ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ОСОБЕННОСТЬЮ В НУЛЕ

В. В. Сташевская

Харьков

Пусть через $\varphi(x, \lambda)$ обозначено решение дифференциального уравнения

$$y'' - q(x)y + \lambda y = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty) \tag{I}$$

с начальным условием

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \Theta, \tag{II}$$

где $q(x)$ — функция суммируемая в каждом конечном интервале, а Θ — произвольное вещественное число. При $\Theta = \infty$ начальное условие имеет вид

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{III}$$

Как известно [1], [2] из спектральной теории дифференциальных операторов, существует такая неубывающая ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$, называемая спектральной, что для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ имеет место разложение

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{IV}$$

где

$$E_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\varphi(x, \lambda)\, dx. \tag{V}$$

Интегралы здесь понимаются в смысле сходимости в метриках $L^2(0, \infty)$ и $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ соответственно. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} E^2_f(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Спектральная функция $\rho(\lambda)$ будет единственной или нет, в зависимости от того, равен индекс дефекта соответствующего дифференциального оператора (1,1) или (2,2).

В. А. Марченко [3], [4] доказал, что спектральная функция однозначно определяет дифференциальный оператор. Вопрос о восстановлении дифференциального оператора по его спектральной функции был решен в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [5] и ряде работ М. Г. Крейна [6], [7]. Подобные задачи называют обратными задачами спектрального анализа.

В предлагаемой работе [1] рассматривается аналогичный круг вопросов для дифференциального уравнения вида

$$L[y]+\lambda y=0 \tag{VI}$$

с условием в нуле

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x,\lambda)}{x^n}=\frac{1}{2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \tag{VII}$$

где

$$L[y]=y''-\left[q(x)+\frac{n(n-1)}{x^2}\right]y, \tag{VIII}$$

а n — целое положительное число. Такие операторы (с целым n) возникают при разделении переменных в операторе Шредингера с центрально-симметрической потенциальной энергией. При $n=1$, как частный случай, имеем краевую задачу (I), (III) (с другой нормировкой при $x=0$).

Настоящая статья состоит из восьми параграфов. § 1 содержит вывод одной вспомогательной теоремы для функций экспоненциального типа [2], аналогичной теореме Винера—Пэйли [3].

В § 2 рассматривается дифференциальное уравнение (VI), где $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^a t^{\mu}\,|\,q(t)\,|\,dt<\infty \tag{IX}$$

при любом конечном $a>0$ и некотором положительном $\mu<\frac{1}{2}$. Доказывается, что уравнение (VI) имеет единственное решение $y(x,\lambda)$, удовлетворяющее условию (VII) в нуле, причем это решение может быть представлено в виде [4]:

$$y(x,\lambda)=\frac{\sqrt{x}J_\nu(x\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}+\int_0^x K(x,t)\frac{\sqrt{t}J_\nu(t\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}dt\quad\left(\nu=n-\frac{1}{2}\right), \tag{X}$$

где $J_\nu(x)$ есть функция Бесселя.

В § 3 исследуется оператор Вольтерра V_L, определенный на множестве функций, суммируемых с квадратом в каждом конечном интервале, формулой:

$$V_L[f]=f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)\,dt,$$

[1] Настоящая статья представляет некоторую переработку моей диссертации, защищенной в Харьковском госуниверситете в 1953 году. Основные результаты были опубликованы в ДАН СССР, т. XCIII, № 3, (1953).

[2] Следуя С. Н. Бернштейну, мы будем в дальнейшем эти функции называть функциями конечной степени.

[3] Обобщение теоремы Винера—Пэйли, о котором здесь идет речь, как мне сообщено Н. И. Ахиезером, справедливо не только для целого $n\geqslant 0$, но и для любого $n\geqslant 0$. Другие построения работы также проходят, хотя и несколько усложняются, при любом $n\geqslant 0$.

[4] Аналогичная формула другим способом получена В. Я. Волком. УМН т VIII, вып. 4 (56), 1953, стр. 141—151.

и доказывается, что оператор V_L имеет обратный оператор V_L^{-1}, определенный на том же множестве функций. Отсюда непосредственно следует существование оператора Вольтерра $V_{L_1L_2} = V_{L_2} V_{L_1}^{-1}$, переводящего решение уравнения $L_1[y] + \lambda y = 0$ с условием в нуле (VII) в решение уравнения $L_2[y] + \lambda y = 0$ с тем же условием в нуле. Здесь L_1 и L_2 — произвольные операторы вида (VIII). Оператор $V_{L_1L_2}$ называют оператором преобразования [4].

В § 4 доказывается существование спектральной функции для дифференциального оператора, определенного дифференциальным выражением (VIII) и условием (VII).

В § 5 доказывается, что дифференциальный оператор вида (VIII) однозначно определяется своей спектральной функцией. Метод доказательства этой теоремы такой же, как у В. А. Марченко [4], и основан на применении операторов преобразования.

В § 6 выводятся некоторые необходимые условия, которым должна удовлетворять любая спектральная функция $\rho(\lambda)$ оператора (VIII).

Параграфы 7, 8 и 9 посвящены вопросу о восстановлении дифференциального оператора вида (VIII) по его спектральной функции. Этот вопрос решается методами аналогичными методам И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [5].

Пусть задана неубывающая функция $\rho(\lambda)$, удовлетворяющая условиям:

1. При всяком $x > 0$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\, d\rho(\lambda)$$

2. Если положить $\sigma(\lambda) = -\dfrac{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \rho(\lambda)$ при $\lambda \geqslant 0$ и $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$

при $\lambda \leqslant 0$, то функция

$$F(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x \sqrt{t}\, J_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \left\{ \int_0^u \sqrt{t}\, J_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \lambda^{-\nu} d\sigma(\lambda) \left(\nu = n - \frac{1}{2}\right)$$

имеет непрерывные четвертые производные при $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant u < \infty$.

3. Если через $N(x)$ обозначить число точек роста функции $\rho(\lambda)$, лежащих в интервале $(0, x)$, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)}{\sqrt{x}} = \infty.$$

(В частности достаточно, чтобы множество точек роста функции $\rho(\lambda$ имело хотя бы одну конечную предельную точку).

Доказывается основная

Теорема. Если неубывающая функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3, то существует дифференциальный оператор второго порядка, определенный дифференциальным выражением вида (VIII) и условием (VII), и притом единственный, для которого функция $\rho(\lambda)$ является спектральной. При этом функция $q(x)$ непрерывна и определяется формулой

$$q(x) = 2\frac{dK(x, x)}{dx},$$

где $K(x, u)$ есть решение интегрального уравнения

$$f(x, u)+\int_0^x f(u, t) K(x, t)\, dt+K(x, u)=0 \quad (0 \leqslant u \leqslant x),$$

в котором

$$f(x, u)=\frac{\partial^2 F(x, u)}{\partial x \partial u}.$$

§ 1 Известно, что всякая функция $f(s)$, принадлежащая $L^2(0, \infty)$, представима в виде интеграла

$$f(s)=\int_0^\infty E(t) \sqrt{st}\, J_\nu(st)\, dt, \tag{1.1}$$

где

$$E(t)=\int_0^\infty f(s) \sqrt{st}\, J_\nu(st)\, ds \tag{1.2}$$

есть так называемое преобразование Ганкеля функции $f(s)$. Здесь $J_\nu(x)$ есть функция Бесселя, а интегралы понимаются как пределы в среднем. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(s)\, ds=\int_0^\infty E^2(t)\, dt.$$

Теорема 1.1. Если функция $f(s)$, принадлежащая $L^2(0, \infty)$, имеет вид

$$f(s)=s^n Q(s), \tag{1.3}$$

где $Q(s)$ — целая четная функция степени $\leqslant \sigma$, а n — целое положительное число, то преобразование Ганкеля (1.2) функции $f(s)$ при $\nu=n-\frac{1}{2}$ обращается в нуль для почти всех $t>\sigma$, так что представление (1.1) принимает вид

$$f(s)=\int_0^\sigma E(t) \sqrt{st}\, J_\nu(st) dt \qquad \left(\nu=n-\frac{1}{2}\right). \tag{1.4}$$

Доказательство. Так как

$$\sqrt{st}\, J_{n-\frac{1}{2}}(st)=(st)^n P(st),$$

где $P(st)$ — четная функция, то

$$E(t)=\int_0^\infty s^n Q(s) \sqrt{st}\, J_{n-\frac{1}{2}}(st)\, ds=\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty s^n Q(s) \sqrt{st}\, J_{n-\frac{1}{2}}(st)\, ds.$$

В силу известной формулы

$$\sqrt{z}\, J_{n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^n \frac{d^{n-1}}{(zdz)^{n-1}} \left(\frac{\sin z}{z}\right), \tag{1.5}$$

откуда следует, что функция $\sqrt{z} J_\nu(z)$ имеет вид

$$\sqrt{z}\, J_{n-\frac{1}{2}}(z) = \frac{R_1(z)\, e^{iz} + R_2(z)\, e^{-iz}}{z^{n-1}},$$

где $R_1(z)$, $R_2(z)$ — полиномы степени $n-1$. Поэтому функция $E(t)$ может быть записана в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, sQ(s)\, [R_1(st)\, e^{ist} + R_2(st)\, e^{-ist}]\, ds. \tag{1.6}$$

Функции $sQ(s) R_1(st)$ и $sQ(s) R_2(st)$ принадлежат $L^2(-\infty, \infty)$ и являются по s целыми функциями конечной степени с показателем $\leqslant \sigma$. Поэтому из формулы (1.6) в силу теоремы Винера — Пэйли следует, что $E(t) = 0$ почти всюду при $t > \sigma$. Теорема доказана.

§ 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - \left[q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y + s^2 y = 0 \quad (0 < x < \infty), \tag{2.1}$$

где n — целое положительное число, а $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^a t^\mu \mid q(t) \mid dt < \infty \tag{2.2}$$

при любом конечном $a > 0$ и некотором положительном $\mu < \frac{1}{2}$.

Мы докажем, что в таком случае дифференциальное уравнение (2.1) имеет единственное решение $y(x, s^2)$, удовлетворящее условию в нуле

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x, s^2)}{x^n} = \frac{1}{2^{n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}. \tag{2.3}$$

Затем мы покажем, что функция

$$\varphi(x, s) = s^n y(x, s^2) - \sqrt{sx}\, J_\nu(sx) \qquad \left(\nu = n - \frac{1}{2}\right) \tag{2.4}$$

удовлетворяет условию теоремы 1.1 при $\sigma = x$, то есть $\varphi(x, s)$ относительно s является целой функцией конечной степени с показателем, не превышающим x, принадлежит $L^2(0, \infty)$ и имеет вид (1.3). Применяя тогда к функции $\varphi(x, s)$ теорему 1.1, мы получим для решения $y(x, s^2)$ представление (X).

Для дифференциального уравнения второго порядка без особенности существование решения доказывается методом последовательных приближений. Мы не можем здесь непосредственно сослаться на этот готовый результат, а должны провести доказательство заново, так как наше дифференциальное уравнение имеет особенность в нуле.

Дифференциальное уравнение (2.1) при условии (2.3) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра

$$s^n y(x, s^2) = \sqrt{sx}\, J_\nu(sx) + (-1)^n \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\, [J_\nu(st) J_{-\nu}(sx) -$$

$$- J_\nu(sx) J_{-\nu}(st)]\, q(t)\, s^n y(t, s^2)\, dt \left(\nu = n - \frac{1}{2}\right). \quad (2.5)$$

Покажем, что уравнение (2.5) может быть решено методом последовательных приближений, причем ряд

$$\varphi_1(x, s) + \varphi_2(x, s) + \ldots + \varphi_k(x, s) + \ldots, \quad (2.6)$$

где

$$\varphi_1(x, s) = (-1)^n \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\, [J_\nu(st) J_{-\nu}(sx) -$$

$$- J_\nu(sx) J_{-\nu}(st)]\, q(t) \sqrt{st}\, J_\nu(st)\, dt \quad (2.7)$$

$$\varphi_k(x, s) = (-1)^n \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\, [J_\nu(st) J_{-\nu}(sx) -$$

$$- J_\nu(sx) J_{-\nu}(st)]\, q(t)\, \varphi_{k-1}(t, s)\, dt, \quad (2.8)$$

сходится равномерно при $0 \leqslant x \leqslant a$ и $s = \alpha + i\beta$, заключенном в полосе $|\beta| \leqslant b$, $-\infty < \alpha < \infty$ (a и b — любые положительные числа).

