ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕШЕНИЙ У НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Я. Любарский

Введение. Решение $y(x) \not\equiv \text{const}$ нелинейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + F(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{0,1}$$

называется *переходным*, если существуют пределы

$$y_- = \lim_{x \to -\infty} y(x) \quad \text{и} \quad y_+ = \lim_{x \to +\infty} y(x) \tag{0,2}$$

и

$$\lim_{x \to \pm\infty} y^{(k)}(x) = 0. \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{0,3}$$

Числа y_- и y_+ должны, очевидно, удовлетворять уравнению $F(y, 0, \ldots, 0) = 0$.

Предметом настоящей статьи являются переходные решения уравнений вида

$$P_0\left(\frac{d}{dx}\right) y + f(z) = 0, \quad z = Q\left(\frac{d}{dx}\right) y, \tag{0,4}$$

где $P_0(\nu)$ и $Q(\nu)$ — некоторые полиномы, а $f(z)$ — непрерывная неотрицательная функция. Это уравнение представляет собой весьма частный случай уравнения (0,1). Несколько ранее [1] были рассмотрены уравнения еще более частного вида, получающиеся из (0,4), если положить $Q(\nu) \equiv 1$.

Мы ограничимся случаем, когда $Q(0) \neq 0$.

При этом без ограничения общности можно положить

$$Q(0) = 1, \quad P_0(0) = 0. \tag{0,5}$$

Пусть функция $f(z)$ имеет только изолированные нули. Тогда *для существования переходного решения необходимо, чтобы* $P_0'(0) \neq 0$, $y_- \neq y_+$ и, более того, чтобы

$$P_0'(0)[y_- - y_+] > 0. \tag{0,6}$$

В самом деле, интегрируя уравнение (0,4) по x от $-\infty$ до $+\infty$ получим

$$P_0(0)\{y_+ - y_-\} + \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dx = 0. \tag{0,7}$$

Функция $y(x)$ не является постоянной, поэтому и $z(x) \not\equiv \text{const}$. Отсюда следует, что подинтегральная функция в (0,7) не равна тождественно нулю и интеграл строго положителен.

Полагая условие (0,6) выполненным, будем считать, не ограничивая общности рассмотрения, что

$$y_- = 0, \quad y_+ = 1, \quad a_1 = P_0(0) < 0. \tag{0,8}$$

Ниже будут установлены некоторые свойства переходных решений и указаны некоторые достаточные признаки существования и единственности переходных решений. Получен также один достаточный признак отсутствия переходных решений. Некоторые из полученных результатов являются новыми даже для случая $Q(\nu) \equiv 1$.

§ 1. Монотонность переходных решений.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что *все корни полинома $P_0(\nu)$ являются вещественными и простыми*. При этом имеет место теорема монотонности, обнаруженная Б. Я. Левиным.

Теорема 1.1. *Пусть $y(x)$ — некоторое ограниченное решение уравнения (0,4), причем функция $z(x)$ тоже ограничена. Тогда $y(x)$ является монотонно-возрастающей функцией.*

Для доказательства введем в рассмотрение функцию Грина $Y_{P_1}(x-\xi)$ оператора $P_1\left(\frac{d}{dx}\right)$ $(\nu P_1 = P_0)$, выделенную условиями $Y(\pm\infty) = 0$. Как хорошо известно, такая функция Грина определяется формулой

$$Y_{P_1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{\nu x}\, d\nu}{P_1(\nu)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\nu x}\, d\nu}{P_1(-i\nu)} \tag{1,1}$$

и является знакопостоянной функцией*, причем

$$P_1(0)\, Y_{P_1}(x) > 0. \quad -\infty < x < \infty \tag{1,2}$$

Из уравнения (0,4) вытекает, что

$$y'(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_{P_1}(x-\xi) f[z(\xi)]\, d\xi \tag{1,3}$$

и, следовательно, $y'(x) > 0$.

Пусть $S(\nu)$ — произвольный полином. Обозначим через $n(S, a)$ число нулей этого полинома, содержащихся в интервале $[0, a)$. Будем говорить, что полином $S_1(\nu)$ *подчинен* полиному $S(\nu)$, если все корни этих полиномов вещественны и $n(S_1, a) \leqslant n(S, a)$, $-\infty < a < \infty$.

Будем называть *конусом полинома* $P(\nu)$ совокупность всех полиномов S вида

$$S(\nu) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k S_k(\nu), \quad m = 1, 2, \ldots, \alpha_k > 0, \quad S_k(0) = 1.$$

где $S_k(\nu)$ — произвольные полиномы, подчиненные полиному $P(\nu)$. Конус полинома $P(\nu)$ будем обозначать через $K(P)$. Для нас это понятие существенно в связи со следующей леммой:

---

* Это вытекает из очевидного тождества $Y_P(x) = \frac{1}{a_n}\int\int\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\nu_1, x-x_1) K(\nu_2, x_1-x_2)\ldots K(\nu_n, x_{n-1}-x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$, $P = a_n \prod\limits_1^n (\nu - \nu_j)$; где $K(\nu, x-y)$ — функция Грина оператора $\left(\frac{d}{dx} - \nu\right)$, удовлетворяющая условиям $K(\nu, \pm\infty) = 0$, если учесть, что $\operatorname{sgn} K(\nu, x) = -\operatorname{sgn}\nu$.

Лемма 1.1. *Если* $Q(\nu) \in K(P)$, $P(0) < 0$ *и степень полинома* Q *меньше степени* P, *то выражение*

$$Q\left(\frac{d}{dx}\right) Y_P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{Q(\nu)}{P(\nu)} e^{\nu x} \, d\nu \tag{1,4}$$

не принимает положительных значений.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда полином $Q(\nu)$ подчинен $P(\nu)$ и $Q(0) > 0$.

Лемма, очевидно, верна, когда $Q(\nu) \equiv 1$. Предположим, что лемма справедлива, если степень $Q(\nu)$ равна k, и докажем ее для полиномов $Q(\nu)$ степени $(k+1)$. Положим

$$Q(\nu) = \left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right) Q_1(\nu),$$

где ν_0 — какой-либо корень полинома $Q(\nu)$. Обозначим через μ_0 ближайший к ν_0 корень полинома $P(\nu)$, лежащий в интервале $[0, \nu_0]$. Положим далее

$$P(\nu) = \left(1 - \frac{\nu}{\mu_0}\right) \widetilde{P}(\nu).$$

Перепишем интеграл (1,4) в виде

$$\left(1 - \frac{\mu_0}{\nu_0}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{Q_1(\nu)}{P(\nu)} e^{\nu x} \, d\nu + \frac{\mu_0}{\nu_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{Q_1(\nu)}{\widetilde{P}(\nu)} e^{\nu x} \, d\nu. \tag{1,5}$$

Полиномы $Q_1(\nu)$ и $\widetilde{P}(\nu)$ удовлетворяют всем условиям леммы, поэтому оба интеграла в данном выражении отрицательны. Так как $1 - \frac{\mu_0}{\nu_0} \geqslant 0$, $\frac{\mu_0}{\nu^0} \geqslant 0$, то выражение (1,5) отрицательно. Лемма доказана.

