Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В НЬЮТОНОВОМ И ЛАГРАНЖЕВОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Харьков – 2012

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В НЬЮТОНОВОМ И ЛАГРАНЖЕВОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Учебно-методическое пособие для
студентов физических специальностей

Харьков – 2012

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
К 47

Рецензенты:

Ковалев А. С. – доктор физ.-мат. наук, вед. научн. сотр. ФТИНТ НАН Украины, профессор**;**

Ермолаев А. М. – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики имени академика И. М. Лифшица Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, профессор.

Рекомендовано к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 4 от 11.05.2012 г.)

К 47 **Классическая** динамика в ньютоновом и лагранжевом формализме : учебно-методическое пособие для студентов физических специальностей / С. С. Апостолов, Е. В. Езерская, З. А. Майзелис и др. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. – 76 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено студентам физических специальностей, изучающим теоретическую механику, и содержит задачи, решение которых способствует более глубокому пониманию физических идей механики, развитию необходимых практических навыков в решении уравнений классической механики в формализмах Ньютона и Лагранжа.

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание является первой частью серии из нескольких учебно-методических пособий для самостоятельной работы студентов по классической механике. Первый вариант под названием «Динамика материальной точки в ньютоновом и лагранжевом формализме», составителями которого были Е. В. Езерская, О. И. Усатенко и Т. С. Чебанова, напечатанный на пишущей машинке с вписанными от руки формулами, вышел в 1989 году в 100 экземплярах. Авторы в разные годы читали лекции и вели практические занятия по классической механике на физическом факультете. Методические указания до сих пор пользуются популярностью у студентов и преподавателей, ведущих практические занятия по теоретической механике на физическом факультете, поэтому было решено выпустить новое, существенно переработанное пособие, в котором исправлены замеченные опечатки, добавлены новые задачи, предложены более подробные решения некоторых задач, добавлены рисунки, поясняющие решения, полностью изменен пятый раздел.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам физических специальностей, изучающим теоретическую механику, и содержит задачи, решение которых способствует более глубокому пониманию физических идей классической механики, развитию необходимых практических навыков в решении уравнений Ньютона и Лагранжа. В первом разделе рассматривается прямолинейное движение материальной точки в ньютоновом формализме, второй раздел посвящен криволинейным координатам, в третьем и четвертом разделах используется формализм Лагранжа для интегрирования уравнений движения, в пятом разделе рассматриваются преобразования координат в механических системах.

1. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Чтобы движение материальной точки было прямолинейным, необходимо и достаточно, чтобы действующая сила имела постоянное направление, а начальная скорость была параллельна этому направлению.

В дальнейшем будем принимать траекторию за ось Оx, поэтому можно будет ограничиться исследованием одного уравнения:

$$m\ddot{x} = F\left(x, \dot{x}, t\right) \tag{1.1}$$

с начальными условиями: $\dot{x}\left(t_0\right) = v_0$, $x\left(t_0\right) = x_0$.

Если сила есть функция только одного переменного, то дифференциальное уравнение прямолинейного движения (1.1) интегрируется методом разделения переменных.

1.1. Движение под действием силы, зависящей только от времени

1.1. Найти закон движения материальной точки массы m под действием силы $F = F\left(t\right)$, если при $t = t_0$ $\dot{x} = v_0$, $x = x_0$.

1.2. Исследовать движение частицы массы m в поле силы тяжести при условии, что начальная скорость имеет только вертикальную составляющую. Ускорение свободного падения равно g.

1.3. Тело массы m движется под действием силы $F = \alpha\left(1 - t\right)$, где t – время. Через какое время тело остановится, если его начальная скорость v_0, а сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет тело до остановки?

1.4. Материальная точка массы m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos\omega t$, где F_0 и ω – постоянные величины. В начальный момент $\dot{x}\left(0\right) = v_0$, $x\left(0\right) = 0$. Найти закон движения точки.

1.5. Частица массы m, несущая заряд e, находится в однородном электрическом поле с переменной напряженностью $E = E_0 \sin kt$. Определить движение частицы, если $v\left(0\right) = 0$, $x\left(0\right) = 0$. Влиянием силы тяжести пренебречь.

1.2. Движение под действием силы, зависящей только от положения частицы

1.6. Исследовать движение частицы массы m под действием силы $F = F\left(x\right)$. Какой закон сохранения имеет здесь место?

1.7. Тело падает на Землю с высоты h – без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь, а силу притяжения Земли считать обратно пропорциональной квадрату расстоянию тела от центра Земли. Найти время T, по истечении которого тело достигнет поверхности Земли. Какую скорость оно приобретет за это время? Радиус Земли равен R, ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g. Рассмотреть предельный случай $h \ll R$ и сравнить его с задачей 1.2.

1.8. Точка массы m начинает двигаться без начальной скорости из положения $x = \beta$ прямолинейно (вдоль оси x) под действием силы притяжения к началу координат, изменяющейся по закону $F = -\dfrac{\alpha}{x^2}$. Найти момент времени, когда точка окажется в положении $x_1 = \dfrac{\beta}{2}$. Определить скорость точки в этом положении.

1.9. Точка массы m начинает двигаться из состояния покоя из положения $x_0 = a$ прямолинейно под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию от начала координат $F_x = -C_1 m x$ и силы отталкивания, пропорциональной кубу расстояния: $Q_x = C_2 m x^3$. При каком соотношении a, C_1, C_2 точка достигнет начала координат и остановится?

1.3. Движение под действием силы, зависящей только от скорости

1.10. Исследовать движение частицы массы m под действием силы $F = F(v)$.

1.11. Тело массы m подброшено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости $\left(\vec{R} = -mkv\vec{v}\right)$. Поле тяжести Земли считать однородным. Найти, с какой скоростью тело достигнет поверхности Земли.

1.12. На какую высоту h и за какое время T поднимется тело веса P, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $R = k^2 P v^2$, где v – величина скорости тела.

1.13. Тело падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R = k^2 P v^2$, где v – величина скорости, P – вес тела. Какова будет скорость тела по истечении времени t после начала движения? Каково предельное значение скорости?

1.14. Найти закон движения точки массы m, падающей без начальной скорости на Землю. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности равен k.

1.15. Точка массы m падает вертикально (изменение ускорения силы тяжести с высотой не учитывается) без начальной скорости в среде, сила сопротивления которой $F(v) = -\alpha v - \beta v^2$, где α и β - положительные постоянные. Найти зависимость скорости от времени. Найти предельное значение скорости.

1.16. Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть P, погружается на глубину, двигаясь поступательно. Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным kSv, где k – коэффициент пропорциональности, S площадь горизонтальной поверхности лодки, v – величина скорости погружения. Масса лодки равна M. Найти зависимость скорости погружения от времени и закон движения лодки, если в начальный момент времени $v_0(0)=0$.

1.17. Тело падает вертикально вниз без начальной вертикальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью падения.

1.4. Движение под действием более сложных сил

1.18. На высоте H над Землей материальной точке массы m сообщается начальная скорость v_0, направленная вертикально вниз. Найти величину скорости точки на высоте x, если на нее действует сила сопротивления $F=-\beta v^2$, а ускорение силы тяжести меняется с высотой по закону $gR^2/(R+x)^2$, где R – радиус Земли.

1.19. Точка массы m движется по прямой Оx в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости $\left(F=-\beta v^2\right)$. Найти закон движения точки (в квадратурах), если на нее, кроме того, действует сила $\Phi=\Phi(x)$ и в начальный момент $\dot{x}_0(t_0)=v_0>0,\ x(t_0)=x_0$.

1.20. Материальная точка массы m отталкивается от центра силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности mk_2). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности $2mk_1$). В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра и ее скорость в этот момент равнялась нулю. Найти закон движения точки.

1.21. При движении тела в неоднородной среде сила сопротивления изменяется по закону $F=-\alpha mv^2/(\beta+x)$, где v - скорость тела, а x – пройденный путь. Определить пройденный путь как функцию времени, если начальная скорость $v(0)=v_0,\ x(0)=0$.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 1

1.1. Интегрируя уравнение (1.1) и определяя произвольную постоянную по начальным условиям, находим:

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')dt'.$$

После второго интегрирования окончательно получим

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \left\{\int_{t_0}^{t'} F(t'')dt''\right\}. \tag{1.2}$$

1.2 Если ось x направлена вертикально вверх, то уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -mg.$$

По формуле (1.2) находим

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

При $v_0 < 0$ частица сразу падает вниз. Если же $v_0 < 0$, то до момента $t = t_0 + \dfrac{v_0}{g}$, т. е. до высоты $x = x_0 + \dfrac{v_0^2}{2g}$ частица движется вверх, а затем падает вниз.

1.3. Дважды интегрируя уравнение движения, имеем

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{\alpha}{m}\left(t - \dfrac{t^2}{2}\right) + v_0; \\ x(t) = \dfrac{\alpha}{m}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6}\right) + v_0 t. \end{cases}$$

Время остановки t_0 находим из условия $v(t_0) = 0$:

$$t_0 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2mv_0}{\alpha}}.$$

Пройденный путь: $S = x(t_0)$.

1.4. Ответ: $x(t)=\dfrac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)+v_0 t.$

1.5. Ответ: $x(t)=\dfrac{eE_0}{mk}\left(t-\dfrac{\sin kt}{k}\right).$

1.6. Когда $F=F(x)$, закон движения частицы находится с помощью двух квадратур. Умножим обе части уравнения

$$m\frac{dv}{dx}=F(x)$$

на $vdt=dx$. Получим

$$mvdv=F(x)dx;\quad \frac{mv^2}{2}-\int F(x)dx=E$$

или

$$\frac{mv^2}{2}+U(x)=E, \tag{1.3}$$

где $U(x)$ - потенциальная энергия, E – полная энергия.

Напомним, что в соответствии с общим определением потенциальной силы $\vec{F}=-grad\,U$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $rot\,U=0$. В случае прямолинейного движения материальной точки это условие выполняется автоматически и, следовательно, сила F является потенциальной. Итак:

$$F(x)=-\frac{dU}{dx},\quad U(x)=-\int F(x)dx.$$

При первом интегрировании получен *закон сохранения энергии (первый интеграл движения)*. Разрешим полученное уравнение (1.3) относительно v. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}};\quad dt=\pm\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}},$$

интегрируя которое, находим время t как функцию x:

$$t=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}}+C. \tag{1.4}$$

Здесь E и C – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий $\dot{x}(t_0) = v_0$, $x(t_0) = x_0$ (см. (1.1)), причем E есть полная энергия.

1.7. Так как в данном случае $F = -\dfrac{mgR^2}{(R+x)^2}$, то

$$U(x) = -\int F(x)\,dx = -\frac{mgR^2}{R+x},$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{R+x} = E; \quad E = -\frac{mgR^2}{R+h}. \tag{1.5}$$

Максимальную скорость $v_{\max}$ при $x = 0$ находим из закона сохранения энергии(1.5).

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

Интегрируя второй раз уравнение (1.5) с учетом начальных условий, получим

$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}} \int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}\,dx.$$

После замены переменной $y = \sqrt{\dfrac{R+x}{h-x}}$

находим:

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left[\sqrt{Rh} + (R+h)\arcsin\sqrt{\frac{h}{R+h}} \right].$$

В пределе $h/R \to 0$ имеем $v_{\max} = \sqrt{2gh}$; $T = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ – *закон свободного падения в отсутствие сил сопротивления*.

1.8. Ответ: $t_1 = \left(\dfrac{\beta}{2}\right)^{3/2} \sqrt{\dfrac{m}{\alpha}} \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m\beta}}$.

1.9. Ответ: $C_1 = \dfrac{1}{2} C_2 a^2$. Это условие, при котором полная энергия $E = 0$.

1.10. Если $F = F(v)$, то в уравнении (1.1) можно понизить порядок, принимая $\dot{x} = v$ за искомую функцию

$$m\frac{dv}{dt} = F(v). \tag{1.6}$$

Отсюда, проинтегрировав, получим:

$$t = \int \frac{mdv}{F(v)} + A, \tag{1.7}$$

где A – произвольная постоянная. Допустим, что из этого уравнения мы сумеем найти v как функцию от разности $t - A$, т. е.

$\dot{x} = \varphi(x - A)$ или $dx = \varphi(t - A)dt$.

Тогда, интегрируя, найдем закон движения

$$x(t) = \int \varphi(t - A)dt + B.$$

В том случае, когда из уравнения (1.7) нельзя найти v как явную функцию времени, следует домножить уравнение (1.6) почленно на $vdt = dx$. Получаем в результате

$$mvdv = F(v)dx,$$

$$x(t) = \int \frac{mvdv}{F(v)} + C. \tag{1.8}$$

Пусть из этого уравнения мы можем найти v как явную функцию x:

$\dot{x} = \psi(x - C)$ или $dt = \dfrac{dx}{\psi(x - C)}$.

Интегрируя, находим

$$t = \int \frac{dx}{\psi(x - C)} + D.$$

Это уравнение определяет x как функцию времени и произвольных постоянных C и D. Наконец, если уравнения (1.7) и (1.8) относительно $\dot{x}$ не решаются, то их можно рассматривать как параметрически заданный закон движения:

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{mvdv}{F(v)} + C; \\ t = \displaystyle\int \frac{mdv}{F(v)} + A. \end{cases} \tag{1.9}$$

Формула (1.8) связывает скорость и положение частицы, а формула (1.7) определяет зависимость между временем движения и скоростью. Таким образом, выбор способа решения ((1.6), (1.7) или (1.8)) зависит от того, какие соотношения нас интересуют. Оба метода используются при решении задач 1.11 – 1.17.

1.11. Направим ось Ox вертикально вверх. Тогда уравнение движения, соответствующее движению частицы вверх, запишется в виде:

$$\begin{aligned} &m\dot{v} = -mg - kmv^2; \\ &v(0) = v_0; \quad x(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Воспользуемся вторым способом интегрирования, поскольку нам нужно связать скорость падения с высотой. Получим:

$$\frac{vdv}{g + kv^2} = -dx; \quad \frac{1}{2k}\ln\left(g + kv^2\right) = -x + C_1.$$

Константу C_1 находим из начальных условий (1.10):

$$C_1 = \frac{1}{2k}\ln\left(g + kv_0^2\right); \quad x = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g + kv_0^2}{g + kv^2}\right).$$

Максимальная высота h, на которую поднимется тело, определяется из условия $v = 0$

$$h = \frac{1}{2k}\ln\frac{g + kv_0^2}{g}.$$

Движению вниз соответствует уравнение движения

$$m\dot{v} = -mg + mkv^2$$

с начальными условиями:

$$v(t_0) = 0; \quad x(t_0) = h.$$

Его решение получим из решения уравнения (1.10) заменой k на $-k$

$$\frac{1}{2k}\ln\left(g - kv^2\right) = -x + C_2.$$

Константа C_2 находится из начальных условий:

$$C_2 = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g + kv_0^2}{g^2}\right).$$

Окончательно находим x как функцию v:

$$x = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{\left(g + kv_0^2\right)\left(g - kv^2\right)}{g^2}\right).$$

Скорость, которую тело имеет при падении на Землю, найдем из условия $x = 0$:

$$v = -\frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{k}{g}v_0^2}}.$$

1.12. Ответ: $h = \frac{1}{2gk^2}\ln\left(v_0^2k^2 + 1\right); \quad T = \frac{1}{gk}arctg\left(kv_0^2\right).$

1.13. Ответ: $v = \frac{1}{k}th\left(kgt\right); \quad v\left(t \to \infty\right) = v_{\max} = \frac{1}{k}$. Предельное значение скорости определяется условием $R = mg$.

1.14. Ответ: $x = \frac{m}{k}\ln ch\left[\left(\frac{gk}{m}\right)^{1/2} t\right].$

1.15. Ответ:

$$v = \frac{2mg}{\alpha + 2m\lambda\, cth\, \lambda t}; \quad v_{\max} = \frac{2mg}{\alpha + 2m\lambda}; \quad \lambda = \frac{1}{2m}\left(\alpha^2 + 4\beta mg\right)^{1/2}.$$

1.16. Ответ:

$$v\left(t\right) = \frac{P}{kS}\left[1 - \exp\left(-\frac{kS}{M}t\right)\right]; \quad x\left(t\right) = \frac{P}{kS}\left\{t - \frac{M}{kS}\left[1 - \exp\left(-\frac{kS}{M}t\right)\right]\right\}.$$

1.17. Ответ: $v = v_{\max}\sqrt{1 - \exp\left[-\left(2gx/v_{\max}^2\right)\right]}$.

