Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МІКРОФЛЮЇДИКИ І НАНОФЛЮЇДИКИ

Методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи з курсу
«Основи нанореології» для студентів спеціальності
«Прикладна математика»

Харків – 2020

УДК: 539.3 (075.8)
П 75

Рецензенти:

Ю. В. Ромашов – доктор технічних наук, професор кафедри «Паро-генераторобудування» Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;

О. М. Дацок – кандидат технічних наук, доцент Харківського національного технічного університету радіоелектроніки.

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 3 від 27.02.2020 р.)

П 75 **Прикладні** задачі мікрофлюїдики і нанофлюїдики : методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи з курсу «Основи нанореології» для студентів спеціальності «Прикладна математика» / уклад. Н. М. Кізілова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 36 с.

Представлені основні поняття мікро-/нанореології та мікро-/нанофлюїдики. Наведені детальні розв’язання рівнянь Навє–Стокса для ламінарних течій класичних рідин між паралельними пластинами та коаксіальними циліндричними трубами (як течій Пуазєля, так і течій Куєта), ламінарні течії у відкритому похилому каналі, течії Пуазеля в каналах з еліптичними, круговими, трикутними та прямокутними перерізами. Відповідні рішення для суспензій мікрочастинок (мікрорідин) та наночастинок (нанорідин) рівнянь Нав’є–Стокса з граничними умовами прослизання першого та другого порядку на відповідно представлені для більшості задач, а решта пропонуються для самостійного розв’язання.

Для студентів математичних та фізичних факультетів, які вивчають сучасні нанонауки і нанотехнології та цікавляться практичними навичками розв’язання прикладних задач мікро-/нанофлюїдики.

УДК 539.3 (075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

За останнє десятиліття **мікрорідини** (суспензії мікрочастинок діаметром d = 10–100 мкм) та **нанорідини** (суспензії наночастинок діаметром d = 10–100 нм) стали важливими компонентами численних пристроїв, призначених для змішування та очищення мікроскопічних об'ємів технічних та біологічних рідин, біохімічного аналізу та медичної діагностики в проточних системах лабораторій на чіпах (lab-on-a-chip), ефективних мікроохолоджувачів/нагрівачів на основі нанорідин для мікро/нанороторів, механізмів, двигунів та багатьох інших мініатюризованих пристроїв [1–3] (рис. 1).

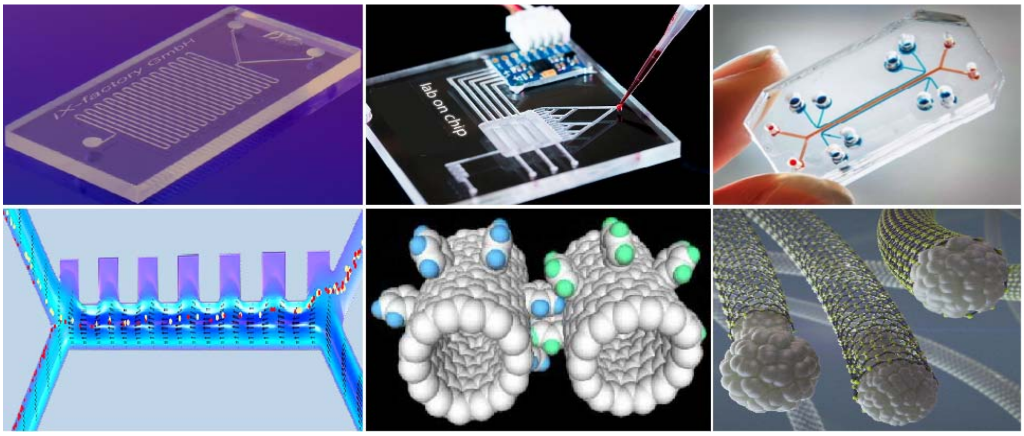


Рис. 1. Приклади мікро-/нанопристроїв та систем

Велика кількість різноманітних мікро- та нанорозмірних об'єктів є в природі та техніці. Типовими нанооб'єктами (рис. 2) є атомні кластери, мінеральні та органічні молекули, молекулярні агломерати, частинки і кристали, мікро/нановолокна, плівки рідини та тонкі шари розмірів в кілька десятків мікрометрів або нанометрів. **Нанонауки** та **нанотехнології** в даний час являють собою багате поле ідей, експериментів, теоретичних досліджень у галузі матеріалознавства (**наноматеріали**), фізики (**нанофізика**), рідин (**нанофлюїдика**), хімії (**нанохімія**), біології (**нанобіологія**) та медицини (**наномедицина**).

Фізичні явища на мікро/нанорівні регулюються загальноприйнятими фізичними законами, оскільки квантові ефекти в таких системах ще не проявляються [1–3]. Тим не менш, існують відмінності у поведінці нано-, мікро- та класичних макрорідин через унікальні фізичні властивості мікро-/наночастинок та особливості їх руху біля твердих або м'яких стінок. Під час переходу від макро- до мікро- та наномасштабів, співвідношення поверхня/об'єм S/V стає значно більшим, а поверхневі сили та поверхневі явища стають важливішими за об'ємні сили та переміщення, що обумовлені об'ємними силами. При переході від великих до дуже малих частинок відносно більша їх кількість розташовується на поверхнях, а не в об'ємі речовини.

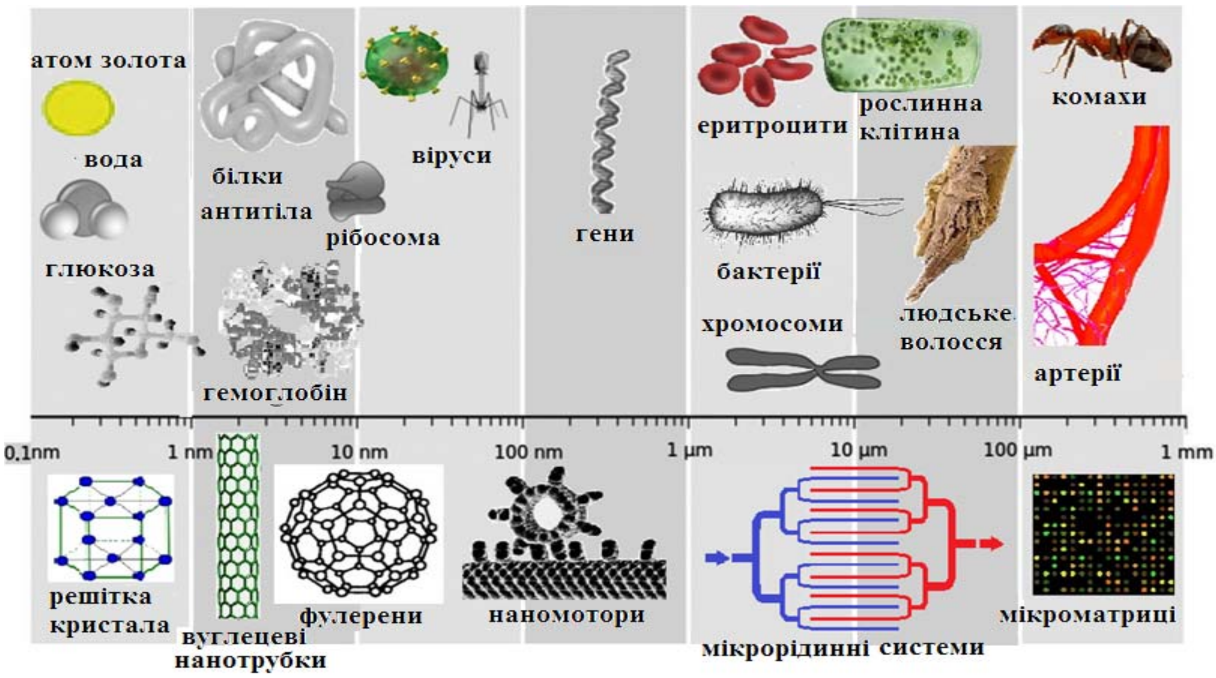


Рис. 2. Мікро- та нанорозмірні об'єкти в природі та техніці

Наприклад (рис. 3), коли діаметр частинок d_0=0.5 нм, що є типовим для простих органічних молекул, то пласкі кругові 2D та сферичні (3D) агломерати з розмірами d = 3,10,30 нм містять на своїх поверхнях

– d=30 nm – майже ~5% (0.1%) на 2D(3D) поверхні;

– d=10 nm – майже ~16% (1%) на 2D(3D) поверхні;

– d=3 nm – майже ~52% (10%) на 2D(3D) поверхні.

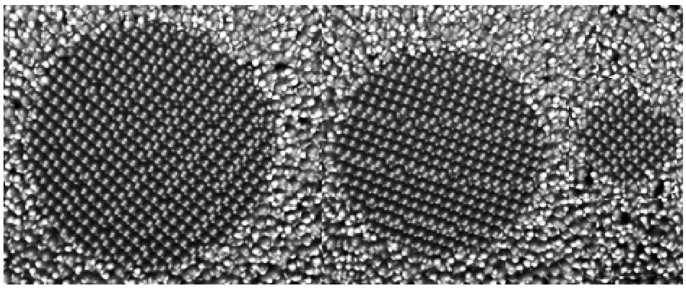


Рис. 3. Упакування мікро-/наночастинок в 2D кроплях

Таким чином, на рівні нанооб'єкта співвідношення S/V стає дуже великим і до половини частинок лежить на поверхнях, що змінює механічні, термічні та каталітичні властивості матеріалів, сприяючи надзвичайному зростанню їх поверхневої реакційної здатності, адгезії та інших поверхневих явищ. Механічні властивості наносистем цікаві у дослідженнях **наномеханіки**; дифузія та реакції на нанорівні зі швидким транспортом іонів вивчаються **наноіонікою**; реологічні властивості нанорідин і твердих матеріалів вивчаються **нанореологією**; тертя на нанорівні вивчається **нанотрибологією**; розповсюдження та віддзеркалення оптичного випромінювання – **нанооптикою**, можливості лікування різних хвороб за допомогою наночастинок – **наномедициною**, та ін. [1–5]. Розв'язання теоретичних задач на мікро/нанорівні потребує розробки конкретних математичних формулювань таких задач механіки, термомеханіки та мультифізики тощо.

1. ОСНОВИ МІКРОФЛЮЇДИКИ ТА НАНОФЛЮЇДИКИ

Численні експерименти з ламінарними течіями мікро- та нанорідин через мікротрубки і канали виявили, що виміряні тиски, швидкості, об'ємні витрати та швидкості зсуву не відповідають тим значенням, які обчислені за класичними формулами для течій Пуазєйля та Куєтта у відповідних геометріях із класичними граничними умовами непрослизання на стінках [1–3,5,6]. Найбільш суттєві відмінності були виявлені в поведінці течій біля поверхонь трубки (так званий шар Кнудсена), перепаді гідростатичного тиску на кінцях трубки, напруженнях зсуву на стінках та гідравлічному опорі каналу за рахунок впливу шорсткості стінки на мікро- та нанорівнях [5,6]. Тому необхідне переформулювання постановок класичних задач течій рідини з урахуванням шару Кнудсена та фізичних процесів в ньому, таких як повне або часткове дифузійне розсіювання мікро- або наночастинок на шорстких стінках та неможливості виконання умов непрослизання за рахунок тангенціального переносу імпульсу й енергії вздовж стінки під час розсіювання.

