1}{D_1-l^2}. \qquad \text{(a)}$$

Изъ той же формулы (1) обращеніемъ строки найдемъ:

$$n^2-1=-K^2\lambda^2+a+\frac{b_1}{\lambda^2}+\frac{c_1}{\lambda^4}+\ldots . \text{(I bis)}.$$

Отсюда, такъ-же какъ и выше, найдемъ:

$$n^2-1=\frac{A}{\lambda^2-B}+\frac{C}{\lambda^2-D}. \qquad \text{(b)}$$

Въ формулахъ (1) и (1 bis) коеффиціенты b, c, d, ... очень малы и идутъ уменьшаясь; коеффиціентъ K тоже очень малъ. Вотъ таблица значеній K^2 для аррагонита и топаза въ случаѣ, когда лучъ идетъ вдоль какой-нибудь изъ осей упругости:

Аррагонитъ	$7{,}29.10^{-5}$	$20{,}58.10^{-5}$	$1{,}05.10^{-5}$
Топазъ	$6{,}55.10^{-5}$	$11{,}92.10^{-5}$	$8{,}60.10^{-5}$

Эти коеффиціенты вычислены по даннымъ Рудберга[1] для лучей B, D, F и H, ограничиваясь въ формулѣ (1 bis) первыми четырьмя членами; длины волнъ были взяты средні изъ опредѣленій Фрауенгофера, Ванъ-деръ-Виллигена, Дитшейнера, Онгстрема, Стефана и Маскара[2].

---

[1] Эти данныя взяты изъ французскаго перевода оптики Бера (стр. 325 и 326).

[2] *Wüllner's*, Exp. Physik, Bd. II. S. 136 (3 Aufl.).

Формула (1 bis), если остановимся на 4-хъ членахъ или *даже на пяти*, даетъ результаты болѣе далекіе отъ данныхъ опыта[1], чѣмъ формулы (a) или (b); математически это ясно, ибо въ формулахъ (a) и (b), если-бы ихъ развернули въ строки, кромѣ 4-хъ членовъ (1 bis), взойдетъ еще рядъ членовъ, хотя не равный суммѣ откидываемыхъ въ (1 bis) членовъ, но мало отъ нея отличающійся, такъ что вліяніе откидываемыхъ членовъ въ большей своей части формулы (a) и (b) заключаютъ въ себѣ.

Такимъ образомъ для непоглощающихъ срединъ формулы (a) или (b) суть приближенныя формулы, дающія очень надежные результаты.

Если-бы намъ былъ извѣстенъ законъ составленія коэффиціентовъ въ строкѣ (1) или (1 bis), то мы знали бы точно ея сумму.

Если-бы отбросили членъ съ K^2, какъ очень малый, и ограничились бы двумя членами, то формулу (1 bis) можно написать такъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{b_1 : a}{\lambda^2}},$$

или, полагая:

$$b_1 : a = \lambda_0^2,$$

въ видѣ:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}. \tag{c}$$

Эта формула съ двумя постоянными a и λ_0 даетъ результаты лучшіе, чѣмъ формула (1 bis), ограниченная двумя членами

[1] Относительно повѣрки формулы (a) см. Ketteler въ Pog. Ann. Bd. 140, S. 1 (1870), а для формулы (b) Wiedemann's Ann. Bd. XII. S. 363 (1881). Ср. также опредѣленіе n для спирта по формулѣ (1 bis) съ 4-мя членами Wied. Ann. Bd. XII. S. 502.

(безъ члена съ K^2, разумѣется); причина понятна изъ сказаннаго о формулахъ (a) и (b).

Ломмель[1] достаточно многочисленными сравненіями доказалъ это свойство формулы (c).

Формулу (1 bis) можно еще превратить въ такую

$$n^2-1=\frac{\alpha+\beta\,.\,\lambda^2+\gamma:\lambda^2}{1-(\lambda_0:\lambda)^2}; \tag{d}$$

эта формула даетъ тоже очень хорошіе результаты, какъ показалъ Ломмель[2].

Замѣтимъ еще, что изъ (1 bis) можно получить формулу для n вида:

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}+H\lambda^2; \tag{e}$$

такую формулу повѣрялъ Маскаръ[3].

§ 44. Перейдемъ къ срединамъ, поглощающимъ свѣтъ.

