ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Жиков

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Основные проблемы теории почти-периодических функций связаны в настоящее время с приложениями к дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве. Первые общие результаты в этом направлении получены еще Бохнером и фон Нейманом [1]. Важный шаг был сделан в 1945 г. С. Л. Соболевым [2], доказавшим почти-периодичность однородного волнового уравнения. Установление этого факта имело, однако, большое значение для последующих исследований. В конце пятидесятых и начале шестидесятых годов Л. Америо не только полностью изучил более трудный вопрос о почти-периодичности решений неоднородного волнового уравнения, но и обновил общую теорию абстрактных почти-периодических функций, перенес на банаховы пространства метод минимакса Фавара и др. При этом выяснилось, что для решения основных задач, связанных с почти-периодическими функциями, естественно ограничиться равномерно-выпуклыми пространствами. Данная работа является продолжением исследований Л. Америо, но в большей своей части основывается на иных соображениях. Наше изложение является абстрактным и, за исключением двух-трех пунктов, мы нигде подробно не останавливаемся на приложениях к конкретным дифференциальным уравнениям в частных производных, а хотим дать сжатую характеристику различных методов. Здесь рассмотрены:

1) метод интеграла энергии;

2) метод гармонического анализа;

3) метод минимакса (распространенный на произвольные банаховы пространства);

4) метод, основанный на операционном исчислении. Значительная часть результатов была приведена без доказательств в [3—5].

Сформулируем ряд лемм, относящихся к общей теории абстрактных почти-периодических функций.

Пусть B — пространство Банаха и B^* — его сопряженное.

Определение 1. *Функция $f(t)$ со значениями в B называется слабо почти-периодической (слабо п. п.) функцией, если $y(f(t))$ есть почти-периодическая функция Бора для всякого $y \in B^*$.*

Определение 2. *Число τ называется ε-почти-периодом функции $f(t)$, если*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|f(t+\tau)-f(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 3. *Функция $f(t)$ называется почти-периодической если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется относительно плотное множество ε почти-периодов.*

Лемма 1.1. *Для того чтобы слабо п. п. функция $f(t)$ была п. п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы множество значений $f(t)$ было относительно компактным.*

Дадим вкратце доказательство этой леммы. Ввиду компактности множества значений $f(t)$ можно считать, что пространство B сепарабельно. Реализуем его в виде подпространства пространства $C(0, 1)$. В пространстве $C(0, 1)$ можно выбрать последовательность ограниченных операторов Π_n, таких, что

а) множество значений Π_n конечномерно,

б) $\Pi_n x \to x$ для всякого $x \in B$.

(Для этой цели можно использовать суммы Фейера для рядов Фурье). Очевидно, $f_n = \Pi_n f(t)$ есть п. п. функция. Но ввиду компактности $f_n \to f$ равномерно по t. Это и доказывает почти-периодичность функции $f(t)$.

Для функции со значениями в гильбертовом пространстве есть другой, весьма важный для дальнейшего критерий почти-периодичности. Пусть $f(t)$ — слабо п. п. функция и $\{h_n\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел. Тогда найдется подпоследовательность $\{h'_n\}$ такая, что при любом t $f(t + h'_n) > f_h(t)$. Совокупность функций f_h, полученных такими предельными переходами, обозначим через $K(f)$.

Лемма 1.2. *Для того, чтобы слабо п. п. функция $f(t)$ была п. п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы функция $\|f_h(t)\|$ была п. п. функцией Бора для всякой функции $f_n(t) \in K(f)$.*

Пусть $\{e_n\}$ — полная ортонормированная система в H и $f(t) = \sum\limits_n g_n e_n$. Тогда для компактности множества значений необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_n |g_n|^2$ сходился равномерно на всей оси. Поэтому лемма 1.2 есть не что иное, как «теорема Дини для монотонной последовательности п. п. функций». В форме теоремы Дини лемма 1.2 доказана Л. Америо [11] (различные обобщения указаны С. Бохнером [6] и автором [7]).

Лемма 1.3. *Для того чтобы ограниченная функция $f(t)$ была слабо п. п. функцией, достаточно, чтобы функция $y(f(t))$ была п. п. функцией Бора для всякого $y \in \Gamma$, где Γ — всюду плотное множество в B^*.*

Доказательство очевидно.