Застосовність граничних умов прослизання було підтверджено експериментально для течій ньютонівських рідин [6], течій поблизу біологічних поверхонь [7], стінок зі спеціальними покриттями [8], проникних стінок [9], в полімерних розчинах [10], в турбулентних течіях нанорідин [11] та багатьох інших.

Вперше граничні умови прослизання були запропоновані Нав'є в 1873 році у вигляді

$$(\hat{\mathrm{T}}\vec{\mathrm{n}})_{\tau} + \kappa \mathrm{v}_{\tau} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1}$$

де $\partial\Omega$ – поверхня області течії Ω, $\vec{\mathrm{v}}$ і $\hat{\mathrm{T}}$ – швидкість течії та тензор механічних напружень, $\vec{\mathrm{n}}$ і $\vec{\tau}$ – одиничні вектори в нормальному та тангенціальному напрямках, κ – коефіцієнт тертя на шорсткій поверхні $\partial\Omega$. Застосовність умов (1) для течій рідин крізь мікротрубки була підтверджена експериментально в [12].

Нанорідини як суспензії наночастинок або полімерних молекул мають високу теплопровідність та електричну електропровідність, низьку теплоємність і унікальні електромагнітні властивості завдяки високій міцності, тепловій та електричній провідності наночастинок та їх магнітним властивостям. Класична динаміка рідини та термомеханічні теорії, які розроблені для макроскопічних систем, не повною мірою застосовні як для суспензій наночастинок, так і для однорідних рідин на мікро- та нанорівнях. Слід враховувати швидкість прослизання, в'язкість, скачок температури та дискретні процеси, такі як розсіювання на стінці, адгезія та зміни конформацій, а також електрокінетичні явища [13–15]. Для твердих наночастинок у концентрованих (C> 5%) нанорідин дилатансія або тиксотропія також може призвести до більш високих значень градієнтів тиску у стаціонарному потоці нанорідини, ніж ті, що передбачені класичним законом Пуазеля [16]. Мікропотоки газу в мікроелектромеханічних системах (МЕМС) та мікрорідинних пристроях можуть використовуватися для вилучення біологічних зразків, охолодження інтегральних мікросхем та активного контролю над аеродинамічними силами в мікродвигунах [1–3].

Перші експериментальні дослідження, проведені для потоку газу в прямокутних скляних каналах з гідравлічним радіусом D_h = 45,5–83,1 мкм та кремнієвими каналами з D_h = 55,8–72,4 мкм мініатюрних холодильників Джоуля–Томсона, виявило коефіцієнт тертя на 10–30% вище у кремнеземних каналах та в 3–5 разів більше у скляних каналах, ніж значення, що прогнозовані діаграмами Moody для коефіцієнта тертя в залежності від числа Рейнольдса при різній відносній шорсткості ε / D_h, де ε характерний розмір шорсткості [17]. У мікро- та наноканалах внаслідок надзвичайного збільшення співвідношення поверхня/об'єм відносна шорсткість стає найбільш впливовим фактором, який слід враховувати в граничних умовах для швидкості руху і температури.

Експериментальні дослідження течії рідини (1-,2-пропанол та 1-,3-пентанол) через кремнієві мікроканали з D_h = 5;12;25 мкм також показали збільшення коефіцієнта тертя на 5–30% залежно від температури в межах значень $T = 0 - 85^{\circ}C$ порівняно з класичними розв'язками рівнянь Нав'є–Стокса з граничними умовами непрослизання [18]. Течії води через прямокутні мікроканали з нержавіючої сталі з D_h = 133–367 мкм та співвідношенням ширини до висоти W/H = 0,333–1 вивчалися в [19]. Виявлено, що коефіцієнти тертя як для ламінарних, так і для турбулентних течій відхиляються від класичних прогнозів за діаграмами Moody, а коефіцієнт W/H, матеріал стінки та спосіб її обробки мають важливий вплив на ці коефіцієнти. Перехід від ламінарної течії до турбулентнної відбувався при критичних числах Рейнольдса Re* = 200–700 в залежності від значень D_h та W/H. Значення Re* стає меншим, коли розмір мікроканалу зменшується. В течіях води через круглі мікротрубки з нержавіючої сталі та діоксиду кремнію з діаметрами D = 50–254 мкм та шорсткістю ε / D_h = 0,69–3,5% при Re =100–2000 також спостерігалося більш високе тертя на стінках, аніж прогнозоване класичною динамікою рідини [14]. Різниця зростала зі зменшенням значення D і збільшенням значень Re. Перехід течії від ламінарної до турбулентної спостерігався при Re* = 300–900 залежно від діаметра мікротрубки в діапазоні D = 50–150 мкм. Для течій рідини по прямокутних металевих каналах шириною W = 150–600 мкм та висотою

H = 22,7–26,3 мкм було виявлено збільшення тертя на 20% порівняно з прогнозом класичної теорії при малих співвідношеннях H/W [20]. Течії води через трапецієподібні мікроканали з кремнію з D_h = 51,3–168,9 мкм та ε / D_h = 1,76–2,85% при Re <1500 показали коефіцієнт тертя на 8–38% вище, ніж прогнозований класичною теорією для ламінарних потоків [21].

Гарний огляд літератури, яка була опублікована за цією тематикою у 1983–2005 рр., включно експериментальні дослідження коефіцієнта тертя та переходу ламінарної течії до турбулентної переходів у мікроканалах та трубках з різною геометрією та виготовлених з різних матеріалів, наведений у [15]. Було показано, що коли ε / D_h <1%, класичні розв'язки для відповідних ламінарних потоків Пуазейля та Куєтта залишаються в силі. Відхилення виміряного коефіцієнта тертя від розрахованого за класичною теорією зростає з підвищенням відносної шорсткості стінки.

Результати вищезазначених експериментальних досліджень підтвердили, що за рахунок шару Кнудсена гідравлічний опір потоку приблизно на 10–90% відрізняється від значень, що розраховані за класичною теорією, для відповідної геометрії, матеріалу та режиму течії, а деякі з них відрізняються навіть на 350% [15,17,22].

Течії мікро/нанорідин достатньо точно описуються рівняннями Нав'є–Стокса [1–3]

$$\frac{d\rho_{eff}}{dt} + \rho_{eff}\,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0\,, \tag{2}$$

$$\rho_{eff}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu_{eff}\Delta\vec{v} + \rho_{eff}\vec{f}\,, \tag{3}$$

$$\rho_{eff}c_{eff}\frac{dT}{dt} = \mathrm{div}(\lambda_{eff}\nabla T) + \mu_{eff}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\delta_{ik}}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2 + \zeta_{eff}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2, \tag{4}$$

де $\vec{v}$ і p – швидкість течії та гідростатичний тиск; ρ_{eff}, μ_{eff}, ζ_{eff}, c_{eff} і λ_{eff} – щільність, динамічна та друга в'язкість, теплопровідність і теплоємність рідини, які фактично залежать від температури; $\vec{f}$ – об'ємна щільність зовнішніх сил; T – температура; δ_{ik} – одиничний тензор. У випадку нестискуваних рідин ρ_{eff} = const і перший член у (2) зникає, $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$ і два останні доданки в (4) зникають.

Ефективну щільність мікро-/нанофлюїдів можна вводити у звичайній формі, яка прийнята в теорії сумішей [23]

$$\rho_{eff} = \rho_p C + \rho_{bf}(1 - C). \tag{5}$$

де ρ_p і ρ_{bf} – щільність частинок і основної рідини, C – концентрація частинок.

Вирази для ефективної теплопровідності k_{eff} та питомої теплоємності c_{eff} мікро-нанорідин були запропоновані у формі [24]

$$k_{eff} = k_{bf}\frac{(k_p + 2k_{bf}) - 2C(k_{bf} - k_p)}{(k_p + 2k_{bf}) + C(k_{bf} - k_p)} + k_{Brownian},$$
$$k_{Brownian} = 5\cdot 10^4 \beta C \rho_{bf} c_{bf}\sqrt{\frac{k_B T}{d_p}} f(T,C), \qquad (6)$$

$$c_{eff} = \frac{\rho_p c_p C + \rho_{bf} c_{bf}(1 - C)}{\rho_p C + \rho_{bf}(1 - C)}, \qquad (7)$$

де k_p, k_{bf} і c_p, c_{bf} – це теплопровідність і питома теплоємність матеріалу частинок і основної рідини, k_B – константа Больцмана, β – це константа, яка залежить від температури, матеріалу та концентрації частинок, $f = f(T,C)$ – функція, яку слід визначити з експериментів.

Теплоємність мікро-/нанорідин добре відповідає моделям теорії сумішей [23]

$$c_{eff} = c_p C + c_{bf}(1 - C). \qquad (8)$$

В’язкість мікро-/нанорідин, а також суспензій макроскопічних частинок є дуже складною функцією, і існує багато різних формул для μ_{eff}. Серед найпопулярніших запропоновані такі залежності:

1) непостійна так звана в’язкість шорсткості $\mu_{eff}(r)$ [25]:

$$\mu_{eff}(r) = A\mu_{bf}\,\mathrm{Re}_\varepsilon \frac{r}{\varepsilon}\left(1 - \exp\left(\frac{\mathrm{Re}_\varepsilon}{\mathrm{Re}}\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)^2, \qquad (9)$$

де r – радіальна координата, $\mathrm{Re} = \rho_{eff} v^* d / \mu_{eff}$, $\mathrm{Re}_\varepsilon = \rho_{eff} U\varepsilon / \mu_{eff}$, d – характерний (гідравлічний) діаметр каналу, v* – середня швидкість плину, U – швидкість руху рідини на поверхні елементу шорсткості, A – постійна, яка залежить від матеріалу;

2) модель з постійною в’язкістю [26]:

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{bf}}{1 - \alpha (d_p / d_f)^{-0.3} C^{1.03}}, \qquad (10)$$

де $d_f = \left(6M_{bf} / \pi N_A \rho_{bf}\right)^{1/3}$ – еквівалентний діаметр молекул базової рідини, d_p – характерний розмір (гідравлічний діаметр) мікро-/наночастинок, M_{bf} – молекулярна маса базової рідини, N_A – число Авогадро;

3) модель з Kn-залежною в'язкістю [5]

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{bf}}}{1+\alpha \text{Kn}}, \alpha = \frac{2\alpha_0}{\pi \tan(\alpha_1 \text{Kn}^{\beta})}, \tag{11}$$

де $\alpha = 0.4$, $\alpha_0 = 64/3\pi(1-4/\text{b})$, $\alpha_1 = 4$, $\beta = -1$ [34];

4) загальне наближення для концентрованих суспензій:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{bf}}(1+\text{k}_1\text{C}+\text{k}_2\text{C}^2), \tag{12}$$

де, наприклад, $\text{k}_1 = 39.1, \text{k}_2 = 533.9$ – значення для нанорідини з наночастинками Al в воді [27].

При дослідженні течії рідини в ізотермічних умовах граничні умови для (1)–(2) у найбільш загальному вигляді можна записати як [1–6]

$$\left.\left(\text{v} - \text{v}_{\text{w}} - \text{C}_1\text{Kn}\frac{\partial \text{v}}{\partial \text{n}} + \text{C}_2\text{Kn}^2\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial \text{n}^2}\right)\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{13}$$

де v_{w} – швидкість рухомої стінки, $\text{Kn} = \lambda/\text{L}$ – число Кнудсена, λ – середній вільний пробіг частинок в суспензії, L – характерна довжина, C_1 і C_2 – специфічні для рідини константи, які повинні бути визначені в експериментах з досліджуваною рідиною.