1.18. Уравнение движения имеет вид (ось Оx направлена вверх):

$$m\frac{dv}{dt} = \beta v^2 - \frac{mgR^2}{\left(R + x\right)^2}; \qquad \begin{cases} v\left(0\right) = v_0; \\ x\left(0\right) = H. \end{cases}$$

Пусть v – является искомой функцией, а x - независимой переменной. Тогда уравнение движения примет вид:

$$mv\frac{dv}{dt} - \beta v^2 = \frac{mgR^2}{\left(R + x\right)^2} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(v^2\right) - \frac{2\beta}{m}v^2 = \frac{2mgR^2}{\left(R + x\right)^2}.$$

Решая линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью, находим с учетом начальных условий:

$$v^2 = v_0^2 \exp\left[-2\beta\left(H-x\right)/m\right] + 2gR^2 \int_x^H \frac{\exp\left[2\beta\left(x-x'\right)/m\right]}{\left(R+x'\right)^2} dx'.$$

1.19. Как и при решении задачи 1.18, в уравнении движения

$$m\frac{dv}{dt} = -\beta v^2 + \Phi\left(x\right); \quad \begin{cases} \dot{x}\left(t_0\right) = v_0 > 0; \\ x\left(t_0\right) = x_0. \end{cases}$$

считаем v искомой функцией, а x - независимой переменной. Получаем

$$\frac{d}{dx}\left(v^2\right) + \frac{2\beta}{m}v^2 = \frac{2}{m}\Phi\left(x\right); \quad v\left(x_0\right) = v_0.$$

Интегрируя дважды, находим:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x}\left[v_0^2\exp\left[-\frac{2\beta\left(x'-x_0\right)}{m}\right] + \left(\frac{2}{m}\right)\exp\left[-\frac{2\beta x'}{m}\right]\int_{x_0}^{x'}\Phi\left(x''\right)\exp\left[\frac{2\beta x''}{m}\right]dx''\right]^{-1/2} dx'.$$

1.20. Ответ:

$$x = \frac{a}{\alpha+\beta}\left(\alpha e^{\beta t} + \beta e^{-\alpha t}\right);$$
$$\alpha = k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2}; \quad \beta = -k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2}.$$

1.21. Уравнение движения $m\dot{v} = -\dfrac{\alpha m v^2}{\beta + x}$ можно представить в виде

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\alpha dx}{\beta + x}.$$

Интегрируя дважды с учетом начальных условий, находим закон движения

$$x = \beta\left\{\left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)v_0 t + 1\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1\right\}.$$

2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

2.1. Для криволинейной системы координат записать уравнения координатных поверхностей и координатных линий.

2.2. Решить задачу 2.1 для цилиндрической и сферической систем координат.

2.3. Записать единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, направленные по касательным к координатным линиям в сторону возрастания q_1, q_2, q_3 для криволинейных координат. Как выглядят проекции этих векторов на оси декартовой системы координат?

2.4. Составить фундаментальный метрический тензор для криволинейной системы координат q_1, q_2, q_3. Как по виду этого тензора определить, являются ли криволинейные координаты ортогональными?

2.5. Записать коэффициенты Ламе, квадрат дифференциала длины дуги для криволинейных координат q_1, q_2, q_3. Как выглядит квадрат дифференциала длины дуги, если система криволинейных координат ортогональна? Записать элемент объема для криволинейных ортогональных координат.

2.6. Ввести фундаментальный метрический тензор для цилиндрических координат. Являются ли эти координаты ортогональными? Записать проекции ортов $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ на оси декартовой системы координат. Чему равен квадрат дифференциала длины дуги? Чему равен элемент объема?

2.7. То же для сферической системы координат $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$.

2.8. Найти уравнения координатных линий для системы криволинейных координат на плоскости, определить углы между координатными линиями. Составить фундаментальный метрический тензор, найти коэффициенты Ламе и квадрат элементарной длины дуги. Как следовало бы назвать эту систему координат?

2.8.1. $\begin{cases} u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}; \\ v = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases}$

2.8.2. $\begin{cases} x = uv; \\ y = u\sqrt{1 - v^2}. \end{cases}$

2.8.3. $\begin{cases} x = uv; \\ y = \pm\sqrt{\left(u^2 - 1\right)\left(1 - v^2\right)}. \end{cases}$

2.8.4. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+q_1}+\dfrac{y^2}{q_1}=1, \quad 0\le q_1<\infty; \\ \dfrac{x^2}{1+q_2}+\dfrac{y^2}{q_2}=1, \quad -1<q_2\le 0. \end{cases}$

2.8.5. $\begin{cases} x=\sin u\, chv; \\ y=\cos u\, shv. \end{cases}$

2.8.6. $\begin{cases} x=\pm\sqrt{uv}; \\ y=\dfrac{1}{2}(u-v). \end{cases}$

2.8.7. $\begin{cases} q_1=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}; \\ q_2=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}. \end{cases}$

2.9. Для приведенных ниже систем криволинейных координат в пространстве: а) составить фундаментальный метрический тензор; исследовать, является ли система координат ортогональной; найти квадрат элементарной длины дуги; б) найти уравнения координатных поверхностей и координатных линий; как можно назвать эту систему координат?

2.9.1. $\begin{cases} u=\ln\left(x^2+y^2\right); \\ v=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right); \\ w=z. \end{cases}$

2.9.2. $\begin{cases} x=uv; \\ y=u\sqrt{1-v^2}; \\ z=w. \end{cases}$

2.9.3. $\begin{cases} u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}; \\ v=arctg\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right); \\ \varphi=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases}$

2.9.4. $\begin{cases} x = uw\sqrt{1-v^2}; \\ y = u\sqrt{\left(1-v^2\right)\left(1-w^2\right)}; \\ z = uv. \end{cases}$

2.9.5. $\begin{cases} x = \sin u\, chv; \\ y = \cos u\, shv; \\ z = w. \end{cases}$

2.9.6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(q_1^2 - q_2^2\right); \\ y = q_1 q_2; \\ z = q_3. \end{cases}$

2.9.7. $\begin{cases} x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi; \\ y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi; \\ z = \dfrac{1}{2}(\xi - \eta). \end{cases}$

2.9.8. $\begin{cases} u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}; \\ v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z}; \\ w = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases}$

2.9.9. $\begin{cases} x = q_1 q_2 q_3; \\ y = q_1 q_2 \sqrt{1 - q_3^2};. \\ z = \dfrac{1}{2}\left(q_1^2 - q_2^2\right). \end{cases}$

2.9.10. $\begin{cases} x = (1 + \rho\cos\varphi)\cos\psi; \\ y = (1 + \rho\cos\varphi)\sin\psi; \quad 0 \le \varphi, \psi < 2\pi; \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

2.9.11. $\begin{cases} x = \dfrac{c \cdot sh\alpha \cdot \cos\beta}{ch\alpha - \cos\beta}\cos\psi; \\ y = \dfrac{c \cdot sh\alpha \cdot \cos\beta}{ch\alpha - \cos\beta}\sin\psi; \quad c > 0,\, 0 \le \beta, \psi < 2\pi,\, 0 \le \alpha, \infty; \\ z = \dfrac{c \cdot \sin\beta}{ch\alpha - \cos\beta}. \end{cases}$

2.10. Зная проекции вектора $\vec{A}$ на оси декартовой системы координат $\left(A_x, A_y, A_z\right)$ найти проекции $\left(A_1, A_2, A_3\right)$ на оси криволинейной ортогональной системы координат q_1, q_2, q_3.

2.11. Сделать то же для цилиндрической системы координат.

2.12. Сделать то же для сферической системы координат.

2.13. Рассмотрим в цилиндрической системе координат три взаимно перпендикулярные орта $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$.

1. Принимая во внимание, что единичные векторы изменяются только по направлению, вычислить значения производных $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}, \dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}, \dfrac{d\vec{e}_z}{d\varphi}$.

2. Дифференцируя выражение для радиус-вектора $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ по времени, найти вектор скорости и вектор ускорения.

2.14. Рассмотрим в сферической системе координат три взаимно перпендикулярных орта $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$.

1. Найти производные от этих ортов по θ и φ.

2. Используя полученные соотношения, формальным дифференцированием выражения $\vec{r} = r\vec{e}_r$ по времени найти значение вектора скорости.

3. Независимо подсчитать компоненты ускорения по формуле

$$a_i = \frac{1}{h_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right].$$

Результаты должны совпасть.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 2

2.1. Положение точки М в пространстве может быть определено ее радиус-вектором $\vec{r} = \left(x, y, z\right)$ или $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где x, y, z – прямоугольные декартовы координаты точки *M* (рис. 2.1).

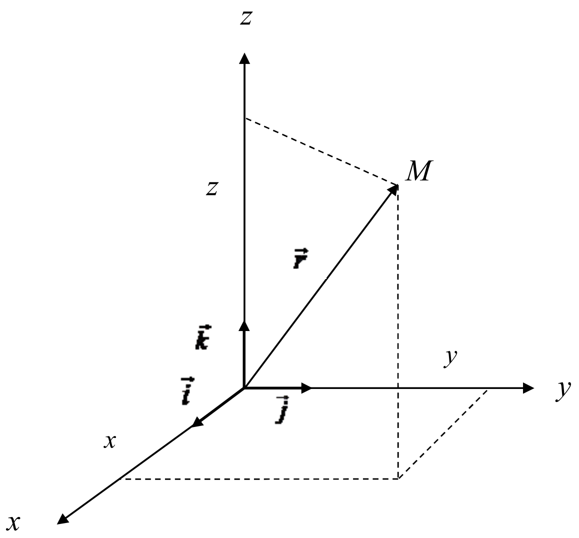

Рис. 2.1. Прямоугольные декартовы координаты точки М

Рассмотрим три функции

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z); \\ q_2 = q_2(x, y, z); \\ q_3 = q_3(x, y, z). \end{cases} \tag{2.1}$$

Если из этой системы уравнений можно однозначно определить радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ или, иначе,

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3); \\ y = y(q_1, q_2, q_3); \\ z = z(q_1, q_2, q_3), \end{cases} \tag{2.2}$$

в этом случае тройкой чисел q_1, q_2, q_3 можно охарактеризовать положение точки *M*. Тогда можно говорить о q_1, q_2, q_3, как о координатах. Уравнение $q_1(x, y, z) = C_1$ – уравнение поверхности и, если придавать постоянной C_1 различные значения, получим семейство поверхностей. Рассмотрим еще два семейства поверхностей $q_2(x, y, z) = C_2$ и $q_3(x, y, z) = C_3$. Через точку М проходит по одной поверхности каждого семейства. Это координатные поверхности. Линии пересечения двух координатных поверхностей называются координатными линиями (рис. 2.2).

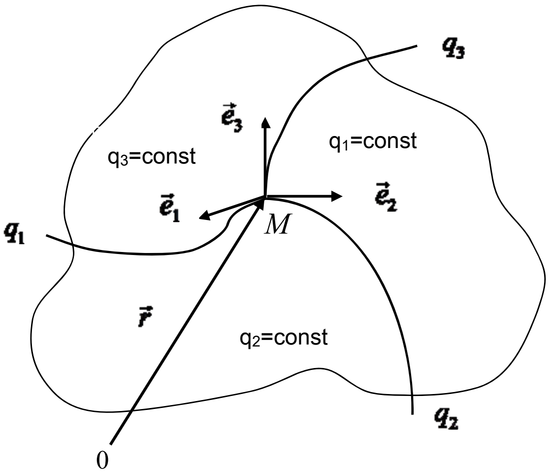

Рис. 2.2. Криволинейные координаты точки М

2.2. В цилиндрических координатах положение точки определяется тремя координатами $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$ (рис. 2.3). Формулы (2.2) имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi; \\ \quad z = z. \end{cases} \tag{2.3}$$

Изменяя координату ρ от 0 до ∞, φ от 0 до 2π, z от $-\infty$ до ∞, мы получим все точки пространства.

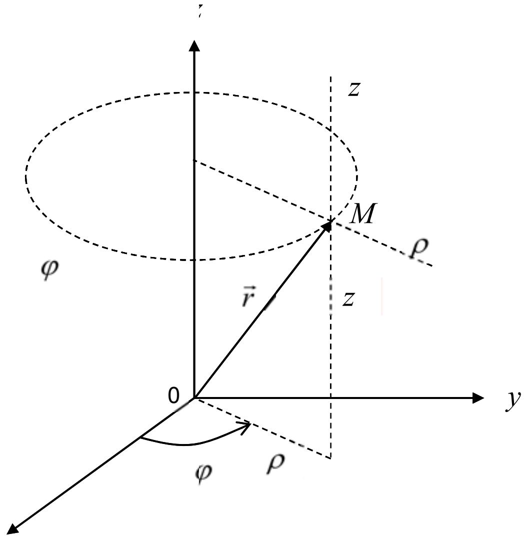

Рис. 2.3 Цилиндрические координаты. Пунктирными линиями показаны координатные линии цилиндрических координат

Координатными поверхностями являются (рис. 2.4.):

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = C_1$ - круговые цилиндры с осью Oz;
- $\varphi = arctg\dfrac{y}{x} = C_2$ - полуплоскости, ограниченные осью Oz;
- $z = C_3$ - плоскости, перпендикулярные оси Oz.

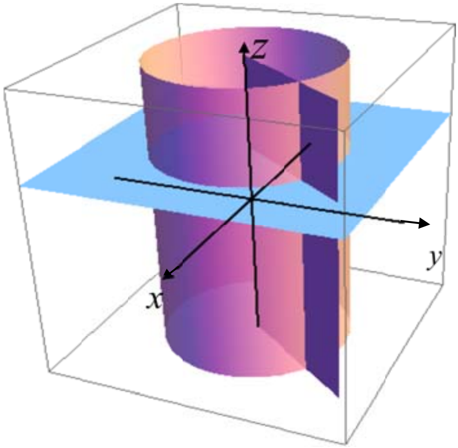

Рис. 2.4. Координатные поверхности цилиндрических координат

Координатными линиями являются (см. рис. 2.3):

- лучи, перпендикулярные оси Оz и начинающиеся на этой оси (координатные линии ρ);
- окружности с центром на Оz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси (координатные линии φ);
- прямые, параллельные оси Оz (координатные линии z).

В сферических координатах положение точки определяется координатами $q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi$ (рис. 2.5).

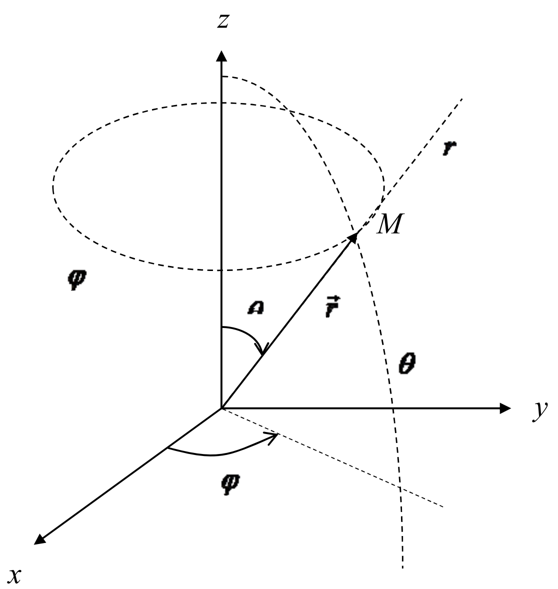

Рис. 2.5. Сферические координаты. Пунктирными линиями показаны координатные линии сферических координат

Формулы (2.2) имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi; \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{2.4}$$

Изменяя r от 0 до $+\infty$, θ от 0 до π, φ от 0 до 2π мы получим все точки пространства.