Элементарным образом получается следующая характеристика конуса полинома $P(\nu)$, который мы запишем в виде

$$P(\nu) = a_n \prod_{j=1}^{l} (\nu - \lambda_j) \prod_{s=1}^{m} (\nu - \mu_s), \ \lambda_l < \lambda_{l-1} < \ldots < \lambda_1 < 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots \ldots < \mu_m.$$

Совокупность всех содержащихся в $K(P)$ *полиномов* $A(\nu)$ *степени* p, *нормированных условием* $A(0) = 1$, *представляет собой* p — *мерный симплекс, вершины которого соответствуют полиномам*

$$A_k(\nu) = \prod_{j=1}^{p-k} \left(1 - \frac{\nu}{\lambda_j}\right) \prod_{s=1}^{k} \left(1 - \frac{\nu}{\mu_s}\right), \ \lambda_j = \infty, \text{ если } j > l, \ \mu_s = \infty, \text{ если } s > m, \ k = 0, 1, \ldots, p.$$

Для того чтобы узнать, принадлежит ли произвольный полином $B(\nu)$ *степени* p *конусу полинома* P, *достаточно разложить его по полиномам* $A_k(\nu)$ (это разложение однозначно и выполняется элементарным образом) *и проверить, все ли коэффициенты разложения неотрицательны.*

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $Q(\nu) \in K(P_1)$. При этом имеет место следующая

Теорема 1.2. *Пусть* $y(x)$ — *некоторое ограниченное решение уравнения* (0,4), *причем функция* $z(x)$ *тоже ограничена. Если степень полинома* $Q(\nu)$ *меньше* $n-1$ (*и* $Q \in K(P_1)$, *то функция* $z(x)$ *монотонно возрастает, а* $y(x)$ *является переходным решением.*

В самом деле, из определения (0,4) функции $z(x)$ и соотношения (1,3) следует, что

$$z'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{d}{dx}\right) Y_{P_1}(x-\xi) f[z(\xi)]\, d\xi. \tag{1,6}$$

Это выражение в силу леммы 1.1 является положительным. Мы видим, что функция $z(x)$ монотонно возрастает и имеет конечные пределы $z(-\infty)$ и $z(+\infty)$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому в силу (1,6) производная $z'(x)$ также имеет пределы при $x \to \pm\infty$. Эти пределы должны равняться нулю, что возможно только при условии $f[z(\pm\infty)] = 0$. Теперь, возвращаясь к соотношению (1,3), легко показать, что производные $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$.

Из теоремы 1.2 следует, что для построения переходного решения $y(x)$ $(y(-\infty)=0,\ y(+\infty)=1)$ достаточно знать функцию $f(z)$ только на интервале $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Дальнейшая характеристика переходного решения $y(x)$ дается следующей теоремой, принадлежащей Б. Я. Левину:

Теорема 1.3. *Если степень полинома $Q(\nu)$ меньше степени полинома $P_1(\nu)$ и $Q \in K(P_1)$, то число точек перегиба кривой, изображающей переходное решение $y(x)$, не превосходит числа экстремумов функции $f(z)$ на интервале $0 \leqslant z \leqslant 1$.*

Доказательство. Дифференцируя равенство (1,3) и затем интегрируя по частям интеграл в правой части, получим

$$y''(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} Y_{P_1}(x-\xi) f'[z(\xi)]\, z'(\xi)\, d\xi.$$

Ядро $Y_{P_1}(x-\xi)$ не увеличивает осцилляции [2]. Это означает, что если $F(\xi)$ — произвольная функция, имеющая N перемен знаков, и интеграл

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{P_1}(x-\xi) F(\xi)\, d\xi$$

существует, то число перемен знака функции $G(x)$ не превосходит N. В нашем случае $F(\xi) = f'[z(\xi)]\, z'(\xi)$. Производная $z'(\xi)$ положительна при всех ξ. Функция $z(\xi)$ монотонно пробегает все значения от нуля до единицы. При этом $f'(z)$ меняет знак столько раз, сколько есть минимумов и максимумов у функции $f(z)$ на интервале (0,1). В силу осцилляторности ядра $Y_{P_1}(x-\xi)$, вторая производная $y'(x)$ меняет знак не большее число раз.

§ 2. Линейный дифференциальный оператор с кусочно-постоянными коэффициентами

Теоремы § 1 обнаружили ряд свойств переходного решения, *если* оно существует. Факт существования переходных решений при известных условиях будет установлен ниже, причем переходное решение будет получено с помощью некоторого итерационного процесса. Вспомогательным средством при этом явится линейный дифференциальный оператор:

$$Ly = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y, \tag{2,1}$$

обладающий следующими свойствами:

1°. Все коэффициенты $a_k(x)$ кусочно-постоянны:

$$a_k(x) = \begin{cases} a_k^-, & x < 0 \\ a_k^+, & x > 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

причем $a_n^- = a_n^+ \neq 0$, $a_{n-1}^- = a_{n-1}^+$, $a_0^- \neq a_0^+$, $a_0^- a_0^+ \neq 0$.

2°. Полиномы

$$P_{-}(\nu)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{-}\nu^k, \quad P_{+}(\nu)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{+}\nu^k \tag{2,2}$$

имеют лишь вещественные и простые корни.

Только такие дифференциальные операторы мы будем обозначать через L.

Отрицательные корни полиномов P_- и P_+ будем обозначать через

$$\lambda_1^- > \lambda_2^- > \ldots > \lambda_{l_-}^- \text{ и } \lambda_1^+ > \lambda_2^+ > \ldots > \lambda_{l_+}^+. \tag{2,3}$$

Положительные корни этих полиномов обозначим через

$$\mu_1^- < \mu_2^- < \ldots < \mu_{m_-}^- \text{ и } \mu_1^+ < \mu_2^+ < \ldots < \mu_{m_+}^+.$$

Положим

$$P_+(\nu) - P_-(\nu) = R(\nu) \equiv (a_0^+ - a_0^-)\, Q(\nu).$$

Назовем разность $l_+ - l_-$ *индексом* оператора L.

Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть индекс оператора L отрицателен и полином Q принадлежит конусу полинома $\Pi(\nu-\lambda^-)\Pi(\nu-\mu^+)$, тогда задача*

$$Ly(x)=g(x) \quad |y(\pm\infty)|<\infty \tag{2,4}$$

не имеет решений, если функция $g(x)$ знакопостоянна, но не равна тождественно нулю.

Теорема 2.2. *Если индекс r оператора L положителен, то оператор L имеет r — параметрическое семейство функций Грина $K(x, \xi)$ удовлетворяющих условиям*

$$K(\pm\infty, \xi)=0. \quad -\infty<\xi<\infty \tag{2,5}$$

Предположим, что степень полинома $R(\nu)$ не превышает $n-2$ и его можно представить в виде некоторой суммы типа

$$R(\nu)=\sum_{j=1}^{s} R_{1j}(\nu)\, R_{2j}(\nu), \quad R_{1j}(0)<0; \quad R_{2j}(0)>0, \tag{2,6}$$

где R_{1j} — полиномы степени не выше $(r-1)$, а R_{2j} — полиномы степени не выше $(n-r-1)$, причем все полиномы R_{2j} подчинены полиному $\Pi(\nu-\lambda^-)\Pi(\nu-\mu^+)$ и все полиномы $R(\nu)R_{1j}(\nu)$ — полиному $\Pi(\nu-\lambda^+)\Pi(\nu-\mu^-)$.

