ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРАВИЛА МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Методическая заметка

Н. И. Ахиезер

Ограничимся для простоты основным случаем изопериметрической задачи, когда ищется вектор-функция $y=y(x)=\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)\}$ от одной независимой переменной при фиксированных значениях на концах интервала $[a, b]$, а минимизации подлежит функционал

$$J_0[y]=\int_a^b f_0(x,y,y')\,dx$$

при связях

$$J_k[y]=\int_a^b f_k(x,y,y')\,dx=l_k \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Функции $f_i(x,y,y')$ $(i=0,1,\ldots,n)$ определены в некоторой области G пространства $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ для всех конечных значений вектора $y'=\{y_1', y_2', \ldots, y_m'\}$ и удовлетворяют обычным требованиям дифференцируемости.

Пусть кусочно-гладкая кривая $y=\bar{y}(x)$, целиком лежащая в области G и соединяющая две ее заданные точки, дает функционалу $J_0[y]$ минимум при связях (1). Подлежащее доказательству правило множителей, как известно, устанавливает существование таких констант $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_0^2+\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2\neq 0)$, что $y=\bar{y}(x)$ является для функционала

$$\int_a^b\{\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n\}\,dx$$

безусловной экстремалью, то-есть, экстремалью, отвечающей свободному варированию.

Положим

$$[\bar{f}_{ir}]=f_{iy'_r}(x,\bar{y},\bar{y}')-\int_a^x f_{iy_r}(x,\bar{y},\bar{y}')\,dx-c_{ir}$$

$$(i=0,1,\ldots,n;\quad r=1,2,\ldots,m),$$

где константы c_{ir} подобраны так, что

$$\int_a^b[\bar{f}_{ir}]\,dx=0 \quad (i=0,1,\ldots,n;\quad r=1,2,\ldots,m), \tag{2}$$

и введем векторы:

$$[\bar f_i] = \{[\bar f_{i1}], [\bar f_{i2}], \ldots, [\bar f_{im}]\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Правило множителей будет доказано, если мы установим, что векторы

$$[\bar f_0], [\bar f_1], \ldots, [\bar f_n],$$

линейно зависимы, или, иначе говоря, что равен нулю определитель Грама

$$\Gamma\{[\bar f_0], [\bar f_1], \ldots, [\bar f_n]\} = |([\bar f_i], [\bar f_k])|_{i, k=0}^{n}, \tag{3}$$

где $([\bar f_i], [\bar f_k])$ означает скалярное произведение вектор-функций $[\bar f_i]$, $[\bar f_k]$, определяемое общей формулой:

$$(u, v) = \int_a^b \{u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \ldots + u_m(x)v_m(x)\}\,dx.$$

Мы можем принять, что

$$\Gamma\{[\bar f_1], [\bar f_2], \ldots, [\bar f_n]\} \neq 0, \tag{4}$$

так как в противном случае существовала бы линейная зависимость уже между вектор-функциями:

$$[\bar f_1], [\bar f_2], \ldots, [\bar f_n].$$

Проварииируем теперь вектор-функцию $\bar y(x)$, полагая:

$$y^*(x] = \bar y(x) + \varepsilon_0 \int_a^x [\bar f_0]\,dx + \varepsilon_1 \int_a^x [\bar f_1]\,dx + \ldots + \varepsilon_n \int_a^x [\bar f_n]\,dx, \tag{5}$$

где ε_i — достаточно малые по абсолютному значению числа. В компонентах (5) имеет вид:

$$y_r^*(x) = \bar y_r(x) + \varepsilon_0 \int_a^x [\bar f_{0r}]\,dx + \varepsilon_1 \int_a^x [\bar f_{1r}]\,dx + \ldots + \varepsilon_n \int_a^x [\bar f_{nr}\,dx.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m).$$

Что вектор-функция $y^*(x)$ удовлетворяет краевым условиям, вытекает из (2). С другой стороны, если мы положим:

$$J_i[y^*] = \varphi_i(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\varphi_k(0, 0, \ldots, 0) = l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varphi_0 = (0, 0, \ldots, 0) = J_0[\bar y]$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0} = \int_a^b [\bar f_i][\bar f_k]\,dx = ([\bar f_i], [\bar f_k],$$

так что

$$\left.\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}\right|_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0} = \Gamma\{[\bar f_0], [\bar f_1], \ldots, [\bar f_n]\} \tag{6}$$

и

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)}\right|_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0} = \Gamma\{[\bar f_1], [\bar f_2], \ldots, [\bar f_n]\}.$$

В силу нашего предположения (4) в достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$ уравнения

$$\varphi_k(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

определяют величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ как непрерывно дифференцируемые функции от ε_0, обращающиеся в нуль при $\varepsilon_0 = 0$. А так как функция $\varphi_0(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ имеет в точке $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0$ минимум при связях $\varphi_k(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = l_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то на основании правила множителей из дифференциального исчисления должен равняться нулю якобиан

$$\left.\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}\right|_{\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0},$$

что в силу (6) означает равенство нулю определителя Грама (3).

Доказательство закончено.