Координатными поверхностями являются (см. рис. 2.6):

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_1$ - сферы с центром O;
- $\theta = arctg\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = C_2$ - полуконусы с осью Oz;
- $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) = C_3$ - полуплоскости, ограниченные осью Oz.

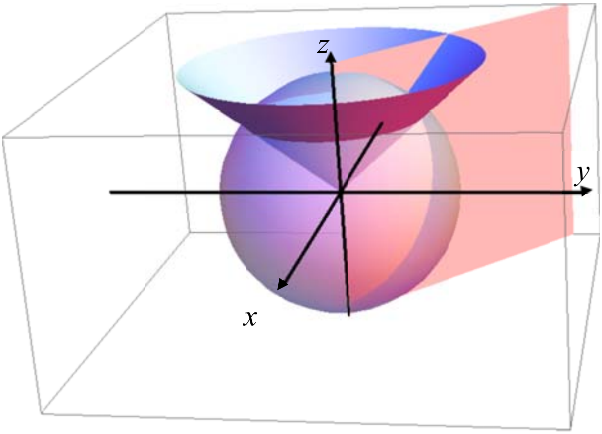

Рис. 2.6. Координатные поверхности сферических координат

Координатными линиями являются (см. рис. 2.5):

- радиусы (линии r);
- меридианы (линии θ);
- параллели (линии φ).

2.3. Рассмотрим две соседние точки $M\left(x, y, z\right)$ и $M_1\left(x + dx, y + dy, z + dz\right)$. Тогда вектор $\mathbf{MM}_1$ представляет собой приращение радиус-вектора $d\vec{r} = \left(dx, dy, dz\right)$. Вычислим дифференциал $d\vec{r}$, рассматривая x, y, z как функции q_1, q_2, q_3:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i\,;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i\,;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i\,.$$

Тогда

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i .$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$. Поскольку при дифференцировании q_2 и q_3 считаются постоянными, точки M и M_1 лежат на координатной линии q_1, а потому вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ имеет направление касательной к координатной линии q_1 (рис. 2.5), т. е.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = h_1 \vec{e}_1 ,$$

где h_1 – длина вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$, а $\vec{e}_1$ – единичный вектор, направленный по касательной к координатной линии q_1. Поскольку $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$, его длина

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} .$$

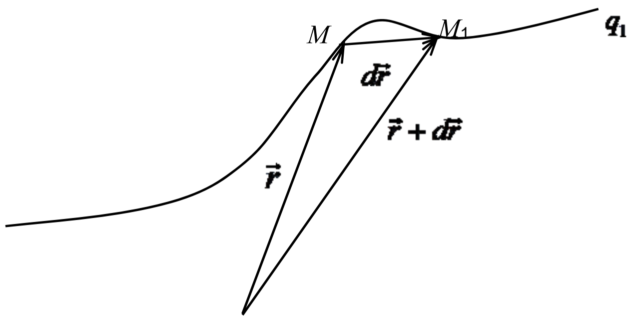

Рис. 2.7.

Рассуждения для координат q_2 и q_3 совершенно аналогичны. В результате получим следующие формулы:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i , \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \quad i = 1,2,3. \tag{2.6}$$

Величины h_1, h_2, h_3 называются *коэффициентами Ламе*.

Коренное отличие криволинейных координат от обычных прямоугольных заключается в том, что в криволинейных координатах направления векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ зависят от того, для какой точки M эти векторы определяются. Найдем углы между осями декартовой системы координат и ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ криволинейной системы координат в каждой точке:

$$e_{1x} = \left(\vec{e}_1, \vec{i} \right) = \cos\left(\vec{e}_1, \vec{i} \right) = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} \vec{i} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} \vec{j} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \vec{k}, \vec{i} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1}.$$

Аналогично

$$e_{1y} = \left(\vec{e}_1, \vec{j} \right) = \cos\left(\vec{e}_1, \vec{j} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1};$$

$$e_{1z} = \left(\vec{e}_1, \vec{k} \right) = \cos\left(\vec{e}_1, \vec{k} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Продолжая это рассмотрение для ортов $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, можно построить таблицу проекций этих векторов на оси декартовой системы координат:

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
Ox	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1}$	$\frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2}$	$\frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3}$
Oy	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1}$	$\frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2}$	$\frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3}$
Oz	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1}$	$\frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2}$	$\frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3}$

2.3. Составим скалярное произведение

$$\left(d\vec{r}, d\vec{r} \right) = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dl^2.$$

Его геометрический смысл – квадрат дифференциала длины дуги MM_1

$$dl^2 = \left(d\vec{r}, d\vec{r} \right) = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i, \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} dq_k \right).$$

Дифференциалы координат dq_i и dq_k являются скалярными величинами и могут быть вынесены из скалярного произведения

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i},\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right)dq_i dq_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik}\, dq_i dq_k;$$

$$g_{ik} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i},\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right). \tag{2.7}$$

Через g_{ik} обозначены компоненты *фундаментального метрического тензора*. Из определения (2.7) следует, что $g_{ik} = g_{ki}$. Это означает, что фундаментальный метрический тензор обладает свойством симметрии, поэтому из его 9 компонент только 6 являются независимыми. Если $i = k$, т. е. номер строки совпадает с номером столбца и элемент $g_{i,k}$ располагается на главной диагонали, определение (2.7) совпадает с (2.6). Диагональные элементы фундаментального метрического тензора представляют собой *квадраты коэффициентов Ламе*.

Если $i \neq k$,

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right|\cos\left(\vec{e}_i,\vec{e}_k\right)$$

в соответствии с определением скалярного произведения. Например,

$$g_{12} = h_1 h_2 \cos\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right).$$

Если $\vec{e}_1$ ортогонален $\vec{e}_2$, то $g_{12} = 0$ в данной точке.

Если тензор g_{ik} в любой точке *M* диагонален, система координат называется *ортогональной*. Из равенства $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$ следует, что $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right) = \left(\vec{e}_1,\vec{e}_3\right) = \left(\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) = 0$.

2.5.Квадраты коэффициентов Ламе равны

$$h_i^2 = g_{ii} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i},\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2, \quad i = 1,2,3.$$

Квадрат элемента длины дуги

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik} dq_i dq_k = g_{11}dq_1^2 + g_{22}dq_2^2 + g_{33}dq_3^2 +$$

$$+2g_{12}dq_1 dq_2 + 2g_{13}dq_1 dq_3 + 2g_{23}dq_2 dq_3.$$

Если система координат ортогональна, то

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 .$$

Для *ортогональных координат*

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3 .$$

Величины $h_1 dq_1$, $h_2 dq_2$, $h_3 dq_3$ представляют собой ребра бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда. Площади граней параллелепипеда равны

$$dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3;$$
$$dS_2 = h_3 h_1 dq_3 dq_1;$$
$$dS_3 = h_1 h_2 dq_1 dq_2,$$

а его объем

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 .$$

2.6. В соответствии с определением фундаментальный метрический тензор $g_{ik} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)$. В цилиндрических координатах $\vec{r} = \left(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z \right)$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \left(\cos\varphi, \sin\varphi, 0 \right); \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \left(-\rho \sin\varphi, \rho \cos\varphi, 0 \right); \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \left(0, 0, 1 \right).$$

Компоненты фундаментального метрического тензора:

$$g_{\rho\rho} = h_{\rho\rho}^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1;$$
$$g_{\varphi\varphi} = h_{\varphi\varphi}^2 = \rho^2 \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) = \rho^2;$$
$$g_{zz} = 1;$$
$$g_{\rho\varphi} = -\rho \cos\varphi \sin\varphi + \rho \cos\varphi \sin\varphi = 0; \quad g_{\rho z} = 0; \quad g_{\varphi z} = 0.$$

Таким образом, фундаментальный метрический тензор для цилиндрических координат является диагональным:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Цилиндрические координаты являются ортогональными координатами. *Орты цилиндрической системы координат*:

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0);$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0);$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Квадрат элемента длины дуги в цилиндрических координатах:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Элемент объема в цилиндрических координатах:

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

2.7. В *сферических координатах* $\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta);$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta);$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0);$$

Компоненты фундаментального метрического тензора:

$$g_{rr} = h_{rr}^2 = 1;$$

$$g_{\theta\theta} = h_{\theta\theta}^2 = r^2;$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta;$$

$$g_{r\theta} = g_{\theta\varphi} = g_{r\varphi} = 0.$$

Таким образом, фундаментальный метрический тензор для сферических координат является диагональным:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Сферические координаты являются ортогональными координатами. *Орты сферической системы координат*:

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right);$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \left(\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta\right);$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \left(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\right).$$

Квадрат *элемента длины дуги в сферических координатах*:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Элемент объема в сферических координатах:

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Все перечисленные ниже системы координат в заданиях 2.8 и 2.9 являются ортогональными.

2.9.1. *Полярные координаты*: $x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$

Координатные линии $u = const$ – окружности с центром в начале координат:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = e^u = const;$$

Координатные линии $v = const$ – лучи, исходящие из начала координат:

$$y = tgv \cdot x, \quad v = const.$$

Фундаментальный метрический тензор и коэффициенты Ламе:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix}; \quad h_u = h_v = e^u;$$

Квадрат элемента длины дуги: $\qquad dl^2 = e^{2u}\left(du^2 + dv^2\right).$

2.8.2. *Полярные координаты*: $u = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho; \; v = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\varphi;$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{u^2}{1 - v^2} \end{pmatrix}; \quad h_u = 1; \quad h_v = \frac{u}{\sqrt{1 - v^2}};$$

$$dl^2 = du^2 + \frac{u^2}{1 - v^2} dv^2.$$

2.8.3. *Эллиптические координаты*.

Координатные линии $u = const$ – эллипсы $\dfrac{x^2}{u^2} + \dfrac{y^2}{u^2 - 1} = 1; \quad u^2 \geq 1;$ координатные линии $v = const$ – гиперболы $\dfrac{x^2}{v^2} - \dfrac{y^2}{1 - v^2} = 1; \quad v^2 \leq 1$ с фокусами вточках ± 1 на оси Оx.

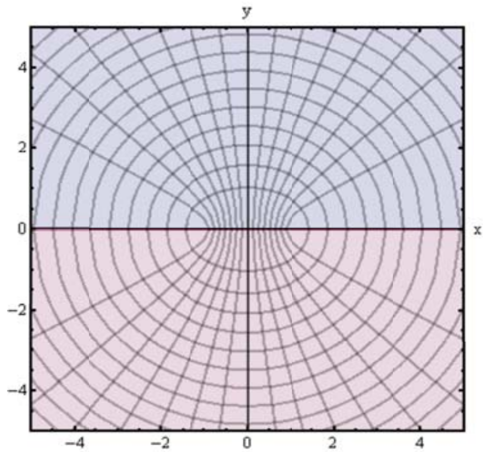

Рис. 2.8. Координатные линии эллиптических координат

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \dfrac{u^2 - v^2}{u^2 - 1} & 0 \\ 0 & \dfrac{u^2 - v^2}{1 - v^2} \end{pmatrix}; \quad h_u = \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}}; \quad h_v = \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}};$$

$$dl^2 = \left(u^2 - v^2\right)\left(\frac{du^2}{u^2 - 1} + \frac{dv^2}{1 - v^2}\right).$$

2.8.4. *Эллиптические координаты*: $x = \pm\sqrt{\left(1 + q_1\right)\left(1 + q_2\right)}; \quad y = \pm\sqrt{-q_1 q_2}$.

Координатные линии $q_1 = const$ – эллипсы $\dfrac{x^2}{1 + q_1} + \dfrac{y^2}{q_1} = 1; \quad 0 < q_1 < \infty;$

координатные линии $q_2 = const$ – гиперболы $\dfrac{x^2}{1 - |q_2|} - \dfrac{y^2}{|q_2|} = 1; \quad -1 < q_2 < 0$ с фокусами в точках ± 1 на оси Оx.

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}\dfrac{q_1-q_2}{4q_1(1+q_1)} & 0\\ 0 & \dfrac{q_2-q_1}{4q_2(1+q_2)}\end{pmatrix};\quad h_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_1-q_2}{q_1(1+q_1)}};\quad h_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_2-q_1}{q_2(1+q_2)}};$$

$$dl^2=\left(\frac{q_1-q_2}{4}\right)\left(\frac{dq_1^2}{q_1(1+q_1)}-\frac{dq_2^2}{q_2(1+q_2)}\right).$$

2.8.5. *Эллиптические координаты*.

Координатные линии $v=const$ – эллипсы $\dfrac{x^2}{ch^2v}+\dfrac{y^2}{sh^2v}=1$; координатные линии $u=const$ – гиперболы: $\dfrac{x^2}{\sin^2 u}-\dfrac{y^2}{\cos^2 u}=1$ с фокусами в точках ± 1 на оси Оx.

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}ch^2v-\sin^2 u & 0\\ 0 & ch^2v-\sin^2 u\end{pmatrix};\quad h_u=h_v=\sqrt{ch^2v-\sin^2 u};$$

$$dl^2=\left(ch^2v-\sin^2 u\right)\left(du^2+dv^2\right).$$

2.8.6. *Параболические координаты*.

Координатные линии $u=const$ - параболы $y=\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{x^2}{u}\right)$; координатные линии $v=const$ – параболы $y=\dfrac{1}{2}\left(-v+\dfrac{x^2}{v}\right)$.

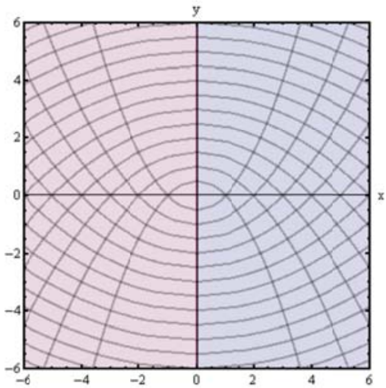

Рис. 2.9 Координатные линии параболических координат

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \dfrac{u+v}{4u} & 0 \\ 0 & \dfrac{u+v}{4v} \end{pmatrix}; \quad h_u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}}; \quad h_v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{v}};$$

$$dl^2 = \left(\frac{u+v}{4}\right)\left(\frac{du^2}{u} + \frac{dv^2}{v}\right).$$

2.8.7. *Параболические координаты*: $x = \frac{1}{2}\left(q_1^2 - q_2^2\right), \quad y = q_1 q_2;$

Координатные линии $q_1 = const$ – параболы $y = \frac{1}{2}\left(q_1^2 - \frac{x^2}{q_1^2}\right);$

координатные линии $q_2 = const$ – параболы $y = \frac{1}{2}\left(-q_2^2 + \frac{x^2}{q_2^2}\right).$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 & 0 \\ 0 & q_1^2 + q_2^2 \end{pmatrix}; \quad h_1 = h_2 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2};$$

$$dl^2 = \left(q_1^2 + q_2^2\right)\left(dq_1^2 + dq_2^2\right).$$

2.9.1. *Цилиндрические координаты*: $x = e^u \cos v; \quad y = e^u \sin v; \quad z = w;$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^{2u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad dl^2 = e^{2u}\left(du^2 + dv^2\right) + dw^2.$$

2.9.2. *Цилиндрические координаты*: $u = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, v = \cos\varphi, w = z;$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{u^2}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad dl^2 = du^2 + \frac{u^2}{1-v^2}dv^2 + dw^2.$$

2.9.3. *Сферические координаты*:

$x = e^u \sin\theta\cos\varphi; \quad y = e^u \sin\theta\sin\varphi; \quad z = e^u \cos\theta;$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^{2u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2u} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2u}\sin^2\theta \end{pmatrix}; \qquad dl^2 = e^{2u}\left(du^2 + dv^2 + \sin^2 v d\varphi^2\right).$$

2.9.4. *Сферические координаты*: $u = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $v = \cos\theta$; $w = \cos\varphi$;

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2/\left(1-v^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & u^2\left(1-v^2\right)/\left(1-w^2\right) \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = du^2 + \frac{u^2}{1-v^2}dv^2 + \frac{u^2\left(1-v^2\right)}{1-w^2}dw^2.$$

2.9.5. *Цилиндрические эллиптические координаты*:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \cos^2 u + sh^2 v & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 u + sh^2 v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = \left(\cos^2 u + sh^2 v\right)\left(du^2 + dv^2\right) + dw^2.$$

Координатные поверхности $u = const$ – гиперболические цилиндры $\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$; координатные поверхности $v = const$ – эллиптические цилиндры $\frac{x^2}{ch^2 v} + \frac{y^2}{sh^2 v} = 1$; координатные поверхности $w = const$ – плоскости $z = w$ (рис. 2.9).