Ввиду того, что выполнимость этого предположения не всегда легко проверить, приведем несколько частных случаев, когда оно выполняется автоматически:

a) $R(\nu)=\text{const}<0$.

b) $R(\nu)=a(\nu-\nu_0)$, $\nu_0>\mu_1^-$, $0<a<a_m$, где a_m — минимальное положительное значение a, при котором полином P_-+R имеет кратный корень.

c) $R(\nu)=a(\nu-\nu_0)$, $\nu_0<\lambda_1^-$, $0>a>b_m$, где b_m — максимальное отрицательное значение a, при котором полином P_-+R имеет кратный корень.

d) Если $R(0)<0$, степень полинома $R(\nu)$ меньше чем $(n-r)$ и $R(\nu)$ принадлежит одновременно конусу полинома $\Pi(\nu-\lambda^-)\Pi(\nu-\mu^+)$ и конусу полинома $\Pi(\nu-\lambda^+)\Pi(\nu-\mu^-)$.

Условие d, по-видимому, легко проверить в каждом конкретном случае. Так, например, если R — полином второй степени и

$$P_-(\nu)=-(\nu-\lambda_1^-)(\nu-\mu_1^-)(\nu-\mu_2^-)(\nu-\mu_3^-),$$

$$P_+(\nu)=-(\nu-\lambda_1^+)(\nu-\lambda_2^+)(\nu-\mu_1^+)(\nu-\mu_2^+),$$

то для выполнения условия d необходимо и достаточно, чтобы имел место один из следующих двух случаев:

d_1) Числа λ_2^+, λ_1^+, μ_1^+, μ_2^+, μ_1^-, μ_2^-, μ_3^- образуют монотонно-возрастающую последовательность, а в остальном произвольны, число λ_1^- равно $\lambda_1^- = \lambda_1^+ + \lambda_2^+ + \mu_1^+ + \mu_2^+ - \mu_1^- - \mu_2^- - \mu_3^-$.

d_2) Числа μ_1^-, $-\lambda_1^+$, $x_1 = \mu_2^- - \mu_1^-$, $x_2 = \mu_1^+ - \mu_2^-$, $x_3 = \mu_2^+ - \mu_1^+$ и $y_1 = \lambda_1^+ - \lambda_2^+$ положительны, а в остальном совершенно произвольны, $x_4 = \mu_3^- - \mu_1^+$ и $y_2 = \lambda_2^+ - \lambda_1^-$ — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_4 < x_3 + \frac{x_2(x_1 + x_2)}{x_1 + 2x_2 + x_3}, \quad y_2 > \mu_1^- + x_4 - x_2 - x_3.$$

Теперь можно сформулировать третью теорему.

Теорема 2.3. *Если индекс r оператора L положителен и полином $R(\nu)$ может быть представлен в виде суммы* (2.6), *то существует, по крайней мере, одна функция Грина $K_0(x, \xi)$, которая удовлетворяет условиям* (2.5) *и обладает свойством*

$$(-1)^r xR\left(\frac{d}{dx}\right) K_0(x, \xi) \leqslant 0, \quad -\infty < x, \ \xi < \infty. \tag{2,7}$$

Доказательство теорем этого пункта вынесено в приложение.

§ 3. Переход к интегральному уравнению.

Выберем числа $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ так, чтобы оператор

$$L = P_0\left(\frac{d}{dx}\right) + a(x)\,Q\left(\frac{d}{dx}\right) \quad a(x) = \begin{cases} a_-, & x < 0 \\ a_+, & x > 0 \end{cases}$$

обладал свойствами 1° и 2° предыдущего пункта.

Выберем число c так, чтобы $ca_- = (c-1)a_+$ и положим $y - c = \eta$, $z - c = \zeta$. Так как $P_0(0) = 0$ и $Q(0) = 1$, система (0,4) в новых обозначениях принимает следующий вид:

$$P_0\left(\frac{d}{dx}\right)\eta + f(c + \zeta) = 0, \quad \zeta = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\eta. \tag{3,1}$$

Положим далее

$$f(c + \zeta) = \zeta a(\zeta) - \varphi(\zeta), \quad a(\zeta) = \begin{cases} a_-, & \zeta < 0 \\ a_+, & \zeta > 0. \end{cases} \tag{3,2}$$

Заметим, что величина ζ имеет своим пределом $-c$ при $x \to -\infty$ и $(1-c)$ при $x \to +\infty$, ввиду чего в некоторой точке $x = x_0$ имеем $\zeta(x_0) = 0$. С другой стороны, решение поставленной задачи, если оно существует, допускает произвольную трансляцию вдоль оси x. Поэтому можно положить $x_0 = 0$, т. е. потребовать, чтобы $\zeta(0) = 0$.

В дальнейшем мы будем искать только те решения $y(x)$, у которых функция $z(x)$ изменяется монотонно (напомним, что в силу теоремы 1, только такие решения и могут существовать, если $Q \in K(P_1)$. Для таких решений, нормированных условием $\zeta(0) = 0$, справедливо соотношение

$$a(\zeta) = a(x). \tag{3,3}$$

Поэтому систему (3,1) можно переписать так:

$$L\eta = \varphi(\zeta), \quad \zeta = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\eta, \tag{3,4}$$

где

$$L = P_-\left(\frac{d}{dx}\right) + \sigma(x) R\left(\frac{d}{dx}\right), \quad P_- = P_0 + a_- Q, \quad R = (a_+ - a_-) Q, \quad (3,5)$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

По определению (3,2) функция $\varphi(\zeta)$ принимает только отрицательные значения. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 3.1. *Если при каких-нибудь значениях $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ индекс оператора L отрицателен, и полином $Q(\nu)$ принадлежит конусу полинома $\Pi(\nu - \lambda^-)\Pi(\nu - \mu^+)$, то уравнение (0,4) не имеет переходных решений с возрастающей функцией $z(x)$.*

Если, кроме того, полином $Q \in K(P_1)$, то в силу теоремы 1.2 *уравнение (0,4) не имеет никаких переходных решений.*

В дальнейшем мы будем предполагать, что числа $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ таковы, что полином $Q(\nu)$ принадлежит конусу $\Pi(\nu - \lambda^-)(\nu - \mu^+)$ *.

В силу теоремы 3.1 при этом остается рассмотреть только те случаи, когда индекс r оператора L положителен. Кроме того, поскольку числа a_- и a_+ имеют противоположные знаки, то индекс r может принимать только нечетные значения.

Заметим, что для того, чтобы решению $\eta(x)$, $\zeta(x)$ системы (3,4) соответствовало переходное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\eta(x)$ и $\zeta(x)$ должным образом вели себя на бесконечности и чтобы $\operatorname{sgn}\zeta(x) = \operatorname{sgn} x$.

Наша цель — построить *хотя бы одно* переходное решение системы (0,4). Поэтому мы рассмотрим интегральное уравнение

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\varphi[\zeta(\xi)]\, d\xi, \qquad W_0(x, \xi) = \frac{1}{a_+ - a_-} R\left(\frac{d}{dx}\right) K_0(x, \xi) \quad (3,6)$$

всякое решение которого приводит к решению системы (3,4) и попытаемся установить существование у этого интегрального уравнения ограниченных решений $\zeta(x)$ таких, что $\operatorname{sgn}\zeta(x) = \operatorname{sgn} x$.