Шар, що утворюється частинками, які дифузно відбиваються шорсткою стіною, називається шаром Кнудсена. Його товщину оцінювали в дискретній моделі сукупності жорстких сфер і в континуальній моделі рідини відповідно як [5]

$$\delta_{\text{discr}} = \frac{\text{k}_\text{B}\text{T}}{\pi \text{d}_\text{p}^2 \text{p}}, \quad \delta_{\text{contin}} = \mu_{\text{eff}}\sqrt{\frac{\pi}{2\text{p}\rho_{\text{eff}}}}.$$

З точки зору теорії розсіювання частинок на стінках $\text{C}_1 = (2-\sigma)/\sigma$, де σ – коефіцієнт тангенціального переносу імпульсу, причому $\sigma = 1$ для повного і $|\sigma| < 1$ – для часткового дифузного відбиття частинок на шорсткостях стінки [13]. Термін в (13) – це постійна довжина ковзання частинок біля шорсткої стінки внаслідок дифузного відбиття [1–3]. Хороший огляд експериментальних даних коефіцієнтів $\text{C}_{1,2}$ для різних мікро/ нанорідин наведено в [5, стор. 74]. Підсумовуючи представлену там таблицю, можна прийняти для чисельних обчислень $\text{C}_1 \in [1;1.15]$, $\text{C}_2 \in [0.5;1.31]$.

Існує також низка модифікацій (11) для конкретних рідин, наприклад, [5]

$$\left(\mathrm{v} - \mathrm{v_w} - \frac{2-\sigma}{\sigma} \frac{\mathrm{Kn}}{1 - \mathrm{Kn} \cdot \mathrm{f(Kn)}} \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{n}} \right) \Bigg|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{14}$$

де $\mathrm{f(Kn)}$ емпіричний параметр, який необхідно визначити на основі експериментів, $|\,\mathrm{f(Kn)}\,| < 1$. Для стискуваних рідин та газів [35,36]

$$\left(\mathrm{v} - \mathrm{v_w} - \frac{\mu_{\mathrm{eff}}}{\rho_{\mathrm{eff}}} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \rho_{\mathrm{eff}} \right) \Bigg|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{15}$$

Моделі молекулярної динаміки показали, що прослизання частинок біля стінки зменшується зі збільшенням співвідношення ε / λ як для регулярної, так і для стохастичної шорсткості [28]. У режимі перехідних течій $\mathrm{Kn} > 0.1$, звичайні реологічні співвідношення для тензора напружень, вектора потоку тепла та інших параметрів не виконуються, що вимагає додавання членів вищого порядку [29].

Таким чином, значення ε / λ може розглядатися як критерій прийняття граничних умов прослизання на стінках. Якщо $\varepsilon \le \lambda$, умова непрослизання виконується, а в іншому випадку умови прослизання дають розв'язки, що відповідають експериментальним вимірюванням. Як показали порівняльні чисельні моделювання течій рідин у мікро-/наноканалах з різною геометрією, які були проведені методами молекулярної динаміки, рішеннями рівняння Больцмана, а також прямими обчисленнями рівнянь Нав'є–Стокса, умови прослизання першого та другого порядку є надзвичайно надійним в тому сенсі, що вони з високою точністю відповідають даним вимірювань [1–5].

Можна виділити три різні випадки [1–6]:

1) $\mathrm{Kn} < 0.01$: граничні умови непрослизання $\mathrm{v}|_{\partial\Omega} = 0$ виконуються;

2) $0.01 < \mathrm{Kn} \le 0.1$: виконуються граничні умови прослизання першого порядку (11) з $\mathrm{C_2} = 0$ (мікрорідини);

3) $0.1 < \mathrm{Kn} \le 1$: виконуються граничні умови прослизання другого порядку (11) з $\mathrm{C_2} \ne 0$ (нанорідини).

Коли розглядаються сполучені проблеми тепломасопереносу (2)–(4), рівняння Нав'є-Стокса і балансу тепла розв'язуються з модифікованими граничними умовами прослизання швидкості та стрибку температури на стінці у вигляді [1–3,5]

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{v} - \mathrm{v_w} - \frac{2-\sigma}{\sigma} \mathrm{Kn} \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{n}} - \frac{3(\gamma-1)}{2\pi\gamma} \frac{\mathrm{Kn}^2\, \mathrm{Re}}{\mathrm{Ec}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tau} \right) \Bigg|_{\partial\Omega} = 0, \\
&\left(\mathrm{T} - \mathrm{T_w} - \frac{2\gamma(2-\tilde{\sigma})}{(\gamma+1)\tilde{\sigma}} \frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{n}} \right) \Bigg|_{\partial\Omega} = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

де T і T_w – температури в потоці біля стінки та на стінці, σ – коефіцієнт акумуляції тепла, $\gamma = C_p / C_V$ – відношенням питомих теплоємностей при постійному тиску та об'ємі суспензії відповідно, $Re = \rho_{eff} v^* d / \mu_{eff}$ – число Рейнольдса, $Pr = c_{eff} \mu_{eff} / \lambda_{eff}$ – число Прандтля, $Ec = (v^*)^2 / c_{eff} \Delta T$ – число Еккерта, ΔT – зазначена різниця температур в області Ω ; ідеальний обмін енергією відповідає значенню $\tilde{\sigma} = 1$, коли енергія відбитих (розсіяних) частинок дорівнює температурі стінки (немає стрибка температури).

Коефіцієнти накопичення тепла $\tilde{\sigma}$ та тангенціального переносу імпульсу σ були виміряні для різних типових газів та поверхонь. Була показана залежність обох коефіцієнтів від матеріалу та ступеню обробки поверхні [1–3,5]. Їх значення можна зменшити, застосовуючи відповідні методи підготовки поверхні, такі як специфічні покриття.

Розв'язання класичних задач для ламінарних течій Пуазейля (за рахунок перепаду тиску на кінцях нерухомого каналу), течій Куетта (за рахунок рухомої стінки або рухомих стінок каналу) або комбінованих течій Пуазейля–Куетта для нестисливих однорідних ньютонівських рідин були узагальнені для випадку умов прослизання [15]. Отримані значення об'ємної витрати рідини, напружень тертя на стінках, гідравлічного опору каналу та інші було порівняно з експериментальними даними [5,19,30].

У цьому методичному посібнику подано узагальнені розв'язки в ізотермічних умовах та запропоновано ще кілька проблем для індивідуального розв'язання. Реальні течії суспензій мікро- та наночастинок набагато складніші, і рішення відповідних систем рівнянь не мають аналітичних чи напіваналітичних розв'язків. У таких випадках рішення повинні знаходитись за допомогою чисельних обчислень у розкладеннях, методом скінченних різниць, методом дискретної динаміки частинок, методом решітки Больцмана, методом скінченних елементів та іншими числовими методами. При цьому наявні прості аналітичні розв'язки використовуються для валідації використаного чисельного методу, схеми, густини сітки, точності обчислень, та ін. Усі відомі аналітичні та напіваналітичні рішення для ламінарних течій в каналах розглянуті в цьому методичному посібнику.

2. ТЕЧІЇ КУЕТТА ПО ТРУБКАХ ТА КАНАЛАХ

2.1. Ламінарна течія між двома паралельними пластинами

2.1.1. Класичні рідини

Течії Куетта генеруються за рахунок переміщення однієї або кількох стінок каналу за відсутності перепаду тиску між кінцями каналу. Найпростіший випадок – це течія рідини між двома достатньо великими паралельними пластинами, одна з яких або обидві пластини рухаються, у загальному випадку – з різними швидкостями (рис. 4а). Другий випадок – течія рідини між двома коаксіальними циліндрами, один з яких або обидва обертаються навколо спільної осі, у загальному випадку – з різними кутовими швидкостями (рис. 4б). В обох випадках отримані аналітичні розв'язки справедливі, коли відстань між поверхнями відносно мала, тобто $h << L$ (рис. 4а), $R_2 - R_1 << R_1$ (рис. 4б), де L – довжина каналу.

В ламінарних течіях вектор швидкості має лише один компонент, тобто потік є одновимірним (1D). У потоці між паралельними пластинами $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v, 0, 0)$ у вибраній декартовій системі координат, що зв'язана з геометрією задачі (рис. 4а). Припустимо, що течія стаціонарна і $\partial/\partial t = 0$ в (3). Припустимо також, що ширина пластин W досить велика (W >> h), тому можна припустити $\partial/\partial z = 0$ в (1)–(2). Масові сили відсутні, а рідина рухається лише за рахунок переміщення пластин з постійними швидкостями V_1 і V_2. Для визначеності припустимо, що $V_1 > V_2$ (рис. 4а). Тоді рівняння (2) дає $\partial v / \partial x = 0$. Оскільки $\partial v/\partial z = 0$, то для швидкості отримуємо $v = v(y)$.

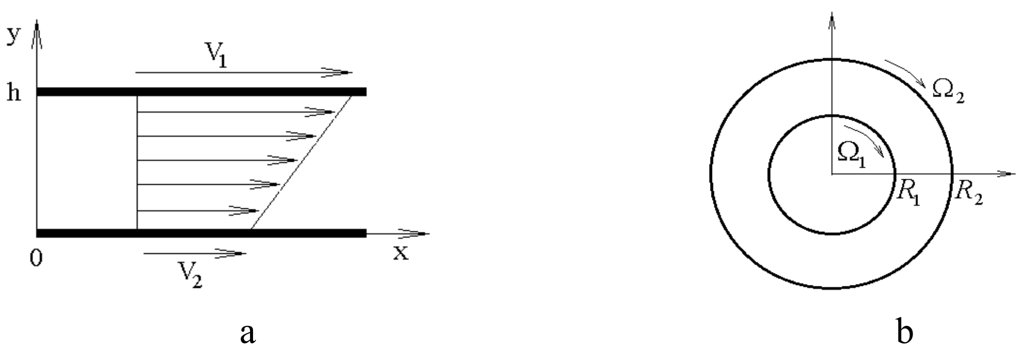


Рис. 4. Ламінарна течія між паралельними пластинами (a) та коаксіальними циліндрами (b)

Легко перевірити, що в цьому випадку другий доданок у лівій частині (3) буде відсутній, тому що

$$(\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x(y) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді дається проекція рівняння (3) на вісь 0y дає $\partial p / \partial y = 0$. Це означає, що $p = p(x)$, тому що $\partial p/\partial z = 0$. Проекція (3) на вісь 0x дає

$$\frac{dp(x)}{dx} = \mu \frac{d^2 v(y)}{dy^2} \quad . \tag{17}$$

У (17) та наступних рівняннях індекси 'eff' опущені для стислості. У лівій частині (17) ми маємо функцію, яка залежить лише від x, тоді як у правій частині (17) – функція, яка залежить лише від y, і обидві функції в будь-який час і в будь-якій точці простору дорівнюють одна одній. Це означає, що обидві функції є константи. Умова $\frac{dp(x)}{dx} \equiv k = const$ при заданих значеннях тиску на кінцях трубки $p|_{x=0,L} = 0$ дає розв'язок $k = 0$. Тоді інтегрування (17) дає для швидкості

$$v(y) = C_1 + C_2 y \,. \tag{18}$$

Граничні умови (13) для класичних рідин ($C_{1,2} = 0$) є $v(0) = V_2, \quad v(h) = V_1$, що остаточно дає розв'язок (18) у вигляді [38]

$$v(y) = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{h} y \,. \tag{19}$$

Інтегрування (19) за площиною поперечного перерізу дає такий вираз для об'ємної швидкості течії Куетта між паралельними пластинами

$$Q_{Couette} = W \int_0^h v(y) dy = \frac{(V_1 + V_2) hW}{2} \,. \tag{20}$$

Напруження зсуву в течії Куетта постійні

$$\tau_{Couette} \equiv \mu \frac{dv}{dy} = -\mu \frac{V_1 - V_2}{h} \,. \tag{21}$$

Лінійне поле швидкостей руху рідини в течії Куетта між паралельними пластинами представлено на рис. 4а.