При фиксированных a и b существует такая постоянная A, что одновременно имеют место неравенства

$$|J_\nu(sx)| \leqslant A \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad |\beta| \leqslant b \quad (2.9)$$

$$|\sqrt{sx}\, J_\nu(sx)| \leqslant A \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad |\beta| \leqslant b \quad (2.10)$$

$$|J_{-\nu}(sx)| \leqslant A \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant a, \quad |\beta| \leqslant b, \quad |sx| \geqslant 1 \quad (2.11)$$

$$|\sqrt{sx}\, J_{-\nu}(sx)| \leqslant A \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant a, \quad |\beta| \leqslant b, \quad |sx| \geqslant 1 \quad (2.12)$$

$$|P_1(sx)| \leqslant A \quad \text{при} \quad |sx| \leqslant 1 \quad (2.13)$$

$$|P_2(sx)| \leqslant A \quad \text{при} \quad |sx| \leqslant 1, \quad (2.14)$$

где функции $P_1(x)$ и $P_2(x)$ определяются равенствами

$$J_\nu(x) = x^\nu P_1(x), \quad J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} P_2(x).$$

В силу (2.7) имеем:

$$|\varphi_1(x, s)| \leqslant \frac{\pi}{2} |\sqrt{sx}\, J_{-\nu}(sx)| \int_0^x |t\, q(t)\, J_\nu^2(st)|\, dt +$$

$$+ \frac{\pi}{2} |\sqrt{sx}\, J_\nu(sx)| \int_0^x |tq(t)\, J_{-\nu}(st)\, J_\nu(st)|\, dt. \quad (2.15)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $|sx| \leqslant 1$. Из (2.15) имеем

$$|\varphi_1(x, s)| \leqslant \frac{\pi}{2} |sx|^n |P_2(sx)| \int_0^x |tq(t)\, P_1^2(st)|\, dt +$$

$$+ \frac{\pi}{2} |sx|^n |P_1(sx)| \int_0^x |tq(t)\, P_1(st)\, P_2(st)|\, dt,$$

откуда в силу (2.13), (2.14) получим

$$| \varphi_1 (x, s) | \leqslant \pi A^3 | sx |^n \int_0^x | tq(t) | dt \quad \text{при } | sx | \leqslant 1.$$

Полагая $C = \pi A^3$, будем иметь:

$$| \varphi_1 (x, s) | \leqslant C | sx |^n \int_0^x t | q(t) | dt \quad \text{при } | sx | \leqslant 1. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $| sx | \geqslant 1$, $0 < x \leqslant a$ и $| \beta | \leqslant b$, В этом случае, используя при $| st | \leqslant 1$ неравенства (2.13), (2.14), а при $| st | \geqslant 1$ неравенства (2.9) — (2.12), мы из (2.15) получим

$$| \varphi_1 (x, s) | \leqslant C \int_0^x t | q(t) | dt \quad \text{при} \quad | sx | \geqslant 1, \quad 0 < x \leqslant a, \quad | \beta | \leqslant b. \tag{2.17}$$

Рассматривая неравенства (2.16) и (2.17) совместно, мы видим, что неравенство (2.16) справедливо также и при $| sx | \geqslant 1$, $0 < x \leqslant a$, а неравенство (2.17) при $| sx | \leqslant 1$. Таким образом, мы установили справедливость неравенств

$$| \varphi_1 (x, s) | \leqslant C | sx |^n \int_0^x t | q(t) | dt \quad (0 \leqslant x \leqslant a, \quad | \beta | \leqslant b) \tag{2.18}$$

$$| \varphi_1 (x, s) | \leqslant C \int_0^x t | q(t) | dt \quad (0 \leqslant x \leqslant a, \quad | \beta | \leqslant b). \tag{2.19}$$

Методом индукции докажем справедливость при любом целом $k > 0$ неравенств

$$| \varphi_k (x, s) | \leqslant C^k | sx |^n \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{k-1}} t_1 | q(t_1) | t_2 | q(t_2) | \ldots$$
$$\ldots t_k | q(t_k) | dt_k \tag{2.20}$$

$$| \varphi_k (x, s) | \leqslant C^k \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{k-1}} t_1 | q(t_1) | t_2 | q(t_2) | \ldots$$
$$\ldots t_k | q(t_k) | dt_k \tag{2.21}$$
$$(0 \leqslant x \leqslant a, \quad | \beta | \leqslant b).$$

Пусть неравенства (2.20), (2.21) справедливы при некотором k. Докажем, что они справедливы тогда и для $k+1$. Из (2.8) мы имеем:

$$| \varphi_{k+1} (x, s) | \leqslant \frac{\pi}{2} | \sqrt{sx} J_{-\nu} (sx) | \left| \int_0^x t | q(t) J_\nu (st) \frac{\varphi_k (t, s)}{\sqrt{st}} \right| dt +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left| \sqrt{sx} J_\nu (sx) \right| \left| \int_0^x t | q(t) J_{-\nu} (st) \frac{\varphi_k (t, s)}{\sqrt{st}} \right| dt. \tag{22.2}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $|sx| \leqslant 1$. В силу (2.20), (2.13), (2.14) получим

$$|\varphi_{k+1}(x, s)| \leqslant \pi A^2 C^k |sx|^n \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots$$

$$\ldots \int^{t_k} t_1 |q(t_1)| t_2 |q(t_2)| \ldots t_{k+1} |q(t_{k+1})| dt_{k+1}$$

или, считая $A > 1$, имеем:

$$|\varphi_{k+1}(x, s)| \leqslant C^{k+1} |sx|^n \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{t_k} t_1 |q(t_1)| t_2 |q(t_2)| \ldots t_{k+1} |q(t_{k+1})| dt_{k+1}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $|sx| \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $|\beta| \leqslant b$. В этом случае, используя при $|st| \leqslant 1$ неравенство (2.20), а при $|st| \geqslant 1$ неравенство (2.21), мы из (2.22) получим

$$|\varphi_{k+1}(x, s)| \leqslant C^{k+1} \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_k} t_1 |q(t_1)| t_2 |q(t_2)| \ldots$$

$$\ldots t_{k+1} |q(t_{k+1})| dt_{k+1}. \tag{2.24}$$

Рассматривая неравенства (2.23) и (2.24) совместно, мы видим, что неравенство (2.23) справедливо также и при $|sx| \geqslant 1$, а неравенство (2.24) при $|sx| \leqslant 1$. Таким образом мы доказали, что из справедливости неравенств (2.20), (2.21) для некоторого k вытекает справедливость их и для $k+1$. А так как неравенства (2.20), (2.21) в силу (2.18), (2.19) справедливы при $k=1$, то из доказанного п' индукции следует справедливость неравенств (2.20), (2.21) при любом k. Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant a$, $|\beta| \leqslant b$ мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x, s)| \leqslant C |sx|^n \int_0^x t |q(t)| dt \Big\{ 1 + C \int_0^x t_1 |q(t_1)| dt_1 +$$

$$+ C^2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} t_1 |q(t_1)| t_2 |q(t_2)| dt_2 + \ldots \Big\} \tag{2.25}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x, s)| \leqslant C \int_0^x t |q(t)| dt \Big\{ 1 + C \int_0^x t_1 |q(t_1)| dt_1 +$$

$$+ C^2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} t_1 |q(t_1)| t_2 |q(t_2)| dt_2 + \ldots \Big\}. \tag{2.26}$$

Рассмотрим выражение, стоящее в фигурных скобках в неравенствах (2.25), (2.26). Это выражение представляет собой полученное методом последовательных приближений решение $u(x)$ интегрального уравнения Вольтерра

$$u(x) = 1 + C \int_0^x t |q(t)| u(t) dt. \tag{2.27}$$

Если функция $q(x)$ непрерывна, то $u(x)=e^{C\int\limits_0^x t\,|\,q(t)\,|\,dt}$, в чем мы убеждаемся, заменяя интегральное уравнение (2.27) эквивалентным ему дифференциальным уравнением

$$u'(x)=Cx\,|\,q(x)\,|\,u(x), \qquad u(0)=1.$$

Таким образом, в случае непрерывной функции $q(x)$ имеем равенство

$$1+C\int\limits_0^x t_1\,|\,q(t_1)\,|\,dt_1+C^2\int\limits_0^x dt_1\int\limits_0^{t_1} t_1\,|\,q(t_1)\,|\,t_2\,|\,q(t_2)\,|\,dt_2+ \\ +\ldots=e^{C\int\limits_0^x t\,|\,q(t)\,|\,dt}. \tag{2.28}$$

В общем случае, аппроксимируя функцию $q(x)$ непрерывными функциями, мы установим справедливость равенства (2.28) для любой функции $q(x)$, удовлетворяющей условию (2.2).

Полагая

$$B=C\int\limits_0^a t\,|\,q(t)\,|\,dt\,e^{C\int\limits_0^a t\,|\,q(t)\,|\,dt}, \tag{2.29}$$

мы из (2.25), (2.26) таким образом получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\,\varphi_k(x,s)\,|\leqslant B\,|\,sx\,|^n \qquad (0\leqslant x\leqslant a,\ \ |\,\beta\,|\leqslant b), \tag{2.30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\,\varphi_k(x,s)\,|\leqslant B \qquad (0\leqslant x\leqslant a,\ \ |\,\beta\,|\leqslant b). \tag{2.31}$$

Неравенство (2.31) показывает, что ряд (2.6) сходится равномерно, если $0\leqslant x\leqslant a$ и $s=\alpha+\beta i$ заключено в полосе: $|\,\beta\,|\leqslant b$, $-\infty<\alpha<\infty$. Обозначим сумму ряда (2.6) через $\varphi(x,s)$. Функция $\varphi(x,s)$ в силу равномерной сходимости ряда (2.6) есть целая функция от s при каждом фиксированном x. Мы доказали, таким образом, теорему.

Теорема 2.1. Дифференциальное уравнение (2.1), при любом $s=\alpha+i\beta$ имеет единственное решение $y(x,s^2)$, удовлетворяющее в нуле условию (2.3). Это решение имеет вид

$$y(x,s^2)=\frac{\sqrt{sx}\,J_\nu(sx)}{s^n}+\frac{\varphi(x,s)}{s^n}, \tag{2.32}$$

где $\varphi(x,s)$ есть целая функция от s при каждом фиксированном x.

Докажем следующую теорему:

Теорема 2.2. Функция $\varphi(x,s)$, входящая в формулу (2.32), при каждом фиксированном x есть целая функция от s конечной степени с показателем, не превышающим x.