Лемма 1.4. *Если $f(t)$ есть п. п. функция в гильбертовом пространстве H, а $g(t)$ — слабо п. п. функция в H, то $\omega(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ есть п. п. функция Бора.*

Доказательство. После очевидных выкладок имеем

$$\omega(t+\tau) - \omega(t) = \langle f(t+\tau), g(t+\tau) - g(t)\rangle + \\ + \langle f(t) - f(t+\tau), g(t)\rangle. \tag{1.1}$$

Пусть $M = \max\{\sup\limits_t \|f(t)\|, \sup\limits_t \|g(t)\|\}$, ε — положительное число и $\{a_k\}_{k=1}^n$ есть $\frac{\varepsilon}{2M}$ — сеть множества значений $f(t)$. Положим $\varphi_k(t) = \langle a_k, g(t)\rangle$. Для конечного набора п. п. функций $\{f(t), \varphi_1(t) \ldots \varphi_n(t)\}$ найдем относительно плотное множество L общих $\frac{\varepsilon}{2M}$-почти-периодов и пусть $\tau \in L$. Тогда из (1.1) легко следует, что при любом t

$$|\omega(t+\tau) - \omega(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *$f(t)$ — слабо п. п. функция, спектр которой ограничен и имеет конечное число предельных точек. Тогда $f(t)$ — п. п. функция.*

Доказательство. Пусть $\{e_n\}$ — полная ортонормированная система в H. Тогда $\|f(t)\|^2 = \sum_n |g_n|^2$, где $g_n = \langle e_n, f(t)\rangle$. Очевидно, спектр функций $\{|g_n|^2\}$ ограничен и имеет (в совокупности) не более счетного множества предельных точек. В силу известных теорем о пределе специальных тригонометрических полиномов (см. [8, гл. V, § 5]) $\|f(t)\|^2$ есть п. п. функция. Аналогично доказывается, что $\|f_h(t)\|^2$ есть п. п. функция. Тогда утверждение леммы 1.5 следует из леммы 1.3.

Лемма 1.6. *Пусть $f(t)$ — слабо п. п. функция со спектром, имеющим единственную предельную точку на бесконечности. Тогда, если $f(t)$ равномерно непрерывна на всей оси, то она есть п. п. функция.*

Совсем простое доказательство, основанное на суммировании ряда Фурье функции $f(t)$ методом Фейера, мы опускаем.

§ 2. АБСТРАКТНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ (МЕТОД ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ)

Пусть A — самосопряженный, положительно определенный оператор с вполне непрерывным обратным и оператор B вполне непрерывен относительно A, причем операторы $A^2 + B$ и $A^2 + B^*$ имеют полные системы конечномерных инвариантных подпространств. Гильбертово пространство пар $\{x, y\}$ с нормой $\|\{x, y\}\|^2 = \|x\|^2 + \|Ay\|^2$ обозначим через W_A. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_{tt} + A^2u + Bu = f(t), \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \cdot u_t'(0) = u_1, \tag{2.2}$$

где $f(t)$ — п. п. функция в H.

Хорошо известно [9], что задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение из W_A, если начальные данные $\{u_1, u_0\} \in W_A$, причем решение $V(t) = \{u'(t), u(t)\}$ есть непрерывная функция в W_A. Более того, если $V_n(0) \xrightarrow{W_A} \alpha$ и $f_n(t) \to g(t)$ (равномерно в каждом конечном отрезке), то $V_n(t) \to \hat{V}(t)$, где $\hat{V}(t)$ есть решение из W_A задачи

$$u_{tt} + A^2u + Bu = g(t),$$
$$V(0) = \alpha.$$

Теорема 2.1. *Всякое W_A — ограниченное решение уравнения (2.1) есть W_A-почти-периодическая функция.*

Доказательство.

Установим прежде всего слабую почти-периодичность. Пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения оператора $C = A^2 + B$ и P_n — операторы проектирования на соответствующие инвариантные подпространства, коммутирующие с оператором C. Действуя проектором P_n на обе части уравнения (2.1) получим, что $u_n = P_n u$ удовлетворяет уравнению

$$u_n'' + L_n u_n = P_n f(t),$$

где $L_n = P_n C$ есть конечно-мерный оператор.