Перепишемо (19) у вигляді

$$v(y) = V_1 \frac{h - y}{h} + \frac{V_2}{h} y \,,$$

з якого видно, що $v(y) > 0$, якщо $V_{1,2} > 0$.

2.1.2. Мікро-/нанорідини

Течія рідини знов описується рівняннями (2)–(3), а розв'язок задачі задається формулою (18). В найбільш загальному випадку пластин з різними жорсткостями граничні умови (13) мають вигляд

$$\begin{aligned} y = 0: \quad & v = V_2 - \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ y = h: \quad & v = V_1 + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} - \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \,, \tag{22}$$

з різними коефіцієнтами $\alpha_1 = C_{11}\mathrm{Kn}$ і $\alpha_2 = C_{12}\mathrm{Kn}$, $\beta_1 = C_{21}\mathrm{Kn}^2$ і $\beta_2 = C_{22}\mathrm{Kn}^2$ для верхньої та нижньої пластин відповідно. Знак перед α_1 змінений через різницю напрямків похідної $\partial v / \partial y$ напрямку розсіювання частинок.

Заміна умов непрослизання на (22) дає розподіл швидкостей (18) у вигляді

$$v(y) = \frac{V_1 h + \alpha_2 V_1 + \alpha_1 V_2}{h + \alpha_2 + \alpha_1} - \frac{V_1 - V_2}{h + \alpha_2 + \alpha_1} y \,. \tag{23}$$

Коли $\alpha_{1,2} = 0$, $\beta_{1,2} = 0$, (23) переходить в (19). Інтегрування (23) за площиною поперечного перерізу каналу дає

$$Q_{\text{Couete slip}} = W \int_0^h v(y)dy = W \frac{(V_1 + V_2)h^2 + 2h(\alpha_2 V_1 + \alpha_1 V_2)}{2(h + \alpha_2 + \alpha_1)} \,, \tag{24}$$

а напруження зсуву

$$\tau_{\text{Couete slip}} = -\mu \frac{V_1 - V_2}{h + \alpha_2 + \alpha_1} \,. \tag{25}$$

Різниці між об’ємними витратами для течій без прослизання та з прослизанням на стінках

$$Q_{\text{Couete slip}} - Q_{\text{Couete}} = Wh \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(V_1 - V_2)}{2(h + \alpha_2 + \alpha_1)} \tag{26}$$

може бути негативною чи позитивною залежно від властивостей пластин, а саме

$$\begin{aligned} Q_{\text{Couete slip}} - Q_{\text{Couete}} > 0, \quad \text{якщо} \quad \alpha_2 > \alpha_1, \\ Q_{\text{Couete slip}} - Q_{\text{Couete}} < 0, \quad \text{якщо} \quad \alpha_2 < \alpha_1. \end{aligned} \tag{27}$$

Коли $V_1 < V_2$, співвідношення між Q_{Couete} та $Q_{\text{Couete slip}}$ є зворотнім до (27). Різниці між напруженнями зсуву для обох течій

$$\tau_{\text{Couete slip}} - \tau_{\text{Couete}} = \frac{\mu(V_1 - V_2)(\alpha_2 + \alpha_1)}{h(h + \alpha_2 + \alpha_1)} > 0 \,. \tag{28}$$

Таким чином, використовуючи пластини з різними коефіцієнтами шорсткості першого порядку α_1 і α_2, ми можемо отримати течії Куетта з більшою/меншою об’ємною витратою при однакових напруженнях зсуву на стінках, що може бути корисними для різних мікрорідинних застосувань. Оскільки поле швидкостей лінійне, другі похідні в (13) не впливають на параметри течії. Це означає, що параметри течії Куетта однакові як для мікрорідин, так і для нанорідин.

2.2. Ламінарна течія між двома коаксіальними циліндрами, які обертаються

2.2.1. Класичні рідини

Розглянемо два коаксіальні циліндри з віссю 0z та радіусами R_1 і R_2, які обертаються із кутовими швидкостями Ω_1 та Ω_2; для визначеності припустимо $\Omega_2 > \Omega_1$ (рис. 4б). Циліндрична система координат зв'язана з віссю циліндрів. Вектор швидкості у випадку одновимірної течії є $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, v, 0)$. Течія є стаціонарною ($\partial/\partial t = 0$), а довжина циліндрів досить велика, так що $\partial/\partial z = 0$. Течія вісесиметрична і тому $\partial v / \partial \theta = 0$. Тоді з (2) маємо $v = v(r)$, а обчислення другого доданку у лівій частині рівняння (3) дає

$$(\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\theta(r) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Проекція (3) на вісь 0r дає ті ж самі умови на перепад тиску ($dp(x)/dx = 0$), а проекція (3) на вісь 0θ дає звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right) - \frac{v(r)}{r^2} = 0 . \tag{29}$$

Розв'язок (29) має вигляд

$$v = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} . \tag{30}$$

Коефіцієнти $C_{1,2}$ можна знайти з умов непрослизання на пластинах $v(R_1) = \Omega_1 R_1$, $v(R_2) = \Omega_2 R_2$. Тоді з (30) маємо [31]

$$v(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} . \tag{31}$$

Інтегрування (31) за площиною поперечного перерізу каналу дає для об'ємної швидкості рідини

$$Q_{Couette} = \frac{2\pi W}{3(R_2^2 - R_1^2)} \Big((\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2) - 3(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2 \Big) , \tag{32}$$

а для напружень зсуву величину

$$|\tau_{\text{Couette}}| = \mu_{\text{eff}}\left(\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r^2}\right). \tag{33}$$

В безрозмірному вигляді (31)–(33) можна записати як

$$v^{\circ}(\wp) = \left(\frac{\Omega R^2 - 1}{R^2 - 1}\wp - \frac{(\Omega - 1) R^2}{R^2 - 1}\frac{1}{\wp}\right). \tag{34}$$

$$Q^{\circ} = \frac{2\left((\Omega R^2 - 1)(R^2 + R + 1) - 3(\Omega - 1) R^2\right)}{3(R^2 - 1)}, \tag{35}$$

$$|\tau^{\circ}| = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^2 - 1} + \frac{(\Omega - 1) R^2}{R^2 - 1}\frac{1}{\wp^2}, \tag{36}$$

де $v^{\circ} = v / \Omega_1 R_1$, $\wp = r / R_1$, $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1 > 1$, $R = R_2 / R_1 > 1$, $Q^{\circ} = Q / (\pi \Omega_1 R_1^2 W)$, $\tau^{\circ} = \tau / \mu_{\text{eff}} \Omega_1$.

Безрозмірні залежності (34)–(36) представлені на рис. 5а-с для деяких наборів значень Ω і R.

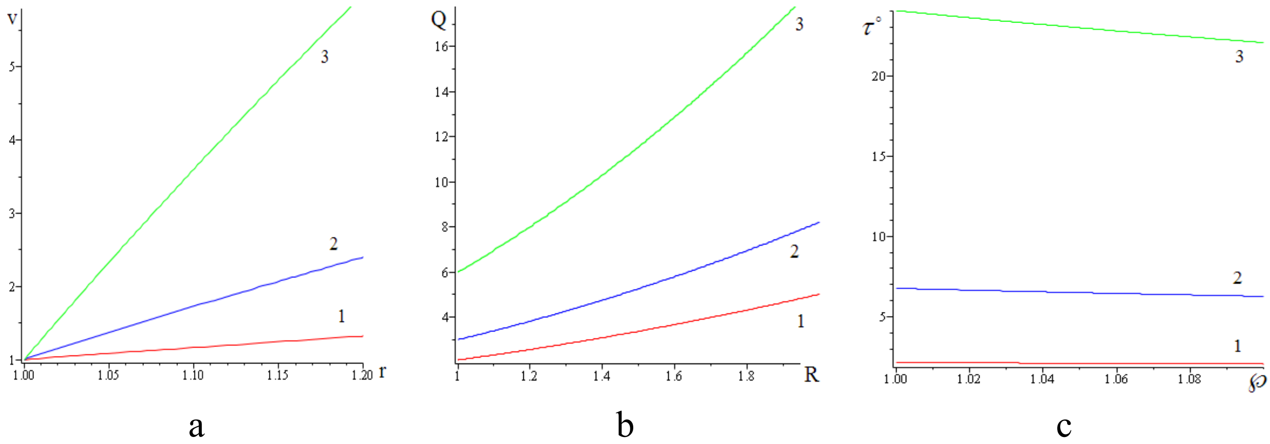


Рис. 5. Безрозмірні залежності $v^{\circ}(\wp)$ (a), $Q^{\circ}(R)$ (b), $\tau^{\circ}(\wp)$ (c) для течій з умовами непрослизання на стінках каналу при Ω =1.1; 2; 5 – криві 1,2,3 відповідно

2.2.2. Мікро-/нанорідини

У цьому випадку течії знов описуються рівняннями (2)–(3), розв’язок яких має вигляд (30). Граничні умови (13) у циліндричних координатах мають вигляд

$$\begin{aligned} r = R_1 &: v = \Omega_1 R_1 - \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial r} - \beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \\ r = R_2 &: v = \Omega_2 R_2 + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial r} - \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \end{aligned} \tag{37}$$

Підстановка (30) в (37) дає для розподілення швидкості

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{Couette}}^{\mathrm{slip}}(r) = {} & \frac{\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2} r - \\ & - \frac{\Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 - \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2)}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2} \frac{1}{r}, \end{aligned} \tag{38}$$

де $A_{1,2} = R_{1.2}^2 + \alpha_{1,2} R_{1,2} - \beta_{1,2}$.

