С.Н. Зиненко

Математический анализ

Дифференцирование функций нескольких переменных

(сборник задач)

2014

26. Частные производные и дифференциал функции

Найти частные производные $f'_x, \ldots$ и дифференциал df функции $f(x, \ldots)$	
№ 26.1. $z = \frac{x}{y}$	**№ 26.1.** $z = xy$
№ 26.2. $z = x^3 \cdot \sqrt{y} + \sqrt[3]{x} \cdot y^5$	**№ 26.2.** $z = x^2 \cdot \sqrt[3]{y}^{\,4} - \sqrt[5]{x}^{\,6} \cdot y^7$
№ 26.3. $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)$	**№ 26.3.** $z = \arcsin \frac{x^3}{\sqrt{y}}$
№ 26.4. $z = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x^3}{y}\right)$	**№ 26.4.** $z = \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{y}{x^2}\right)$
№ 26.5. $z = x^y$	**№ 26.5.** $z = (\sin x)^{\cos y}$
№ 26.6. $u = x^{\frac{y}{z}}$	**№ 26.6.** $u = z^{xy^2}$
№ 26.7. $u = \frac{\sin\left(xy^2\right)}{\cos z}$	**№ 26.7.** $u = \frac{\operatorname{tg}\left(x^2 y\right)}{\operatorname{arctg} z}$
№ 26.8. $u = x^{y^z}$	**№ 26.8.** $u = z^{y^x}$
№ 26.9. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно значения	
$1.1^{1.8}$	$\sqrt[3]{1.1} \cdot \sqrt[4]{0.8}$
№ 26.10. При изменении сторон x, y и угла между ними z на Δx, Δy, Δz насколько приближенно изменятся периметр и площадь	
параллелограмма	треугольника
№ 26.11. При изменении радиуса (стороны) x основания и высоты y на Δx, Δy, насколько приближенно изменятся площади основания, боковой поверхности и объема	
кругового конуса	правильной треугольной пирамиды

27. Производная по направлению. Градиент

<table>
<tr><td colspan="2">№ 27.1. Высота поверхности над данной точкой местности $(x,\ y)$ равна $z = f(x,\ y)$. Найти
1) крутизну подъема поверхности в точке $A(x_A,\ y_A)$ в направлении точки $B(x_B,\ y_B)$
2) величину и направление наибольшего роста (убывания) высоты в точке $A(x_A,\ y_A)$
3) скорость изменения высоты вдоль линии уровня</td></tr>
<tr><td>$z = x^2 + y^2,\qquad A(1,\ 2) \to B(4, -2)$</td><td>$z = \sqrt{x^2 + y^2},\qquad A(2,\ 1) \to B(6, -2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 27.2. Температура нагретой пластины в точке $(x,\ y)$ равна $u = f(x,\ y)$. Найти
1) перепад температуры в точке $A(x_A,\ y_A)$ в направлении точки $B(x_B,\ y_B)$
2) величину и направление наибольшего роста (убывания) температуры в точке $A(x_A,\ y_A)$
3) скорость изменения температуры вдоль изотермы</td></tr>
<tr><td>$u = \sin\frac{x}{y},\qquad A(\pi, -1) \to O(0,\ 0)$</td><td>$u = \cos\left(xy^2\right),\quad A\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) \to B\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 27.3. Потенциал электростатического поля, созданного распределенным в некотором объеме зарядом, в точке пространства $(x,\ y,\ z)$ равен $\varphi = f(x,\ y,\ z)$. Найти
1) скорость изменения потенциала в точке $A(x_A, y_A, z_A)$ в направлении точки $B(x_B, y_B, z_B)$
2) величину и направление наибольшего роста (убывания) потенциала в точке $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$
3) скорость изменения потенциала вдоль эквипотенциальной поверхности</td></tr>
<tr><td>$\varphi = xy^2 - z^3,\quad A(2,\ 3,\ 4) \to B(4, -3,\ 7)$</td><td>$\varphi = x^3y^2 - \sqrt{z},\quad A(1, -2,\ 4) \to B(3,\ 1, -2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 27.4. Найти величину и направление градиента скалярного поля</td></tr>
<tr><td>гравитационного потенциала $\varphi = -m\,\frac{1}{|\vec{r}\,|}$</td><td>потенциала упругой струны $u = \frac{k}{2}\,|\,\vec{r}\,|^2$</td></tr>
</table>