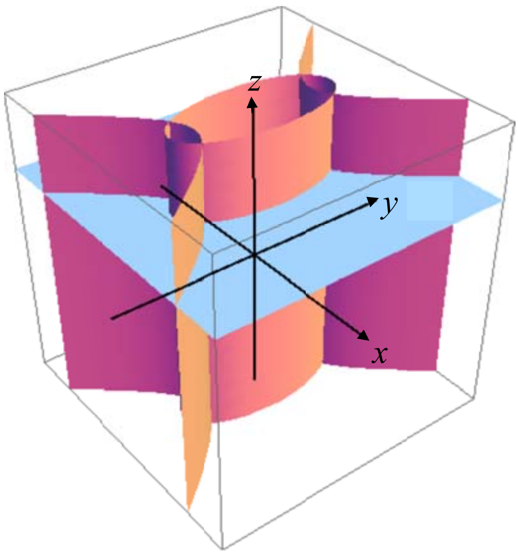

Рис. 2.10. Координатные поверхности цилиндрических эллиптических координат

Координатные линии u, v, w – эллипсы, гиперболы и прямые соответственно.

2.9.6. *Цилиндрические параболические координаты*:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2 + q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad dl^2 = \left(q_1^2 + q_2^2\right)\left(dq_1^2 + dq_2^2\right) + dq_3^2.$$

Координатные поверхности $q_1 = const$ и $q_2 = const$ - параболические цилиндры $x = \dfrac{1}{2}\left(q_1^2 - \dfrac{y^2}{q_1^2}\right)$; $x = \dfrac{1}{2}\left(-q_2^2 + \dfrac{y^2}{q_1^2}\right)$; координатные поверхности $q_3 = const$ – плоскости $z = q_3$ (рис. 2.10).

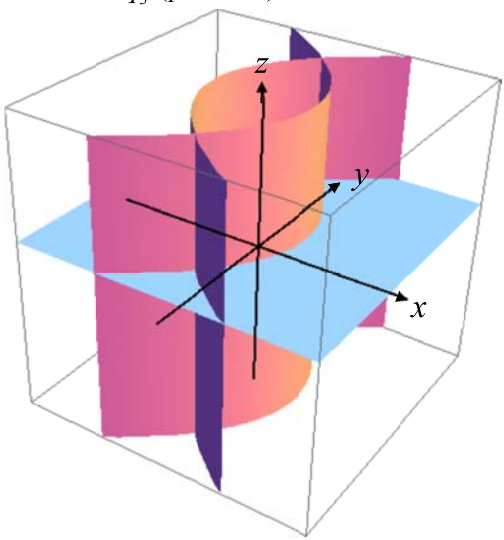

Рис. 2.11. Координатные поверхности цилиндрических параболических координат

Координатные линии u, v, w – параболы, параболы и прямые соответственно.

2.9.7. *Параболические координаты вращения*:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} (\xi + \eta)/4\xi & 0 & 0 \\ 0 & (\xi + \eta)/4\xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi\eta \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = \left(\frac{\xi + \eta}{4}\right)\left(\frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta}\right) + \xi\eta d\varphi^2.$$

Координатные поверхности $\xi = const$ – параболоиды вращения

$$z = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2 + y^2}{\xi} + \xi \right);$$

координатные поверхности $\eta = const$ – параболоиды вращения

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{\eta} - \eta \right);$$

координатные поверхности $\varphi = const$ – полуплоскости $y = tg\varphi \cdot x$ (рис. 2.10). Координатные линии ξ, η, φ – параболы, параболы и окружности соответственно.

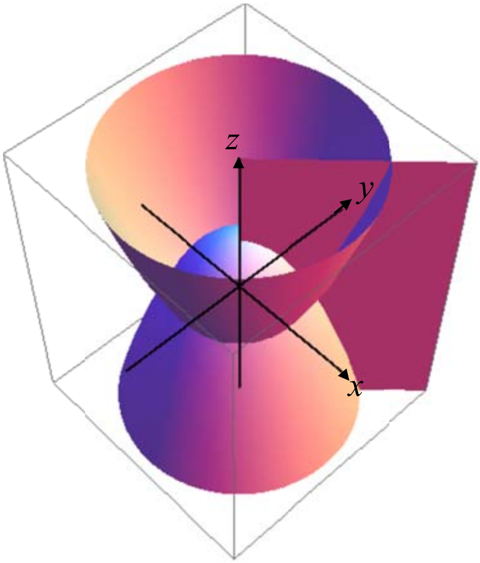

Рис. 2.12. Координатные поверхности параболических координат вращения

2.9.8. *Параболические координаты вращения*:

$$x = uv\cos w; \quad y = uv\sin w; \quad z = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right).$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 v^2 \end{pmatrix}; \qquad dl^2 = \left(u^2 + v^2\right)\left(du^2 + dv^2\right) + u^2 v^2 d\varphi^2 .$$

Координатные поверхности $u = const$ – параболоиды вращения

$$z = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2+y^2}{u^2}+u^2\right);$$

координатные поверхности $v = const$ – параболоиды вращения

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{v^2}-v^2\right);$$

координатные поверхности $w = const$ – полуплоскости $y = tgw \cdot x$ (рис. 2.10). Координатные линии u, v, w – параболы, параболы и окружности соответственно.

2.9.9. *Параболические координаты вращения*:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_1^2+q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2+q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{q_1^2 q_2^2}{1-q_3^2} \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = \left(q_1^2+q_2^2\right)\left(dq_1^2+dq_2^2\right)+\frac{q_1^2 q_2^2}{1-q_3^2}dq_3^2.$$

Координатные поверхности $q_1 = const$ – параболоиды вращения

$$z = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2+y^2}{q_1^2}+q_1^2\right);$$

координатные поверхности $q_2 = const$ – параболоиды вращения

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{q_2^2}-q_2^2\right);$$

координатные поверхности $q_3 = const$ – плоскости

$$y = \left(\frac{\sqrt{1-q_3^2}}{q_3}\right)x$$

(рис. 2.10). Координатные линии q_1, q_2, q_3 – параболы, параболы и окружности соответственно.

2.9.10. *Тороидальные координаты*. Формулы

$$\begin{cases} x = (1+\rho\cos\varphi)\cos\psi; \\ y = (1+\rho\cos\varphi)\sin\psi; \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

задают уравнение тора с расстоянием от центра образующей окружности до оси вращения R=1 и с радиусом образующей окружности ρ в параметрическом виде. Введенные таким образом координаты называют простыми тороидальными координатами.

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\rho\cos\varphi)^2 \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (1+\rho\cos\varphi)^2\, d\psi^2.$$

Координатные поверхности $\rho = const$ – торы. Уравнение тора в неявном виде можно представить как

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2 = \rho^2 \text{ или } \left(x^2+y^2+z^2+1-\rho^2\right)^2 - 4\left(x^2+y^2\right) = 0.$$

Координатные поверхности $\varphi = const$ – круговые конусы

$$x^2 + y^2 - \frac{(z+tg\varphi)^2}{tg^2\varphi} = 0;$$

координатные поверхности $\psi = const$ – полуплоскости $y = tg\psi \cdot x$ (рис. 2.13).

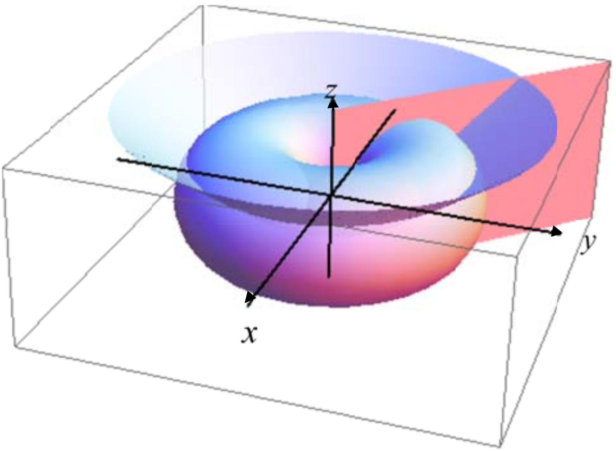

Рис. 2.13. Координатные поверхности простых тороидальных координат № 2.9.10

2.9.11. *Тороидальные координаты.*

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 \Big/ \left(ch\alpha - \cos\beta\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 \Big/ \left(ch\alpha - \cos\beta\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 sh^2\alpha \Big/ \left(ch\alpha - \cos\beta\right)^2 \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = \frac{c^2}{\left(ch\alpha - \cos\beta\right)^2}\left(d\alpha^2 + d\beta^2 + sh^2\alpha\, d\psi^2\right).$$

Координатные поверхности $\alpha = const$ – торы

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c \cdot cth\alpha\right)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{sh\alpha}\right)^2$$

координатные поверхности $\beta = const$ – сферы

$$x^2 + y^2 + \left(z - c \cdot ctg\beta\right)^2 = \left(\frac{c}{\sin\beta}\right)^2;$$

координатные поверхности $\psi = const$ – полуплоскости $y = tg\psi \cdot x$ (рис. 2.12).

Параметр c называют *масштабным множителем*.

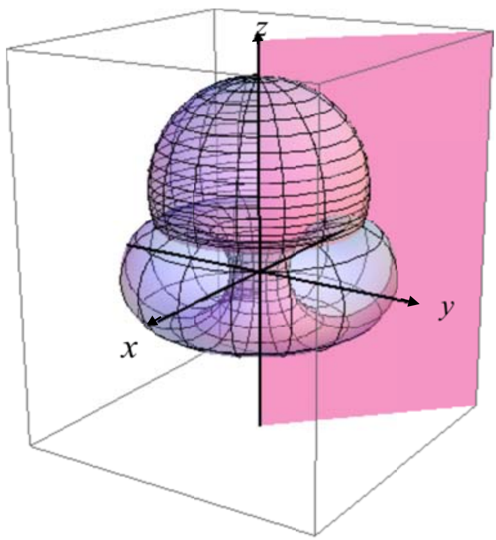

Рис. 2.14. Координатные поверхности тороидальных координат № 2.9.11. Масштабный множитель $c = 1$.

2.10. Проекция вектора $\vec{A}$ на ось криволинейных ортогональных координат по определению представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{A}$ и орта $\vec{e}_i$, направленного по касательной к координатной линии q_i,

$$A_i = \left(\vec{A}, \vec{e}_i\right).$$

Вектор $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ направлен по касательной к координатной линии q_i и имеет длину

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}\ .$$

Единичные векторы $\vec{e}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ имеют проекции

$$\vec{e}_i = \left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

на оси декартовой системы координат. Получаем

$$A_i = \left(\vec{A}, \vec{e}_i\right) = \frac{1}{h_i}\left(A_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + A_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + A_z \frac{\partial z}{\partial q_i}\right); \quad i = 1, 2, 3.$$

2.11. Проекции вектора $\vec{A}$ на оси цилиндрической системы координат

$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi; \ \ A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi; \ \ A_z = A_z.$$

2.12. Проекции вектора $\vec{A}$ на оси сферической системы координат

$$A_r = A_x \sin\theta\cos\varphi + A_y \sin\theta\sin\varphi + A_z \cos\theta;$$

$$A_\theta = A_x \cos\theta\cos\varphi + A_y \cos\theta\sin\varphi - A_z \sin\theta;$$

$$A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi.$$

2.13. В цилиндрических координатах:

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi = \vec{e}_\varphi; \quad \dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi;$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi = -\vec{e}_\rho; \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho;$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{d\varphi} = 0; \quad \dot{\vec{e}}_z = 0.$$

Скорость

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\dot{\vec{e}}_\rho+\dot{z}\vec{e}_z+z\dot{\vec{e}}_z=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\dot{z}\vec{e}_z.$$

Ускорение

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho+\left(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi+\dot{z}\vec{e}_z;$$

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2;$$

$$a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right);$$

$$a_z=\ddot{z}.$$

2.14. В сферических координатах

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}=\vec{i}\cos\theta\cos\varphi+\vec{j}\cos\theta\sin\varphi-\vec{k}\sin\theta=\vec{e}_\theta;$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}=-\vec{i}\sin\theta\sin\varphi+\vec{j}\sin\theta\cos\varphi=\sin\theta\,\vec{e}_\varphi;$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}=-\vec{i}\sin\theta\cos\varphi-\vec{j}\sin\theta\sin\varphi-\vec{k}\cos\theta=-\vec{e}_r;$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi}=-\vec{i}\cos\theta\sin\varphi+\vec{j}\cos\theta\cos\varphi=\cos\theta\,\vec{e}_\varphi;$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\theta}=0;$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}=-\left(\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi\right)=-\left(\sin\theta\,\vec{e}_r+\cos\theta\,\vec{e}_\theta\right);$$

$$\dot{\vec{e}}_r=\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi}=\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi;$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta=-\dot{\theta}\,\vec{e}_r+\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi;$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi=-\left(\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_r+\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\theta\right).$$

Скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta + r\sin\theta\vec{e}_\varphi.$$

Ускорение

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi;$$

Проекции ускорения на орты сферических координат

$$a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2\right);$$
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2;$$
$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}\right).$$

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

1. При составлении уравнений движения в лагранжевой формулировке механики

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad i=1,2,...,n$$

необходимо четко представлять себе разницу в понятиях частной $\frac{\partial f}{\partial t}$ и полной $\frac{df}{dt}$ производных от функции $f=f\left(q,\dot{q},t\right)$, зависящей от координат, скоростей и времени.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $f=\left(1+tx\right)\dot{x}^2$. Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial t}=x\dot{x}^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}=t\dot{x}^2; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=2\left(1+tx\right)\dot{x}.$$

Полная производная

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\ddot{x}=x\dot{x}^2+t\dot{x}^3+2\left(1+tx\right)\dot{x}\ddot{x}.$$

2. Выбор наиболее удобной координатной системы зачастую значительно упрощает вид функции Лагранжа и облегчает решение задачи. Этот выбор диктуется двумя факторами: симметрией связей, наложенных на материальные точки, и симметрией внешних полей. Так, при движении точки по поверхности цилиндра естественно рассматривать движение в цилиндрических координатах. Частица, движущаяся по поверхности конуса или сферы, наиболее естественно описывается в сферических координатах и т. д.

Чтобы найти функцию Лагранжа, необходимо:

а) ввести координаты $q_1,q_2,...,q_n$, определив через них декартовы координаты $x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha$ всех N частиц $\left(\alpha=1,2,...,N\right)$;

б) выразить кинетическую энергию

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{m_\alpha}{2}\left(x_\alpha^2+y_\alpha^2+z_\alpha^2\right)$$

в виде квадратичной формы относительно обобщенных скоростей

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\left(q_1,q_2,...,q_n\right)\dot{q}_i\dot{q}_k;$$

в) составить лагранжиан $L=T-U$.

Для примера рассмотрим построение функции Лагранжа для частицы массы m, которая движется по поверхности вращения (рис. 3.1), заданной в виде $\rho = \rho(z)$, в поле тяжести Земли.

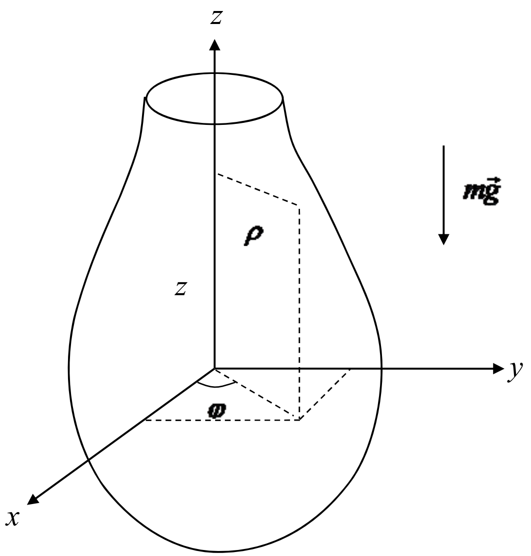

Рис. 3.1.