Інтегрування (38) за площиною поперечного перерізу каналу дає для об'ємної швидкості рідини

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{Couette}}^{\mathrm{slip}} = {} & \frac{2\pi W (R_2 - R_1)}{3(R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2)} \Big((\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2) \times \\ & \times (R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2) - 3(\Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 - \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2)) \Big) \ . \end{aligned} \quad 39)$$

Напруження зсуву визначаються за такою формулою:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{Couette}}^{\mathrm{slip}}(r) = \mu_{\mathrm{eff}} \Bigg(& \frac{\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2} + \\ & + \frac{\Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 - \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2)}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2} \frac{1}{r^2} \Bigg). \end{aligned} \tag{40}$$

В безрозмірній формі (38)-(40) можна переписати у вигляді

$$v^{\circ}(r) = \frac{\Omega R^4 A_1 - A_2}{R^3 (R - \tilde{\alpha}_2) A_1 - (1 - \tilde{\alpha}_1) A_2} \wp - R^3 \frac{\Omega R (1 - \tilde{\alpha}_1) - (R - \tilde{\alpha}_2)}{R^3 (R - \tilde{\alpha}_2) \tilde{A}_1 - (1 - \tilde{\alpha}_1) \tilde{A}_2} \frac{1}{\wp}, \tag{41}$$

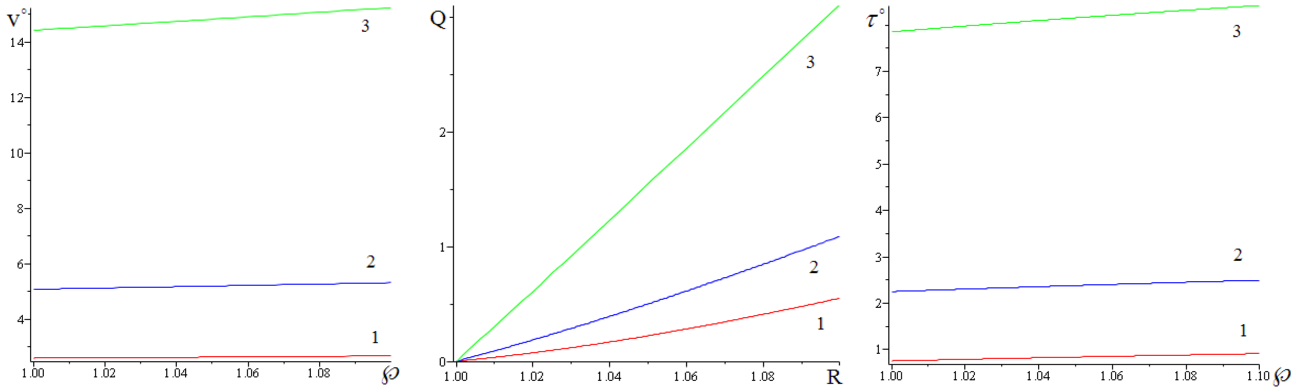
$$Q^{\circ} = \frac{2(R-1)\Big((\Omega R^4 \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(R^2 + R + 1) - 3(\Omega R^4 (1 - \tilde{\alpha}_1) - R^3 (R - \tilde{\alpha}_2)) \Big)}{3(R^3 (R - \tilde{\alpha}_2) \tilde{A}_1 - (1 - \tilde{\alpha}_1) \tilde{A}_2)}, \tag{42}$$

$$\tau^{\circ}(r) = \frac{\Omega R^4 \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2}{R^3 (R - \tilde{\alpha}_2) \tilde{A}_1 - (1 - \tilde{\alpha}_1) \tilde{A}_2} + \frac{\Omega R^4 (1 - \tilde{\alpha}_1) - R^3 (R - \tilde{\alpha}_2)}{R^3 (R - \tilde{\alpha}_2) \tilde{A}_1 - (1 - \tilde{\alpha}_1) \tilde{A}_2} \frac{1}{\wp^2}, \tag{43}$$

де $\tilde{A}_1 = 1 + \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1$, $\tilde{A}_2 = R^2 + \tilde{\alpha}_2 R - \tilde{\beta}_2$, $\tilde{\alpha}_{1,2} = \alpha_{1,2} / R_1$, $\tilde{\beta}_{1,2} = \beta_{1,2} / R_1^2$.

Безрозмірні залежності (41)–(43) для деяких значень $\tilde{\alpha}_{1,2}$, $\tilde{\beta}_{1,2}$ та для тих самих значень Ω і R , що були використані на рис. 5a-c, представлені на рис. 6a-c.

Задача для самостійної роботи. За допомогою (34)–(36) та (41)–(43) оцініть діапазони параметрів шорсткості $\tilde{\alpha}_{1,2}$, $\tilde{\beta}_{1,2}$, при яких швидкість руху можна збільшити, а напруження зсуву можна зменшити в мікро-/нанотрубках порівняно з класичними течіями, так само, як це було зроблено в (26)–(28) для течії Куетта між двома паралельними пластинами.



a b c

Рис. 6. Безрозмірні залежності $\mathrm{v}^\circ(\wp)$ *(a),* $Q^\circ(R)$ *(b),* $\tau^\circ(\wp)$ *(c) обчислені для течій з прослизанням на стінках при* $\tilde{\alpha}_1 = 1.5$, $\tilde{\alpha}_2 = 1.3$, $\tilde{\beta}_1 = 0.5$, $\tilde{\beta}_2 = 0.3$ *та різних значеннях* Ω *=1.1; 2; 5 – криві 1,2,3 відповідно*

3. ЛАМІНАРНА ТЕЧІЯ У ПОХИЛОМУ КАНАЛІ

3.1. Класичні рідини

Розглядається ламінарна течія нестисливої ньютонівської рідини з вектором швидкості $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{v_x}, 0, 0)$ в прямокутному каналі $\{x \in [0, L] \times y \in [0, h] \times z \in [0, W]\}$, h/W<<1 з достатньо великою шириною W, який нахилений до горизонту під кутом φ (рис. 7). Потік обумовлений дією силою тяжіння. Система координат з'єднана з дном каналу.

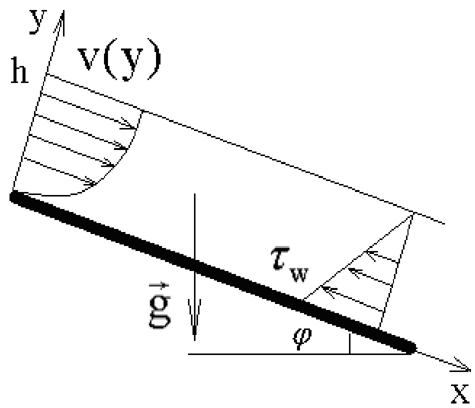


Рис. 7. Схема ламінарної течії в похилому каналі

Умова нестисливості рідини (2) знов дає $\mathrm{v_x} = \mathrm{v}(y)$. Перевірте, що в цьому випадку теж $(\vec{\mathrm{v}}, \nabla)\vec{\mathrm{v}} = 0$. Проекція рівняння руху (3) на вісь 0y є

$$\mu \frac{d^2 \mathrm{v}}{dy^2} + \rho g \sin\varphi = 0 \ . \tag{44}$$

Інтегрування (44) з умовою непрослизання на нижній стінці та кінематичною умовою

$$\mathrm{v}(y)\big|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{d\mathrm{v}(y)}{dy}\right|_{y=h} = 0 \, . \tag{45}$$

на відкритій поверхні каналу дає наступні профіль швидкості, об’ємну витрату течії та напруження зсуву відповідно

$$\begin{aligned} v_{incl}(y) &= \frac{\rho g \sin\varphi}{2\mu_{eff}} y(2h - y), \\ Q_{incl} &= \frac{W\rho g \sin\varphi}{3\mu_{eff}} h^3, \\ \tau_{incl} &= \rho g \sin\varphi \cdot (h - y) = \tau_b \left(1 - \frac{y}{h}\right), \end{aligned} \tag{46}$$

де $\tau_b = \rho g h \sin\varphi$ – напруження зсуву на дні каналу. Профілі швидкості та напружень зсуву наведені на рис. 3.

3.2. Мікро-/нанорідини

Інтегрування рівняння (44) з умовами прослизання (13) на нижній поверхні каналу та кінематичною умовою (45) на відкритій поверхні каналу дає

$$\begin{aligned} v_{incl}^{slip}(y) &= \frac{\rho g \sin\varphi}{2\mu_{eff}} \big(2(\alpha h + \beta) + y(2h - y)\big), \\ Q_{incl}^{slip} &= \frac{W\rho g \sin\varphi}{\mu_{eff}} h(\alpha h + \beta + \frac{h^2}{3}), \\ \tau_{incl}^{slip} &= \tau_b \left(1 - \frac{y}{h}\right), \end{aligned} \tag{47}$$

де α, β – коефіцієнта шорсткості на дні каналу.

Зверніть увагу, що, на відміну від течії Куетта між паралельними пластинами, профілі швидкості та величини об’ємної витрати руху будуть різні для мікрорідин та нанорідин, оскільки в (47) присутній коефіцієнт β .

Порівнюємо (47) і (46) та отримуємо, що

$$\begin{aligned} v_{incl}^{slip}(0) &= \frac{\rho g \sin\varphi}{\mu}(\alpha h + \beta) > 0, \\ v_{incl}^{slip}(h) - v_{incl}(h) &= \frac{\rho g \sin\varphi}{\mu}\big(\alpha h + \beta\big) > 0, \\ Q_{incl}^{slip} - Q_{incl} &= \frac{W\rho g \sin\varphi}{\mu_{eff}} h(\alpha h + \beta) > 0, \\ \tau_{incl}^{slip} &= \tau_{incl} \end{aligned} \tag{48}$$

для позитивних значень α, β . Оскільки негативні значення β теж були виміряні для деяких нанорідин [5], результати (48) дійсні тільки для випадку $\alpha h + \beta > 0$.

4. ТЕЧІЇ ПУАЗЕЙЛЯ ПО ТРУБКАХ ТА КАНАЛАХ

4.1. Ламінарна течія між двома паралельними пластинами

4.1.1. Класичні рідини

Течії Пуазейля викликані різницею гідростатичних тисків $\Delta p = p^+ - p^-$ на кінцях каналу або трубки між її вхідним $p|_{x=0} = p^+$ та вихідним $p|_{x=L} = p^-$ перерізами. Розглянемо стаціонарну ламінарну течію між двома нескінченими (достатньо великими) паралельними пластинами (рис. 8) з розмірами $L \times W$ та малою відстанню $h << \min\{L, W\}$ між ними.

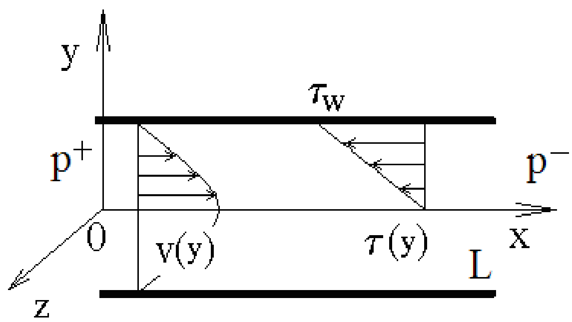


Рис. 8. Пуазейлівська течія рідини між паралельними пластинами

Ті ж самі висновки можна отримати з (2)–(3), а саме

1) $v_x = v(y)$;

2) $p = p(x)$, $\frac{dp}{dx} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{L}$.

Інтегруємо проекцію рівняння (3) на вісь 0x

$$\mu_{\text{eff}} \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{\Delta p}{L} \tag{49}$$

та отримуємо для швидкості параболічну функцію

$$v(y) = C_2 + C_1 y - \frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 . \tag{50}$$

Постійні інтегрування $C_{1,2}$ можна знайти з умов непрослизання на стінках $v_x(y)|_{y=\pm h} = 0$ та умові симетрії профілю швидкості на осі каналу $dv_x / dy|_{y=0} = 0$. Тоді з (50) маємо

$$v_{\text{paral}}(y) = \frac{\Delta p h^2}{2\mu L}\left(h^2 - y^2\right), \qquad p(x) = p^+ - \frac{\Delta p}{L} x. \tag{51}$$

Інтегрування (51) за площиною поперечного перерізу каналу дає для об'ємної швидкості рідини

$$Q_{paral} = \frac{2}{3}\frac{\Delta p W h^3}{\mu L} \quad . \tag{52}$$

Тоді гідравлічний опір каналу $Z = \Delta p / Q$ має вигляд

$$Z_{paral} = \frac{2Wh^3}{3\mu L} \ . \tag{53}$$

Розподіл напружень зсуву є

$$\tau_{paral} = \frac{\tau_w}{h} y \ , \tag{54}$$

де $\tau_w = \Delta ph / L$ – в'язкі напруження на обох стінках каналу.