28. Дифференцирование сложной функции

<table>
<tr><td colspan="2">Найти частные производные f_u', ... и дифференциал df сложной функции $f(x(u, \ldots), \ldots)$</td></tr>
<tr><td>

№ 28.1. $y = y(x)$, $\left[\ x = u \cdot v^2 \right.$
№ 28.2. $z = z(x, y)$, $\left[\begin{array}{l} x = u^2 \\ y = \sqrt{u} \end{array}\right.$
№ 28.3. $z = z(x, y)$, $\left[\begin{array}{l} x = uv \\ y = \frac{u}{v} \end{array}\right.$
№ 28.4. $z = z(x, y)$, $\left[\begin{array}{l} x = u + v^2 + w^3 \\ y = u^3 + v^2 + w \end{array}\right.$
№ 28.5. $f = f(x, y, z)$, $\left[\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u \cdot v \end{array}\right.$

</td><td>

№ 28.1. $y = y(x)$, $\left[\ x = \frac{u^2}{v} \right.$
№ 28.2. $z = z(x, y)$, $\left[\begin{array}{l} x = u^3 \\ y = \sqrt[3]{u} \end{array}\right.$
№ 28.3. $z = z(x, y)$, $\left[\begin{array}{l} x = uv \\ y = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right) \end{array}\right.$
№ 28.4. $z = z(x, y)$, $\left[\begin{array}{l} x = u \cdot v^2 \cdot w^3 \\ y = u^3 \cdot v^2 \cdot w \end{array}\right.$
№ 28.5. $f = f(x, y, z)$, $\left[\begin{array}{l} x = u \cdot v \\ y = \frac{u}{v} \\ z = u + v \end{array}\right.$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Предполагая, что произвольная функция f достаточное число раз дифференцируема, проверить следующие равенства</td></tr>
<tr><td>

№ 28.6. $x\, z_x' + y\, z_y' = 0$, $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
№ 28.7. $y\, z_x' + x\, z_y' = 0$, $z = f\left(x^2 - y^2\right)$

</td><td>

№ 28.6. $x\, z_x' - y\, z_y' = 0$, $z = f\left(x\, y\right)$
№ 28.7. $y\, z_x' - x\, z_y' = 0$, $z = f\left(x^2 + y^2\right)$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решить уравнение, сделав замену переменных</td></tr>
<tr><td>

№ 28.8. $x\, z_x' - y\, z_y' = 0$, $\left[\begin{array}{l} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{array}\right.$
№ 28.9. $x\, z_y' - y\, z_x' = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right.$

</td><td>

№ 28.8. $y\, z_x' + x\, z_y' = 0$, $\left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \\ v = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) \end{array}\right.$
№ 28.9. $x\, z_x' + y\, z_y' = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right.$

</td></tr>
</table>

29. Производные и дифференциалы высшего порядка. Формула Тейлора

<table>
<tr><td colspan="2">Проверить равенство смешанных производных</td></tr>
<tr><td>№ 29.1. $z = x^3 \cdot \sqrt{y}$

№ 29.2. $f = \dfrac{\sin x^3 \cdot y^2}{\cos z}$</td><td>№ 29.1. $z = \sqrt[3]{x} \cdot y^2$

№ 29.2. $f = \dfrac{\operatorname{arctg} y^3 \cdot z^2}{\ln x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти производные $f''_{xx}, \ldots$ и дифференциал $d^2 f$ функции $f(x, \ldots)$</td></tr>
<tr><td>№ 29.3. $z = x^2 \sin y$</td><td>№ 29.3. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos y}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 29.4. Воспользовавшись формулой Тейлора до второго порядка малости, найти приближенно следующие значения</td></tr>
<tr><td>$1.1^{1.8}$</td><td>$\sqrt[3]{1.1} \cdot \sqrt[4]{0.8}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 29.5. Найти производные $f''_{uu}, \ldots$ и дифференциал $d^2 f$ сложной функции $f(x(u, \ldots), \ldots)$</td></tr>
<tr><td>$z = z(x, y), \quad \left[\begin{array}{l} x = u^2 v \\ y = u v^2 \end{array}\right.$</td><td>$z = z(x, y), \quad \left[\begin{array}{l} x = u v \\ y = \frac{u}{v} \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решить уравнение, сделав замену переменных</td></tr>
<tr><td>№ 29.6. $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0, \left[\begin{array}{l} u = x + y \\ v = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) \end{array}\right.$

№ 29.7.