Доказательство. Как следует из формулы (1.5) и аналогичной формулы для функции $\sqrt{z}J_{-\nu}(z)$, функция $\sqrt{sx}\,J_\nu(sx)$ при каждом фиксированном x является относительно s целой функцией конечной степени с показателем x, а функция

$$J_\nu(st)\,J_{-\nu}(sx)-J_\nu(sx)\,J_{-\nu}(st)$$

является относительно s целой функцией конечной степени с показателем $x-t$. Отсюда следует, что функции $\varphi_k(x, s)$ $(k=1, 2, \ldots)$, определенные формулами (2.7), (2.8), есть целые функции от s конечной степени с показателем, не превышающим x. Значит и функция $\varphi(x, s)$ при фиксированном x есть целая функция от s степени $\leqslant x$. Действительно, пусть через $C_k(x, s)$ обозначена сумма k первых членов ряда (2.6). При фиксированном x функции $C_k(x, s)$ равностепенно ограничены на вещественной оси и являются целыми функциями степени $\leqslant x$. Поэтому в силу теоремы Фрагмена и Линделефа

$$| C_k(x, s) | \leqslant M e^{|s| x},$$

где постоянная M не зависит от индекса k. Следовательно, имеет место неравенство

$$| \varphi(x, s) | \leqslant M e^{|s| x},$$

из которого видно, что функция $\varphi(x, s)$ есть целая функция степени $\leqslant x$. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 2.3. Функция $\varphi(x, s)$, входящая в формулу (2.32), как функция от s принадлежит $L^2(0, \infty)$ при каждом фиксированном x. При этом $\varphi(x, s)=O\left(\frac{1}{s^{1-\mu}}\right)$ равномерно относительно x, заключенного в любом конечном интервале.

Доказательство. Мы имеем:

$$\varphi(x, s)=(-1)^n \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\, [J_\nu(st) J_{-\nu}(sx) -$$

$$- J_\nu(sx) J_{-\nu}(st)]\, q(t)\, s^n y(t, s^2)\, dt,$$

откуда получим

$$| \varphi(x, s) | \leqslant \frac{\pi}{2 s^{1-\mu}} \int_0^x \left| \sqrt{sx}\, (st)^{\frac{1}{2}-\mu} [J_\nu(st) J_{-\nu}(sx) -\right.$$

$$\left. - J_\nu(sx) J_{-\nu}(st)]\, t^\mu q(t)\, s^n y(t, s^2) \right| dt. \qquad (2.33)$$

Из формулы (2.32) и неравенств (2.30), (2.31) следует справедливость неравенств

$$| s^n y(x, s^2) | \leqslant N | sx |^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant s < \infty) \qquad (2.34)$$

$$| s^n y(x, s^2) | \leqslant N \qquad (0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant s < \infty), \qquad (2.35)$$

где N — некоторая постоянная.

Используя при $| st | \leqslant 1$ неравенства (2.34), (2,13), (2.14), а при $| st | \geqslant 1$ неравенства (2.35), (2.8) — (2.12), мы установим ограниченность выражения

$$\sqrt{sx}\, (st)^{\frac{1}{2}-\mu} [J_\nu(st) J_{-\nu}(sx) - J_\nu(sx) J_{-\nu}(st)]\, s^n y(t, s^2)$$

при $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant s < \infty$. Отсюда следует, что интеграл, входящий в правую часть неравенства (2.33), ограничен при $0 \leqslant s < \infty$ и $0 \leqslant x \leqslant a$. Из (2.33) поэтому следует, что при $s \to \infty$ $\varphi(x, s)=O\left(\frac{1}{s^{1-\mu}}\right)$ равномерно относительно x, заключенного в интервале $0 \leqslant x \leqslant a$. Теорема доказана.

Докажем теперь основную для дальнейшего теорему.

Теорема 2. 4. Дифференциальное уравнение (2.1), где $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию (2.2), имеет единственное решение $y(x, s^2)$, удовлетворяющее в нуле условию (2.3). Это решение представимо в виде

$$y(x, s^2)=\frac{\sqrt{sx}\,J_\nu(sx)}{s^n}+\int_0^x K(x, t)\frac{\sqrt{st}\,J_\nu(st)}{s^n}\,dt\left(\nu=n-\frac{1}{2}\right), \tag{2.36}$$

причем функция $K(x, t)$ вещественна и

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant a}\int_0^x K^2(x, t)\,dt<\infty \tag{2.37}$$

при любом конечном $a>0$.

Доказательство. Как было установлено, функция $\varphi(x, s)$, входящая в формулу (2.32), при каждом фиксированном x относительно s является целой функцией степени $\leqslant x$, принадлежит $L^2(0, \infty)$ и имеет вид (1.3). Следовательно, в силу теоремы 1.1 функция $\varphi(x, s)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x, s)=\int_0^x K(x, t)\sqrt{st}\,J_\nu(st)\,dt \qquad \left(\nu=n-\frac{1}{2}\right),$$

а функция $y(x, s^2)$ — в виде (2.36). Далее, в силу равенства Парсеваля для преобразования Ганкеля имеем:

$$\int_0^x K^2(x, t)\,dt=\int_0^\infty \varphi^2(x, s)\,ds=\int_0^1 \varphi^2(x, s)\,ds+\int_1^\infty \varphi^2(x, s)\,ds.$$

Так как при $0\leqslant x\leqslant a$ и $0\leqslant s<\infty$ функция $\varphi(x, s)$ ограничена, то первый интеграл правой части последнего равенства ограничен при $0\leqslant x\leqslant a$, ограниченность же второго интеграла при $0\leqslant x\leqslant a$ непосредственно вытекает из предыдущей теоремы. Поэтому при любом конечном $a>0$ имеет место неравенство (2.37).

Теорема доказана.

§ 3. Рассмотрим оператор V_L типа Вольтерра

$$V_L[f]=f(x)+\int_0^x K(x, t)\,f(t)\,dt, \tag{3.1}$$

где $K(x, t)$ — функция, входящая в формулу (2.36). Оператор V_L определен на множестве функций, суммируемых с квадратом в каждом конечном интервале. Покажем, что оператор V_L имеет обратный оператор V_L^{-1}, определенный на том же множестве функций. Для этого докажем сходимость в метрике $L^2(0, x)$ ряда

$$K_1(x, t)-K_2(x, t)+\ldots+(-1)^{m+1}K_m(x, t)+\ldots \tag{3.2}$$

где

$$K_1(x, t)=K(x, t)$$

$$K_2(x, t)=\int_t^x K(x, u)\,K_1(u, t)\,du$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_m(x, t) = \int_t^x K(x, u) K_{m-1}(u, t) du$$

. . . .

. . . .

При доказательстве одновременно будет показано и существование функций $K_m(x, t)$. Так как

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant a} \int_0^x K^2(x, t) dt < \infty,$$

то

$$\int_0^x \left\{ \int_0^u K^2(u, t) dt \right\} du < \infty.$$

Следовательно, согласно теореме Фубини

$$\int_0^x \left\{ \int_t^x K^2(u, t) du \right\} dt = \int_0^x \left\{ \int_0^u K^2(u, t) dt \right\} du.$$

Поэтому, полагая

$$c = \sup_{0 \leqslant x \leqslant a} \int_0^x K^2(x, t) dt,$$

имеем:

$$\int_0^x K_2^2(x, t) dt = \int_0^x \left\{ \int_t^x K(x, u) K(u, t) du \right\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x \left\{ \int_0^x K^2(x, u) du \int_t^x K^2(u, t) du \right\} dt =$$

$$= \int_0^x K^2(x, u) du \int_0^x \left\{ \int_t^x K^2(u, t) du \right\} dt =$$

$$= \int_0^x K^2(x, u) du \int_0^x \left\{ \int_0^u K^2(u, t) dt \right\} du \leqslant c^2 x \qquad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Методом индукции докажем, что при любом целом $m > 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^x K_m^2(x, t) dt \leqslant \frac{c^m x^{m-1}}{1.2.3 \ldots (m-1)}. \tag{3.3}$$

Допустим, что неравенство (3.3) справедливо для некоторого m, Докажем, что оно справедливо тогда и для $m+1$. Мы имеем:

$$\int_0^x K_{m+1}^2(x, t) dt = \int_0^x \left\{ \int_t^x K(x, u) K_m(u, t) du \right\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x \left\{ \int_0^x K^2(x, u) du \int_t^x K_m^2(u, t) du \right\} dt \leqslant \int_0^x K^2(x, u) du \int_0^x \left\{ \int_t^x K_m^2(u, t) du \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x K^2(x, u) du \int_0^x \left\{ \int_0^u K_m^2(u, t) dt \right\} du \leqslant \frac{c^{m+1} x^m}{1.2 \ldots m}. \tag{3.4}$$

(Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу теоремы Фубини), Из (3. 4) по индукции следует справедливость неравенства (3.3) при любом целом $m > 0$.

В силу неравенства (3.3) ряд (3.2) при каждом фиксированном x сходится в метрике $L^2(0, x)$ к некоторой функции $H(x, t)$, причем

$$\sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x H^2(x, t)\, dt < \infty.$$

Рассмотрим оператор V_L^{-1} типа Вольтерра, определенный на множестве функций суммируемых с квадратом в каждом конечном интервале формулой

$$V_L^{-1}[f] = f(x) - \int_0^x H(x, t) f(t)\, dt. \tag{3,5}$$

Докажем, что оператор V_L^{-1} является обратным оператору V_L. Действительно,

$$V_L V_L^{-1}[f] = f(x) - \int_0^x H(x, t) f(t)\, dt + \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt -$$

$$- \int_0^x K(x, t) \left\{ \int_0^t H(t, u) f(u)\, du \right\} dt = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt -$$

$$- \int_0^x H(x, t) f(t)\, dt - \int_0^x \left\{ \int_t^x K(x, u) H(u, t)\, du \right\} f(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt -$$

$$- \left\{ \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt - \int_0^x K_2(x, t) f(t)\, dt + \int_0^x K_3(x, t) f(t)\, dt + \dots \right\} -$$

$$- \left\{ \int_0^x K_2(x, t) f(t)\, dt - \int_0^x K_3(x, t) f(t)\, dt + \dots \right\} = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Из существования обратного оператора V_L^{-1}, непосредственно вытекает следующая

Теорема 3.1. Для любой пары дифференциальных операторов L_1 L_2 вида

$$L_1[y] = y''(x) - \left[q_1(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y(x), \quad L_2[y] = y''(x) -$$

$$- \left[q_2(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y(x)$$

существует оператор Вольтерра $V_{L_1 L_2}$, переводящий решение дифференциального уравнения

$$L_1[y] + s^2 y = 0$$

с условием в нуле (2.3) в решение дифференциального уравнения

$$L_2[y] + s^2 y = 0$$

с тем же условием в нуле.

Действительно, таким оператором является оператор $V_{L_1 L_2} = V_{L_2} V_{L_1}^{-1}$.

§ 4. Как отмечалось в предисловии, для каждого уравнения вида (I) существует хотя бы одна спектральная функция, порождающая формулы разложения (IV), (V). В настоящем параграфе мы докажем существование спектральной функции для дифференциального уравнения вида (VI).

Теорема 4. 1. Пусть $y(x, \lambda)$ есть решение дифференциального уравнения (VI) с условием в нуле (VII). Существует такая неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$, называемая спектральной, что для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ имеет место разложение

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$E_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) y(x, \lambda) dx. \tag{4.2}$$

Интегралы здесь понимаются в смысле сходимости в метриках $L^2(0, \infty)$ и $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ соответственно. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_f^2(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{4.3}$$

Доказательство. Разложение по собственным функциям уравнения (VI) в интервале $(0, \infty)$ мы получим из разложения в интервале $(0, b)$ при $b \to \infty$. Интервал $(0, b)$ имеет один сингулярный конец $x=0$, Таким образом, при разложении функции в интервале $(0, b)$ мы можем использовать известные результаты из спектральной теории дифференциальных операторов о разложении функции в интервале с одним сингулярным концом [1], [2]. Уравнение (VI) имеет два линейно независимых решения $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$. При $x \to 0$ $y(x, \lambda) = O(x^n)$ $z(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$. Таким образом, при $n \geqslant 2$[1] единственным решением уравнения (VI) в интервале $(0, b)$, принадлежащим $L^2(0, b)$, является $y(x, \lambda)$. Следовательно, индекс дефекта соответствующего дифференциального оператора в интервале $(0, b)$ есть (1,1) и краевая задача в интервале $(0, b)$ определяется лишь граничным условием

[1] Случай $n = 1$ мы не рассматриваем, так как существование спектральной функции в этом случае известно [1], [2].