4.1.2. Мікро-/нанорідини

Розв'язок у вигляді (50) рівняння (49) з граничними умовами (13) з різними коефіцієнтами на верхній та нижній пластинах має вигляд параболічної функції

$$\begin{aligned} v_{paral}^{slip}(y) = \frac{\Delta p}{\mu L}\Bigg(& \frac{h^2}{2} + \frac{\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 + h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2) - h^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} + \\ & + \frac{\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} y - \frac{y^2}{2}\Bigg), \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} Q_{paral}^{slip} = \frac{2}{3}\frac{\Delta p h W}{\mu L}\Bigg(& \frac{2h^2(h - \alpha_1 + \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} + \\ & + \frac{3h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2) + 3(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)}\Bigg), \end{aligned} \tag{56}$$

$$Z_{paral}^{slip} = \frac{3\mu L}{2hW}\frac{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)}{2h^2(h - \alpha_1 + \alpha_2) + 3h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2) + 3(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)}, \tag{57}$$

$$\tau_{paral}^{slip} = \frac{\tau_w}{h}\left(\frac{\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} - y\right). \tag{58}$$

Співвідношення (55), (56) у випадку двох пластин з однаковими параметрами шорсткості $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ були досліджені в [5]. Загальний випадок пластин з різними властивостями був вивчений в [4].

Порівняльний аналіз (55) і (51), (56) і (52), (58) і (54) виявив наступні різниці в профілях швидкості руху рідини

$$v_{paral}^{slip}(y) - v_{paral}(y) = \frac{\Delta p}{\mu L(2h + (\alpha_1 + \alpha_2))}\Big(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 + \\ + h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2) - h^2(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2))y\Big), \tag{59}$$

об'ємних витрат

$$Q_{paral}^{slip} - Q_{paral} = \frac{2}{3}\frac{\Delta p h W}{\mu L}\left(\frac{h^2(\alpha_2 - 3\alpha_1)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} \right. \\ \left. + \frac{3h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2) + 3(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)}\right), \tag{60}$$

і в'язких напружень

$$\tau_{paral}^{slip} - \tau_{paral} = \frac{\tau_w(\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2))}{h(2h + (\alpha_1 + \alpha_2))}. \tag{61}$$

Задача для самостійної роботи. Проаналізуйте вирази (59)–(61) та визначте умови на коефіцієнти α_1, α_2, β_1, β_2, які забезпечують більш високу швидкість потоку та менші в'язкі напруження завдяки ефекту прослизання на стінках. Побудуйте графіки для (51)–(54), які подібні до представлених на рис. 5a-c, а також графіки (59)–(61) (рис. 6a-c) та порівняйте їх. Отримайте висновки щодо фізичної поведінки течій без прослизання, граничних умов прослизання першого порядку (мікрорідини) та умов прослизання другого порядку (нанорідини).

4.2. Ламінарна течія по круговій трубці

4.2.1. Класичні рідини

Розглянемо вісесиметричний $(\partial/\partial\theta = 0)$ ламінарну $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_x) = (0, 0, v)$ течію однорідної ньютонівської рідини за рахунок постійної різниці тисків $\Delta p = p^+ - p^-$ на кінцях трубки радіуса R та довжини L вздовж осі трубки $0x$ (рис. 9a) в циліндричній системі координат, яка зв'язана з трубкою.

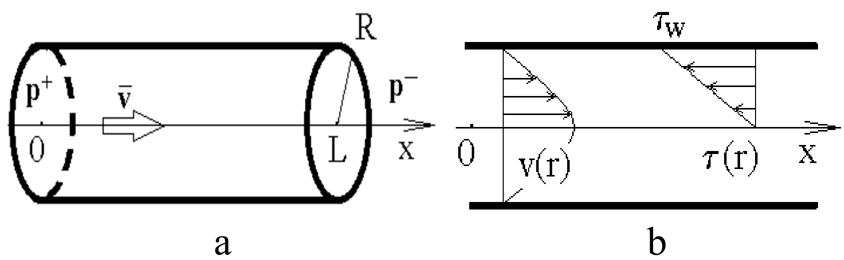


Рис. 9. Течія Пуазейля по трубці з круговим перерізом (a) з параболічним розподілом швидкостей та лінійним профілем в'язких напружень (b)

Умова нестисливості рідини знов дає $v_x = v(r)$. Перевірте самостійно, що в цьому випадку знов $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$.

Проекція рівняння (3) в циліндричних координатах на вісь 0r дає $\partial p / \partial r = 0$, тобто $p = p(x)$. Із значень тиску на вході та на виході з трубки можна отримати ту ж саму лінійну залежність для тиску (51).

Проекція рівняння імпульсу на вісь 0x дає

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{L}. \tag{62}$$

Інтегрування (62) з умовою непрослизання на стінці та умовою симетрії профілю швидкості на вісі трубки

$$v\big|_{r=R} = 0, \qquad \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0} = 0 \tag{63}$$

дає наступні вирази для швидкості руху, об'ємної витрати рідини, гідравлічного опору трубки (формула Пуазейля) та в'язких напружень (рис. 9b)

$$v_{circ} = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \tag{64}$$

$$Q_{circ} = \frac{\Delta p}{8\mu_{eff} L}\pi R^4, \tag{65}$$

$$Z_{circ} = \frac{8\mu_{eff} L}{\pi R^4}, \tag{66}$$

$$\tau_{circ} = \tau_{wall}\frac{r}{R}, \tag{67}$$

де $v_{max} = \Delta p R^2 / (4\mu_{eff} L)$, $\tau_{wall} = -\Delta p R / 2L$.

4.2.2. Мікро-/нанорідини

Інтегрування (62) з умовою (13) дає такі вирази для швидкості руху, об'ємної витрати рідини, гідравлічного опору трубки і в'язких напружень

$$v_{circ}^{slip}(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}\left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2\frac{\beta + \alpha R}{R^2} \right), \tag{68}$$

$$Q_{circ}^{slip} = \frac{\Delta p}{8\mu L}\pi R^2 \left(R^2 + 4(\beta + \alpha R) \right), \tag{69}$$

$$Z_{circ}^{slip} = \frac{\Delta 8\mu L}{\pi R^2 \left(R^2 + 4(\beta + \alpha R) \right)}, \tag{70}$$

$$\tau_{circ}^{slip} = \tau_{circ}, \qquad (71)$$

де α, β – коефіцієнти прослизання на стінці трубки.

Співвідношення (68), (69), (71) були детально проаналізовані в [5]. Відповідні різниці між гідродинамічними параметрами течій з прослизанням та без прослизання мають вигляд

$$\mathrm{v}_{circ}^{slip}(r) - \mathrm{v}_{circ}(r) = \frac{\Delta p(\beta + \alpha R)}{2\mu L}, \qquad (72)$$

$$Q_{circ}^{slip} - Q_{circ} = \frac{\Delta p \pi R^2(\beta + \alpha R)}{2\mu L}, \qquad (73)$$

$$Z_{circ} - Z_{circ}^{slip} = \frac{\Delta 8\mu L}{\pi R^2} \frac{4(\beta + \alpha R)}{(R^2 + 4(\beta + \alpha R))}. \qquad (74)$$

Таким чином, течії рідини по кругових трубах з наявністю прослизання на стінках завжди мають більшу об’ємну витрату при однаковому перепаді тиску, тобто менший гідравлічний опір, ніж в течіях без прослизання, що можна використовувати для підвищення ефективності мікро-/нанорідинних пристроїв.

4.3. Ламінарна течія між двома коаксіальними трубками кругового перерізу

4.3.1. Класичні рідини

Розглянемо ламінарну $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{v}_r, \mathrm{v}_\theta, \mathrm{v}_x) = (0, 0, \mathrm{v})$ стаціонарну ($\partial/\partial t = 0$) вісесиметричну ($\partial/\partial\theta = 0$) течію однорідної ньютонівської рідини між двома концентричними трубками кругового перерізу з радіусами R_1 і R_2 вздовж поздовжній осі 0x за рахунок перепаду гідростатичних тисків на кінцях каналу (рис. 10).

Умова нестисливості рідини (2) дає, як і в попередньому випадку, $\mathrm{v} = \mathrm{v}(r)$. Нелінійний доданок в лівій частині (3) знов відсутній ($(\vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{v}} = 0$). Гідростатичний тиск має той же самий лінійний розподіл (51) вздовж трубки. Розв’язок звичайного диференціального рівняння (62) з умовами непрослизання на стінках обох трубок

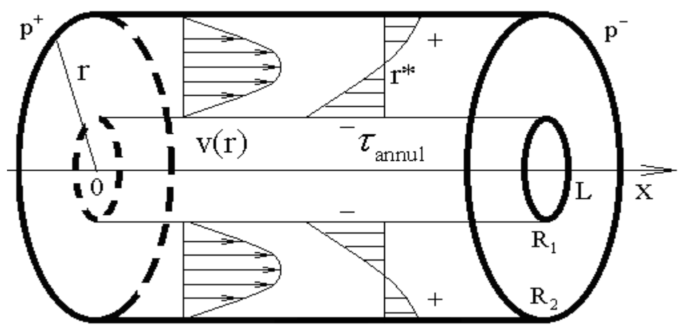


Рис. 10. Пуазейлівська течія рідини між двома коаксіальними трубками з круговими перерізами, полем швидкостей руху та в’язкими напруженнями

$$\left.v\right|_{r=R1}=0,\ \left.v\right|_{r=R2}=0 \tag{75}$$

має вигляд

$$v_{annul}(r)=\frac{\Delta PR_1^2}{4\mu_{eff}L}\left(1-r^2+\frac{\wp^2-1}{\ln(\wp)}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right), \tag{76}$$

$$Q_{annul}=\frac{\pi\Delta pR_1^4}{8\mu_{eff}L}\left(\wp^4-1-\frac{(\wp^2-1)^2}{\ln(\wp)}\right), \tag{77}$$

$$Z_{annul}=\frac{8\mu_{eff}L\ln(\wp)}{\pi R_1^4\left(\ln(\wp)(\wp^2+1)-(\wp^2-1)\right)(\wp^2-1)}, \tag{78}$$

$$\tau_{annul}=\frac{\Delta PR_1^2}{4L}\left(\frac{\wp^2-1}{\ln(\wp)}\frac{1}{r}-2r\right), \tag{79}$$

де $\wp=R_2/R_1>1$.

Швидкість (76) досягає максимального значення, а в'язкі напруження (79) стають нульовими

$$v_{annul}=v_{max}\equiv\frac{\Delta PR_1^2}{4\mu L}\left(\wp^2-\frac{\wp^2-1}{2\ln\wp}\left(1-\ln\frac{\wp^2-1}{\ln\wp}\right)\right),\qquad \tau_{annul}=0,$$

якщо $r=r^*=R_1\sqrt{\dfrac{\wp^2-1}{2\ln\wp}}$ (рис. 10).