В качестве независимых переменных выберем z и φ цилиндрической системы координат. Кинетическая энергия с учетом связи $\rho = \rho(z)$ имеет вид

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]\dot{z}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right\}.$$

Функция Лагранжа запишется как

$$L = \frac{m}{2}\left\{\left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]\dot{z}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right\} - mgz.$$

3. Две функции Лагранжа, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от произвольной функции координат и времени $\Phi = \Phi(q,t)$, приводят к совпадающим уравнениям движения. На этом основана возможность упрощения лагранжиана, содержащего такую функцию.

<u>ПРИМЕР</u>: Упростить функцию Лагранжа $L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}+q\right)^2$. Выделим в этом выражении полную производную

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+q\dot{q}+\frac{1}{2}q^2=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}q^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2}\right);\quad \Phi=\frac{q^2}{2}.$$

При составлении уравнения движения можно использовать новую функцию Лагранжа $\tilde{L}=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}q^2$, опустив слагаемое $q\dot{q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2}\right)$. Прямым вычислением можно убедиться, что L и $\tilde{L}$ приводят к одним и тем же уравнениям движения.

1. *Переменная* q_i *называется циклической*, если лагранжиан <u>не содержит</u> этой переменной (но содержит $\dot{q}_i$). Уравнение Лагранжа для циклической переменной имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0.$$

Отсюда следует, что величина $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, называемая обобщенным импульсом, постоянна. Таким образом, если координата q_i не входит явно в функцию Лагранжа - имеет место закон сохранения соответствующего ей обобщенного импульса. Независимость функции Лагранжа от времени также приводит к особому закону – *закону сохранения энергии*

$$E=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\,.$$

<u>ПРИМЕР</u>: Найти законы сохранения в системе, описываемой лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}x\dot{x}^2+\dot{y}^2-x^2.$$

В данном случае координата y является циклической, поэтому соответствующий обобщенный импульс

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=2\dot{y}=const$$

сохраняется. Время не входит явно в функцию Лагранжа, поэтому сохраняется энергия

$$L=\frac{1}{2}x\dot{x}^2+\dot{y}^2+x^2.$$

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 3

3.1. Две точечные массы m_1 и m_2, связанные пружиной жесткостью k, могут двигаться без трения по сторонам прямого угла Оxy, сторона которого Оy вертикальна. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0. Составить уравнение Лагранжа.

3.2. Для плоского движения материальной точки в силовом поле с потенциалом $U(x, y)$ найти лагранжиан в координатах q_1 и q_2, связанных с декартовыми координатами равенствами $x = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$, $y = \sqrt{q_1 q_2}$.

3.3. Длина нити математического маятника изменяется по известному закону $l = l(t)$. Записать лагранжиан и уравнение движения маятника.

3.4. Тяжелая точка массы m может двигаться без трения по гладкому эллиптическому параболоиду $z = ax^2 + by^2$ $(a > 0, b > 0,$ ось Оz направлена вертикально вверх). Составить уравнения Лагранжа.

3.5. Функция Лагранжа свободной релятивистской частицы (т. е. частицы, скорость которой не является малой по сравнению со скоростью света c) с массой m имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}.$$

Составить уравнения движения частицы и найти их решения.

3.6. Найти закон движения точки, определяемый лагранжианом

$$L = t\sqrt{1 + \dot{x}^2}.$$

3.7. Частица массы m может двигаться без трения в вертикальной плоскости Оxz по кривой $z = f(x)$. Составить уравнение Лагранжа и найти его первый интеграл.

3.8. Две равные точечные массы m, связанные пружиной жесткости k, могут двигаться без трения по неподвижному кольцу радиуса R, лежащему в горизонтальной плоскости (рис. 3.2).

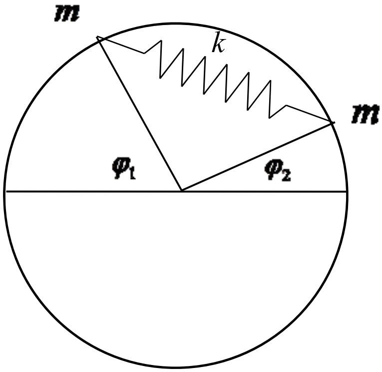

Рис. 3.2

Длина свободной пружины равна l_0. Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты $\theta_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\theta_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$, найти закон движения в квадратурах.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 3

3.1. $L = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}^2}{2} - \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - l_0\right)^2 - m_2 gy.$

3.2. $L = \frac{m}{8}(q_1+q_2)\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_1} + \frac{\dot{q}_2^2}{q_2}\right) - U\left(\frac{q_1-q_2}{2}, \sqrt{q_1q_2}\right)$. Это параболические координаты (см. № 2.8.6).

3.3. $L = \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\varphi}^2 + mgl(t)\cos\varphi.$ В функции Лагранжа отброшено слагаемое $\frac{m\dot{l}^2}{2}$, т. к. оно зависит только от t и может быть представлено, как полная производная по времени от некоторой функции. Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l(t)}\left[2\dot{l}(t)\dot{\varphi} + g\sin\varphi\right] = 0.$$

3.4. $$\begin{cases}\left(1+4a^2x^2\right)\ddot{x}+4abxy\ddot{y}+4a^2x\dot{x}^2+4abx\dot{y}^2+2agx=0;\\ \left(1+4b^2y^2\right)\ddot{y}+4abxy\ddot{x}+4b^2y\dot{y}^2+4aby\dot{x}^2+2bgy=0.\end{cases}$$

3.5. При свободном движении сохраняются импульс и энергия. Для релятивистской частицы имеем

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\vec{p}_0=const;\quad E=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\vec{v}-L=E_0=const;$$

Учтем следующее соотношение между скоростью, импульсом и энергией релятивистской частицы

$$\vec{v}=\frac{c^2\vec{p}}{E}.$$

В данном случае

$$\vec{v}=\frac{c^2\vec{p}_0}{E_0}=\vec{v}_0=const;\quad |\,\vec{v}_0\,|<c \text{ при } m\neq 0.$$

Закон движения

$$\vec{r}=\vec{v}_0t+\vec{r}_0.$$

3.6. $x=C_1Arch\dfrac{t}{C_1}+C_2$. Константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий $v(t_0)=v_0$, $x(t_0)=x_0$ и равняются

$$C_1=\frac{v_0t_0}{\sqrt{1+v_0^2}};\quad C_2=x_0-C_1Arch\left(\frac{t_0}{C_1}\right).$$

3.7. $$\left[1+\left(\frac{df}{dt}\right)^2\right]\ddot{x}-\frac{d^2f}{dx^2}\frac{df}{dx}\dot{x}^2+\frac{df}{dx}g=0;$$

$$E=\frac{m}{2}\left[1+\left(\frac{df}{dt}\right)^2\right]\dot{x}^2+mgf.$$

3.8. Функция Лагранжа в исходных координатах имеет вид:

$$L=\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2\right)-\frac{k}{2}\left(2R\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}-l_0\right)^2.$$

Функция Лагранжа в новых координатах:

$$L=mR^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)-\frac{k}{2}\left(2R\cos\theta_1-l_0\right)^2. \tag{3.1}$$

Таким образом, координата θ_2 является циклической:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 2mR^2\dot{\theta}_2 = C_1. \tag{3.2}$$

$$\theta_2 = \left(\frac{C_1}{2mR^2}\right)t + C_2. \tag{3.3}$$

Время явно не входит в функцию Лагранжа (3.1), поэтому имеет место закон сохранения энергии

$$mR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \frac{k}{2}\left(2R\cos\theta_1 - l_0\right)^2 = E. \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.4) находим

$$t = R\sqrt{m}\int \frac{d\theta_1}{\sqrt{E - C_1 \big/ 4mR^2 - k\left(2R\cos\theta_1 - l_0\right)^2}} + C_3. \tag{3.5}$$

Интеграл (3.5) выражается через эллиптический интеграл первого рода. Формулы (3.3) и (3.5) дают закон движения в квадратурах.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

4.1. Проинтегрировать уравнения движения точки, если дана ее функция Лагранжа и начальные условия: в момент $t=0$ скорость и координата $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$, $x(0)=x_0$.

4.1.1. $L=\dot{x}^2-\dfrac{1}{x^2};\quad \dot{x}_0=0,\ x_0=1.$

4.1.2. $L=\dot{x}^2+tg^2x;\quad \dot{x}_0=2,\ x_0=0.$

4.1.3. $L=\dot{x}^2+e^x;\quad \dot{x}_0=2,\ x_0=0.$

4.1.4. $L=\dot{x}^2-\dfrac{1}{x};\quad \dot{x}_0=0,\ x_0=1.$

4.1.5. $L=\dfrac{\dot{x}^2}{x}-x;\quad \dot{x}_0=1,\ x_0=1.$

4.1.6. $L=\dfrac{\dot{x}^2}{x}+x+\dfrac{1}{x};\quad E=-3,\ x_0=0.$

4.1.7. $L=\dfrac{\dot{x}^2+x\dot{x}-1}{x};\quad \dot{x}_0=0,\ x_0=1.$

4.1.8. $L=-\sqrt{1-\dot{x}^2}+x;\quad \dot{x}_0=0,\ x_0=2.$

4.1.9. $L=\dfrac{\dot{x}^2-1}{x^2},\quad \dot{x}_0=0,\ x_0=1.$

4.2. Указать условия финитности движения и найти периоды колебаний в зависимости от энергии, если задана функция Лагранжа.

4.2.1. $L=\dot{x}^2-x^2.$

4.2.2. $L=\dfrac{\dot{x}^2}{x}-x-\dfrac{1}{x}.$

4.2.3. $L=\dot{x}^2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}.$

4.2.4. $L=\dot{x}^2-\left(e^x-1\right)^2.$

4.2.5. $L=\dfrac{\dot{x}^2+2x-1}{x^2}.$

4.2.6. $L=\dot{x}^2-tg^2x.$

4.2.7. $L=\dot{x}^2-th^2x.$

4.2.8. $L=\dot{x}^2+2e^{-x}-e^{-2x}.$

4.2.9. $L=\dot{x}^2+\dfrac{1}{ch^2x}.$

4.3. Проинтегрировать уравнения движения, если задана функция Лагранжа.

4.3.1. $L = \dfrac{t^2 \dot{x}^2}{2}; \quad \dot{x}(1) = 1,\, x(1) = 0.$

4.3.2. $L = \dfrac{\dot{x}^2}{2} + t^2 \dot{x}; \quad \dot{x}(0) = 1,\, x(0) = 0.$

4.3.3. $L = \sqrt{\dot{x}^2 + t}; \quad \dot{x}(3) = 1,\, x(3) = 0.$

4.3.4. $L = \sqrt{\dot{x}^2 + t^2}; \quad \dot{x}(3) = 1,\, x(3) = \dfrac{3}{2}.$

4.4. Найти законы сохранения и проинтегрировать уравнения движения, если:

4.4.1. $L = \dfrac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 + x.$

4.4.2. $L = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x}.$

4.4.3. $L = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x}.$

4.4.4. $L = \dfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + 2x\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2\right).$

4.4.5. $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x.$

4.4.6. $L = \dfrac{\dot{x}^2 + 2x\dot{y} + \dot{y}^2}{2x}.$

4.4.7. $L = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\dot{x}^2}{1 + y^2} + \dot{y}^2\right) - \dfrac{y^2}{2}.$

4.5. Найти место остановки системы, описываемой функцией Лагранжа L, при данных начальных условиях:

4.5.1. $L = \dfrac{\dot{x}^2}{2} - \sin x; \quad \dot{x}(0) = 1,\, x(0) = 0.$

4.5.2. $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + x; \quad \dot{x}(0) = \dfrac{1}{2},\, x(0) = 1.$

4.5.3. $L = \dfrac{\dot{x}^2 - x^2 + 1}{x}; \quad \dot{x}(0) = 1,\, x(0) = 1.$

4.6. Две частицы с одинаковыми массами $m_1 = m_2 = m$ взаимодействуют по известному закону $U = U(r)$. Найти наибольшее и наименьшее расстояния между частицами в зависимости от энергии и момента в системе центра инерции, если:

4.6.1. $U = \dfrac{a}{r}$;

4.6.2. $U = \dfrac{a}{r^2}$;

4.6.3. $U = \dfrac{1}{r^4}$;

4.6.4. $U = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r}\right), m = 2.$

4.6.5. $U = \dfrac{1}{2}\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right), m = 2.$

4.7. Проинтегрировать уравнения движения для двух одинаковых частицы с массой $m = 2$, взаимодействующих по закону

4.7.1. $U = \dfrac{1}{2r^2}.$

4.7.2. $U = -\dfrac{1}{2r^2}.$

4.7.3. $U = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r}\right).$

4.7.4. $U = \dfrac{1}{2}\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right).$

4.8. Определить углы отклонения для столкновения двух взаимодействующих частиц с одинаковыми массами, одна из которых первоначально покоилась, если:

4.8.1. $U = \dfrac{1}{2r^2}; \quad (m = 2).$

4.8.2. $U = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r}\right)$, ($m = 2$, полная энергия положительна).

4.9. Определить эффективное сечение рассеяния для столкновения двух одинаковых частиц с одинаковыми массами $m = 2$, взаимодействующих по закону $U = \dfrac{1}{2r^2}$, если одна из частиц первоначально покоилась.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ 4

4.1. Из закона сохранения энергии $E(x, \dot{x}) = E$ находим $\dot{x} = f(x, E)$.

Отсюда $t = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x, E)} + C$ Аддитивная C постоянная и значение энергии E находятся из начальных условий.

4.1.1. В данном случае энергия равна $E = \dot{x}^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Из начальных условий, подставив x_0 и $\dot{x}_0$ в E, имеем $E = 1$. Отсюда следует, что $\dot{x} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$;

$$t = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + C = \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, нужно положить произвольную постоянную $C = 0$. Таким образом,

$t = \sqrt{x^2 - 1}$ и $x(t) = \sqrt{1 + t^2}$.

4.1.2. Из начальных условий $E = \dot{x}^2 - tg^2 x = 4$. Отсюда

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + tg^2 x}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right).$$

Из начальных условий имеем $C = 0$, поэтому

$$x(t) = \arcsin\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\sqrt{3}\, t \right) \right].$$

4.1.3. $E = \dot{x}^2 - e^x = 3; \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{3 + e^x}} = \frac{2}{\sqrt{3}} . \left[Arsh\left(\sqrt{3} \right) - Arsh\left(\sqrt{3} e^{-x/2} \right) \right].$

4.1.4. $E = \dot{x}^2 + \frac{1}{x} = 1; \quad t = \sqrt{x(x-1)} + \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \right).$

4.1.5. $E = \frac{\dot{x}^2}{x} + x = 2; \quad x(t) = 1 + \sin t.$

4.1.6. $E = \frac{\dot{x}^2}{x} - x - \frac{1}{x} = -3; \quad t = Arch\left(\frac{2x-3}{\sqrt{5}} \right) - Arch\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right);$

4.1.7. $E = \frac{\dot{x}^2 + 1}{x} = 1; \quad x(t) = ch\, t.$

4.1.8. $E = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} - x = -1; \quad x(t) = 1 + \sqrt{1 + t^2}.$

4.1.9. $E = \frac{\dot{x}^2 + 1}{x^2} = 1, x(t) = ch\, t.$

4.2. При движении всегда должно быть $E > U$, т. е. кинетическая энергия $T > 0$. Точки, в которых $E = U$, определяют границы движения. Если таких точек нет или есть одна, то движение инфинитно, т. е. движущаяся материальная точка может быть и на бесконечности. Если таких точек пересечения E с U несколько (например, две точки x_1 и x_2), то движение финитно и период, за который точка пройдет от x_1 до x_2 и обратно, будет равен

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}(x, E)}.$$

4.2.1. Движение финитно при всех $E>0$, т. к. есть две точки, в которых скорость $\dot{x}$ обращается в 0, а именно, определяющиеся из условия $x^2=E$, т. е. $x_{1,2}=\pm\sqrt{E}$. Период:

$$T=2\int\limits_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}}\frac{dx}{\sqrt{E-x^2}}=2\pi.$$

4.2.2. Движение финитно при всех $E>2$. Период: $T=2\pi$.