в точке $x=b$. Обозначим спектральную функцию для этой краевой задачи через $\rho b(\lambda)$. Так как при $x\to 0$ $y(x, \lambda)\to 0$, а $z(x, \lambda)\to\infty$, то любое решение уравнения (VI) в интервале $(0, b)$ при фиксированном λ имеет конечное число нулей. Отсюда следует [1], что краевая задача в интервале $(0, b)$ определяет дискретный спектр собственных значений $\{\lambda_k\}$ $(k=1, 2,\ldots)$ с единственной предельной точкой на бесконечности. Соответствующие собственные функции принадлежат $L^2(0, b)$. А так как единственным решением уравнения (VI) с интегрируемым квадратом в интервале $(0, b)$ есть $y(x, \lambda)$, то собственными функциями краевой задачи в интервале $(0, b)$ являются функции $y(x, \lambda_k)$ $(k=1, 2,\ldots)$. Таким образом для любой функции $f(x)\in L^2(0, b)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^b f^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} E_f^2(\lambda)\,d\rho_b(\lambda), \tag{4.4}$$

где

$$E_f(\lambda)=\int_0^b f(x)\,y(x, \lambda)\,dx.$$

Докажем, что вариации функций $\rho_b(\lambda)$ равномерно по b ограничены в каждом конечном интервале изменения λ. Пусть $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$. Применяя равенство Парсеваля (4.4) к функции

$$f_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^{n+1}} & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant h\\ 0 & \text{при}\quad h<x<\infty,\end{cases}$$

получим

$$\frac{1}{h^{2n+1}}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{h^{n+1}}\int_0^h y(t, \lambda)\,dt\right\}^2 d\rho_b(\lambda),$$

откуда имеем:

$$\frac{1}{h^{2n+1}}\geqslant\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{\frac{1}{h^{n+1}}\int_0^h y(t, \lambda)\,dt\right\}^2 d\rho_b(\lambda). \tag{4.5}$$

В силу условия (VII) при $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$ h можно взять настолько малым, чтобы

$$\left|\frac{1}{h^{n+1}}\int_0^h y(t, \lambda)\,dt\right|>\frac{1}{(n+1)\,2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Тогда из (4.5) получим

$$\rho_b(\lambda_2)-\rho_b(\lambda_1)<\frac{(n+1)2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{h^{2n+1}},$$

и утверждение о равномерной ограниченности функций $\rho_b(\lambda)$ в каждом конечном интервале доказано. Следовательно, по теореме Хелли можно

[1] См. например [2, стр. 72—73].

выделить последовательность функций $\rho_{b_k}(\lambda)$ $(k=1, 2, \ldots)$, сходящуюся к неубывающей функции $\rho(\lambda)$. Сходимость имеет место в каждой точке непрерывности функции $\rho(\lambda)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную вторую производную и равная нулю в интервалах $\left(0, \frac{1}{N}\right)$ и (N, ∞). И пусть при $k > k_0$ $b_k > N$. В силу равенства Парсеваля (4.4) имеем

$$\int_0^N f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\,y(x, \lambda), dx\right\} d\rho_{b_k}(\lambda). \tag{4.6}$$

Мы используем здесь следующее обобщение второй теоремы Хелли на случай бесконечного интервала:

Лемма 4.1[1]. Пусть последовательность монотонных функций $\rho_k(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ сходится к монотонной функции $\rho(\lambda)$ в каждой точке непрерывности последней и пусть $F(\lambda)$ есть непрерывная функция на всей действительной оси. Предположим, что как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно указать столь большое положительное $A = A(\varepsilon)$, что для всех a, $b > A$ и всех k

$$\int_{-\infty}^{a} |F(\lambda)|\,d\rho_k(\lambda) < \varepsilon, \qquad \int_{b}^{\infty} |F(\lambda)|\,d\rho_k(\lambda) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,d\rho_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Для того, чтобы в равенстве (4.6) можно было применить эту лемму при $b_k \to \infty$, мы должны доказать, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{-\mu}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\,y(x, \lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda) \quad \text{и} \quad \int_{\mu}^{\infty}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\,y(x, \lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda)$$

будут меньше любого сколь угодно малого положительного ε, если $\mu > A(\varepsilon) > 0$, где постоянная A не зависит от b_k. Так как функция $y(x, \lambda)$ является решением уравнения (2.1), то

$$\int_{-\infty}^{-\mu}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\,y(x, \lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\mu}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\left[y''(x, \lambda) - \left(q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}\right)y(x, \lambda)\right]dx\right\}^2 \frac{d\rho_{b_k}(\lambda)}{\lambda^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N}\left[f''(x) - \left(q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}\right)f(x)\right]y(x, \lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda),$$

---

[1] Доказательство леммы м. [2, стр. 155—156].

откуда в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\int_{-\infty}^{\mu}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\, y(x, \lambda)\, dx\right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2}\int_{\frac{1}{N}}^{N}\left\{f''(x)-\left[q(x)+\frac{n(n-1)}{x^2}\right]f(x)\right\}^2 dx.$$

Аналогично получим

$$\int_{\mu}^{\infty}\left\{\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\, y(x, \lambda)\, dx\right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2}\int_{\frac{1}{N}}^{N}\left\{f''(x)-\left[q(x)+\frac{n(n-1)}{x^2}\right]f(x)\right\}^2 dx.$$

В силу этих оценок мы можем применить лемму 4.1 в равенстве (4.6) при $b_k \to \infty$. Мы получим

$$\int_0^N f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_f^2(\lambda)\, d\rho(\lambda),$$

где

$$E_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, y(x, \lambda)\, dx.$$

Мы доказали равенство Парсеваля (4.3) для функций, имеющих непрерывную вторую производную и равных нулю вне некоторого конечного интервала и в окрестности нуля. Аппроксимируя произвольную функцию $f(x) \in L^2(0, \infty)$ последовательностью функций, удовлетворяющих указанным условиям, мы установим справедливость равенства Парсеваля для любой функции пространства $L^2(0, \infty)$. Разложение (4.1) является следствием равенства Парсеваля.

§ 5. В последнее время в ряде работ [3—7] рассматривался вопрос о том, какие спектральные свойства однозначно определяют дифференциальное уравнение (1). В. А. Марченко доказал, что дифференциальное уравнение вида (1) однозначно определяется своей спектральной функцией. В настоящем параграфе мы докажем аналогичную теорему для дифференциального оператора вида (VIII).

Теорема 5.1. Если операторам $L_1[y] = y'' - \left[q_1(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}\right]y$ и $L_2[y] = y'' - \left[q_2(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}\right]y$ соответствуют равные спектральные функции, то $q_1(x) = q_2(x)$.

Доказательство. Обозначим через $y_1(x, \lambda)$ решение уравнения $L_1[y] + \lambda y = 0$, а через $y_2(x, \lambda)$ — решение уравнения $L_2[y] + \lambda y = 0$

Положим: $u_1(x, \lambda) = y_1(x, \lambda)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ и $u_1(x, \lambda) = 0$ при $x > a$ и $u_2(x, \lambda) = y_2(x, \lambda)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ и $u_2(x, \lambda) = 0$ при $x > a$ (a — некоторое положительное число). Мы имеем:

$$u_1(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) y_1(x, \lambda) d\rho(\lambda), \tag{5.1}$$

где

$$E_{1\mu}(\lambda) = \int_0^a u_1(x, \mu) y_1(x, \lambda) dx.$$

В равенстве (5.1) интеграл понимается в смысле сходимости в пространстве $L^2(0, \infty)$. Обозначим

$$u_{1N}(x, \mu) = \int_{-N}^{N} E_{1\mu}(\lambda) y_1(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

Применяя к функции $u_{1N}(x, \mu)$ оператор преобразования $V = V_{L_2} V_{L_1}^{-1}$, переводящий $y_1(x, \lambda)$ в $y_2(x, \lambda)$, имеем:

$$Vu_{1N}(x, \mu) = \int_{-N}^{N} E_{1\mu}(\lambda) y_2(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

Функции $u_{1N}(x, \mu)$ сходятся в пространстве $L^2(0, \infty)$ к функции $u_1(x, \mu)$. Следовательно, функции $Vu_{1N}(x, \mu)$ сходятся в пространстве $L^2(0, a)$ к функции $Vu_1(x, \mu)$. А так как $Vu_1(x, \mu) = u_2(x, \mu)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, то

$$u_2(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) y_2(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

где интеграл понимается в смысле сходимости в пространстве $L^2(0, a)$. Умножая обе части последнего равенства на $u_2(x, \mu)$ и интегрируя по x от 0 до a, получим:

$$\int_0^a y_2^2(x, \mu) dx = \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) u_2(x, \mu) y_2(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right\} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_{1\mu}(\lambda) \int_0^a u_2(x, \mu) y_2(x, \lambda) dx \right\} d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) E_{2\mu}(\lambda) d\rho(\lambda) \leqslant \sqrt{\int_0^a y_1^2(x, \mu) dx} \sqrt{\int_0^a y_2^2(x, \mu) dx}.$$

Таким образом, имеем:

$$\int_0^a y_2^2(x, \mu) dx \leqslant \int_0^a y_1^2(x, \mu) dx. \tag{5.2}$$

Аналогично получим

$$\int_0^a y_1^2(x, \mu) dx \leqslant \int_0^a y_2^2(x, \mu) dx. \tag{5.3}$$

Сопоставляя (5.2) и (5.3), получим равенство

$$\int_0^a y_1^2(x, \mu)\,dx = \int_0^a y_2^2(x, \mu)\,dx,$$

справедливое при любом конечном $a \geqslant 0$. Следовательно,

$$|y_1(x, \lambda)| = |y_2(x, \lambda)|. \tag{5.4}$$

Функции $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, при этом в каждом конечном интервале они могут иметь только конечное число нулей. При переходе через нуль функции $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ должны менять знак, ибо иначе их первые производные в этих точках также равнялись бы нулю и функции $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$, являющиеся решениями дифференциальных уравнений второго порядка, были бы тождественно равны нулю. Поэтому из равенства (5.4) следует, что функции $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ могут отличаться лишь знаком. Следовательно, $q_1(x) = q_2(x)$. Теорема доказана.

§ 6. Прежде, чем дать условия, достаточные для того, чтобы удовлетворяющая им функция $\rho(\lambda)$ являлась спектральной функцией дифференциального оператора вида (VIII), и заняться вопросом о восстановлении дифференциального оператора (VIII) по заданной спектральной функции $\rho(\lambda)$, мы в этом параграфе выведем некоторые необходимые условия, которым должна удовлетворять спектральная функция $\rho(\lambda)$.

Теорема 6.1. Если функция $\rho(\lambda)$ является спектральной функцией дифференциального оператора (VIII), то интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\, d\rho(\lambda) \tag{6.1}$$

существует при любом положительном x.