4.3.2. Мікро-/нанорідини

Розглянемо течію рідини між коаксіальними циліндрами за наявністю умов прослизання (13), при чому коефіцієнти прослизання у загальному випадку різні на внутрішній та зовнішній трубках. Тоді інтегрування рівняння (62) дає такі вирази для швидкості руху, об'ємної витрати рідини та в'язких напружень:

$$\begin{aligned}v_{annul}^{slip}(\overline{r})=\frac{\Delta PR_1^2}{4\mu LA}\Big(&(1-2\tilde{\alpha}_1+2\tilde{\beta}_1)(\wp\ln\wp-\alpha_2)-\wp(\wp^2-2\tilde{\alpha}_2\wp+2\tilde{\beta}_2)\times\\ &\times(\ln\wp-\tilde{\alpha}_1)(\wp^2-1+2(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2\wp+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1))\wp\ln(\overline{r})-\overline{r}^2\Big),\end{aligned} \tag{80}$$

$$Q_{annul}^{slip}=\frac{\pi\Delta pR_1^4}{8\mu LA}\Big(2((1-2\tilde{\alpha}_1+2\tilde{\beta}_1)(\wp\ln\wp-\tilde{\alpha}_2)-\wp(\wp^2-2\tilde{\alpha}_2\wp+2\tilde{\beta}_2)\times$$

$$\times(1-\tilde{\alpha}_1))(\wp^2-1)+\frac{\wp}{2}(\wp^2-1+2(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2\wp+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1))\times \tag{81}$$

$$\times\Big(2\wp^2\ln\wp-\wp^2-1\Big)-(\wp^4-1)\Big),$$

$$\tau_{annul}^{slip}=\frac{\Delta P}{4LA}\left(\frac{\wp}{\overline{r}}(\wp^2-1+2(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2\wp+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1))-2\overline{r}\right), \tag{82}$$

де $A=\wp\ln(\wp)+\tilde{\alpha}_1\wp-\tilde{\alpha}_2$, $\overline{r}=r/R_1$.

У цьому випадку v_{annul}^{slip} досягає максимуму при

$r=r^{**}=R_1\sqrt{\dfrac{\wp^2-1+2(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2\wp+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1)}{2(\ln(\wp)+\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2/\wp)}}$, при чому $r^{**}>r^*$ або $r^{**}<r^*$ в залежності від значень коефіцієнтів $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ і радіусів $R_{1,2}$. Так само, як і у випадку трубки кругового перерізу, можна отримати $Q_{annul}^{slip}>Q_{annul}$ за рахунок вибору коефіцієнтів шорсткості $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ при заданих R_1,R_2. В [5] розв'язок (80)–(82) був виписаний та проаналізований у випадку $\alpha_1=\alpha_2$ і $\beta_1=\beta_2$, а в [4] – у випадку $\alpha_1\neq\alpha_2$ і $\beta_1\neq\beta_2$.

Задача для самостійної роботи. Проаналізуйте залежності (80)–(82) та знайдіть умови на коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{1,2}$, $\tilde{\beta}_{1,2}$, які забезпечують більшу обємну витрату течії крізь канал при тих самих значеннях перепаду тиску (тобто нижчий гідравлічний опір каналу) за рахунок ефекту прослизання на стінках. Побудуйте для (80)–(82) графіки та порівняйте їх з побудованими вище для (76)–(79). Порівняйте випадки руху класичних рідин з умовами непрослизання на стінках, мікрорідин з умовами прослизання першого порядку ($\alpha_1\neq 0,\beta_1=0$) і нанорідин з умовами прослизання другого порядку ($\alpha_1\neq 0,\ \beta_1\neq 0$).

4.4. Ламінарна течія через трубку з еліптичним перерізом

4.4.1. Класичні рідини

Розглянемо стаціонарну ламінарну течію однорідної ньютонівської рідини крізь циліндричний канал з еліптичним перерізом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{83}$$

з піввісями a і b вздовж осі 0z за рахунок постійного перепаду тиску на концях канату. Умова непрослизання на стінках однозначно задовільнена, якщо розв'язок рівнянь (2), (3) в декартовій системі координат має вигляд

$$v_{elliptic}(x,y) = A\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \qquad A=\text{const}. \tag{84}$$

Підставляння (84) в (62) дає для константи A такий вираз

$$A = \frac{\Delta p}{2\mu_{eff}L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{85}$$

З (84) видно, що $A = v_{elliptic}\big|_{x,y=0} = V_{max}$. Інтегрування (84), (85) вздовж еліптичного перерізу каналу дає вираз для об'ємної витрати

$$Q_{elliptic} = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta p}{4\mu_{eff}L(a^2+b^2)}. \tag{86}$$

З порівняння (64) і (84) видно, що коли $a = b = R$, формули (64) і (84) співпадають. Те ж саме можно зазначити щодо формул (65) і (86).

Тензор в'язких напружень

$$\tau_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{87}$$

у випадку трубки з еліптичним перерізом має чотири ненульових компоненти

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\Delta p}{L}\frac{b^2 x}{a^2+b^2} \quad \text{і} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\Delta p}{L}\frac{a^2 y}{a^2+b^2} \tag{88}$$

з максимальними значеннями компонент тензору напружень на стінках

$$\max\{\tau_{xz},\tau_{zx}\} = \frac{\Delta p}{L}\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \qquad \max\{\tau_{yz},\tau_{zy}\} = \frac{\Delta p}{L}\frac{a^2 b}{a^2+b^2} \tag{89}$$

та величиною вектора напружень тертя

$$\max|\tau_z| = \frac{\Delta p}{L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{90}$$

Коли $a = b = R$, (88)–(90) співпадає з (67).

4.4.2. Мікро-/нанорідини

Оскільки у випадку класичних та мікро-/нанорідин розв'язки (64) та (68) відрізняються тільки константою, розв'язки системи (2)–(3) для трубок з еліптичним перерізом також можна шукати у вигляді (84) з додатковими константами

$$v_{elliptic}^{slip}(x,y) = A_1\left(1 - \frac{x^2 + A_2}{a^2} - \frac{y^2 + A_3}{b^2}\right), \quad A_{1,2,3}=\text{const}. \qquad (91)$$

Тоді підставляння (91) в (62) дає для розподілення швидкості руху

$$v_{elliptic}^{slip}(x,y) = V_{max}\left(1 - \frac{x^2 + 2(\alpha a - \beta)}{a^2} - \frac{y^2 + 2(\alpha b - \beta)}{b^2}\right). \qquad (92)$$

Коли $a = b = R$, (92) співпадає з (68). Інтегрування (92) вздовж еліптичного перерізу каналу дає для об’ємної витрати такий вираз

$$Q_{elliptic}^{slip} = Q_{elliptic}\left(1 + \frac{\beta - \alpha a}{a^2} + \frac{\beta - \alpha b}{b^2}\right). \qquad (93)$$

Коли $a = b = R$, (93) співпадає з формулою (69) для трубки з круговип перерізом.

У цьому випадку поле напружень зсуву (87) має ті ж самі ненульові компоненти (89), (90), оскільки відповідні різниці швидкостей є константтами, які зникають при диференціюванні.

Задача для самостійної роботи. Проаналізуйте вирази (92), (93) порівняно з (84), (86) та визначте умови на коефіцієнти α_1, β_1, що забезпечують більш високу швидкість потоку та менші напруження зсуву завдяки прослизанню на стінках, тобто нижчий гідравлічний опір каналу порівняно з випадком умов непрослизання. Побудуйте графіки залежностей (92), (93) і порівняйте їх з графіками для (84)–(86). Зробіть висновки щодо фізичної поведінки течій без прослизання на стінках, мікрорідин з умовами прослизання першого порядку ($\alpha_1 \neq 0, \beta_1 = 0$) і нанорідин з умовами прослизання другого порядку ($\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0$).

4.5. Ламінарна течія через трубку з трикутним перерізом

4.5.1. Класичні рідини

Розглянемо випадок, коли призматичний канал має переріз у вигляді рівностороннього трикутника з віссю 0x та сторонами $y = 0$ (основа трикутника), $y = a\sqrt{3}/2 \pm \sqrt{3}z$ (ліва та права сторона) та з поздовжньою віссю 0z. Тут теж може бути використаний той самий метод, який використовується в розв’язку (84) порівняно з розв’язком (64) для отримання нульової швидкості на всіх трьох сторонах трикутника, а саме шукаємо поле швидкостей у вигляді

$$v_{\Delta}(y,z) = Ay\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}z\right)\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}z\right), \quad A=\text{const}. \tag{94}$$

Тоді умови непрослизання виконуються на всіх поверхнях каналу. Підставляння (94) в (3) дає

$$A = \frac{\Delta p}{2\sqrt{3}\mu_{\text{eff}} La}, \quad v(y,z) = \frac{\Delta p \cdot y}{2\sqrt{3}\mu_{\text{eff}} La}\left(\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3z^2\right), \tag{95}$$

а розподіл тиску вздовж каналу знов відповідає (51).

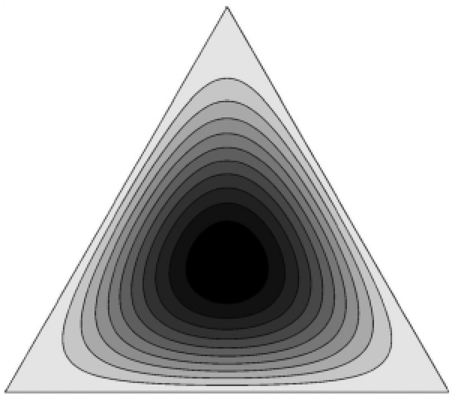


Рис. 11. Контури профілю швидкості рідини в перерізі трикутного каналу. Темніші області відповідають більшим швидкостям

Приклад розподілу швидкостей (95) наведено на рис. 11.

Інтегрування (94) вздовж трикутного перерізу каналу дає об'ємну витрату рідини

$$Q = \frac{a^4\sqrt{3}\Delta p}{320\mu_{\text{eff}} L}. \tag{96}$$

Задача для самостійної роботи: З використанням (87) і (94), обчисліть величину вектора в'язких напружень

$$\tau_{\Delta} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2} \tag{97}$$

в перерізі каналу та на стінках.

4.5.2. Мікро-/нанорідини

Задача для самостійної роботи. Знайти розв'язок $v_{\Delta}^{slip}(y,z)$ для ламінарної течії мікро-/нанорідини вздовж каналу з трикутним перерізом за наявності умов прослизання першого та другого порядку на стінках в найбільш загальному випадку, коли параметри шорсткості трьох стінок α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 відрізняються. Рекомендується використати той самий метод, який був використаний вище, а саме шукати розв'язок у вигляді

$$v_{\Delta}^{slip}(y,z) = A(y + A_1)\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}z + A_2\right)\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}z + A_3\right). \tag{98}$$

Треба підставити (98) в рівняння Нав'є–Стокса (3) і очислили вирази для констант A_{1-3}. Обчислити об'ємну витрату за формулою

$$Q_{\Delta}^{slip} = 2\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_0^{\frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{a\sqrt{3}}{2}} v_{\Delta}^{slip} dz. \tag{99}$$

Обчислити ненульові компоненти тензора в'язких напружень (87) та величини вектора напружень

$$\tau_{\Delta}^{\mathrm{slip}} = \sqrt{\tau_{\mathrm{xz}}^{2} + \tau_{\mathrm{xy}}^{2}} \tag{100}$$

на кожній стінці.