§ 4. Нелинейный интегральный оператор H.

Рассмотрим интегральное уравнение (3,6) при следующих ограничениях:

1) Полином $R(\nu) = (a_+ - a_-) Q(\nu)$ можно представить в виде (2,6) и
2) угол наклона секущей кривой $f = f(z)$ ограничен неравенствами

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} < a_-, \ \ 0 \leqslant z_1, \ z_2 < c; \quad \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} > a_+, \ \ c < z_1, \ z_2 \leqslant 1. \quad (4,1)$$

Неравенства (4,1) означают, что *функция* $\varphi(\zeta)$ *монотонно возрастает на интервале* $-c \leqslant \zeta < 0$ *и монотонно убывает на интервале* $0 < \zeta \leqslant 1 - c$.

Определим нелинейный оператор

$$Hu = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\varphi[u(\xi)]\, d\xi$$

---

* Это во всяком случае имеет место, если числа a_- и $|a_+|$ достаточно малы (при этом индекс r равен единице).

на многообразии U кусочно-непрерывных функций $u(\xi)$, удовлетворяющих неравенствам

$$-c \leqslant u(\xi) \leqslant 0, \quad \xi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant u(\xi) \leqslant 1-c, \quad \xi > 0, \tag{4,2}$$

и отметим некоторые его свойства.

1°. Функции Hu ($u \in U$) принадлежат U. В самом деле, все условия теоремы 2.3 выполнены, поэтому справедливо соотношение (2,7). Поскольку индекс r — нечетен, то

$$\operatorname{sgn} W_0(x, \xi) = -\operatorname{sgn} x. \quad -\infty < x, \ \xi < \infty \tag{4,3}$$

Напомним еще, что $\varphi(u) < 0$, поэтому $\operatorname{sgn} Hu(x) = \operatorname{sgn} x$. Функция $\varphi(u)$ ($u \in U$) принимает при $u = -c$, $1-c$ наименьшее значение, равное $-ca_- = (1-c)a_+$. Вследствие этого при $x < 0$ имеем

$$Hu(x) > -ca_- \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\, d\xi.$$

С другой стороны (см. приложение),

$$a(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\, d\xi < 1, \quad -\infty < x < \infty \tag{4,4}$$

поэтому $Hu(x) > -c$ ($x < 0$). Подобным же образом легко показать, что $Hu(x) < 1-c$ ($x > 0$).

2°. Будем говорить, что функция u_1 из U *круче* функции u_2 из U, если имеют место соотношения

$$u_1(x) \leqslant u_2(x), \quad x < 0 \text{ и } u_1(x) \geqslant u_2(x), \quad x > 0.$$

Если u_1 круче u_2, то и Hu_1 круче Hu_2.
Действительно, если функция u_1 круче функции u_2, то

$$\varphi[u_1(\xi)] \leqslant \varphi[u_2(\xi)] \quad -\infty < \xi < \infty$$

благодаря отмеченному на стр. 11 свойству функции $\varphi(u)$. Поэтому при $x < 0$ имеем:

$$Hu_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\, \varphi[u_1(\xi)]\, d\xi \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\, \varphi[u_2(\xi)]\, d\xi = Hu_2(x),$$

т. е $Hu_1(x) \leqslant Hu_2(x)$. Таким же образом убеждаемся в том, что $Hu_1(x) \geqslant Hu_2(x)$, если $x > 0$.

3°. *Если последовательность функций Hu_n ($u_n \in U$) сходится в каждой точке, то она равномерно сходится на любом конечном интервале.*

4°. *Если последовательность функций u_n ($u_n \in U$) сходится равномерно на любом конечном интервале к некоторой функции u, то последовательность Hu_n сходится в каждой точке к функции Hu.*

Последние два свойства оператора H устанавливаются простой проверкой, которую мы опускаем.

§ 5. Решение интегрального уравнения (3,6)

Построим решение уравнения (3,6). Положим

$$\omega_0(x) = \begin{cases} -c, & x < 0 \\ 1-c, & x > 0 \end{cases}, \quad \omega_{n+1}(x) = H\omega_n(x). \quad n = 0, 1, \ldots$$

Ясно, что все функции последовательности ω_n принадлежат U. Далее, так как ω_0 — «наиболее крутая» из всех функций U, то она круче функции ω_1. Поэтому функция $\omega_1 = H\omega_0$ круче функции $\omega_2 = H\omega_1$. Продолжая это рассуждение, мы видим, что функция ω_n круче ω_{n+1} $(n=0, 1, \ldots)$. Это означает, что при каждом фиксированном x числовая последовательность $\omega_n(x)$ является монотонной. Вследствие этого при каждом значении x существует предел

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x). \tag{5,1}$$

Итак, последовательность $\omega_n = H\omega_{n-1}$ сходится в каждой точке и, следовательно, согласно свойству 3° оператора H, сходится равномерно в каждом конечном интервале. В силу свойства 4° это означает, что в каждой точке x

$$\lim_{n\to\infty} H\omega_n(x) = H\omega(x).$$

С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} H\omega_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_{n+1}(x) = \omega(x)$, поэтому

$$\omega(x) = H\omega(x),$$

т. е. функция $\omega(x) = \lim\limits_{n\to\infty} H^{(n)}\omega_0(x)$ является решением интегрального уравнения (3,6). Полагая $\zeta(x) = \omega(x)$ и определяя $\eta(x)$ по формуле

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_Q(x-\xi)\,\zeta(\xi)\,d\xi,$$

получим ограниченное решение $\eta(x)$, $\zeta(x)$ системы (4,1). Соответствующие функции $z(x) = \zeta(x) + c$ и $y(x) = \eta(x) + c$, согласно теореме 1,2, образуют переходное решение системы (0,4).

Если бы мы взяли в качестве исходной функцию $\Omega_0(x) \equiv 0$ («наименее крутая» функция из U) и построили затем последовательность $\Omega_{n+1} = H\Omega_n$, то, как легко видеть, мы также пришли бы к некоторому переходному решению системы (0,4). Таким образом доказана

Теорема 5.1. *Если можно выбрать числа $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ так, чтобы все корни полиномов $P_-(\nu)$ и $P_+(\nu)$ были вещественны, индекс оператора L был положителен и выполнялись условия 1 и 2 § 4, если, кроме того, полином $Q \in K(P_1)$, то система (0,4) имеет переходное решение. Это переходное решение может быть получено с помощью описанного итерационного процесса.*

Очевидным следствием является

Теорема 5.2. *Система*

$$P_0\left(\frac{d}{dx}\right) y + \varepsilon f(z) = 0, \quad z = Q\left(\frac{d}{dx}\right) y$$

имеет переходное решение, если степень Q не превышает $n-2$, $Q \in K(P_1)$ и параметр $\varepsilon > 0$ меньше некоторого критического значения ε_0, зависящего от вида функций P_0 и f.