Доказательство. Применяя оператор V_L^{-1}, определенный формулой (3.5), к функции $y(x, \lambda)$, будем иметь:

$$\frac{\sqrt{x}\,J_\nu(x\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu} = y(x, \lambda) - \int_0^x H(x, t)\, y(t, \lambda)\,dt \quad \left(\nu = n - \frac{1}{2}\right). \tag{6,2}$$

Интегрируя равенство (6.2) по x от 0 до x и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^x \frac{\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\,dt = \int_0^x y(t, \lambda)\,dt - \int_0^x \left\{\int_t^x H(u, t)\,du\right\} y(t, \lambda)\,dt$$

или

$$\int_0^x \frac{\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\,dt = \int_0^x H_1(x, t)\, y(t, \lambda)\,dt, \tag{6.3}$$

где

$$H_1(x, t) = \begin{cases} 1 - \int_t^x H(u, t)\,du & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant x \\ 0 & \text{при} \quad x < t. \end{cases}$$

Из (6.3) в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x \frac{\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\,dt\right\}^2 d\rho(\lambda)=\int_0^x H_1^2(x,\ t)\,dt. \tag{6.4}$$

Таким образом, при любом $x>0$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{0}\left\{\int_0^x \frac{\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\,dt\right\}^2 d\rho(\lambda).$$

А так как при $\lambda\to-\infty$

$$\frac{\sqrt{x}\,J_\nu(x\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\sim\frac{e^{x\sqrt{|\lambda|}}}{\sqrt{2\pi\,|\lambda|^n}}\qquad\left(\nu=n-\frac{1}{2}\right), \tag{6.5}$$

то при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных λ имеет место неравенство

$$\left|\int_0^x \frac{\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda})}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\,dt\right|>e^{(x-\varepsilon)\sqrt{|\lambda|}}\qquad(\varepsilon>0).$$

Поэтому из существования интеграла (6.4) при любом $x>0$ следует также существование интеграла (6.1) при любом $x>0$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. Пусть $N(x)$ — число точек роста спектральной функции $\rho(\lambda)$ дифференциального оператора (VIII), лежащих в интервале $(0,\ x)$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{\sqrt{x}}=\infty\,. \tag{6.6}$$

Доказательство. Обозначим через $N_1(x)$ число точек роста функции $\rho_1(s)=\rho(s^2)$, лежащих в интервале $(0,\ x)$. Так как $N(x)=N_1(\sqrt{x})$, то равенство (6.6) эквивалентно равенству

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_1(x)}{x}=\infty\,. \tag{6.7}$$

Предположим, что формула (6.7) неверна. Тогда существует некоторое $\delta>0$ и последовательность таких чисел $\{s_i\}$, стремящихся к бесконечности, что в интервалах $(s_i-\delta,\ s_i+\delta)$ $i=1,\ 2,\ 3\ldots$ нет ни одной точки роста функции $\rho_1(s)$.

Рассмотрим функцию $z(x)$, принадлежащую $L^2(0,\infty)$ вместе с функцией Lz и, кроме того, равную нулю вне некоторого конечного интервала и в окрестности нуля. Мы имеем:

$$\|z\|=\int_0^\infty z^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

и

$$\|Lz+\lambda_i z\|^2=\int_0^\infty(Lz+\lambda_i z)^2\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda_i-\lambda)^2E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)\quad(\lambda_i=s_i^2),$$

где

$$E(\lambda)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^a z(x)\,y(x,\ \lambda)\,dx.$$

Так как по предположению в интервалах $(s_i - \delta,\ s_i + \delta)$ функция $\rho_1(s)$ постоянна, то

$$\| L_z + \lambda_i z \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} (\lambda_i - \lambda)^2 E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) + \int\limits_{0}^{\infty} (s_i^2 - s^2)^2 E^2(s^2)\, d\rho_1(s) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} (\lambda_i - \lambda)^2 E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) + \int\limits_{0}^{s_i - \delta} (s_i^2 - s^2)^2 E^2(s^2)\, d\rho_1(s) +$$

$$+ \int\limits_{s_i + \delta}^{\infty} (s_i^2 - s^2)^2 E^2(s^2)\, d\rho_1(s) \geqslant \lambda_i^2 \int\limits_{-\infty}^{0} E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) +$$

$$+ s_i^2 \delta^2 \int\limits_{0}^{s_i - \delta} E^2(s^2)\, d\rho_1(s) + s_i^2 \delta^2 \int\limits_{s_i + \delta}^{\infty} E^2(s^2)\, d\rho_1(s),$$

откуда, считая $\delta < 1$, $\lambda_i > 1$, получим

$$\| Lz + \lambda_i z \|^2 \geqslant \lambda_i \delta^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \lambda_i \delta^2 \| z \|^2.$$

Итак, предполагая равенство (6.7) неверным, мы получили, что для любой функции $z(x)$, удовлетворяющей указанным выше условиям, справедливы неравенства

$$\frac{\| Lz + \lambda_i z \|^2}{\lambda_i \| z \|^2} > \delta^2 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{6.8}$$

Для доказательства теоремы достаточно, таким образом, построить функцию, для которой неравенства (6.8) несправедливы.

Обозначим через $y_i(x)$ решение дифференциального уравнения

$$L[y] + \lambda_i y = 0$$

с начальными условиями $y_i(1) = 1$, $y_i'(1) = 0$. Как известно, [4], [5] функции $y_i(x)$ можно представить в виде

$$y_i(x) = \cos \sqrt{\lambda_i}(x - 1) + \int\limits_{0}^{x-1} B(x,\ t) \cos \sqrt{\lambda_i}\, t\, dt. \tag{6.9}$$

Обозначим через $\psi(x)$ функцию, равную единице на отрезке $[2,\ 3]$, нулю вне отрезка $[1,\ 4]$ и имеющую непрерывную вторую производную на всей оси. (Такая функция, очевидно, существует). Построим, наконец, функцию $\psi_A(x)$ следующим образом:

$$\psi_A(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } 2 \leqslant x \leqslant A \\ \psi(x + 3 - A) & \text{при } A \leqslant x. \end{cases}$$

Тогда функции $z_i = y_i(x)\, \psi_A(x)$ удовлетворяют всем условиям, при которых должны иметь место неравенства (6.8). С другой стороны, в силу равенства

$$Lz_i + \lambda_i z_i = 2y_i' \psi_A' + y_i \psi_A''$$

имеем:

$$\frac{\| Lz_i + \lambda_i z_i \|^2}{\lambda_i \| z_i \|^2} =$$

$$= \frac{\int\limits_1^2 [2y_i'(x)\psi_A'(x) + y_i(x)\psi_A''(x)]^2 dx + \int\limits_0^{A+1} [2y_i'(x)\psi_A'(x) + y_i(x)\psi_A''(x)]^2 dx}{\lambda_i \int\limits_1^{A+1} y_i^2(x)\psi_A^2(x)\, dx}. \tag{6.10}$$

Из формулы (6.9) следует равностепенная ограниченность функций $y_i(x)$ в каждом конечном интервале $(1, a)$, где $a \geqslant 1$. Из равностепенной ограниченности функций $y_i(x)$ и формул

$$y_i(x) = \cos\sqrt{\lambda_i}(x-1) + \int\limits_1^x \frac{\sin\sqrt{\lambda_i}(x-t)}{\sqrt{\lambda_i}} y_i(t)\left[q(t) + \frac{n(n-1)}{t^2}\right] dt$$

$$y_i'(x) = -\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}(x-1) + \int\limits_1^x \cos\sqrt{\lambda_i}(x-t)\, y_i(t)\left[q(t) + \frac{n(n-1)}{t^2}\right] dt$$

следует, что при $\lambda_i \to \infty$

$$y_i(x) = \cos\sqrt{\lambda_i}(x-1) + O(1)$$

$$y_i'(x) = -\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}(x-1) + O(1)$$

равномерно в каждом конечном интервале $(1, a)$, а из конструкции функций $\psi_A(x)$ ясно, что

$$\sup \psi_A'(x) = \sup \psi'(x)$$

$$\sup \psi_A''(x) = \sup \psi''(x)$$

(то есть не зависят от A). Поэтому для любого фиксированного A найдется такое число Λ_A, что при $\lambda_i > \Lambda_A$ числитель дроби (6.10) будет $\leqslant C\lambda_i$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от A. С другой стороны, так как $\psi_A(x) = 1$ в интервале $(2, A)$ и $y_i(x) = \cos\sqrt{\lambda_i}(x-1) + O(1)$, то при больших λ_i знаменатель той же дроби будет не меньше, чем $\frac{\lambda_i(A-3)}{2}$. Таким образом, из равенства (6.10) следует, что

$$\overline{\lim_{\lambda_i \to \infty}} \frac{\| Lz_i + \lambda_i z_i \|^2}{\lambda_i \| z_i \|^2} \leqslant \frac{2C}{A-3},$$

где постоянная C от A не зависит. Следовательно, выбирая A таким, чтобы $\frac{2C}{A-3} < \delta^2$, мы убеждаемся в существовании таких функций $z(x)$, для которых неравенства (6.8) не выполняются.

Тем самым теорема доказана.

§ 7. В § 5 мы доказали, что спектральная функция $\rho(\lambda)$ однозначно определяет дифференциальный оператор вида (VIII). Теперь мы займемся вопросом о восстановлении дифференциального оператора вида (VIII) по его спектральной функции. Пусть задана некоторая неубывающая функция $\rho(\lambda)$, удовлетворяющая условиям:

1. При любом вещественном x существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x\sqrt{|\lambda|}}\, d\rho(\lambda). \tag{7.1}$$

2. Если положить

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}{2\left(n+\dfrac{1}{2}\right)} + \rho(\lambda) & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0 \\ \rho(\lambda) & \text{при} \quad \lambda \leqslant 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

то функция

$$F(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x j_\nu(t\sqrt{\lambda})dt \right\} \left\{ \int_0^u j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \lambda^{-n} d\sigma(\lambda) \left(\nu = n - \frac{1}{2}\right) \tag{7.3}$$

имеет непрерывные четвертые производные при $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant u < \infty$. Через $j_\nu(x)$ здесь для удобства обозначена функция $\sqrt{x}\, J_\nu(x)$.

3. Если через $N(x)$ обозначить число точек роста функции $\rho(\lambda)$ в интервале $(0, x)$, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)}{\sqrt{x}} = \infty.$$

(В частности, достаточно, чтобы множество точек роста функции $\rho(\lambda)$ имело хотя бы одну конечную предельную точку).

Мы докажем, что эти условия достаточны для того, чтобы существовал дифференциальный оператор вида (VIII) с непрерывной функцией $q(x)$, для которого данная функция $\rho(\lambda)$ является спектральной.

Как мы видели в § 6, условия 1 и 3 являются также и необходимыми для того, чтобы функция $\rho(\lambda)$ была спектральной.

Лемма 7.1. Если функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то

$$\int_1^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{n+1}} < \infty.$$

Доказательство. Из условий 1 и 2 следует существование интеграла

$$\int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{x\sqrt{\lambda}} j_\nu(t)\, dt \right\}^2 \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^{n+1}}.$$

Поэтому, используя также неравенство

$$\int_1^{\infty} \frac{d\left(\lambda^{n+\frac{1}{2}}\right)}{\lambda^{n+1}} < \infty,$$

имеем

$$\int_1^\infty \left\{ \int_0^{x\sqrt{\lambda}} j_\nu(t)\,dt \right\}^2 \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{n+1}} < \infty.$$

Следовательно, для доказательства леммы достаточно доказать, что при больших x

$$\int_0^x j_\nu(t)\,dt \geqslant \alpha > 0, \tag{7.4}$$

где α — некоторое положительное число. Как известно[1],

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+\frac{1}{2}} j_{\nu+1}(x)\right] = x^{\nu+\frac{1}{2}} J_\nu(x). \tag{7.5}$$

На основании формулы (7.5) имеем:

$$\int_0^x j_\nu(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{t^{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dt}\left[t^{\nu+\frac{1}{2}} j_{\nu+1}(t)\right] dt =$$

$$= j_{\nu+1}(x) + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^x \frac{j_{\nu+1}(t)\,dt}{t} =$$

$$= j_{\nu+1}(x) + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^x \frac{1}{t^{\nu+\frac{5}{2}}} \frac{d}{dt}\left[t^{\nu+\frac{3}{2}} j_{\nu+2}(t)\right] dt =$$

$$= j_{\nu+1}(x) + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{j_{\nu+2}(x)}{x} + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\int_0^x \frac{j_{\nu+2}(t)}{t^2}\,dt. \tag{7.6}$$

А так как для достаточно больших x

$$\left| j_{\nu+1}(x) + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{j_{\nu+2}(x)}{x} \right| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, то из (7.6) следует, что для доказательства (7.4) достаточно доказать неравенство

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\int_0^\infty \frac{j_{\nu+2}(t)}{t^2}\,dt > \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Докажем его. Как известно[2],

$$\int_0^\infty \frac{j_\nu(t)\,dt}{t^{\nu-\mu+\frac{3}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}{t^{\nu-\mu+1}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\mu+1\right)}, \text{ если } 0 < \mu < \nu + \frac{1}{2}.$$

---

[1] См., например, Р. О. Кузьмин. Бесселевы функции. Гостехиздат, 1935 стр. 56.