Отсюда в силу классических результатов Бора и Нейгебауэра [10] следует, что u_n и u_n' есть п. п. функции. Так как пространство W_A плотно в $H\times H$, то вместо слабой почти-периодичности в W_A достаточно доказать слабую почти-периодичность в $H\times H$, т. е. достаточно доказать, что $u(t)$ и $u'(t)$ есть слабо п. п. функции в H (см. лемму 1.3). Обозначим через R множество элементов $z\in H$ таких, что $P_n^*z=z$ для некоторого n. Очевидно, линейная оболочка R плотна в H. Для всякого $z\in R$ имеем

$$\langle u(t),\ z\rangle=\langle u(t),\ P_n^*z\rangle=\langle u_n,\ z\rangle, \tag{2.3}$$

$$\langle u'(t),\ z\rangle=\langle u'(t),\ P_n^*z\rangle=\langle u_n',\ z\rangle. \tag{2.4}$$

Так как u_n и u_n' есть п. п. функции, то справа в (2.3) и (2.4) стоят п. п. функции. В силу леммы 1.3 $u(t)$ и $u'(t)$ есть слабо п. п. функции в H. Итак, слабая почти-периодичность $V(t)=\{u'(t),\ u(t)\}$ в W_A доказана. Воспользуемся леммой 1.2 для доказательства W_A-почти-периодичности решения $V(t)$. Пусть $E(t)=\|V(t)\|^2=\|u'(t)\|^2+\|Au(t)\|^2$. Дифференцируя это выражение по t, имеем в силу уравнения (21)

$$E'(t)=\langle u'',\ u'\rangle+\langle u',\ u''\rangle+\langle A^2u,\ u'\rangle+\langle u',\ A^2u\rangle=$$
$$=-2\mathrm{Re}\langle Bu,\ u'\rangle+2\mathrm{Re}\langle u',\ f(t)\rangle.$$

Отсюда

$$E(t)=E(0)+2\int_0^t-\mathrm{Re}\langle Bu,\ u'\rangle+\mathrm{Re}\langle u',\ f\rangle. \tag{2.5}$$

Приведенные выкладки справедливы для решений, удовлетворяющих уравнению (2.1) в сильном смысле, однако окончательное выражение (2.5) распространяется по непрерывности на все решения, принадлежащие W_A. Так как $E(t)$ по условию ограничена на всей оси, то, используя A — полную непрерывность оператора B, получаем, что функция $g(t)=Bu(t)$ есть п. п. функция (см. лемму 1.1). В силу леммы 1.4 под интегралом в (2.5) стоит п. п. функция Бора. Отсюда по теореме Боля-Бора $E(t)$ есть п. п. функция. Из произвольной последовательности вещественных чисел $\{h_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h_n'\}$, такую, что $f(t+h_n')\to\to\hat f(t)$ (равномерно на всей оси), $V(t+h_n')\to\hat V(t)$ (при любом t).

Как отмечалось выше, $\hat V(t)$ есть принадлежащее W_A обобщенное решение уравнения $u_{tt}+A^2u+Bu=\hat f(t)$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что $\|\hat V(t)\|_{W_A}^2$ есть п. п. функция. Лемма 1.2 дает тогда W_A-почти-периодичность функции $V(t)$. Теорема доказана.

Случай, когда $B=0$ и A есть самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка в конечной области, рассматривался С. Л. Соболевым и Л. Америо [11]. Америо использовал разложение решения в ряд по собственным функциям дифференциального оператора. В нашем случае, разложение по собственным и присоединенным функциям не может быть эффективно использовано. Но дело не в том, сходятся или не сходятся такие разложения. В дальнейшем выяснится, что теорема 2.1 остается в силе, если отказаться от полноты системы конечномерных инвариантных подпространств.

В качестве примера рассмотрим в конечной области Ω уравнение

$$u_{tt}=\Delta u+q(x)u+iq_2(x)u+f(x,\ t)$$
$$u|_{\partial\Omega}=0.$$

Оператор $\Delta + q_1 + iq_2$ (с граничным условием Дирихле) имеет полную систему конечномерных инвариантных подпространств. Остальные требования теоремы 2.1, очевидно, выполнены. Следовательно, если решение $u(x, t)$ имеет ограниченную энергию $E(t) = \int\limits_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 d\Omega + \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega$, то $u(x, t)$ есть п. п. функция в метрике энергии, т. е. $u_t(x, t)$ и $\left\{\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{n}$ есть п. п. функции в $L_2(\Omega)$.