В тех случаях, когда система (0,4) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (0,2), указанные итерационные процессы удобны тем, что на каждой стадии вычислений они дают оценку снизу и сверху точного решения $\zeta(x)$:

$$\omega_n(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant \Omega_n(x), \; x < 0; \quad \omega_n(x) > \zeta(x) > \Omega_n(x), \; x > 0.$$

Зная точную оценку ошибки $\Delta_n\zeta(x) < |\Omega_n(x) - \omega_n(x)|$, легко получить точную оценку ошибки функции $y(x)$.

§ 6. Вторая теорема существования. Единственность решения

Откажемся теперь от условия 2 § 4, заменив его следующим условием

2) Функция $f(z)$ дифференцируема в интервале $0 < z < 1$, причем

$$0 \leqslant f'(z) < 2a_-,\ 0 \leqslant z \leqslant c; \quad 0 \geqslant f'(z) > 2a_+,\ c \leqslant z < 1;$$

знак равенства в этих соотношениях имеет место только при $z = c$,

В результате такой замены оператор H теряет, вообще говоря, свойство 2° § 4. Остальные три его свойства остаются в силе и появляются два новых свойства:

2а°) Если u_0 и v_0 — две произвольные функции из U, то

$$\sup_x |a(x)[Hv_0(x) - Hu_0(x)]| \leqslant \sup_x |a(x)[v_0(x) - u_0(x)]|.$$

Если супремум левой части достигается в некоторой точке $x = x_0$, то имеет место строгое неравенство.

2в°) Оператору H можно сопоставить такое число $d < 1$, что какова бы ни была функция $u_0 \in U$, имеет место соотношение

$$\sup_x |a(x)[H^2u_0(x) - Hu_0(x)]| < d \sup_x |a(x)[Hu_0(x) - u_0(x)]|.$$

Эти свойства оператора H позволяют легко доказать существование и единственность переходного решения системы (0,4).

Докажем свойство 2а°. Положим $Hu_0 = u_1$, $Hv_0 = v_1$ и введем обозначения

$$\delta_i(x) = a(x)[v_i(x) - u_i(x)], \quad i = 0,1.$$

Имеем:

$$\delta_1(x) = a(x) \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi) \{\varphi[v_0(\xi)] - \varphi[u_0(\xi)]\} d\xi, \tag{6,1}$$

отсюда

$$|\delta_1(x)| \leqslant a(x) \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi) d\xi \sup_\xi |\varphi[v_0(\xi)] - \varphi[u_0(\xi)]|. \tag{6,2}$$

Согласно (4,3), первый сомножитель положителен. В силу (4,4) он меньше единицы. Рассмотрим второй сомножитель. Условие 2′) означает, что

$$\left|\frac{\varphi(v_0) - \varphi(u_0)}{v_0 - u_0}\right| < |a(x)|, \quad (\operatorname{sgn} v_0 = \operatorname{sgn} u_0 = \operatorname{sgn} x). \tag{6,3}$$

Поэтому

$$|\varphi[v_0(\xi)] - \varphi[u_0(\xi)]| < |\delta_0(\xi)|. \tag{6,4}$$

Теперь из (6,2) следует, что

$$|\delta_1(x)| \leqslant \sup_\xi |\delta_0(\xi)| \tag{6,5}$$

и, следовательно, $\delta_1 \equiv \sup_x |\delta_1(x)| \leqslant \delta_0 \equiv \sup_x |\delta_0(x)$.

Приступим к доказательству свойства 2в°. Сохраняя предыдущие обозначения, положим $v_0 = u_1$.

Предположим, что свойство 2в° не имеет места. Тогда, каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно выбрать функцию $u_0 \in U$ так, чтобы $1 - \frac{\delta_1}{\delta_0} < \varepsilon$. Это означает, что для некоторого значения $x = x_0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon > 1 - a(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x_0, \xi) \left|\frac{\varphi[u_1(\xi)] - \varphi[u_0(\xi)]}{\delta_0}\right| d\xi. \tag{6,6}$$

Отметим полезное следствие этого неравенства —

$$\varepsilon > 1 - a(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x_0, \xi)\, d\xi. \qquad (6,7)$$

Вытекающее из (6,4).

В приложении будет показано, что функция $W_0(x, x+\xi)$ монотонно зависит от x и стремится к определенным пределам $W_-(\xi)$ и $W_+(\xi)$, когда $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Кроме того, имеют место соотношения

$$a_- \int_{-\infty}^{\infty} W_-(\xi)\, d\xi = a_+ \int_{-\infty}^{\infty} W_+(\xi)\, d\xi = 1, \qquad (6,8)$$

с помощью которых (6,7) можно переписать в виде

$$\varepsilon > a(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} [W(\xi) - W_0(x_0, x_0+\xi)]\, d\xi, \qquad (6,9)$$

где $W(\xi) = W_-(\xi)$, если $x_0 < 0$, и $W(\xi) = W_+(\xi)$, если $x_0 > 0$.

Неравенство (6,6) удобно переписать так:

$$\varepsilon > a(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \{W(\xi) - W_0(x_0, x_0+\xi)\} \left| \frac{\varphi[u_1(x_0+\xi)] - \varphi[u_0(x_0+\xi)]}{\delta_0} \right| d\xi +$$
$$+ a(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) \left\{ 1 - \left| \frac{\varphi[u_1(x_0+\xi)] - \varphi[u_0(x_0+\xi)]}{\delta_0} \right| \right\} d\xi.$$

В силу монотонности функции $W_0(x, x+\xi)$, первое слагаемое правой части неравенства положительно. Поэтому

$$\varepsilon > a(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) \left\{ 1 - \left| \frac{\varphi[u_1(x_0+\xi)] - \varphi[u_0(x_0+\xi)]}{\delta_0} \right| \right\} d\xi,$$

или

$$\varepsilon > \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left| \frac{\varphi[u_1(x_0+\xi)] - \varphi[u_0(x_0+\xi)]}{\delta_0} \right| \right\} d\mu(\xi), \qquad (6,10)$$

где

$$\mu(\xi) = a(x_0) \int_{-\infty}^{\xi} W(s)\, ds.$$

Обозначим через E множество точек ξ, для которых

$$\left| \frac{\varphi[u_1(x_0+\xi)] - \varphi[u_0(x_0+\xi)]}{\delta_0} \right| > 1 - \sqrt{\varepsilon}. \qquad (6,11)$$

Из (6,10) следует, что μ — мера дополнительного множества E' — не превышает $\sqrt{\varepsilon}$.

По определению $\delta_0 \geqslant |u_1(x_0+\xi) - u_0(x_0+\xi)|\,|a(x_0+\xi)|$. Поэтому из (6,11) следует, что

$$\left| \frac{1}{a(x_0+\xi)} \cdot \frac{\varphi[u_1(x_0+\xi)] - \varphi[u_0(x_0+\xi)]}{u_1(x_0+\xi) - u_0(x_0+\xi)} \right| > 1 - \sqrt{\varepsilon}, \quad \xi \in E. \qquad (6,12)$$

Сопоставляя неравенства (6,3) и (6,12), заключаем, что

$$|u_1(x_0+\xi)| < \rho(\sqrt{\varepsilon}), \quad |u_0(x_0+\xi)| < \rho(\sqrt{\varepsilon}), \quad \xi \in E, \qquad (6,13)$$

где $\rho(\sqrt{\varepsilon})$ — величина, определяемая формой кривой $\varphi(u)$ и стремящаяся к нулю, когда $\varepsilon \to 0$.