[2] См., например, Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949, стр. 428.

Поэтому

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\int_0^\infty \frac{j_{\nu+2}(t)}{t^2}\,dt = n(n+2)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}\left(\nu=n-\frac{1}{2}\right).$$

Рассмотрим отдельно два случая:
1) n — четное,
2) n — нечетное.

В первом случае, обозначая $n=2m$, имеем:

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\int_0^\infty \frac{j_{\nu+2}(t)}{t^2}\,dt = 2m(2m+2)\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{2}\,\Gamma(m+2)},$$

откуда, используя известные формулы

$$\Gamma(m+2)=(m+1)!,\quad \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3\,5\ldots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi},$$

получим:

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\int_0^\infty \frac{j_{\nu+2}(t)}{t^2}\,dt = \frac{3.5.7\ldots(2m-1)}{2^{m-1}(m-1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}>\sqrt{\frac{\pi}{2}}>\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Во втором случае, обозначая $n=2m+1$, имеем при $m>0$

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\int_0^\infty \frac{j_{\nu+2}(t)}{t^2}\,dt = (2m+1)(2m+3)\frac{\Gamma(m+1)}{2\sqrt{2}\,\Gamma\left(m+\frac{5}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1.2.3\ldots m.2^m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{2.4.6\ldots2m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}>\sqrt{\frac{2}{\pi}}\quad (n>1)^1.$$

Лемма таким образом доказана,

Обозначим через $f(x, u)$ функцию

$$f(x, u)=\frac{\partial^2 F(x, u)}{\partial x\,\partial u}. \tag{7.7}$$

Функция $f(x, u)$ имеет непрерывные вторые производные.

Имеет место следующая

Теорема 7.1. При фиксированном x интегральное уравнение

$$f(x, u)+\int_0^x f(u, t)\,K(x, t)\,dt+K(x, u)=0\quad (0\leqslant u\leqslant x) \tag{7.8}$$

относительно неизвестной функции $K(x, u)$ имеет единственное решение. Функция $K(x, u)$ имеет при этом непрерывные вторые производные.

Доказательство. Из теории интегральных уравнений известно, что для того, чтобы уравнение (7.8) имело единственное решение, достаточно, чтобы сопряженное однородное уравнение

---

[1] Случай $n=1$ мы не рассматриваем, так как он полностью исследован в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [5].

$$\int_0^x f(t, u)\, g(t)\, dt + g(u) = 0 \tag{7.9}$$

не имело нетривиального решения. Для того, чтобы доказать, что уравнение (7.9) не имеет нетривиального решения, рассмотрим квадратичную форму

$$I(g) = \int_0^x \int_0^x f(t, u)\, g(t)\, g(u)\, dt\, du + \int_0^x g^2(t)\, dt$$

и докажем, что $I(g) > 0$ для любой функции $g(t)$, не равной нулю почти всюду на отрезке $[0, x]$. Предположим сначала, что функция $g(t)$ имеет непрерывную производную при $0 \leqslant t \leqslant x$ и что $g(x) = 0$. Интегрируя дважды по частям, получим

$$I(g) = \int_0^x \int_0^x F(t, u)\, g'(t)\, g'(u)\, dt\, du + \int_0^x g^2(t)\, dt\cdot$$

Подставляя в полученное равенство значение функции $F(x, u)$ из (7.3), будем иметь:

$$I(g) = \int_0^x \int_0^x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right) \left(\int_0^u j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right) \lambda^{-n}\, d\sigma(\lambda) \right\} g'(t) g'(u)\, dt\, du +$$

$$+ \int_0^x g^2(t)\, dt =$$

$$= \int_0^x \int_0^x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right) \left(\int_0^u j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right) \lambda^{-n}\, d\rho(\lambda) \right\} g'(t)\, g'(u)\, dt\, du -$$

$$- \int_0^x \int_0^x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right) \left(\int_0^u j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right) d(\sqrt{\lambda}) \right\} g'(t)\, g'(u)\, dt\, du +$$

$$+ \int_0^x g^2(t)\, dt. \tag{7.10}$$

Используя условие 1, неравенство

$$\left| \int_0^x j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt \right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \qquad (0 \leqslant x < \infty,\ \lambda > 0) \tag{7.11}$$

и лемму 7.1, имеем неравенство

$$\sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant x \\ 0 \leqslant u \leqslant x}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left\{ \int_0^t j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right\} \left\{ \int_0^u j_\nu(v\sqrt{\lambda})\, dv \right\} \lambda^{-n} \right| d\rho(\lambda) < \infty. \tag{7.12}$$

Поэтому на основании теоремы Фубины мы сможем переменить порядок интегрирования в правой части равенства (7.10), после чего получим:

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-n} G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_0^{\infty} G^2(\lambda)\, d(\sqrt{\lambda}) + \int_0^x g^2(t)\, dt, \tag{7.13}$$

где

$$G(\lambda)=\int_0^x g'(t)\left\{\int_0^t j_\nu(v\sqrt{\lambda})\,dv\right\}dt=-\int_0^x g(t)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt. \qquad (7.14)$$

Из (7.14) в силу равенства Парсеваля для преобразования Ганкеля имеем:

$$\int_0^\infty G^2(\lambda)\,d(\sqrt{\lambda})=\int_0^x g^2(t)\,dt. \qquad (7.15)$$

Таким образом, равенство (7.13) принимает вид

$$I(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-n}\,G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda). \qquad (7.16)$$

Из равенства (7.16) следует, что если $I(g)=0$, то $g(t)\equiv 0$. Действительно, пусть $I(g)=0$. Обозначим через $n(x)$ и $n_1(x)$ число нулей функции $G(\lambda)$ и $G_1(\lambda)=G(\lambda^2)$ на интервале $(0, x)$. Из равенства (7.14) мы видим, что функция $G_1(\lambda)$ есть целая функция конечной степени. Следовательно, если $G_1(\lambda)$ не равняется тождественно нулю, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{n_1(x)}{x}<\infty,$$

что равносильно неравенству

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{n(x)}{\sqrt{x}}<\infty,$$

которое несовместимо с условием 3 и равенством $I(g)=0$. Таким образом $G(\lambda)\equiv 0$, а следовательно, в силу (7.15) и $g(t)\equiv 0$.

Мы предполагали, что функция $g(t)$ имеет непрерывную производную при $0\leqslant t\leqslant x$ и что $g(x)=0$. Пусть теперь $g(t)$ — произвольная функция, принадлежащая $L^2(0, x)$, для которой $I(g)=0$. Докажем, что $g(t)=0$ почти всюду на отрезке $(0, x)$. Существует последовательность функций $g_k(x)$, удовлетворяющих указанным выше условиям и сходящихся к функции $g(t)$ в метрике $L^2(0, x)$. Так как

$$I(g)=\lim_{k\to\infty} I(g_k)=\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-n}\,G_k^2(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-n}\,G_k^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)=0. \qquad (7.17)$$

Далее,

$$\lim_{k\to\infty} G_k(\lambda)=-\lim_{k\to\infty}\int_0^x j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,g_k(t)\,dt=G(\lambda). \qquad (7.18)$$

Из равенств (7.17), (7.18) следует, что $G(\lambda)\equiv 0$, а значит и $g(t)=0$ почти всюду в интервале $(0, x)$. Из положительности квадратичной формы $I(g)$ следует, что уравнение (7.9) не имеет нетривиального решения. Действительно, пусть $g(t)$ есть решение уравнения (7.9).

Умножая (7.9) на $g(u)$ и интегрируя по u от 0 до x, получим, что $\mathrm{I}(g)=0$ и, согласно выше доказанному, $g(t)=0$.

Мы доказали таким образом, что уравнение (7.8) имеет единственное решение $K(x, u)$. Существование производной $\frac{\partial^2 K(x, u)}{\partial u^2}$ и непрерывность ее по u при фиксированном x следует из уравнений (7.8) в силу непрерывности функции $\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2}$. Для доказательства существования и непрерывности производной $\frac{\partial^2 K(x, u)}{\partial x^2}$ мы воспользуемся леммой, доказанной И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [5].

Лемма. Если в интегральном уравнении

$$g(x, a)=h(x, a)+\int_0^1 H(x, y, a)\, h(y, a)\, dy \tag{7.19}$$

ядро $H(x, y, a)$ и свободный член $g(x, a)$ являются непрерывными функциями по совокупности независимых переменных и параметра a, и если при $a=a_0$ сопряженное однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение, то в некоторой окрестности точки a_0 и при $0 \leqslant x \leqslant 1$ решение $h(x, a)$ есть непрерывная функция переменных x и a. Если же H и g имеют n непрерывных производных по a, то столько же непрерывных производных по a имеет решение $h(x, a)$.

Доказательство. Положим

$$H(x, y, a)=H(x, y, a_0)+H_1(x, y, a).$$

При этом $|H_1(x, y, a)|<\varepsilon$, если a находится в достаточно малой окрестности точки a_0 и $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Уравнение (7.19) можно записать в операторной форме

$$g=h+Hh=(E+H_0)\, h+H_1 h.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $(E+H_0)^{-1}$, получим

$$(E+H_0)^{-1} g=h+(E+H_0)^{-1} H_1 h. \tag{7.20}$$

Так как норма оператора $(E+H_0)^{-1} H_1$ может быть сделана сколь угодно малой, то уравнение (7.20) можно решать методом последовательных приближений. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что функция $K(x, u)$ имеет непрерывные вторые производные. Действительно, рассмотрим решение уравнения (7.8) в окрестности точки $x=x_0$. Заменяя в уравнении (7.8) t на tx, а u на xu, получим уравнение

$$f(x, ux)+x\int_0^1 f(ux, tx)\, K(x, tx)\, dt+K(x, ux)=0 \quad (0 \leqslant u \leqslant 1), \tag{7.21}$$

где ядро $xf(xu, tx)$ и свободный член $f(x, ux)$ удовлетворяют условиям леммы. Следовательно, функция $K(x, ux)$ непрерывна и имеет непрерывные вторые производные по x и u при $0 \leqslant u \leqslant 1$. Обозначая в уравнении (7.21) xu через z, имеем:

$$f(x, z)+x\int_0^1 f(z, tx)\, K(x, tx)\, dt+K(x, z)=0. \tag{7.22}$$

Так как по доказанному функция $K(x, tx)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial^2 K(x, tx)}{\partial \lambda^2}$, то дифференцируя равенство (7.22) по x и z, мы установим существование и непрерывность производных $\frac{\partial^2 K(x, z)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 K(x, z)}{\partial z^2}$.

§ 8. При помощи функции $K(x, t)$, полученной в предыдущем параграфе, построим систему функций $y(x, \lambda)$ по формуле

$$y(x, \lambda) = \lambda^{-\frac{n}{2}} j_\nu(x\sqrt{\lambda}) + \int_0^x K(x, t)\lambda^{-\frac{n}{2}} j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt \quad \left(\nu = n - \frac{1}{2}\right). \tag{8.1}$$

Мы докажем, что построенная таким способом функция $y(x, \lambda)$ есть решение дифференциального уравнения вида (2.1), для которого функция $\rho(\lambda)$ является спектральной функцией. Доказательство разобьем на две части. В первой части (§ 8) мы докажем справедливость для функции $y(x, \lambda)$ равенства Парсеваля с функцией обложения $\rho(\lambda)$. Во второй части (§ 9) мы докажем, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида (2.1) и условию (2.3) в нуле.