4.2.3. Движение финитно при $-1<E<0$ и инфинитно при $E>0$. Обозначая в первом случае полную энергию через $-|E|$ имеем

$$x_{1,2}=-\frac{1}{|E|}\left(1\mp\sqrt{1+|E|}\right);\ \text{период}\ T=\frac{2\pi}{|E|^{3/2}}.$$

4.2.4. Границы движения $x_{1,2}=\ln\left(1\mp\sqrt{E}\right)$ при $E<1$. Период: $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-E}}$.

4.2.5. Движение финитно при $-1<E<0$ и инфинитно при $E>0$. Период:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{|E|}}.$$

4.2.6. $E>0$, период: $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1+E}}$.

4.2.7. $0<E<1$, $thx_{1,2}=\mp\sqrt{E}$, период:

$$T=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-th^2x}}=\frac{2}{\sqrt{1-E}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{1-E}{E}}\,shx\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{1-E}}.$$

4.2.8. $-1<E<0,$ период: $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{|E|}}$.

4.2.9. $-1<E<0,$ период: $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{|E|}}$.

4.3.1. Поскольку x – циклическая координата, то

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{d}{dt}p_x=0,$$

то есть первый интеграл движения

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=p_x=const.$$

Принимая во внимание начальные условия $\dot{x}(1)=1,\ x(1)=0$, имеем

$$p_x = t^2\dot{x} = 1.$$

Откуда следует, что $dx = \dfrac{dt}{t^2};\quad x = -\dfrac{1}{t} + const.$

Так как $x(1)=0$, то $const = 1$. Имеем $x = 1 - \dfrac{1}{t}$.

4.3.2. Первый интеграл (из начальных условий):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = t^2 + \dot{x} = 1.$$

Отсюда

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3}.$$

4.3.3. Первый интеграл:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{t+\dot{x}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{t}{3}};\quad x(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2} + C.$$

Из начальных условий следует, что $C = -2$. Окончательно

$$x(t) = 2\left[\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2} - 1\right].$$

4.3.4. Функция Лагранжа системы не зависит явным образом от координаты, поэтому сохраняется обобщенный импульс: $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + t^2}}$. Подстановка начальных условий дает $p = 1/\sqrt{10}$. Тогда решая получившееся алгебраическое уравнение относительно $\dot{x}$, получаем $\dot{x} = t/3$, откуда окончательно $x(t) = \dfrac{t^2}{6}$.

Во всех случаях 4.4.1-4.4.5 имеет место закон сохранения энергии $E = \sum_i \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const$, т. к. время не входит явно в соответствующие функции Лагранжа. Напомним, что в случае, когда функция Лагранжа имеет вид $L = T(q,\dot{q}) - U(q)$, а кинетическая энергия является квадратичной функцией скоростей, то $E = T(q,\dot{q}) + U(q)$. Кроме того, среди обобщенных координат имеются циклические, и соответствующие этим координатам обобщенные импульсы сохраняются.

4.4.1. Функция Лагранжа L не содержит явно координаты y, то есть y является циклической координатой. Следовательно, имеет место *закон сохранения обобщенного импульса*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_y = 2x\dot{y} = const; \tag{4.1}$$

$$E = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 - x = const. \tag{4.2}$$

Подставив значение $\dot{x} = \dfrac{p_y}{2x}$ из (4.1) в формулу для закона сохранения энергии (4.2), получаем

$$\dot{x}^2 = Ex - x^2 - \frac{p_y^2}{4},$$

откуда

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{Ex - x^2 - \dfrac{p_y^2}{4}}} = Arch\frac{2x+E}{\sqrt{p_y^2 + E^2}} + t_0;$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{p_y^2 + E^2}\, ch(t - t_0) - E\right]. \tag{4.3}$$

Для нахождения $y(t)$ используем (4.1)

$$y = \int \frac{p_y}{2x}dt = \frac{p_y}{2}\int \frac{dx}{x\,\dot{x}} = \frac{p_y}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + Ex - p_y^2/4}} = \arccos\left(\frac{\dfrac{p_y^2}{2x} - E}{\sqrt{p_y^2 + E^2}}\right) \tag{4.4}$$

с точностью до постоянной. Зависимость $y(t)$ получим, подставив (4.3) в (4.4). Эту зависимость можно получить и непосредственным интегрированием по t:

$$\int_{y_0}^{y} dy = p_y \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{p_y^2 + E^2}\, ch(t - t_0) - E} =$$

$$= \frac{2p_y}{\sqrt{p_y^2 + E^2}} \int_0^{t - t_0} \frac{e^t dt}{\left[\left(e^t - E\big/\sqrt{p_y^2 + E^2}\right)^2 + p_y^2\big/\left(p_y^2 + E^2\right)\right]} =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{p_y^2 + E^2}\, e^t - E}{p_y}\right]\Bigg|_0^{t - t_0}.$$

После преобразований получим

$$y = y_0 + 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{p_y^2 + E^2 e^{t-t_0}} - E}{p_y}\right] - \operatorname{arctg}\left(\frac{p_y}{E}\right) =$$
$$= y_0 + 2\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{\sqrt{p_y^2 + E^2} + E}{p_y}\right) th\left(\frac{t-t_0}{2}\right)\right]. \tag{4.5}$$

4.4.2. Для рассматриваемой системы функция Лагранжа не зависит явным образом от координаты y и от времени. Поэтому сохраняется обобщенный импульс, соответствующий координате y, и энергия системы: $p_y = \frac{2\dot{y}}{x}$,

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x}.$$

Выражая из первого уравнения $\dot{y}$ и подставляя во второе, получаем $\dot{x} = \pm\sqrt{Ex - p_y^2 x^2/4}$. Знак плюс или минус перед корнем определяется из начальных условий. Интегрируя его, получаем:

$$t = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{Ex - p_y^2 x^2/4}} + t_0 = \pm\frac{2}{p_y}\arcsin\left(\frac{p_y^2}{2E}x - 1\right) + t_0,$$

откуда окончательно

$$x(t) = \frac{2E}{p_y^2}\left(1 \pm \sin\frac{p_y(t-t_0)}{2}\right). \tag{4.6}$$

Наконец, подставляя этот ответ в уравнение для импульса p_y и интегрируя его, получим и закон движения y:

$$y(t) = \frac{p_y}{2}\int x(t)dt + y_0 = \frac{E}{p_y}\left(t \pm \frac{2}{p_y}\cos\frac{p_y(t-t_0)}{2}\right) + y_0. \tag{4.7}$$

Итак, полученный ответ определяется четырьмя константами интегрирования, p_y, E, t_0, y_0. Они, а также знак в ответах, определяются из четырех начальных условий задачи. Например, если $x(0)=1, y(0)=0, \dot{x}(0)=-1, \dot{y}(0)=1$, получаем $p_y = 2, E = 1, t_0 = \pi/2, y_0 = 0$, а знак в ответах нужно выбирать “–”.

4.4.3. Координаты y и z – циклические, поэтому

$$p_y = \frac{\dot{z}}{x} = const; \quad p_z = \frac{\dot{y}}{x} = const; \tag{4.8}$$

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x}. \tag{4.9}$$

Подставив из (4.8) выражения для $\dot{y}$ и $\dot{z}$ в (4.9), получаем

$$\dot{x}^2 = Ex - p_y p_z x^2,$$

откуда

$$x(t) = \frac{E}{2p_y p_z}\left\{\sin\left[\sqrt{p_y p_z}\,(t-t_0)\right]+1\right\}.$$

Для нахождения $y(t)$ и $z(t)$ воспользуется (4.8). Имеем $\dot{y} = p_z x$ и $\dot{z} = p_y x$ соответственно. Далее

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} p_z x(t)dt = \frac{E}{2p_y}\int_{t_0}^{t}\left\{\sin\left[\sqrt{p_y p_z}\,(t-t_0)\right]+1\right\}dt;$$

$$y(t) = y_0 + \frac{E}{2p_y}\left\{t - t_0 - \frac{1}{\sqrt{p_y p_z}}\cos\left[\sqrt{p_y p_z}\,(t-t_0)\right]\right\}.$$

Аналогично

$$z(t) = z_0 + \frac{E}{2p_z}\left\{t - t_0 - \frac{1}{\sqrt{p_y p_z}}\cos\left[\sqrt{p_y p_z}\,(t-t_0)\right]\right\}.$$

4.4.4. y – циклическая координата. Таким образом, есть закон сохранения обобщенного импульса

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x\dot{x} = const. \tag{4.10}$$

Время не входит явно в функцию Лагранжа, следовательно, сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + 2x\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2\right) = const. \tag{4.11}$$

Из (4.10) следует, что $\dot{y} = p_y - x\dot{x}$. Подставив это выражение в (4.11), находим

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2E - p_y^2}}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{4.12}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2E - p_y^2}}\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2E-p_y^2}}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right). \tag{4.13}$$

Подставив (4.12) в (4.10), получаем

$$y=\int\left(p_y-\frac{x\sqrt{2E-p_y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dt=\int\left(p_y-\frac{x\sqrt{2E-p_y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{dx}{\dot{x}}=$$

$$=\frac{p_y}{\sqrt{2E-p_y^2}}\int\sqrt{1-x^2}\,dx-\int xdx;$$

$$y=\frac{p_y}{2\left(2E-p_y^2\right)}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)-\frac{x^2}{2}. \qquad (4.14)$$

Формулы (4.13) и (4.14) определяют закон движения. В (4.13) и (4.14) использованы начальные условия $x(0)=0,\ y(0)=0$.

4.4.5. y – циклическая координата. Таким образом, сохраняется

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}=p_{0y}=const. \qquad (4.15)$$

Закон сохранения энерг

$$E=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}-L=\frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}-x=const. \qquad (4.16)$$

Из уравнения Лагранжа для координаты x

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial L}{\partial x};\quad \dot{p}_x=1$$

найдем после первого интегрирования закон изменения импульса p_x:

$$p_x=t+C; \qquad (4.17)$$

Пусть в начальный момент времени $t=0\quad p_x(0)=0$, тогда $C=0$.

Выразим в (4.16) энергию через обобщенные импульсы $p_x=\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}$, $p_y=\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}$ и учтем (4.15) и (4.17). Получим:

$$E=\sqrt{1+p_x^2+p_y^2}-x=\sqrt{1+p_{0y}^2+t^2}-x,$$

откуда сразу следует закон движения для координаты x

$$x(t)=\sqrt{1+p_{0y}^2+t^2}-E. \qquad (4.18)$$

Для координаты y из формул(4.15), (4.16) и (4.18) следует

$$\dot{y} = \frac{p_{0y}}{E+x} = \frac{p_{0y}}{\sqrt{1+p_{0y}^2+t^2}}; \quad y = \int \frac{p_{0y}}{\sqrt{1+p_{0y}^2+t^2}},$$

то есть

$$y(t) = p_{0y} Arsh \frac{t}{\sqrt{1+p_{0y}^2}}. \tag{4.19}$$

В формуле (4.19) при интегрировании мы учли начальное условие $y(0)=0$.

4.4.6. Второе слагаемое в функции Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2 + 2x\dot{y} + \dot{y}^2}{2x}$$

представляет собой полную производную по времени от $y(t)$. Поэтому оно не влияет на динамику системы. Исключив его, приходим к функции Лагранжа из задачи 4.4.2 с общим множителем $1/2$. Поэтому закон движения имеет вид (см. (4.6) и (4.7)):

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{p_y^2}\left(1 \pm \sin[p_y(t-t_0)]\right); \\ y(t) &= \frac{E}{p_y}\left(t \pm \frac{1}{p_y}\cos[p_y(t-t_0)]\right) + y_0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Заметим также, что вообще говоря, обобщенным импульсом p_y для исходной функции Лагранжа был не p_y, а p_y+1, но поскольку этот импульс сохраняется, то уравнения движения с учетом начальных условий не изменятся.

4.4.7. Ответ:

$$x(t) = \frac{p_x^2 + 2(E+1)}{2(p_x^2+1)}\left(t-t_0\right) - \frac{2E - p_x^2}{4(p_x^2+1)^{3/2}} \sin\left[2\sqrt{p_x^2+1}\left(t-t_0\right)\right];$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E - p_x^2}{p_x^2+1}} \sin\left[\sqrt{p_x^2+1}\left(t-t_0\right)\right].$$

4.5.1. Энергия равна $E = \dfrac{\dot{x}^2}{2} + \sin x$. С учетом начальных условий

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x = \frac{1}{2}.$$

Система остановится, когда скорость $\dot{x} = 0$, следовательно, точка остановки

$$\sin x = \frac{1}{2}; \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

4.5.2. Энергия с учетом начальных условий равняется

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} - x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$

Система остановится при $\dot{x} = 0$, т.е. в точке

$$x_0 = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

4.5.3. Энергия с учетом начальных условий равняется

$$E = \frac{1}{x}\left(\dot{x}^2 + x^2 - 1\right) = 1.$$

Точка остановки определяется уравнением

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 1; \quad x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

В начальный момент времени скорость частицы была больше нуля, поэтому выбрано решение квадратного уравнения, отвечающее движению слева направо.

4.6. Задача о движении двух взаимодействующих материальных точек, как известно, сводится к решению задачи о движении одной точки в заданном центральном внешнем поле $U = U(r)$. Траектории $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ каждой из частиц в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (см., например, [1, §13])

$$\vec{r}_1 = \frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\vec{r}, \tag{4.21}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – это вектор взаимного расстояния обеих точек, а начало координат помещено в центре инерции $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ – приведенная масса.}$$

В данном случае при равенстве масс $m_1 = m_2 = m$ приведенная масса $\mu = \dfrac{m}{2}$.

Функция Лагранжа частицы, движущейся в центральном поле, имеет вид

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r). \tag{4.22}$$

Из вида функции Лагранжа (4.22) следует, что при движении в центральном поле сохраняются энергия

$$E=\frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+U\left(r\right)=const \tag{4.23}$$

и момент импульса относительно центра поля

$$p_{\varphi}=M=\mu r^2\dot{\varphi}=const. \tag{4.24}$$

Напомним, что обобщенный импульс p_{φ}, соответствующий координате φ, равен проекции момента импульса на ось *z*. Из формулы (4.23) видно, что при движении в центральном поле координата φ является циклической. С учетом (4.24) из (4.23) получим

$$E=\frac{\mu\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2\mu r^2}+U\left(r\right). \tag{4.25}$$

Из формулы (4.25) следует, что радиальную часть движения в центральном поле можно рассматривать как одномерное движение в поле с эффективной энергией

$$U_{eff.}\left(r\right)=U\left(r\right)+\frac{M^2}{2\mu r^2}. \tag{4.26}$$

Величину $M^2/2\mu r^2$ называют *центробежной энергией*. Наибольшее и наименьшее расстояния между частицами определяются из уравнения

$$\frac{M^2}{2\mu r_0^2}+U\left(r_0\right)=E. \tag{4.27}$$

Это точки, в которых радиальная скорость $\dot{r}=0$ обращается в нуль.

В случае инфинитного движения постоянные E и M связаны со скоростью на бесконечности v_{∞}, расстоянием ρ, на котором частица с массой μ пролетела бы от центра, если бы не было поля, посредством

$$E=\frac{\mu v_{\infty}^2}{2},\quad M=\mu\rho v_{\infty}.$$

4.6.1. Для $U=\dfrac{a}{r}$ имеем $\dfrac{M^2}{2\mu r_0^2}+\dfrac{a}{r_0}=E;\ \mu=\dfrac{m}{2}$,

откуда

$$r_0=\frac{1}{2mE}\left(ma\pm\sqrt{m^2a^2+4mEM^2}\right). \tag{4.28}$$

Если $a > 0$, то из общей формулы (4.25) следует, что полная энергия может быть только больше нуля $E > 0$. Так как расстояние r_0 может быть только положительной величиной, очевидно, что при $a > 0$ в (4.28) есть только ближайшее расстояние r_0 (знак «+» в (4.28)), то есть движение является инфинитным. Если $a < 0$, то движение инфинитно при $E > 0$ (есть только наименьшее расстояние, также отвечающее знаку «+» в (4.28)) и финитно при $E < 0$ (есть как наибольшее, так и наименьшее расстояния).