Пусть $b\,(\operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} x_0)$ — такое число, что μ-мера интервала $(0, b)$ больше $\sqrt{\varepsilon}$. В таком интервале найдется число ξ_0, принадлежащее множеству E. Рассмотрим $u_1(x_0+\xi_0)$. Имеем

$$u_1(x_0+\xi_0) = a(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} W_0(x_0+\xi_0,\; x_0+\xi_0+\xi)\,\varphi\,[u_0(x_0+\xi_0+\xi)]\,d\xi.$$

Перепишем это тождество так:

$$u_1(x_0+\xi_0) = a(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} [W_0(x_0+\xi_0,\; x_0+\xi_0+\xi) - W(\xi)]\,\varphi\,[u_0(x_0+$$

$$+\xi_0+\xi)]\,d\xi + a(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} [W(\xi) - W(\xi+\xi_0)]\,\varphi\,[u_0(x_0+\xi_0+\xi)]\,d\xi +$$

$$+ a(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi+\xi_0)\,\varphi\,[u_0(x_0+\xi_0+\xi)]\,d\xi.$$

Первое слагаемое правой части в силу (6,9) не превосходит величины $\varepsilon \sup|\varphi|$. Второе слагаемое меньше, чем

$$|a(x_0)|\sup|\varphi|\,|\xi_0|\operatorname{var} W(\xi) \equiv B\,|\xi_0|$$

Поэтому

$$\left|a(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi)\,\varphi\,[u_0(x_0+\xi)]\,d\xi\right| < \rho(\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon\sup|\varphi| + B\,|\xi_0| \qquad (6{,}14)$$

Интеграл в левой части можно представить в виде суммы

$$\varphi(0)\int_E d\mu(\xi) + \int_E \{\varphi\,[u_0(x_0+\xi)] - \varphi(0)\}\,d\mu(\xi) + \int_{E'} \varphi\,[u_0(x_0+\xi)]\,d\mu(\xi).$$

Первое слагаемое этой суммы равно $\varphi(0)\,\mu(E)$; второе слагаемое меньше чем $\rho(\sqrt{\varepsilon})\max|a(x)|\,\mu(E)$; наконец, третье слагаемое меньше чем $\sqrt{\varepsilon}\sup|\varphi|$. Поэтому из (6,14) следует, что

$$|(1-\sqrt{\varepsilon})\,a(x)\,\varphi^{(0)}| < \rho(\sqrt{\varepsilon})\max|a(x)| + \sqrt{\varepsilon}\sup|\varphi| + \rho(\sqrt{\varepsilon}) +$$
$$+\varepsilon\sup|\varphi| + B\,|\xi_0|$$

Это неравенство невозможно при достаточно малом ε. Свойство 2в° доказано.

Отметим, что неравенство (6,15) позволяет в каждом конкретном случае оценить снизу ε и, следовательно, получить оценку сверху числа d.

Теперь легко доказать следующую теорему существования и единственности.

Теорема 6.1. *Если можно выбрать числа $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ так, чтобы все корни полиномов $P_-(\nu)$ и $P_+(\nu)$ были вещественны, индекс r оператора L был положителен и выполнялись условия 1 § 4 и 2', если, кроме того, полином $Q \in K(P_1)$, то система (0,4) имеет единственное переходное решение, удовлетворяющее условию $z(0) = c$. Это переходное решение определяется соотношением $\zeta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} H^n u(x)$, где u — любая функция из U.*

Доказательство. Пусть u_0 — любая функция из U. Построим последовательность $u_n(x)$, положив $u_n = H^n u_0$. Благодаря свойству 2в° оператора H, последовательность u_n сходится равномерно к некоторой функции $\omega(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \omega(x).$$

Мы получили соотношение, аналогичное (5,1). Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и при доказательстве теоремы 5,1.

Единственность решения интегрального уравнения (3,6) непосредственно вытекает из свойства 2а° оператора H, поскольку супремум разности двух переходных решений, очевидно, достигается в некоторой точке.

Приложение

§ 7. Доказательство теоремы 2.1

Решение уравнения (2,4) $Ly = g(x)$ можно, очевидно, записать в виде

$$y(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_{P_+}(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi + \sum\limits_{k=1}^{l+} c_k^+ e^{\lambda_k^+ x}, & x > 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_{P_-}(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi + \sum\limits_{k=1}^{m-} c_k^- e^{\mu_k^- x}, & x < 0. \end{cases} \tag{7,1}$$

Коэффициенты c_k^- и c_k^+ должны быть выбраны так, чтобы при $x = 0$ функция $y(x)$ была непрерывна вместе с ее первыми $(n-1)$ производными. Таким образом, коэффициенты c_k^+ и c_k^-, общее число которых равно $n - |r|$, должны удовлетворять n неоднородным уравнениям. Это возможно в том, и только в том, случае, когда правые части этих уравнений удовлетворяют известным соотношениям. Последние, как легко видеть из (7,1), имеют следующий вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, |r|.$$

Для того чтобы найти явный вид функций $F_j(\xi)$ в удобной для наших целей форме, рассмотрим уравнение (2,4) в предположении, что функция $g(x)$ принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$.

Представим оператор L в виде

$$Ly = P_-\left(\frac{d}{dx}\right) y + \sigma(x)\, R\left(\frac{d}{dx}\right) y$$

и введем обозначение

$$R\left(\frac{d}{dx}\right) y = w, \tag{7,2}$$

в силу которого

$$y(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_R(x-\xi)\, w(\xi)\, d\xi.$$

Перепишем теперь наше уравнение так:

$$P_-\left(\frac{d}{dx}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_R(x-\xi)\, w(\xi)\, d\xi + \sigma(x)\, w(x) = g(x).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_R(x-\xi)\, w(\xi)\, d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} Y_{P_-}(x-\xi)\, w(\xi)\, d\zeta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_{P_-}(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Согласно (7,1) и (7,2), функции $y(x)$ и $w(x)$ принадлежат $L_1(-\infty, \infty)$. Поэтому к последнему соотношению можно применить преобразование

Фурье. После очевидных преобразований мы получим

$$\frac{\prod(-i\nu-\mu^-)}{\prod(-i\nu-\mu^+)}\bar{w}_-(\nu)+\frac{\prod(-i\nu-\lambda^+)}{\prod(-i\nu-\lambda^-)}\bar{w}_+(\nu)=f(\nu)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{a_n}\frac{R(-i\nu)\bar{g}(\nu)}{\prod(-i\nu-\lambda^-)\prod(-i\nu-\mu^+)}, \tag{7,3}$$

где

$$\bar{w}_-(\nu)=\int_{-\infty}^{0}e^{i\nu x}w(x)\,dx,\quad \bar{w}_+(\nu)=\int_{0}^{\infty}e^{i\nu x}w(x)\,dx,\quad \bar{g}(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\nu x}g(x)\,dx.$$

Функция $f(\nu)$ принадлежит $L_1(-\infty,\ \infty)$ и может быть представлена в виде

$$f(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,e^{-ix\nu}dx,\quad F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\nu)\,e^{ix\nu}d\nu.$$

Перепишем (7,3) следующим образом:

$$\frac{\prod(-i\nu-\mu^-)}{\prod(-i\nu-\mu^+)}\bar{w}_-(\nu)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}F(x)\,e^{-ix\nu}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F(x)\,e^{-ix\nu}dx-$$

$$-\frac{\prod(-i\nu-\lambda^+)}{\prod(-i\nu-\lambda^-)}\bar{w}_+(\nu). \tag{7,4}$$

Левая часть этого равенства аналитична в верхней полуплоскости, правая часть — в нижней полуплоскости. Кроме того, при $|\nu|\to\infty$ каждая часть (в соответствующей полуплоскости) стремится к нулю. Согласно теореме Лиувилля, отсюда следует, что обе части равенства (7,3) тождественно равны нулю.