Теорема 8.1. Для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ интеграл

$$E(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, y(x, \lambda)\,dx \tag{8.2}$$

сходится в метрике $L^2_\rho(-\infty, \infty)$. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_0^\infty f^2(x)\,dx, \tag{8.3}$$

и вообще для любых функций $f_1(x) \in L^2(0, \infty)$ и $f_2(x) \in L^2(0, \infty)$ имеет место обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_1(\lambda)\, E_2(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_0^\infty f_1(x)\, f_2(x)\,dx. \tag{8.4}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство Парсеваля (8.4) для характеристических функций интервалов (a, ξ) и (b, η). Так как в этом случае

$$E_1(\lambda) = \int_a^\xi y(x, \lambda)\,dx, \qquad E_2(\lambda) = \int_b^\eta y(x, \lambda)\,dx,$$

то равенство (8.4), подлежащее доказательству, принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_a^\xi y(x, \lambda)\,dx\right\}\left\{\int_b^\eta y(x, \lambda)\,dx\right\} d\rho(\lambda) = \int_0^\infty f_1(x)\, f_2(x)\,dx. \tag{8.5}$$

Рассмотрим левую часть равенства (8.5). Заменяя функцию $y(x, \lambda)$ ее выражением из формулы (8.1), имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{\xi} y(x, \lambda)\, dx\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} y(x, \lambda)\, dx\right\} d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{\xi} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{\xi} dx\int_{0}^{x} K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda) + \qquad (8.6)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{b}^{\eta} dx\int_{0}^{x} K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt\right\}\left\{\int_{a}^{\xi} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{\xi} dx\int_{0}^{x} K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} dx\int_{0}^{x} K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda).$$

Рассмотрим каждое слагаемое правой части последнего равенства отдельно. Используя соотношение (7.2) и обобщенное равенство Парсеваля для преобразования Ганкеля, получим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{\xi} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{\xi} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a}^{x} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\left\{\int_{0}^{\eta} j_\nu x\sqrt{\lambda}\, dx\right\} d(\sqrt{\lambda}) = F(\xi, \eta) - F(a, \eta) -$$

$$- F(\xi, b) + F(a, b) + \int_{0}^{\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx. \qquad (8.7)$$

Далее имеем:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\xi} dx\int_{0}^{x} K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\xi} M(\xi, t, a)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt\right\}\left\{\int_{b}^{\eta} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\, dx\right\}\lambda^{-n}\, d\rho(\lambda),$$

где через $M(\xi, t, a)$ обозначена функция

$$M(\xi, t, a) = \begin{cases} \int_{a}^{\xi} K(x, t)\, dx & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant a \\ \int_{t}^{\xi} K(x, t)\, dx & \text{при } a \leqslant t \leqslant \xi \\ 0 & \text{при } \xi \leqslant t. \end{cases}$$

В силу соотношения (7.2) и равенства Парсеваля для преобразования Ганкеля имеем:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\xi} M(\xi, t, a)\, j_\nu (t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \left\{ \int_b^{\eta} j_\nu (x\sqrt{\lambda})\, dx \right\} \lambda^{-n} d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\xi} M(\xi, t, a)\, j_\nu (t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \left\{ \int_b^{\eta} j_\nu (x\sqrt{\lambda})\, dx \right\} d(\sqrt{\lambda}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\xi} M(\xi, t, a)\, j_\nu (t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \left\{ \int_b^{\eta} j_\nu (x\sqrt{\lambda})\, dx \right\} \lambda^{-n} d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int_{e_1} M(\xi, t, a)\, dt,$$

где e_1 означает общую часть интервалов $[0, \xi]$ и $[b, \eta]$.
Так как $M(\xi, \xi, a) = 0$, то, интегрируя по частям, получим:

$$I_2 = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\xi} \frac{\partial M(\xi, t, a)}{\partial t}\, dt \int_0^{t} j_\nu (u\sqrt{\lambda})\, du \right\} \left\{ \int_b^{\eta} j_\nu (x\sqrt{\lambda})\, dx \right\} \lambda^{-n} d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int_{e_1} M(\xi, t, a)\, dt.$$

Меняя в последнем равенстве порядок интегрирования (что возможно в силу леммы 7.1 и неравенства (7.11) на основании тоеремы Фубини), имеем:

$$I_2 = - \int_0^{\xi} \frac{\partial M(\xi, t, a)}{\partial t} [F(t, \eta) - F(t, b)]\, dt + \int_{e_1} M(\xi, t, a)\, dt.$$

Откуда, интегрируя по частям, получим:

$$I_2 = \int_0^{\xi} M(\xi, t, a) \left[\frac{\partial F(t, \eta)}{\partial t} - \frac{\partial F(t, b)}{\partial t} \right] dt + \int_{e_1} M(\xi, t, a)\, dt. \qquad (8.8)$$

Аналогично получим:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_b^{\eta} dx \int_0^{x} K(x, t)\, j_\nu (t\sqrt{\lambda})\, dt \right\} \left\{ \int_a^{\xi} j_\nu (x\sqrt{\lambda})\, dx \right\} \lambda^{-n} d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_0^{\eta} M(\eta, t, b) \left[\frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} - \frac{\partial F(t, a)}{\partial t} \right] dt + \int_{e_2} M(\eta, t, b)\, dt, \qquad (8.9)$$

где e_2 означает общую часть интервалов $[0, \eta]$ и $[a, \xi]$.

Далее имеем:

$$I_4=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_a^{\xi}dx\int\limits_0^x K(x,t)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\left\{\int\limits_b^{\eta}dx\int\limits_0^x K(x,t)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\lambda^{-n}\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^{\xi}M(\xi,t,a)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\left\{\int\limits_0^{\eta}M(\eta,t,b)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\lambda^{-n}\,d\sigma(\lambda)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^{\xi}M(\xi,t,a)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\left\{\int\limits_0^{\eta}M(\eta,t,b)\,j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\lambda^{-n}\,d(\sqrt{\lambda}).$$

Будем считать $\eta\leqslant\xi$. Тогда, интегрируя в первом слагаемом по частям, а ко второму применяя равенство Парсеваля для преобразования Ганкеля, получим:

$$I_4=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^{\xi}\frac{\partial M(\xi,t,a)}{\partial t}\,dt\int\limits_0^t j_\nu(v\sqrt{\lambda})\,dv\right\}\left\{\int\limits_0^{\eta}\frac{\partial M(\eta,u,b)}{du}\,du\int\limits_0^u j_\nu(v\sqrt{\lambda})\,dv\right\}\lambda^{-n}\,d\sigma(\lambda)+$$

$$+\int\limits_0^{\eta}M(\xi,t,a)\,M(\eta,t,b)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta}F(t,u)\,\frac{\partial M(\xi,t,a)}{\partial t}\,\frac{\partial M(\eta,u,b)}{\partial u}\,du\,dt+\int\limits_0^{\eta}M(\xi,t,a)\,M(\eta,t,b)\,dt.$$

Откуда, интегрируя по частям, имеем:

$$I_4=\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta}M(\xi,t,a)M(\eta,u,b)\frac{\partial^2F(t,u)}{\partial u\,\partial t}\,du\,dt+\int\limits_0^{\eta}M(\xi,t,a)M(\eta,t,b)\,dt. \qquad (8.10)$$

На основании равенств (8.6)—(8.10) имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_a^{\xi}y(x,\sqrt{\lambda})\,dx\right\}\left\{\int\limits_b^{\eta}y(x,\sqrt{\lambda})\,dx\right\}d\rho(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}f_1(t)\,f_2(t)\,dt+Q(\xi,\eta), \qquad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned}Q(\xi,\eta)=&\,F(\xi,\eta)-F(a,\eta)-F(\xi,b)+F(a,b)+\\&+\int\limits_{e_1}M(\xi,t,a)\,dt+\int\limits_{e_2}M(\eta,t,b)\,dt+\\&+\int\limits_0^{\xi}M(\xi,t,a)\left[\frac{\partial F(t,\eta)}{\partial t}-\frac{\partial F(t,b)}{\partial t}\right]dt+\\&+\int\limits_0^{\eta}M(\eta,t,b)\left[\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}-\frac{\partial F(t,a)}{\partial t}\right]dt+\end{aligned} \qquad (8.12)$$

$$+\int\limits_0\int\limits_0^{\eta}M(\xi,t,a)\,M(\eta,u,b)\,\frac{\partial^2F(t,u)}{\partial t\,du}\,du\,dt+\int\limits_0^{\eta}M(\xi,t,a)\,M(\eta,t,b)\,dt.$$

Таким образом, для доказательства (8.5) мы должны доказать, что $Q(\xi, \eta) = 0$. Для этого найдем $\frac{\partial^2 Q(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}$.

Мы считаем $\eta \leqslant \xi$. Поэтому множество e_2 пусто при $\eta < a$ и представляет собой интервал $[a, \eta]$ при $a \leqslant \eta$. В обоих случаях

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{e_2} M(\eta, t, b)\,dt = 0.$$

Далее, при $\eta \leqslant \xi$ $e_1 = [b, \eta]$, следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\int\limits_{e_1} M(\xi, t, a)\,dt = \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\int\limits_b^\eta M(\xi, t, a)\,dt = \frac{\partial M(\xi, \eta, a)}{\partial\xi} = K(\xi, \eta).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta} = f(\xi, \eta) + K(\xi, \eta) + \int\limits_0^\xi K(\xi, t) f(t, \eta)\,dt + \int\limits_0^\eta K(\eta, t) f(t, \xi)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta K(\xi, t) K(\eta, u) f(t, u)\,du\,dt + \int\limits_0^\eta K(\xi, t) K(\eta, t)\,dt =$$

$$= f(\xi, \eta) + \int\limits_0^\xi f(t, \eta) K(\xi, t)\,dt + K(\xi, \eta) +$$

$$+ \int\limits_0^\eta \left[f(t, \xi) + \int\limits_0^\xi f(u, t) K(\xi, u)\,du + K(\xi, t)\right] K(\eta, t)\,dt,$$

где $f(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}$. А так как функция $K(x, u)$ удовлетворяет уравнению (7. 8), то из последнего равенства следует, что $\frac{\partial^2 Q(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$.

Кроме того, из формулы (8.12) видно, что $Q(a, \eta) = Q(\xi, b) = 0$; следовательно, $Q(\xi, \eta) = 0$. Таким образом, равенство Парсеваля (8.4) доказано нами для характеристических функций, а следовательно, оно справедливо и для ступенчатых функций, равных нулю вне конечного интервала. Аппроксимируя произвольную функцию $f(x) \in L^2(0, \infty)$ последовательностью ступенчатых функций, мы докажем справедливость равенства Парсеваля для любой функции пространства $L^2(0, \infty)$.

§ 9. Нам остается доказать, что функция $y(x, \lambda)$, определенная формулой (8.1), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y''(x, \lambda) - \left[q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}\right] y(x, \lambda) + \lambda y(x, \lambda) = 0 \tag{9.1}$$

и условию в нуле

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x, \lambda)}{x^n} = \frac{1}{2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}. \tag{9.2}$$

То, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет в нуле условию (92), непосредственно следует из представления (8.1). Докажем, что функция

$y(x, \lambda)$ есть решение дифференциального уравнения (9.1), в котором $q(x)=2\frac{dK(x, x)}{dx}$.