4.6.2. Для определения расстояния r_0 имеем

$$\frac{M^2}{2\mu r_0^2} + \frac{a}{r_0^2} = E; \ \mu = \frac{m}{2}, \quad r_0 = \sqrt{\frac{ma + M^2}{mE}}.$$

Если $a > 0$, то движение всегда инфинитно, т. к. есть только наименьшее расстояние r_0 (энергия E при $a > 0$ всегда положительна, как сумма положительных членов).

Если $a < 0$, то возможны следующие случаи:

1) при $E > 0$, $M^2 > m|a|$ существует только наименьшее расстояние r_0 и движение инфинитно; когда же $E > 0$, $M^2 < m|a|$, то нет ни наибольшего, ни наименьшего расстояния – точка падает из бесконечности в начало координат;

2) при $E > 0$ (это возможно только, если $M^2 < m|a|$), есть только наибольшее расстояние (движение финитно). Точка может подходить к началу координат как угодно близко (падает в начало координат).

4.6.3.

$$\frac{M^2}{mr_0^2} + \frac{1}{r_0^4} = E;$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^2 + 4m^2E}}{2mE}}.$$

Движение всегда инфинитно (r_0 – ближайшее расстояние).

4.6.4. Для определения r_0 имеем $2Er_0^2 = M^2 + 1 - r_0$, откуда

$$r_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8E\left(M^2 + 1\right)}}{4E}. \tag{4.29}$$

При $E > 0$ есть только наименьшее расстояние (знак «+» в (4.29)), т. е. движение инфинитно. При $-\frac{1}{8\left(M^2 + 1\right)} < E < 0$ движение финитно (есть как наименьшее, так и наибольшее расстояния).

4.6.5. Имеем

$$\frac{M^2}{2r_0^2}+\frac{1}{2r_0^2}+\frac{r_0^2}{2}=E,$$

откуда

$$r_0=\sqrt{E\pm\sqrt{E^2-\left(M^2+1\right)}}.$$

Движение всегда финитно, а $E>\sqrt{M^2+1}$.

4.7. Напомним, что задача двух тел сводится к решению задачи о движении одной точки с массой $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ в заданном внешнем поле $U=U\left(r\right)$, а функция Лагранжа для движения в центральном поле имеет вид (4.22). Из (4.21) при $m_1=m_2=2$ получим

$$\mu=\frac{m}{2}=1,\quad \vec{r}_1=\frac{\vec{r}}{2},\quad \vec{r}_2=-\frac{\vec{r}}{2}. \tag{4.30}$$

Из законов сохранения энергии (4.23) и момента импульса (4.24) находим

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E-U(r)-\frac{M^2}{2\mu r^2}\right]}}+const; \tag{4.31}$$

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E-U(r)-\frac{M^2}{2\mu r^2}\right]}}+const. \qquad (4.31)$$

Формулы (4.31) и (4.32) решают в общем виде задачу о движении частицы в центральном поле. Формула (4.31) определяет в неявном виде расстояние r от центра поля как функцию времени, а (4.32) дает уравнение траектории.

4.7.1. Движение инфинитное, полная энергия $E>0$, $r_{\min}=\sqrt{\dfrac{M^2+1}{2E}}$ (см. решение задачи № 4.6.2)

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{2E-(M^2+1)/r^2}}=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-\left(M^2+1\right)}+t_0;$$

$$\varphi=M\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2E-(M^2+1)/r^2}}=\frac{M}{\sqrt{M^2+1}}\arccos\left(\frac{1}{r}\frac{\sqrt{M^2+1}}{\sqrt{2E}}\right)+\varphi_0.$$

$$r(t)=\sqrt{2E(t-t_0)^2+\frac{M^2+1}{2E}};\qquad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{M^2+1}}\cos\left[\frac{\sqrt{M^2+1}}{M^2}\left(\varphi-\varphi_0\right)\right].$$

4.7.2. Если $E>0$ и $M>1$, то движение инфинитное и есть только наименьшее расстояние (см. решение задачи № 4.6.2) $r_{\min}=\sqrt{\dfrac{M^2-1}{2E}}$

$$t=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-M^2+1}+t_0$$

или

$$r(t)=\sqrt{2E(t-t_0)^2+\frac{M^2-1}{2E}}. \tag{4.33}$$

$$\varphi=\frac{M}{\sqrt{M^2-1}}\arccos\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{M^2-1}{2E}}\right)+\varphi_0;$$

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{M^2-1}}\cos\left[\frac{\sqrt{M^2-1}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right].$$

Зависимость $r(t)$ определяется формулой (4.33) и в двух других возможных случаях, приведенных ниже.

Если $E>0$ и $M<1$, то движение инфинитное, но наименьшего расстояния нет и частица «падает» в центр.

$$\varphi=-\frac{M}{\sqrt{1-M^2}}\,Arsh\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1-M^2}{2E}}\right)+\varphi_0;$$

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{1-M^2}}sh\left[\frac{\sqrt{1-M^2}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right].$$

Зависимость $r(t)$ определяется формулой (4.33).

Если $E<0$ и $M<1$, то движение финитное. Существует только наибольшее расстояние $r_{\max}=\sqrt{\dfrac{1-M^2}{2|E|}}$. Из формулы (4.33) следует, что в данном случае за время $\Delta t=\dfrac{\sqrt{1-M^2}}{2|E|}$ частица падает в начало координат.

$$\varphi=-\frac{M}{\sqrt{1-M^2}}\,Arch\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1-M^2}{2|E|}}\right)+\varphi_0;$$

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2|E|}{1-M^2}}ch\left[\frac{\sqrt{1-M^2}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right].$$

4.7.3. При $E>0$ движение инфинитное:

$$t=\frac{1}{2E}\left\{\sqrt{2Er^2+r-(M^2+1)}-\frac{1}{2\left(\sqrt{2E}\right)}Arch\left[\frac{4Er+1}{\sqrt{8E(M^2+1)+1}}\right]\right\}+t_0.$$

При $-\frac{1}{8\left(M^2+1\right)}<E<0$ движение финитное:

$$t=\frac{1}{2|E|}\left\{\frac{1}{2\left(\sqrt{2|E|}\right)}\arcsin\left[\frac{4|E|r-1}{\sqrt{1-8|E|(M^2+1)}}\right]-\sqrt{r-2|E|r^2-(M^2+1)}\right\}+t_0.$$

В обоих случаях

$$r=\frac{2\sqrt{M^2+1}}{\sqrt{8E\left(M^2+1\right)+1}\cos\left[\frac{\sqrt{(M^2+1)}}{M}\left(\varphi-\varphi_0\right)\right]+1}.$$

4.7.4. Движение всегда финитное, $E>\sqrt{M^2+1}$.

$$t=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r^2-E}{\sqrt{E^2-M^2-1}}\right)+t_0;\quad r=\sqrt{E+\sqrt{E^2-M^2-1}\sin 2(t-t_0)};$$

$$r=\sqrt{\frac{(M^2+1)}{E+\sqrt{E^2-M^2-1}\cos\frac{2\sqrt{(M^2+1)}}{M}\left(\varphi-\varphi_0\right)}}.$$

Во всех случаях 4.7.1-4.7.4 уравнения траекторий частиц 1 и 2 находим по формулам (4.30).

4.8. Углы поворота частиц в лабораторной системе θ_1 и θ_2 связаны с углом поворота первой частицы в системе центра инерции χ формулами (см. [1], §17)

$$\mathrm{tg}\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi};\quad \theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}. \tag{4.34}$$

Так как в данном случае $m_1=m_2=2$, то общие формулы (4.34) примут вид:

$$\theta_1=\frac{\chi}{2};\quad \theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}. \tag{4.35}$$

Изменение полярного угла движущейся точки с приведенной массой $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ при движении от бесконечности (инфинитное движение) до ближайшего расстояния r_0 от центра (или между частицами) есть:

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\dfrac{M}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\dfrac{2}{\mu}\left(E - \dfrac{M^2}{\mu r^2} - U(r)\right)}}.$$

Полное изменение полярного угла при движении из бесконечности в бесконечность есть $2\varphi_0$, а угол отклонения 1-й точки от своего первоначального направления в системе центра инерции определяется из $\chi = \pi - 2\varphi_0$.

4.8.1. Пользуясь результатом задачи 4.7.2 и, замечая, что

$$r_0 = \sqrt{\frac{M^2+1}{2E}}, \quad \mu = \frac{m}{2},$$

получаем

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = \pi\left(1 - \frac{M}{\sqrt{M^2+1}}\right).$$

4.8.2. Пользуясь результатом задач 4.7.3 и 4.6.4, находим,

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = \pi - \frac{2M}{\sqrt{M^2+1}} \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{8E\left(M^2+1\right)+1}}\right).$$

Углы θ_1 и θ_2 определяются затем по формулам (4.35).

4.9. *Эффективным сечением рассеяния $d\sigma$ называется* отношение числа частиц, рассеянных в данном интервале углов к плотности потока частиц (поэтому оно имеет размерность площади). Угол рассеяния θ есть функция от расстояния ρ, на котором частица прошла бы от начала координат, если бы она была свободна. Поэтому все частицы с ρ между ρ и $\rho + d\rho$ рассеиваются в в том же интервале $d\theta$. Принимая плотность потока за единицу, получим эффективное сечение просто, как площадь кольца с радиусами ρ и $\rho + d\rho$

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta. \tag{4.36}$$

Введя элемент телесного угла $do = 2\sin\theta d\theta$ получим эффективное сечение в телесный угол do

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| do.$$

В системе центра инерции эффективное сечение рассеяния определяется формулой

$$d\sigma = 2\pi\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi = \frac{\rho}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| do.$$

(см., например, [1, § 18]). Воспользовавшись углом χ, найденным в задаче № 4.8.1 и, заменив M и E на $\frac{m\rho v_\infty}{2}$ и $\frac{mv_\infty^2}{4}$ соответственно, находим

$$d\sigma = \frac{\pi^2\left(\pi-\chi\right)do}{v_\infty^2\left(2\pi-\chi\right)^2\sin\chi}.$$

Подставив $\theta_1 = \frac{\chi}{2}$, получаем для движущихся частиц

$$d\sigma_1 = \frac{\pi^3}{4v_\infty^2}\frac{\left(\pi-2\theta_1\right)d\theta_1}{\left(\pi-\theta_1\right)^2\theta_1^2} = \frac{\pi^2}{8v_\infty^2}\frac{\left(\pi-2\theta_1\right)do_1}{\left(\pi-\theta_1\right)^2\theta_1^2\sin\theta_1}.$$

Для частиц, первоначально покоившихся, находим $\theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}$ и

$$d\sigma_2 = \frac{8\pi^3}{v_\infty^2}\frac{\theta_2 d\theta_2}{\left(\pi^2-4\theta_2^2\right)^2} = \frac{4\pi^2}{v_\infty^2}\frac{\theta_2 do_2}{\left(\pi^2-4\theta_2^2\right)^2\sin\theta_2}.$$

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Для описания механической системы в подходе Лагранжа мы вводим обобщенные координаты и интегрируем уравнения Эйлера-Лагранжа. В результате мы находим законы движения – эволюцию обобщенных координат с течением времени. Часто нас интересуют не эти обобщенные координаты, а другие, определенным образом выражающиеся через них. Более того, нас может интересовать поведение рассматриваемой системы в другой «системе отсчета», не только с другими координатами, но даже и другим временем. Примером таких переходов являются релятивистские преобразования координат и времени. Из общей физики вы также помните, что многие задачи можно красиво решить, переходя «временно» в другую систему, и возвращаясь в исходную в конце решения. В этом разделе мы посмотрим, как производить такие преобразования координат и времени в подходе Лагранжа. Основными вопросами при этом будут: как меняются при переходах сама функция Лагранжа, уравнения Эйлера-Лагранжа, интегралы движения.

Начнем мы с самого простого случая, когда преобразуются только координаты. Физически эта ситуация просто означает переход к другим координатам, часто криволинейным, о чем шла речь в разделе 2. При этом преобразовании время является внешним параметром, не затронутым преобразованием.

Задача 5.1. *Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид* $L = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} - x^2 - y$. *Введем новые координаты* ξ, η *согласно* $x = \xi + \eta, y = -2\eta$. *Составьте новую функцию Лагранжа системы. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.*

Задача 5.2. *Функция Лагранжа системы имеет вид* $L = 2\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} - xy + 2x$. *Подберите преобразования поворота и сдвига, диагонализирующие потенциальную энергию системы. Станет ли при этом квадратичная форма, соответствующая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в исходной и новой системах координат и убедитесь в их ковариантности.*

Если же преобразование затрагивает кроме координат еще и время, преобразование функции Лагранжа не сводится просто к замене координат, в отличие от действия.

Задача 5.3. *Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе* $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + (x+2t)^2$, *а преобразования имеют вид* $x = (5\xi - 3\tau)/4$, $t = (5\tau - 3\xi)/4$. *Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.*

В следующей задаче не задается конкретный вид функции Лагранжа системы. Тем не менее, можно показать и в этом, более общем случае, что уравнения движения для исходной и преобразованной системы следуют друг из друга. На самом деле, это утверждение можно доказать и совсем в общем случае – для произвольной функции Лагранжа, произвольного преобразования координат и времени, и для произвольного числа степеней свободы системы.

Задача 5.4. *Для произвольной системы с одной степенью свободы покажите, что преобразование координат и времени* $x = \tau\xi$, $t = \xi$ *оставляют уравнения движения истинными.*

Примеры, которые мы рассмотрели, являются весьма абстрактными. Например, в последней задаче почти «поменялись ролями» время и координата. Такие ситуации встречаются в теоретической физике, например, при рассмотрении немеханических систем. Иногда удается установить их соответствие с абстрактными механическими системами и пользоваться этой эквивалентностью для анализа исходной системы. При этом такие преобразования «координаты» и «времени» могут вполне иметь место и соответствовать реальным преобразованиям в исходной системе. Но наряду с такими ситуациями преобразования координат и времени могут иметь и вполне ясный физический смысл. Переходы из одной системы отсчета в другую в кинематике являются частными случаями преобразований координат и времени. Мы уже смотрели пример с преобразованием Лоренца, в котором преобразованиями затрагиваются как координата, так и время. Следующие же две задачи посвящены нерелятивистским переходам, но в неинерциальные системы отсчета.

Задача 5.5. *Частица массой* m *движется в потенциальном поле* $U(\vec{r})$. *Получите уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления* $\vec{k}$ *со скоростью, модуль которой меняется со временем по закону* $\upsilon(t)$.

Задача 5.6. *Частица массой* m *движется в потенциальном поле* $U(\vec{r})$. *Получите уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг некоторой фиксированной оси с угловой скоростью* $\vec{\omega}(t)$.

При преобразованиях координат изменения претерпевают не только уравнения движения, но и обобщенные импульсы и энергия системы. Как мы видели, если преобразование не затрагивает время, то функция Лагранжа в новой системе получается простой заменой переменных в исходной функции. Однако это, вообще говоря, не верно для обобщенных импульсов и энергии. Этому посвящены последние две задачи этого раздела.

Задача 5.7. *Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при преобразовании координат (от* x, y *к* ξ, η*) по закону* $x = \xi - t\eta$, $y = 2t\xi\eta$.

Задача 5.8. *При переходе от координат* x, y *к* ξ, η *обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону* $p_\xi = (\eta - 2t^2)p_x + \eta^2 p_y$, $p_\eta = \xi p_x + (2\xi + 1)\eta p_y$, $\varepsilon = E + 4t\xi p_x$. *Каким мог быть явный вид преобразований?*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 5.