Пусть теперь оператор A в уравнении (2.1) зависит от времени периодически, т. е. $A(t + \omega) = A(t)$. Предположим, что $A(t_1)$ и $A(t_2)$ коммутируют при любых t_1 и t_2, $A^{-1}(0)$ вполне непрерывен и $A'(t)$ — вполне непрерывен относительно $A(t)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Всякое $W_{A(0)}$ — ограниченное решение уравнения*

$$u_{tt} + A^2(t)\,u = f(t) \tag{2.6}$$

сеть $W_{A(0)}$ — п. п. функция.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2.1. Некоторых пояснений требует лишь слабая $W_{A(0)}$-почти-периодичность ограниченного решения $V(t) = \{u'(t), u(t)\}$. Если $\{l_n\}$ — общая система собственных векторов операторов $A(t)$, то, проектируя (2.6) на $\{l_n\}$, получим $u_n''(t) + \lambda_n(t)\,u = f_n(t)$, причем $\lambda_n(t)$ — периодическая функция. Нам дано, что u_n и u_n' — ограниченные функции. Но из теоремы Флоке [12] следует немедленно, что u_n и u_n' есть п. п. функции.

§ 3. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В настоящем параграфе ставится задача — доказать почти-периодичность ограниченных решений уравнения вида $u' = Au + f(t)$, исходя из априорных условий на спектр оператора A и не требуя полноты системы конечномерных инвариантных подпространств.

Пусть в банаховом пространстве B задан линейный оператор A со всюду плотной областью определения и со спектром, имеющим не более конечного числа предельных точек в каждом конечном отрезке мнимой оси. Предположим, что A является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы $T(t)$.

Лемма 3.1. *Если выполнено одно из следующих условий:*

а) *пространство B рефлексивно,*

б) *пространство B^* сепарабельно, то всякое определенное и ограниченное на всей оси решение уравнения*

$$u' = Au \tag{3.1}$$

является слабо п. п. функцией.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что нуль не есть точка спектра оператора A. Вместо ограниченного решения $u(t)$ рассмотрим ограниченное решение $v_n = nR(n, A)$, где n — достаточно большое положительное число. Ясно, что v_n удовлетворяет уравнению (3.1) уже в сильном смысле и имеет ограниченную производную

Кроме того, при любом t $v_n \to u(t)$. Покажем, что $v_n(t)$ есть слабо п. п. функция. Если обозначить $L = A^{-1}$, то уравнение (3.1) запишется в виде

$$Lv_n'(t) = v_n(t). \tag{3.2}$$

Напомним, как определяется преобразование Фурье ограниченной функции со значениями в банаховом пространстве B. Рассмотрим множество всех бесконечно дифференцируемых функций $y(t)$ со значениями в B^*, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой степени t. Система норм $\|y(t)\|_k^m = \sup_t \{\|y^{(k)}\|(1+|t|)^m\}$ превращает это множество в полное линейное топологическое пространство $S = S(B^* - \infty, \infty)$. Сопряженное пространство обозначим через $S' = S'(B^{**}, -\infty, \infty)$. В пространстве S естественным образом определен оператор Фурье F, осуществляющий взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование этого пространства на себя.

Сопряженный оператор обозначим через F^*. Ограниченной функции $v_n(t)$ можно поставить в соответствие элемент V_n пространства S', такой, что $V_n(y(t)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle v_n, y(t)\rangle\, dt$ для всякой функции $y(t) \in S$, где $\langle v, y\rangle$ обозначает действие функционала $v \in B^{**}$ на элемент $y \in B^*$. Тогда $\Phi_n = F^* V_n$ называется преобразованием Фурье функции $v_n(t)$. Действие этого функционала на основную функцию $y(t) \in S$ будем обозначать $\Phi_n(y(t)) = [\Phi_n, y(t)]$.

Равенство (3.2) влечет за собой равенство соответствующих преобразований Фурье. Это означает, что для $y(t) \in S$

$$[\Phi_n, itL^*y(t) - y(t)] = 0. \tag{3.3}$$

Пусть $y_0(t) \in S$ и обращается в нуль вне окрестности спектра оператора iA. Из тождества Гильберта непосредственно вытекает, что функция $itR\left(\frac{1}{it}, L^*\right)$ принадлежит пространству S. Подставляя эту функцию в (3.3) в качестве основной, получим

$$[\Phi_n, y_0(t)] = 0.$$

Согласно определению это значит, что

$$[\Phi_n, y_0(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle v_n(t), F(y_0(t))\rangle\, dt = 0.$$

Полагая, в частности, $y_0(t) = g \cdot \varphi_0(t)$, где $g \in B^*$, а $\varphi_0(t)$ — числовая функция, равная нулю в окрестности спектра оператора iA, будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle v_n(t), g\rangle\, \tau(\varphi_0)\, dt = 0, \tag{3.4}$$

где Γ есть оператор Фурье в пространстве скалярных функций.