Первый член левой части стремится к нулю при $\nu\to\pm\infty$ быстрей, чем ν^r (напомним, что $r<0$). Поэтому

$$\lim_{\nu\to\pm\infty}|\nu|^r\int_{-\infty}^{0}F(x)\,e^{-ix\nu}dx=0. \tag{7,5}$$

С другой стороны,

$$F(x)=\frac{1}{a_n}R\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty}Y(\lambda^-,\mu^+,x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

$$Y(\lambda^-,\mu^+,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\nu x}d\nu}{\prod(-i\nu-\lambda^-)\prod(-i\nu-\mu^+)}.$$

Следовательно, функция $F(x)$ имеет по крайней мере $|r|$ непрерывных производных. Поэтому соотношение (7,5) означает, что

$$F(0)=0,\quad F'(0)=0,\ \ldots,\ F^{|r|-1}(0)=0,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}R\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^k}{dx^k}Y(\lambda^-,\mu^+,x-\xi)\Big|_{x=0}g(\xi)\,d\xi=0,\ k=0,1,\ \ldots,\ |r|-1 \tag{7,6}$$

Число этих соотношений равно $|r|$. Все они, как легко видеть, независимы. Поэтому

Соотношения (7,6) являются и необходимыми и достаточными условиями существования ограниченного решения уравнения (2,4) $Ly = g$.

Теорема 2.1 непосредственно вытекает из этого утверждения, если воспользоваться леммой 1.1.

§ 8. Доказательство теорем 2.2 и 2.3

Рассмотрим уравнение

$$LK(x, \xi) = \delta(x - \xi). \tag{8,1}$$

Ясно, что $K(x, \xi)$, рассматриваемая как функция x, принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$. Поэтому над уравнением (8,1) можно произвести преобразование Фурье. После выкладок, подобных тем, которые привели к соотношению (7,30), получим

$$\frac{\prod(-i\nu-\mu^-)}{\prod(-i\nu-\mu^+)}\overline{w}_-(\nu) + \frac{\prod(-i\nu-\lambda^+)}{\prod(-i\nu-\lambda^-)}\overline{w}_+(\nu) = \frac{1}{a_n}\frac{R(-i\nu)e^{i\nu\xi}}{\prod(-i\nu-\mu^+)\prod(-i\nu-\lambda^-)(a_+-a_-)}, \tag{8,2}$$

где

$$\overline{W}_-(\nu) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\nu x}W(x, \xi)\,dx, \quad \overline{W}_+(\nu) = \int_{0}^{\infty} e^{i\nu x}W(x, \xi)\,dx.$$

Полином $R(-i\nu)$ можно представить (различными способами) в виде суммы произведений полиномов

$$R(-i\nu) = \sum_{j=1}^{m} R_{1j}(-i\nu)\,R_{2j}(-i\nu), \tag{8,3}$$

причем, степени полиномов R_{1j} не превышают r, а степени полиномов R_{2j} не превышают $(n-r-1)$. Пользуясь представлением (8,3), придадим правой части (8,2) следующий вид:

$$\frac{1}{a_n(a_+-a_-)}\sum_{j=1}^{m} R_{1j}(-i\nu)\frac{R_{2j}(-i\nu)e^{i\nu\xi}}{\prod(-i\nu-\lambda^-)\prod(-i\nu-\mu^+)} =$$

$$= \frac{1}{a_n(a_+-a_-)}\sum_{j=1}^{m} R_{1j}(-i\nu)\int_{-\infty}^{\infty}\left[R_{2j}\left(\frac{d}{dx}\right)Y(\lambda^-, \mu^+, x-\xi)\right]e^{i\nu x}dx.$$

Теперь равенство (8,2) можно переписать так:

$$A(-i\nu) \equiv \frac{\prod(-i\nu-\mu^-)}{\prod(-i\nu-\mu^+)}\overline{W}_-(\nu) -$$

$$- \frac{1}{a_n(a_+-a_-)}\sum_{j=1}^{m} R_{1j}(-i\nu)\int_{-\infty}^{0}\left[R_{2j}\left(\frac{d}{dx}\right)Y(\lambda^-, \mu^+, x-\xi)\right]e^{i\nu x}dx =$$

$$= -\frac{\prod(-i\nu-\lambda^+)}{\prod(-i\nu-\lambda^-)}\overline{W}_+(\nu) +$$

$$+ \frac{1}{a_n(a_+-a_-)}\sum_{j=1}^{m} R_{1j}(-i\nu)\int_{0}^{\infty}\left[R_{2j}\left(\frac{d}{dx}\right)Y(\lambda^-, \mu^+, x-\xi)\right]e^{i\nu x}dx.$$

Левая часть этого равенства аналитична в нижней полуплоскости и при $|\nu| \to \infty$ $(Im\,\nu < 0)$ растет медленнее, чем $|\nu|^r$. Правая часть ведет себя подобным же образом в верхней полуплоскости. Поэтому функция $A(-i\nu)$ является полиномом степени не выше $r-1$ (если $r=0$, то $A \equiv 0$). Отсюда

$$\overline{W}_-(\nu) = \frac{\prod(-i\nu-\mu^+)}{\prod(-i\nu-\mu^-)}\Bigg\{A(-i\nu) +$$

$$+\frac{1}{a_n(a_+-a_-)}\sum_j R_{1j}(-i\nu)\int_{-\infty}^{0}\left[R_{2j}\left(\frac{d}{dx}\right)Y(\lambda^-, \mu^+, x-\xi)\right]e^{i\nu x}dx\Bigg\}, \quad (8,4)$$

$$\overline{W}_+(\nu) = \frac{\prod(-i\nu-\lambda^-)}{\prod(-i\nu-\lambda^+)}\Bigg\{-A(-i\nu) +$$

$$+\frac{1}{a_n(a_+-a_-)}\sum_j R_{1j}(-i\nu)\int_{0}^{\infty}\left[R_{2j}\left(\frac{d}{dx}\right. Y(\lambda^-, \mu^+, x-\xi)\right]e^{i\nu x}dx\Bigg\}.$$

Отсюда с помощью формулы обращения можно найти функцию $W(x, \xi)$ и затем функцию $K(x, \xi)$. Легко проверить, что полученная таким образом функция $K(x, \xi)$ действительно является функцией Грина. Отметим, что функция Грина определяется неоднозначно, если индекс r положителен. Она содержит r произвольных параметров коэффициентов полинома $A(-ik)$. Теорема 2.2 доказана.