5.1. Поскольку время не затрагивается преобразованием координат, из закона преобразования координат следует закон преобразования скоростей и ускорений,

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \dot{\eta}, \quad \dot{y} = -2\dot{\eta}; \quad \ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{\eta}, \; \ddot{y} = -2\ddot{\eta}. \tag{5.1}$$

Подставляя эти выражения для скоростей в исходную функцию Лагранжа, получаем в новой системе координат новую функцию Лагранжа:

$$\widetilde{L}(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta};t)=(\dot{\xi}+\dot{\eta})^2+(\dot{\xi}+\dot{\eta})(-2\dot{\eta})-(\xi+\eta)^2-(-2\eta)=$$
$$=\dot{\xi}^2-\dot{\eta}^2-\xi^2-\eta^2-2\xi\eta+2\eta.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной системе имеют вид:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \;\Rightarrow\; 2\ddot{x}+\ddot{y}+2x=0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \;\Rightarrow\; \ddot{x}+1=0,\end{aligned} \tag{5.2}$$

а в преобразованной системе координат

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\xi}}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \xi}=0 \;\Rightarrow\; \ddot{\xi}+\xi+\eta=0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\eta}}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \eta}=0 \;\Rightarrow\; \ddot{\eta}-\xi-\eta+1=0.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Для того, чтобы убедиться в их эквивалентности, подставим в уравнения (5.2) связь между координатами в исходной и преобразованной системе, а также связь ускорений (5.1). Тогда первое из уравнений (5.2) преобразуется к первому из уравнений (5.3), а второе – к виду $\ddot{\xi}+\ddot{\eta}+1=0$. При подстановке $\ddot{\xi}$ из первого уравнения (5.3), мы и получаем второе уравнение (5.3). Таким образом, пара уравнений (5.2) эквивалентна паре уравнений (5.3).

5.2. Удобно провести преобразования в два этапа. Сначала подберем поворот. Для этого выделим в потенциальной энергии $U=xy-2x$ только квадратичное слагаемое, xy. Переходя к координатам ξ_1,η_1 согласно преобразованию $x=\xi_1\cos\alpha+\eta_1\sin\alpha$, $y=\eta_1\cos\alpha-\xi_1\sin\alpha$ и требуя, чтобы коэффициент при недиагональном слагаемом $\xi_1\eta_1$ обратился в ноль, получаем, например, $\alpha=\pi/4$ (подойдут и другие углы, но для нашей цели нет необходимости искать все подходящие углы поворота). Тогда потенциальная энергия преобразуется к виду

$$U=-\frac{1}{2}\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta_1^2-\sqrt{2}\xi_1-\sqrt{2}\eta_1=-\frac{1}{2}(\xi_1+\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}(\eta_1-\sqrt{2})^2.$$

Таким образом, окончательно преобразование имеет вид $x=\dfrac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\eta-\xi}{\sqrt{2}}+2$. Новая функция Лагранжа запишется как

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}\dot{\xi}^2+\frac{3}{2}\dot{\eta}^2+2\dot{\xi}\dot{\eta}+\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\eta^2. \tag{5.4}$$

Квадратичная форма кинетической энергии в (5.4) не диагональна. Уравнения движения в двух системах имеют вид

$$\begin{cases} 4\ddot{x} + \ddot{y} + y - 2 = 0; \\ \ddot{x} + x = 0; \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\ddot{\eta} - \xi = 0; \\ 2\ddot{\xi} + 3\ddot{\eta} + \eta = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

В их ковариантности можно убедиться аналогично тому, как это было сделано в задаче 5.1.

5.3. Функция Лагранжа, рассматриваемая в этой задаче, соответствует релятивистской частице, первое слагаемое – энергия покоя и кинетическая энергия, а второе – зависящая от времени потенциальная энергия. Рассматриваемые же преобразования представляют собой преобразования Лоренца. Как мы убедимся, они оставляют инвариантным первое слагаемое в функции Лагранжа, что является следствием инвариантности интервала по отношению к преобразованиям Лоренца. Итак, из того, что действие должно сохранять свой вид при преобразованиях координат и времени, следует, что новая функция Лагранжа $\tilde{L} = L\dfrac{dt}{d\tau}$, причем, как и раньше, правая часть должна быть выражена через новые координату, скорость и время. Для связи старой и новой скоростей получаем:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{5\dot{\xi} - 3}{5 - 3\dot{\xi}}. \tag{5.7}$$

Обращаем внимание на обозначения $\dot{x}$ и $\dot{\xi}$. Вообще говоря, когда есть «два времени» это обозначение становится неоднозначным. В этом разделе мы всегда будем подразумевать, что производная берется в «своей» системе, т. е. $\dot{x} = dx/dt$, а $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$. Если же нам понадобится брать производную, скажем от x по τ, то будем ее записывать через дифференциалы.

Выражение (5.7) задает преобразование скоростей. Учитывая, что $dt/d\tau = (5 - 3\dot{\xi})/4$, получаем для новой функции Лагранжа

$$\tilde{L} = \frac{5 - 3\dot{\xi}}{4}\left[-\sqrt{1 - \left(\frac{5\dot{\xi} - 3}{5 - 3\dot{\xi}}\right)^2} + \left(\frac{-\xi + 7\tau}{4}\right)^2\right] = -\sqrt{1 - \dot{\xi}^2} + \frac{(5 - 3\dot{\xi})(\xi - 7\tau)^2}{64}. \tag{5.8}$$

Для нахождения скорости в новой системе координат можно просто обернуть соотношение (5.7). Можно же найти обратное преобразование координат и времени: $\xi = (5x + 3t)/4$, $\tau = (5t + 3x)/4$. Обратите внимание, что это «такое же» преобразование, только знаки перед вторыми слагаемыми теперь не минус, а плюс. Это соответствует тому, что старая система координат движется относительно новой с такой же скоростью, что и новая относительно старой, только в обратном направлении. Тогда для скорости и ее производной получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{d\xi / dt}{d\tau / dt} = \frac{5\dot{x}+3}{5+3\dot{x}}; \\ \ddot{\xi} &= \frac{d\dot{\xi} / dt}{d\tau / dt} = \frac{4}{(3\dot{x}+5)} \frac{5\ddot{x}(3\dot{x}+5)-3\ddot{x}(3+5\dot{x})}{(3\dot{x}+5)^2} = \frac{64\ddot{x}}{(3\dot{x}+5)^3}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Уравнения движения в старой и новой системах отсчета имеют вид:

$$\frac{\ddot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{3/2}} - 2(x+2t) = 0;$$

$$\frac{\ddot{\xi}}{(1-\dot{\xi}^2)^{3/2}} + \frac{\xi - 7\tau}{2} = 0.$$

Снова обращаем ваше внимание на то, что «ускорение», т. е. первое слагаемое в уравнениях движения, остается инвариантным при преобразованиях Лоренца, в отличие от производной по времени от скорости.

5.4. Как и в предыдущей задаче, функция Лагранжа преобразуется согласно $\widetilde{L} = L\dfrac{dt}{d\tau} = L\left(\tau\xi, \tau + \dfrac{\xi}{\dot{\xi}}, \xi\right) \cdot \dot{\xi}$. Запишем уравнение движения в новых координатах. Для этого найдем частные производные по $\dot{\xi}$ и ξ:

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\xi}{\dot{\xi}} + L, \qquad \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \xi} = \dot{\xi}\tau \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial t},$$

вычислим полную производную по времени от первого из этих выражений и составим уравнение движения

$$-\xi \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \left(1 - \frac{\xi\ddot{\xi}}{\dot{\xi}^2}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \left(\xi + \tau\dot{\xi}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial x} + \left(2 - \frac{\xi\ddot{\xi}}{\dot{\xi}^2}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial t} -$$

$$-\tau\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, получаем

$$-\xi \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \xi \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

т. е. уравнения движения действительно эквивалентны.

5.5. В исходной системе координат функция Лагранжа имеет вид $L = \dfrac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - U(\vec{r})$. Поскольку время не затрагивается преобразованием, в функции Лагранжа нужно только произвести замену координат. Пусть три пространственные координаты преобразовываются от $\vec{r}$ в старой системе до $\vec{\rho}$ в новой. При этом скорости в старой системе $\dot{\vec{r}}$ и в новой $\dot{\vec{\rho}}$ связаны соотношением $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\rho}} + \vec{k}\upsilon(t)$. Отсюда $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{k}\int \upsilon(t)dt$. Новая функция Лагранжа имеет вид

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{\rho}} + \vec{k}\upsilon(t)\right)^2 - U\left(\vec{\rho} + \vec{k}\int \upsilon(t)dt\right).$$

Тогда новое уравнение движения $m\left(\ddot{\vec{\rho}} + \vec{k}\dot{\upsilon}(t)\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = 0$. Здесь в последнем слагаемом нужно произвести замену от $\vec{r}$ к $\vec{\rho}$. Таким образом видим, что переход от одной системы отсчета к другой привел к появлению в уравнении движения дополнительного слагаемого, пропорционального ускорению самой системы отсчета, которое и называется *силой инерции*.

5.6. Как и при решении задачи 5.5, записываем исходную функцию Лагранжа в виде $L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r})$. При преобразовании от координат $\vec{r}$ к $\vec{\rho}$ скорости связаны соотношением $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\rho}} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]$. Новая функция Лагранжа имеет вид

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{\rho}} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]\right)^2 - U.$$

Здесь потенциальная энергия выражена через новые координаты. Заметим, что поскольку начало координат может быть выбрано произвольно, то можно считать, что вращающаяся система координат «мгновенно сопутствует» исходной. Это означает, что значения векторов $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$ совпадают, но они не совпадают как функции, т. е. в частности не совпадают их производные.

Для составления нового уравнения движения раскроем скобки в первом слагаемом функции Лагранжа и найдем соответствующие производные по координатам:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\rho}}\left(\dot{\vec{\rho}}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]\right) = [\dot{\vec{\rho}}, \vec{\omega}],$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\rho}}\left([\vec{\omega}, \vec{\rho}], [\vec{\omega}, \vec{\rho}]\right) = 2[\vec{\omega}, [\vec{\rho}, \vec{\omega}]].$$

Тогда уравнение движения во вращающейся системе отсчета

$$m\ddot{\vec{\rho}} + m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{\rho}] + 2m[\vec{\omega}, \dot{\vec{\rho}}] - m[\vec{\omega}, [\vec{\rho}, \vec{\omega}]] + \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} = 0.$$

Первое слагаемое здесь такое же, как и в уравнении в исходной системе отсчета. Второе слагаемое возникает тогда, когда скорость вращения системы отсчета переменна. Третье слагаемое – это сила Кориолиса (обратите внимание на то, откуда произошли каждая из двух ее частей). Четвертое слагаемое – это центробежная сила инерции, и последнее слагаемое представляет собой потенциальную силу.

5.7. Поскольку время не затронуто преобразованием, новая функция Лагранжа имеет вид

$$\tilde{L}(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta},t) = L(\xi - t\eta,\, 2t\xi\eta,\, \dot{\xi} - \eta - t\dot{\eta},\, 2\xi\eta + 2t\dot{\xi}\eta + 2t\xi\dot{\eta},\, t).$$

Тогда для новых импульсов получаем такие соотношения:

$$p_\xi = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + 2t\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_x + 2t\eta p_y,$$

$$p_\eta = -tp_x + 2t\xi p_y.$$

Здесь, конечно, в старых импульсах, p_x и p_y подразумевается замена переменных. Таким образом, эти выражения показывают в явном виде, насколько отличается новый обобщенный импульс от результата, который бы получили простой заменой переменных.

Для того, чтобы найти, как преобразуется энергия, найдем сначала преобразования скоростей, пользуясь законом преобразования координат:

$$\dot{x} = \dot{\xi} - t\dot{\eta} - \eta,$$

$$\dot{y} = 2\xi\eta + 2t\dot{\xi}\eta + 2t\xi\dot{\eta}.$$

Тогда для новой энергии получаем:

$$\varepsilon = \dot{\xi}p_\xi + \dot{\eta}p_\eta - \tilde{L} = \dot{\xi}\left(p_x + 2t\eta p_y\right) + \dot{\eta}\left(-tp_x + 2t\xi p_y\right) - \tilde{L} =$$

$$= p_x\left(\dot{\xi} - t\dot{\eta}\right) + p_y\left(2t\dot{\xi}\eta + 2t\xi\dot{\eta}\right) - \tilde{L} = p_x\left(\dot{x} + \eta\right) + p_y\left(\dot{y} - 2\xi\eta\right) - \tilde{L} =$$

$$= E + \eta p_x - 2\xi\eta p_y.$$

Таким образом, и преобразование энергии не сводится к просто замене переменных. Проследите за тем, чем определяются коэффициенты при старых импульсах и энергии в этих выражениях – они представляют собой различные частные производные от законов преобразования координат. Например, в последнем выражении (для преобразования энергии) коэффициенты при импульсах – это частные производные от соответствующих координат по времени.

5.8. Как было сказано в решении к задаче 5.7, коэффициенты в линейных комбинациях связи старых и новых импульсов и энергии определяются частными производными от законов преобразования координат. Проследив за выкладками в предыдущей задаче, можно показать, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \eta - 2t^2,\; \frac{\partial y}{\partial \xi} = \eta^2,\; \frac{\partial x}{\partial \eta} = \xi,\; \frac{\partial y}{\partial \eta} = \left(2\xi + 1\right)\eta,\; \frac{\partial x}{\partial t} = -4t\xi,\; \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0.$$

По условию не требуется найти все решения полученной системы уравнений в частных производных. Достаточно привести одно частное решение. Его несложно подобрать:

$$x = \xi\eta - 2t^2\xi, \quad y = \left(\xi + 1/2\right)\eta^2.$$

Эта задача представляет собой пример обратной задачи. Ее решение, как видно, не всегда однозначно.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: В 10 т. Т. I : Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
2. Невзглядов В. Г. Теоретическая механика / Невзглядов В. Г. – М. : Физматгиз, 1959. – 584 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. I / Бухгольц Н. Н. – М. : Наука, 1969. - 468 с.
4. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Суслов Г. К. – М.; Л. : Гостехтеориздат, 1946. – 656 с.
5. Ландау Л. Д., Задачи по теоретической физике. Ч. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. А. Розенкевич. – Х. : ГНТИУ, 1935. – 120 с.
6. Ландау Л. Д., Пятигорский Л. Механика / Л. Д. Ландау, Л. Пятигорский. – М., Л. : ГИТТЛ, 1940. – 200 с.
7. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Кочин Н. Е. – М. : Наука, 1965. – 426 с.
8. Морс Ф. М. Методы теоретической физики (в 2-х томах) Т. 1 / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. – М. : Издательство иностранной литературы, 1958. – 930 с.
9. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов / Маркеев А. П. – М. : ЧеРо, 1999. – 572 с.
10. Аппель П. Теоретическая механика (в 2-х томах). Т. 1. Статика. Динамика материальной точки / Аппель П. –М. : Физматлит., 1960 . – 515 с.
11. Сборник задач по аналитической механике / [Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко]. – М. :Наука, 1980. - 320 с.
12. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
13. Ольховский И. И. Задачи по теоретической механике для физиков / И. И. Ольховский, К. Г. Павленко, JI. С. Кузьменков. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 391 с.
14. Коткин Г. Л. Сборник задач по классической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. – М. : Наука, 1977. – 319 с.
15. Езерская Е. В. Динамика материальной точки в ньютоновом и лагранжевом формализме. Методические указания для самостоятельной работы студентов 2-3 курсов физического факультета / Е. В. Езерская, О. В. Усатенко, Т. С. Чебанова. – Х. : Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1989. – 51 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Апостолов Станіслав Сергійович
Єзерська Олена Володимирівна
Майзеліс Захар Олександрович
Усатенко Олег Вікторович
Чебанова Тетяна Сергіївна

КЛАСИЧНА ДИНАМІКА У НЬЮТОНОВОМУ ТА ЛАГРАНЖЕВОМУ ФОРМАЛІЗМІ

Навчально-методичний посібник для студентів фізичних спеціальностей

(Рос. мовою)

Відповідальний за випуск *О. І. Любімов*
Коректор *І. Ю. Агаркова*
Комп'ютерне верстання *В. В. Савінкова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 4,92. Тираж 50 пр. Зам. № 96/12.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, Харків, пл. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09.

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32