Поглощеніе свѣта срединой должно, по нашему мнѣнію, обусловливаться силами, аналогичными тренію; поэтому, полагая треніе пропорціональнымъ скорости колеблющейся частицы, имѣемъ:

$$R_x=\delta_x\pi+\kappa_x\frac{d\pi}{dt},\; R_y=\delta_y\varrho+\kappa_y\frac{d\varrho}{dt},$$

$$R_z=\delta_z\omega+\kappa_z\frac{d\omega}{dt}. \tag{1}$$

Далѣе въ этомъ случаѣ можно взять:

$$\pi=Ae^{-Kr+Qi},\quad \varrho=Be^{-Kr+Qi},\quad \omega=Ce^{-Kr+Qi},$$

гдѣ K — коэффиціентъ поглощенія и

$$r=mx+ny+pz.$$

[1] Wied. Ann. Bd. VIII. S. 628 (1879). Также Bd. III. S. 348 (1878).
[2] Wied. Ann. Bd. XIII, S. 353 (1881).
[3] Annales scientifiques de l'école normale, p. 266 (1864).

Первое уравненіе движенія будетъ:

$$\left(\mu + mm_x{}^2\right)\frac{d^2\pi}{dt^2} = e\Delta_2\pi + F_1\Delta_2\pi + \delta_x\pi + \kappa_x\frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

причемъ положено

$$F_1 = \sum_{i=0}^{i=\infty} \beta_x{}^{(i)} N^{2i} \text{ и } N = K + \frac{q}{c}\,i.$$

Уравненіе (2) и два другихъ ему аналогичныхъ для осей y и z даютъ, какъ и выше (§ 43):

$$\nu^2 - 1 = G\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2}\nu^2 + \frac{c}{\lambda^4}\nu^4 + \ldots + H\lambda i \quad (3)$$

гдѣ
$$\nu = n + pi \quad (4)$$

n — показатель преломленія, а p связанъ съ коеффиціентомъ K равенствомъ

$$K = -\frac{2\pi}{\lambda}p. \quad (5)$$

Коеффиціентъ p тоже называютъ коеффиціентомъ поглощенія лучей длины волны λ.

Уравненіе (3) распадается на два; сравнивая его дѣйствительныя и мнимыя части, находимъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = G\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2}(n^2 - p^2) + \frac{c}{\lambda^4}\Big[(n^2 - p^2)^2 - 4n^2p^2\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\lambda^6}\Big[(n^2 - p^2)^3 - 12(n^2 - p^2)n^2p^2\Big] + \ldots\ldots, \quad (6)$$

$$2np = H\lambda + \frac{2b}{\lambda^2}np + \frac{4c}{\lambda^4}(n^2 - p^2)np +$$
$$+ \frac{2\partial}{\lambda^6}\Big[3(n^2 - p^2)^2 - 4n^2p^2\Big]np + \ldots\ldots, \quad (7)$$

Занимаясь здѣсь только тѣми срединами, для которыхъ p довольно мало, мы можемъ въ правой части равенства (6) пренебречь членами:

$$\frac{p^2}{n^2}\,,\ \frac{p^4}{n^4}\,,\ \ldots$$

умноженными на малые коеффиціенты b, c, ... тогда оно превращается въ слѣдующее:

$$n^2-p^2-1=G\lambda^2+a+\frac{b}{\lambda^2}\,n^2+\frac{c}{\lambda^4}\,n^4+\ldots \quad (8)$$

Точно такъ-же изъ (7) можемъ извлечь равенство:

$$2\,np=\lambda\left\{H+\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta}{\lambda^4}+\ldots\right\} \quad (9)$$

Формула (8) того-же вида, какъ и формула (1 bis) § 43; поэтому ее можно представить въ видѣ (b) того-же §; точно такъ-же формулу (9) можно написать подъ видомъ:

$$2\,np=\lambda\left(H+\frac{E}{\lambda^2-F}\right) \quad (10)$$

При этомъ значеніе коеффиціентовъ понятно.

Формулы (6) и (7) можно преобразовать иначе, чѣмъ мы это сейчасъ сдѣлали; тогда форма (8) останется та-же, въ равенство же (9) взойдетъ членъ $L\lambda^2$, аналогичный члену $G\lambda^2$ и коеффиціентъ L крайне малъ.

§ 45. Формулу (8) мы можемъ съ большимъ или меньшимъ приближеніемъ замѣнить другими; полезно разсмотрѣть эти различныя формы.