Визначити, при яких умовах на коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ об'ємна витрата мікро-/нанорідини буде вище, ніж в потоці класичної рідини з умовами непрослизання, при тих самих перепадах тиску на кінцях каналу. Побудуйте графіки (98)–(100) в безрозмірних змінних та порівняйте їх з відповідними кривими (95)–(97). Зробіть висновки щодо фізичної поведінки течій без прослизання на стінках, мікрорідин з умовами прослизання першого порядку ($\alpha_{1-3} \neq 0, \beta_{1-3} = 0$) і нанорідин з умовами прослизання другого порядку ($\alpha_{1-3} \neq 0, \beta_{1-3} \neq 0$) BC.

4.6. Ламінарна течія через трубку з прямокутним перерізом

4.6.1. Класичні рідини

Розглянемо стаціонарну ламінарну течію однорідної ньютонівської рідини крізь циліндричний канал з віссю 0x і прямокутним перерізом $z \in [-h, h]$, $y \in [-\chi h, \chi h]$, де χ – відношення ширини до висоти каналу. Тоді розв'язок рівнянь (2), (3) в декартовій системі координат можна шукати у вигляді розкладень по $\cos\left(\dfrac{2n+1}{h}\pi z\right)$, щоб умови непрослизання на стінках виконувалися. Підстановка в (2),(3) дає такий розв'язок [31]:

$$v_{\square}(y,z) = \frac{4\Delta p h^2}{\pi^3 \mu_{eff} L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\mathrm{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi y}{h}\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\chi\right)} \right] \cos\left(\frac{2n+1}{h}\pi z\right). \tag{101}$$

Приклад поля швидкостей (101) в прямокутному перерізі каналу наведений на рис. 12а. Інтегрування (101) за прямокутним перерізом дає об'ємну витрату рідини у вигляді

$$Q_{\square} = \frac{\Delta p h^4}{4\mu_{eff} L} \left(\frac{16}{3}\chi - \frac{1024}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \mathrm{th}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\chi\right) \right). \tag{102}$$

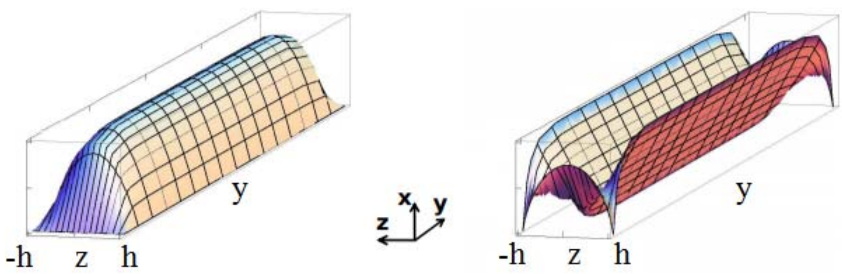
Ненульові компоненти тензора в'язких напружень (87) є

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_{eff}}{2}\frac{\partial v_{\square}}{\partial z} =$$

$$= -\frac{4\Delta ph}{\pi^2 L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\left[1-\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi y}{h}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\chi\right)}\right]\sin\left(\frac{2n+1}{h}\pi z\right), \qquad (103)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu_{eff}}{2}\frac{\partial v_{\square}}{\partial y} =$$

$$= \frac{2\Delta ph}{\pi^2 L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi y}{h}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\chi\right)}\cos\left(\frac{2n+1}{h}\pi z\right). \qquad (104)$$



a b

Рис. 12. Розподіл швидкості (a) і напруження зсуву (b) по каналу з прямокутним перерізом

Величина вектора напружень тертя в потоці і на стінках каналу vectors

$$\tau_{\square} = (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2}, \qquad (105)$$

яка обчислена за (101), (105), наведена на рис. 12a,b.

4.6.2. Мікро-/нанорідини

Задача для самостійної роботи. Знайти розв'язок $v_{\square}^{slip}(y,z)$ задачі (2), (3) для ламінарної течії мікро-/нанорідини вздовж каналу з прямокутним перерізом за наявності умов прослизання першого та другого порядку на стінках в найбільш загальному випадку, коли параметри шорсткості всіх чотирьох трьох стінок α_1,β_1, α_2,β_2, α_3,β_3, α_4,β_4 різні. Рекомендується використати той самий метод, який був використаний вище, а саме шукати розв'язок у вигляді

$$v_{\square}^{slip}(y,z) = \frac{4\Delta ph^2}{\pi^3\mu_{eff}L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\left[1-\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi y}{h}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\chi\right)}+A_1\right]\left[\cos\left(\frac{2n+1}{h}\pi z\right)+A_2\right]. \qquad (106)$$

Треба підставити (98) в рівняння Нав'є–Стокса (3) і обчислили вирази для констант $A_{1,2}$. Обчислити об'ємну витрату шляхом інтегрування (106) за прямокутним перерізом каналу

$$Q_{\square}^{slip} = 4 \int_0^{\chi h/2} dy \int_0^{h/2} v_{\square}^{slip} dz \ . \tag{107}$$

Обчислили ненульові компоненти тензора в'язких напружень (87) та величини вектора напружень

$$\tau_{\triangle}^{slip} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2} \tag{108}$$

на кожній стінці.

Визначте, при яких умовах на коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ об'ємна витрата мікро-/нанорідини буде вище, ніж в потоці класичної рідини з умовами непрослизання, при тих самих перепадах тиску на кінцях каналу. Побудуйте графіки (106)–(108) в безрозмірних змінних та порівняйте їх з відповідними кривими (101), (102), (105). Зробіть висновки щодо фізичної поведінки течій без прослизання на стінках, мікрорідин з умовами прослизання першого порядку ($\alpha_{1-4} \neq 0,\ \beta_{1-4} = 0$) і нанорідин з умовами прослизання другого порядку ($\alpha_{1-4} \neq 0,\ \beta_{1-4} \neq 0$).

СПИСОК ПОСИЛАНЬ

1. MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices. Islam N. (Ed.). InTech. 2012.

2. MEMS Materials and Processes Handbook, Ghodssi R., Lin P. (Eds.). Springer, 2011.

3. Liou W., Fang Y. Microfluid Mechanics: Principles and Modeling (Nanoscience and Technology). McGraw-Hill Education Publ., 2005.

4. Cherevko V., Kizilova N. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip bounary conditions. // Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics. Vol. 183. O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). 2017. P. 207–230.

5. Karniadakis G. E., Beskok A., Aluru N. Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation, Interdisc. Appl. Math. Series. Vol. 29. Springer-Science, 2005.

6. Neto C., Evans D. R., Bonaccurso E., Butt H.-J., Craig V.S.J., Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Rep. Prog. Phys. Vol. 68. 2005. Pp. 2859–2897.

7. Bechert D. W., Bruse M., Hage W., Meyer R. Fluid mechanics of biological surfaces and their technological application. Naturwissenschaften, 2004. Vol. 87. 2004. Pp.157–171.

8. Christodoulou K. N., Scriven L. E. The fluid mechanics of slide coating. J. Fluid Mech. 1992. 99:39–55.

9. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall, J. Fluid Mech. Vol. 30. 1967. Pp. 197–207.

10. Denn M. M., Issues in viscoelastic fluid mechanics, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22. 1990. Pp. 13–34.

11. Mohammadi B., Pironneau O. Analysis of the k–ε turbulence Model, Wiley, 1974.

12. Sbragaglia M., Prosperetti A. Effective velocity boundary condition at a mixed slip surface. J. Fluid Mech. 2007. Vol. 578. Pp. 435–451.

13. Lim C. Y., Shu C., Niu X. D., Chew Y. T. Application of lattice Boltzmann method to simulate microchannel flows, Phys. Fluids, Vol. 14. 2002. Pp. 2299–2308.

14. Mala G. M., Li D. Q. Flow characteristics of water in microchannels. Int. J. Heat Fluid Flow. Vol. 20. 1999. Pp.142–148.

15. Tang G. H., Li Zhuo, He Y. L., Tao W. Q. Experimental study of compressibility, roughness and rarefaction influences on microchannel flow. Intern, J. Heat Mass Transfer. Vol. 50. 2007. Pp. 2282–2295.

16. Kizilova N. Space-filling trees for microfluidic applications: A review, Nanoplasmonics, Nano-Optics, Nanocomposites and Surface Studies. Springer Proceedings in Physics / O. Fesenko, L. Yatsenko (Eds.). 2015. Pp. 7–23.

17. Wu P. Y., Little W. A. Measurement of the friction factors for the flow of gases in very fine channels used for microminiature Joule–Thomson refrigerators, Cryogenics. Vol. 23. 1983. Pp. 273–277.

18. Urbanek W., Zemel J. N., Bau H. An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow. J. Micromech. Microeng., Vol. 3. 1993. Pp. 206–208.

19. Peng X. F., Peterson G. P., Wang B. X. Frictional flow characteristics of water flowing through rectangular channels. Exp. Heat Transfer., Vol. 7. 1994. Pp. 249–264.

20. Papautsky I., Gale B. K., Mohanty S., Ameel T. A., Frazier A. B. Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant. Proc. of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE). Vol. 3877. 1999. Pp. 147–158.

21. Qu W. L., Mala G. M., Li D. Q. Pressure-driven water flows in trapezoidal silicon microchannels. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 43. 2000. Pp. 353–364.

22. Wang H., Wang Y. Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube. Intern. J. Heat Fluid Flow. Vol. 28. 2007. Pp. 220–228.

23. Maninen M., Taivassalo V. On the mixture model for multiphase flow. VTT Publ., 1996. Espo.

24. Ghasemi B., Aminossadati S. Brownian motion of nanoparticles in a triangular enclosure with natural convection. Intern. J. Thermal Sci. Vol. 49. 2010. Pp. 931–940.

25. Merkle C. L., Kubota T., Ko D.R.S. An analytical study of the effects of surface roughness on boundary-layer transition, Air Force Office of Scientific Research Space and Missile System Organization. AD/A004786. 1974.

26. Corcione M. Heat transfer features of buoyancy-driven nanofluids inside rectangular enclosures differentially heated at the sidewalls, Intern. J. Thermal Sci., Vol. 49. 2010. Pp. 1536–1546.

27. Malvandi A., Ganji D. D. Effects of nanoparticle migration and asymmetric heating on magnetohydrodynamic forced convection of alumina/water nanofluid in microchannels. European J. Mech., Ser. B, Fluids. Vol. 52. 2015. Pp. 169–184.

28. Mo G., Rosenberger F. Molecular-dynamics simulation of flow in a two-dimensional channel with atomically rough walls, Phys. Rev. Ser. A. Vol. 42. 1990. Pp. 4688–4892.

29. Chapman S., Cowling T. G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases, Cambridge Math. Library, 1991.

30. Roohi E., Darbandi M. Extending the Navier–Stokes solutions to transition regime in two-dimensional micro- and nanochannel flows using information preservation scheme. Phys. Fluids. Vol. 21. 2009. p.082001.

31. Landau L. D., Lifshitz Ye. M. Theoretical Physics. Fluid Mechanics. Vol. 6. 2-nd edition. Pergamon Press, Oxford. 1987. 539 p.

Навчальне видання

Кізілова Наталія Миколаївна

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ
МІКРОФЛЮЇДИКИ І НАНОФЛЮЇДИКИ

Методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи з курсу
«Основи нанореології» для студентів спеціальності
«Прикладна математика»

Коректор *Л. Є. Стешенко*
Комп’ютерне верстання *В. В. Савінкова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2,16. Наклад 100 пр. Зам. № 84/21.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32