Лемма 9.1 Функция $f(x, u)$, определенная формулой (7.7), удовлетворяет уравнению

$$f''_{xx}(x, u)-\frac{n(n-1)}{x^2}f(x, u)=f''_{uu}(x, n)-\frac{n(n-1)}{u^2}f(x, u). \tag{9.3}$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F_N(x, u)=\int_{-\infty}^{N}\left\{\int_0^x j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\left\{\int_0^u j_\nu(t\sqrt{\lambda})\,dt\right\}\lambda^{-n}\,d\sigma(\lambda)$$

и

$$f_N(x, u)=\frac{\partial^2 F_N(x, u)}{\partial x\,\partial u}.$$

Мы имеем:

$$f_N(x, u)=\int_{-\infty}^{N} j_\nu(x\sqrt{\lambda})\,j_\nu(u\sqrt{\lambda})\,\lambda^{-n}\,d\sigma(\lambda). \tag{9.4}$$

Положим:

$$\underset{t}{L}=\frac{d^2}{dt^2}-\frac{n(n-1)}{t^2}.$$

Так как функция $j_\nu(x\sqrt{\lambda})$ удовлетворяет уравнению

$$\underset{x}{L}j_\nu(x\sqrt{\lambda})+\lambda j_\nu(x\sqrt{\lambda})=0,$$

то из (9.4) имеем:

$$\underset{x}{L}f_N(x, u)=-\int_{-\infty}^{N}\lambda j_\nu(x\sqrt{\lambda})\,j_\nu(u\sqrt{\lambda})\,\lambda^{-n}\,d\sigma(\lambda),$$

$$\underset{u}{L}f_N(x, u)=-\int_{-\infty}^{N}\lambda j_\nu(x\sqrt{\lambda})\,j_\nu(u\sqrt{\lambda})\,\lambda^{-n}\,d\sigma(\lambda),$$

откуда следует, что

$$\underset{x}{L}f_N(x, u)=\underset{u}{L}f_N(x, u). \tag{9.5}$$

Докажем, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^a\int_0^b f_N{}'(x, u)\,\psi(x, u)\,dx\,du=\int_0^a\int_0^b f(x, u)\,\psi(x, u)\,dx\,du \tag{9.6}$$

при любой функции $\psi(x, u)$, имеющей непрерывные вторые производные и равной нулю при $x\geqslant a$, $0\leqslant u<\infty$ и при $u\geqslant b$, $0\leqslant x<\infty$, а также в окрестности нуля. Действительно, интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^a\int_0^b f_N(x, u)\,\psi(x, u)\,dx\,du=\int_0^a\int_0^b F_N(x, u)\,\psi''_{xu}(x, u)\,dx\,du$$

и

$$\int_0^a\int_0^b f(x, u)\psi(x, u)\,dx\,du = \int_0^a\int_0^b F(x, u)\psi''_{xu}(x, u)\,dx\,du.$$

А так как в силу леммы 7.1 при $N\to\infty$ $F_N(x, u)\to F(x, u)$ равномерно относительно x и u, то из последних формул следует справедливость равенства (9.6).

Пусть $\varphi(x, u)$ — произвольная функция, имеющая непрерывные четвертые производные и равная нулю при $x\geqslant a$, $0\leqslant u<\infty$ и при $u\geqslant b$, $0\leqslant x<\infty$, а также в окрестности нуля. Мы имеем:

$$\int_0^a\int_0^b (\underset{x}{L}f-\underset{u}{L}f)\varphi(x, u)\,dx\,du = \int_0^a\int_0^b (\underset{x}{L}\varphi-\underset{u}{L}\varphi)f(x, u)\,dx\,du. \tag{9.7}$$

Применяя равенство (9.6) к функции $\psi(x, u)=\underset{x}{L}\varphi-\underset{u}{L}\varphi$ и используя (9.5), мы из (9.7) получим

$$\int_0^a\int_0^b (\underset{x}{L}f-\underset{u}{L}f)\varphi(x, u)\,dx\,du = \lim_{N\to\infty}\int_0^a\int_0^b (\underset{x}{L}\varphi-\underset{u}{L}\varphi)f_N(x, u)\,dx\,du =$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^a\int_0^b (\underset{x}{L}f_N-\underset{u}{L}f_N)\varphi(x, u)\,dx\,du=0.$$

откуда в силу произвольности функции $\varphi(x, u)$ имеем:

$$\underset{x}{L}f(x, u)-\underset{u}{L}f(x, u)=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 9.2. Функция $K(x, u)$, являющаяся решением уравнения (7.8), удовлетворяет соотношению

$$K''_{xx}(x, u)-\frac{n(n-1)}{x^2}K(x, u)-2\frac{dK(x, x)}{dx}K(x, u)=$$

$$=K''_{uu}(x, u)-\frac{n(n-1)}{u^2}K(x, u). \tag{9.8}$$

Доказательство. Дифференцируя уравнение

$$f(x, u)+\int_0^x f(u, t)K(x, t)\,dt+K(x, u)=0 \tag{9.9}$$

по x дважды, получим

$$f''_{xx}(x, u)+f'_x(u, x)K(x, x)+f(u, x)\frac{dK(x, x)}{dx}+f(u, x)K'_x(x, t)\Big|_{t=}+$$

$$+\int_0^x f(u, t)K''_{xx}(x, t)\,dt+K''_{xx}(x, u)=0. \tag{9.10}$$

Дифференцируя (9.9) по u дважды, получим

$$f''_{uu}(x, u)+\int_0^x f''_{uu}(u, t)K(x, t)\,dt+K''_{uu}(x, u)=0,$$

откуда в силу (9.3) имеем:

$$f''_{uu}(x, u)+\int_0^x\left[\frac{n(n-1)}{u^2}-\frac{n(n-1)}{t^2}\right]f(u, t)K(x, t)\,dt+$$

$$+\int_0^x f''_{tt}(u, t)K(x, t)\,dt+K''_{uu}(x, u)=0.$$

Интегрируя в последнем равенстве по частям, получим

$$f''_{uu}(x, u)+\int_0^x\left[\frac{n(n-1)}{u^2}-\frac{n(n-1)}{t^2}\right]f(u, t)K(x, t)\,dt+$$

$$+f'_t(u, t)K(x, t)\Big|_{t=0}^{x}-f(u, t)K'_t(x, t)\Big|_{t=0}^{x}+\int_0^x f(u, t)K''_{tt}(x, t)\,dt+K''_{uu}(x, u)=0. \qquad (9.11)$$

Так как при $u\to 0$ левая часть равенства (9.3) и первое слагаемое правой части ограничены в силу непрерывности функции $f(x, u)$ и ее вторых производных, то из (9.3) следует, что

$$f(x, 0)=0. \qquad (9.12)$$

Из (9.9) и (9.12) имеем:

$$K(x, 0)=0.$$

Равенство (9.11) принимает, следовательно, вид

$$f''_{uu}(x, u)+\int_0^x\left[\frac{n(n-1)}{u^2}-\frac{n(n-1)}{t^2}\right]f(u,t)K(x, t)\,dt+f'_t(u, t)K(x, t)\Big|_{t=x}-$$

$$-f(x, u)K'_t(x, t)\Big|_{t=x}+\int_0^x f(u, t)K''_{tt}(x, t)\,dt+K''_{uu}(x, u)=0. \qquad (9.13)$$

Умножая (9.9) на $\frac{n(n-1)}{u^2}-\frac{n(n-1)}{x^2}-2\frac{dK(x, x)}{dx}$, прибавляя к полученному результату (9.10) и вычитая (9.11) получим в силу (9.3)

$$K''_{xx}(x, u)-\frac{n(n-1)}{x^2}K(x, u)-K''_{uu}(x, u)+\frac{n(n-1)}{u^2}K(x, u)-$$

$$-2\frac{dK(x, x)}{dx}K(x, u)+\int_0^x f(u, t)\left[K''_{xx}(x, t)-\frac{n(n-1)}{x^2}K(x, t)-K''_{tt}(x,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{t^2}K(x, t)-2\frac{(Kd\,x, x)}{dx}K(x, t)\right]dt=0. \qquad (9.14)$$

А так как по доказанному однородное уравнение

$$f(x, u)+\int_0^x f(u, t)\, g(t)\, dt=0$$

имеет лишь тривиальное решение, то из (9.14) следует, что

$$K''_{xx}(x, u)-\frac{n(n-1)}{x^2}K(x, u)-K''_{uu}(x, u)+\frac{n(n-1)}{u^2}K(x, u)-$$

$$-2\frac{dK(x, x)}{dx}K(x, u)=0.$$

Лемма доказана.

Теорема 9.1. Функция $y(x, \lambda)$, определенная формулой (8.1), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y''(x, \lambda)-\left[\frac{n(n-1)}{x^2}+q(x)\right]y(x, \lambda)+\lambda y(x, \lambda)=0, \qquad (9.15)$$

где

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d^2}{dx^2}[j_\nu(x\sqrt{\lambda})]-\left[\frac{n(n-1)}{x^2}-\lambda\right]j_\nu(x\sqrt{\lambda})=0, \qquad (9.16)$$

то, подставляя в левую часть (9.15) выражение для $y(x, \lambda)$ из (8.1), получим

$$y''(x, \lambda)-\left[\frac{n(n-1)}{x^2}+2\frac{dK(x, x)}{dx}\right]y(x, \lambda)+\lambda y(x, \lambda)=$$

$$=-\frac{dK(x,x)}{dx}j_\nu(x\sqrt{\lambda})-\frac{n(n-1)}{x^2}\int_0^x K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt-$$

$$-2\frac{dK(x,x)}{dx}\int_0^x K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt+\lambda\int_0^x K(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt+$$

$$+K(x, x)\frac{d}{dx}[j_\nu(x\sqrt{\lambda})]+K'_x(x, t)\, j_\nu(x\sqrt{\lambda})\Big|_{t=x}+$$

$$+\int_0^x K''_{xx}(x, t)\, j_\nu(t\sqrt{\lambda})\, dt.$$

Выражая в последнем равенстве $K''_{xx}(x, t)$ через $K''_{tt}(x, t)$ по формуле (9.8), получим

$$y''(x, \lambda) - \left[\frac{n(n-1)}{x^2} + 2\frac{dK(x, x)}{dx}\right] y(x, \lambda) + \lambda y(x, \lambda) =$$

$$= -\frac{dK(x, x)}{dx} j_\nu(x\sqrt{\lambda}) + \lambda \int_0^x K(x, t) j_\nu(t\sqrt{\lambda}) dt + K(x, x)\frac{d}{dx}[j_\nu(x\sqrt{\lambda})] +$$

$$+ K'_x(x, t) j_\nu(x\sqrt{\lambda})\Big|_{t=x} + \int_0^x K''_{tt}(x, t) j_\nu(t\sqrt{\lambda}) dt -$$

$$- \int_0^x \frac{n(n-1)}{t^2} K(x, t) j_\nu(t\sqrt{\lambda}) dt. \qquad (9.17)$$

Далее, интегрируя дважды по частям, имеем:

$$\int_0^x K''_{tt}(x, t) j_\nu(t\sqrt{\lambda}) dt = K'_t(x, t) j_\nu(x\sqrt{\lambda})\Big|_{t=x} -$$

$$- K(x, x)\frac{d}{dx}[j_\nu(x\sqrt{\lambda})] + \int_0^x K(x, t)\frac{d^2}{dt^2}[j_\nu(t\sqrt{\lambda})] dt.$$

Подставляя это выражение в (9.17) и используя (9.16), получим

$$y''(x, \lambda) - \left[\frac{n(n-1)}{x^2} + 2\frac{dK(x, x)}{dx}\right] y(x, \lambda) + \lambda y(x, \lambda) = 0.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. ГТТИ, 1950.
2. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка ГТТИ, 1950.
3. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР, 72 1950, 457—460.
4. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. Труды Московского математического общества, т. 1, 1952, 328—420.
5. Гельфанд И. М. и Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 309—360.
6. Крейн М. Г. Об одном обобщении исследований Стильтьеса. ДАН СССР, 87, 1952, 881—884.
7. Крейн М. Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции. ДАН СССР, 93, 1953, 617—620.