1) Ограничиваясь первыми 4-мя членами, имѣемъ:

$$n^2-p^2-1=G\lambda^2+a+\frac{bn^2}{\lambda^2}+\frac{cn^4}{\lambda^4} \quad (1)$$

Пренебрегая p^2 и G, какъ количествами малыми, и полагая

$$a+1=n^2{\sim},\quad b=B+M,\quad c:M=L^2$$

найдемъ съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$n^2 = n^2_{\infty} + B\frac{n^2}{\lambda^2} + \frac{M}{\frac{\lambda^2}{n^2} - L^2} \quad (2)$$

Видимъ, что n_{∞} есть значеніе n для $\lambda = \infty$.

Въ такомъ (2) видѣ повѣрялась формула для дисперсіи Клаесомъ[1] для многихъ поглощающихъ срединъ; при этомъ, какъ можно убѣдиться простымъ вычисленіемъ, коеффиціенты B, n_{∞}, L связаны съ длиной волны для средины полосы поглощенія λ_m, соотношеніемъ:

$$\lambda^2_m - B = n^2_{\infty} L^2.$$

2) Пренебрегая G и p^2 и полагая:

$$c : b = L^2,\ b = D'L^2,\ n^2_{\infty} = a + 1,$$

найдемъ такъ-же какъ и выше:

$$n^2 - n^2_{\infty} = \frac{D'L^2n^2}{\lambda^2 - L^2n^2} \quad (3)$$

Эту формулу, данную Кеттелеромъ, какъ и формулу (2) повѣрялъ Зибенъ[1] для многихъ поглощающихъ срединъ; совпаденіе вычисленій съ данными опыта было вполнѣ удовлетворительно.

3) Поступая, какъ въ § 43 при полученіи формулы (d), найдемъ:

$$n^2 = \alpha + \beta\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{1 - \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)} \quad (4)$$

---

[1] Wied. Ann. Bd. III, S. 398 (1878). Клаесъ исходилъ изъ формулы Кеттелера (§ 12).

[2] Wied. Ann. Bd. VIII, S. 137 (1879).

Эту формулу повѣрялъ Ломмель при помощи наблюденій Кундта[1]; согласіе получалось достаточное.

Что-же касается формулы для p, именно формулы (9) или (10), то въ этой формѣ она не провѣрялась, въ формѣ же нѣсколько отличной, но выводимой изъ формулы (7) или (9), провѣрялась Гессе[2], Пульфрихомъ[3] и Кеттелеромъ[4]; совпаденіе, принимая во вниманіе малость p и трудность его опредѣленія, было вполнѣ удовлетворительное.

§ 46. Соединяя все сказанное, должны заключить, что истинныя дисперсіонныя формулы суть (6) и (7), и первая можетъ быть замѣнена формой (b) § 43, а вторая (10) предъидущаго параграфа.

Замѣтимъ, что формулы (6) и (7) § 45 или лучше формула (3) § 44 превращается въ (b) § 43, если положимъ $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 0$, ибо тогда: $H=0$ и $p=0$ и $\nu=n$.

---

1 Wied. Ann. Bd. III, S. 352 (1878).

2 Wied. Ann. Bd. XI, S. 871 (1880).

3 Wied. Ann. Bd. XIV, S. 177 (1881) и Bd. XV, S. 337 (1882).

4 Wied. Ann. Bd. XII, S. 481 (1881).

Содержаніе «Приложенія».

Протоколъ засѣданія 18-го марта 1882 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. А. Ключниковъ, Н. М. Флавицкій и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Предметы занятій:

1) Выборъ новаго члена. Избранъ въ члены закрытою баллотировкой преподаватель реальнаго училища Н. В. Проскурниковъ.

2) Сообщеніе г. *Козлова* — объ изобрѣтенномъ имъ діаграммометрѣ (цифрарѣ) и его приложеніи къ вычисленію статистическихъ данныхъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ:*
11	5 *снизу*	$\beta'z$	β'_z
19	9 —	τ	τ^2
22	9 —	$\frac{1}{f'}$	$-\frac{1}{f'}$
35	9 —	§ 5	§ 4
37	11	$-\frac{4\pi}{\lambda}\sigma$	$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sigma$
40	10 *сверху*	§ 5	§ 4
43	5 *снизу*	§ 23	§ 24
50	3 *сверху*	§ 23	§ 24
—	8 —	§ 9	§ 25
—	7 *снизу*	§ 9	§ 25
55	4 *сверху*	§ 34	§ 31
72	11, 12 и 13 *св.*	A^2, B^2, C^2	A, B, C