Будем теперь считать, что степень полинома R не превышает $n-2$. При этом степени полиномов R_{1j} меньше r.

Положим $A(-ik) \equiv 0$ и обозначим соответствующие функции K и W через $K_0(x, \xi)$ и $W_0(x, \xi)$. Равенства (8,4) позволяют получить явное выражение для функции $W_0(x, \xi)$, которое мы запишем для $x > 0$ в виде

$$W_0(x, \xi) = \frac{1}{2\pi a_n(a_+-a_-)}\int_0^\infty \sum_{j=1}^{m} R_{2j}\left(\frac{d}{ds}\right)Y(\lambda^-, \mu^+, s-\xi) \times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(s-x)}\frac{\prod(-ik-\lambda^-)}{\prod(-ik-\lambda^+)}R_{1j}(-ik)\,dk\right\}ds, \quad x > 0.$$

Внутренний интеграл равен нулю при $s > x$. Поэтому

$$W_0(x,\xi) = \frac{1}{2\pi a_n(a_+-a_-)}\int_0^x \sum_{j=1}^{m} R_{2j}\left(\frac{d}{ds}\right)Y(\lambda^-, \mu^+; s-\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(s-x)}\frac{\prod(-ik-\lambda^-)}{\prod(-ik-\lambda^+)}\times\right.$$

$$\left.\times R_{1j}(-ik)\,dk\right\}ds.$$

С другой стороны,

$$\frac{\prod(-ik-\lambda^+)}{\prod(-ik-\lambda^-)} = \frac{1}{a_n}\frac{P_-(-ik)}{\prod(-ik-\lambda^+)\prod(-ik-\mu^-)} = \frac{1}{a_n}\frac{P_+(-ik)-R(-ik)}{\prod(-ik-\lambda^+)\prod(-ik-\mu^-)} =$$

$$= \frac{\prod(-ik-\mu^+)}{\prod(-ik-\mu^-)} - \frac{1}{a_n}\frac{R(-ik)}{\prod(-ik-\lambda^+)\prod(-ik-\mu^-)}.$$

При подстановке этого выражения во внутренний интеграл слагаемое $\dfrac{\prod(-ik-\mu^+)}{\prod(-ik-\mu^-)}$ можно опустить, так как соответствующий вклад равен нулю при $s < x$. Мы получаем окончательно

$$W_0(x, \xi) = -\frac{1}{a_n^2(a_+ - a_-)} \int_0^x \sum_j \left[R_{2j}\left(\frac{d}{ds}\right) Y(\lambda^-, \mu^+, s-\xi)\right]\left[R\left(\frac{d}{dx}\right) R_{1j}\left(\frac{d}{dx}\right) \times \right.$$

$$\left. \times Y(\lambda^+, \mu^-; x-s)\right] ds, \quad r > 0. \tag{8,5}$$

Совершенно такое же соотношение получается при $x < 0$.

В силу леммы 1.1 и условия 1 § 4 каждый из сомножителей под знаком суммы, стоящей в подинтегральном выражении, имеет постоянный знак. Первый сомножитель имеет тот же знак, что и $(-1)^{m_+}$, знак второго сомножителя совпадает со знаком $(-1)^{m_-+1}$. Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы 2.3.

Из полученного соотношения (8,5) следует, что при фиксированном ξ функция $W_0(x, x+\xi)$ является монотонной и стремится к определенным пределам при $x \to \pm\infty$.

§ 9. Вывод неравенства (4,4)

Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\, d\xi. \tag{9,1}$$

Используя представление (8,5), получаем

$$I(x) = -\frac{1}{a_n^2(a_+ - a_-)} \int_0^x \sum_j R_{1j}\left(\frac{d}{dx}\right) R\left(\frac{d}{dx}\right) Y(\lambda^+, \mu^-, x-s) \times$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{\infty} R_{2j}\left(\frac{d}{ds}\right) Y(\lambda^-, \mu^+, s-\xi)\, d\xi\right\} ds.$$

Внутренний интеграл, как легко видеть, равен

$$\frac{R_{2j}(0)}{\prod(-\lambda^-)\prod(-\mu^+)}.$$

Поэтому

$$I(x) = -\frac{1}{a_n^2(a_+ - a_-)} \frac{1}{\prod(-\lambda^-)\prod(-\mu^+)} \sum_j R_{2j}(0) \int_0^x R_{1j}\left(\frac{d}{ds}\right) R\left(\frac{d}{ds}\right) Y(\lambda^+, \mu^-, s)\, ds. \tag{9,2}$$

Отсюда следует, что функция $I(x)$ является монотонной. В самом деле, все числа $R_{2j}(0)$ положительны, подинтегральные выражения в (9,2) знакопостоянны; они все имеют одинаковый знак — тот же, что и $(-1)^{m_-+1}$.

Поскольку функция $I(x)$ является монотонной и $I(0) = 0$, то

$$|I(x)| < I(\infty \operatorname{sgn} x). \tag{9,3}$$

Вычислим $I(+\infty)$. Для этого рассмотрим интегралы

$$I_j^+ = \int_0^{\infty} R_{1j}\left(\frac{d}{ds}\right) R\left(\frac{d}{ds}\right) Y(\lambda^+, \mu^-, s)\, ds.$$

Согласно определению функции $Y(\lambda^+, \mu^-, s)$, ее можно представить при положительных s в виде контурного интеграла

$$Y(\lambda^+, \mu^-, s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_+} \frac{e^{-i\nu s} d\nu}{\prod(-i\nu - \lambda^+) \prod(-i\nu - \mu^-)}, \tag{9,4}$$

где C_+ — контур, целиком лежащий в нижней полуплоскости и охватывающий все точки $i\lambda^+$. Поэтому

$$I_j^+ = \int\limits_0^\infty ds \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{в_+} \frac{e^{-i\nu s} R_{1j}(-i\nu) R(-i\nu)}{\prod(-i\nu - \lambda^+) \prod(-i\nu - \mu^-)} d\nu \right\}.$$

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$I_j^+ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_+} \frac{R(-i\nu)}{\prod(-i\nu - \lambda^+) \prod(-i\nu - \mu^-)} \cdot \frac{R_{1j}(-i\nu)}{\nu} d\nu.$$

Вспоминая, что $R = P_+ - P_-$, найдем

$$I_j^+ = -a_n R_{1j}(0) \frac{\prod(-\lambda^-)}{\prod(-\lambda^+)}.$$

Подставляя это выражение в (9,2), обнаруживаем, что $I(+\infty) = \frac{1}{a_+}$. Таким же образом находим, что $I(-\infty) = \frac{1}{a_-}$. Оба эти результата можно записать так:

$$\lim_{x \to \pm\infty} a(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_0(x, \xi)\, d\xi = 1. \tag{9,5}$$

Автор пользуется случаем поблагодарить М. Г. Крейна и Б. Я. Левина за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Любарский. О решениях типа «сглаженной ударной волны» у некоторых нелинейных уравнений, УМН, т. XVII, вып. 1(103), 185—191, 1962 г.

2. И. И. Хиршман и Д. В. Уиддер. Преобразования типа свертки, Изд-во иностр. лит., М., 1958.