$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0, \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right.$</td><td>№ 29.6. $z''_{xx} = z''_{yy}, \quad \left[\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array}\right.$

№ 29.7.

$-xy\, z''_{xx} + (x^2 - y^2) z''_{xy} + xy\, z''_{yy} - {}$
$- y z'_x + x z'_y = 0, \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right.$</td></tr>
</table>

30. Экстремум функции

<table>
<tr><td colspan="2">Исследовать на экстремум функции нескольких переменных</td></tr>
<tr><td>№ 30.1. $z=-5x^2-y^2+2xy+6x+2y$

№ 30.2. $z=8x^2-3y^2-2xy-12x+14y$

№ 30.3. $z=x^3+xy^2-2xy+y^2-11x-2y$

№ 30.4. $u=x^2+y^2+z^2+xy-yz-xz-x-2y-3z$</td><td>№ 30.1. $z=2x^2+5y^2+2xy-10x-14y$

№ 30.2. $z=8x^2-3y^2-10xy-22x+26y$

№ 30.3. $z=y^3+x^2y+4xy-x^2-4x-8y$

№ 30.4. $u=x^2+xy+yz-xz-x-4y-z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 30.5. При каких размерах a) “закрытая”, b) “открытая” прямоугольная коробка</td></tr>
<tr><td>заданного объема V имеет наименьшую площадь поверхности S</td><td>заданной площади поверхности S имеет наибольший объем V</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 30.6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x,y)$ в области $\varphi(x,y)\le 0$</td></tr>
<tr><td>$z=x^2+y^2,\qquad x^2+(y-1)^2\le 4$</td><td>$z=x^2-y^2,\qquad x^2+y^2\le 1$</td></tr>
</table>

31. Элементы дифференциальной геометрии

№ 31.1. Траектория движения точки описывается заданными параметрическими уравнениями. Найти величину и направление скорости движения. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой в заданный момент времени	
$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t\,, \\ z = t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi), \quad t_0 = \frac{\pi}{3}$	$\begin{cases} x = a\, t\cos t \\ y = a\, t\sin t\,, \\ z = t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi), \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$
№ 31.2. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, как линии пересечения двух поверхностей, заданных явно	
$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 - 2x - 4y \end{cases}, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0) = (2, -2,\ 8)$	$\begin{cases} z = xy \\ z = 1 + x + y \end{cases} \quad (x_0,\, y_0,\, z_0) = (2,\ 3,\ 6)$
№ 31.3. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, как линии пересечения двух поверхностей, заданных неявно	
$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0) = (3,\ 4,\ 5)$	$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 5z = 0 \end{cases}, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0) = (1,\ 2,\ 1)$
№ 31.4. Построить поверхность, заданную параметрически, и координатные линии. Написать уравнения касательных прямых к координатным линиям, касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности	
$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v\,, \\ z = v \end{cases} \left(\begin{matrix} 0 \le u \le a \\ 0 \le v \le 2\pi \end{matrix} \right), \quad (u_0, v_0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{6} \right)$	$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v\,, \\ z = u \end{cases} \left(\begin{matrix} 0 \le u \le a \\ 0 \le v \le 2\pi \end{matrix} \right), \quad (u_0, v_0) = \left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3} \right)$
№ 31.5. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности, заданной явно	
$z = xy, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0) = (-1, -2,\ 2)$	$z = x^2 + y^2, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0) = (-1,\ 2,\ 5)$
№ 31.6. Написать уравнения касательной плоскости к поверхности, заданной неявно	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (x_0,\, y_0,\, z_0)$