Но из (3.4) вытекает, что преобразование Фурье числовой функции $\omega(t) = \langle v_n, g\rangle$ сосредоточено в точках спектра оператора iA. Так как функция $v_n(t)$ имеет ограниченную производную, то $\omega(t)$ есть равномерно непрерывная на всей оси функция. Отсюда в силу известных теорем [8, стр. 165] легко следует, что $\omega(t)$ есть п. п. функция Бора. Этим доказана слабая почти-периодичность функции $v_n(t)$. Докажем, что $u(t)$ есть слабо п. п. функция.

Предположим сначала, что область значений оператора $R^*(n, A)$ всюду плотна в B^* (при некотором n). Тогда слабая почти-периодичность функции $u(t)$ очевидна. В самом деле, для $g_0 = R^*(n, A)g$ имеем

$$\langle u(t), g_0\rangle = \left\langle \frac{1}{n} v_n(t), g \right\rangle.$$

По доказанному v_n есть слабо п. п. функция. Применим лемму 1.3. Итак, осталось доказать, что множество значений $R^*(n, A)$ плотно в B^*. Для рефлексивных пространств это так, ибо противное означает, что оператор $R(n, A)$ аннулируется на некотором ненулевом векторе, что невозможно ввиду того, что $(A + nE)R(n, A) = E$. В случае нерефлексивных пространств будет существенно использовано то обстоятельство, что A является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Докажем сначала, что $T^*(t)$ есть сильно непрерывная полугруппа операторов в B^*. В силу хорошо известных рассуждений достаточно доказать, что функция T^*y измерима при любом $y \in B^*$. Вследствие сепарабельности пространства B^* достаточно установить слабую измеримость, т. е. измеримость функции $\langle x, T^*y\rangle$ для всякого $x \in B^{**}$. Если $x \in B$, то $\langle x, T^*y\rangle = \langle T(t)x, y\rangle$ есть, очевидно, непрерывная и, значит, измеримая функция. Но единичный шар в B^{**}, наделенный слабой топологией, есть метрическое пространство, следовательно, в силу одной теоремы теории двойственности [13, стр. 460], для всякого $x \in B^{**}$ найдется последовательность $x_n \in B$, такая, что для всякого $y \in B^*$

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Поэтому $\langle x, T^*(t)y\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, T^*(t)y\rangle$ есть измеримая функция. Этим доказано, что $T^*(t)$ есть сильно непрерывная полугруппа операторов B^*. Обозначим через C инфинитезимальный оператор этой полугруппы. Имеем при достаточно большом n

$$R(n, c) = \int_0^\infty e^{-nt}T^*(t)\,dt = R^*(n, A).$$

Нам нужно было показать, что область значений $R^*(n, A)$ плотна в B^*, но теперь это очевидно, ибо область значений оператора $R^*(n, A) = R(n, C)$ совпадает с областью определения оператора C, которая всюду плотна. Лемма полностью доказана.

Замечание. Если решение $u(t)$ компактно, то оно почти-периодично и это справедливо уже в произвольном банаховом пространстве. В самом деле, в ходе доказательства леммы мы получили, что $v_n = nR(n, A)u$ есть п. п. функция. Но в силу компактности $v_n(t) \to u(t)$ равномерно на всей оси.

Пусть теперь B — равномерно выпуклое пространство, оператор A удовлетворяет условиям леммы 3.1 и $f(t)$ есть п. п. функция в B.

Теорема 3.1. *Всякое компактное (ограниченное) решение уравнения*

$$u' = Au + f(t)$$

есть (слабо) п. п. функция.

Доказательство. Так как всякое ограниченное решение однородного уравнения есть слабо п. п. функция, то оно не может быть сколь угодно малым по норме. В самом деле, если $\langle u(t), g_0\rangle \neq 0$ для некоторого $g_0 \in B^*$ и $u(t_n) \to 0$, то $u(t+t_n) \to 0$ при любом t, ибо $u(t+t_n) = T(t)u(t_n)$. Отсюда следует, что при $t \geqslant 0$ $\langle u(t+t_n), g_0\rangle \to 0$. Но это противоречит тому, что $\langle u(t), g_0\rangle$ есть отличная от нуля п. п. функция. В дальнейшем остается применить теорию Фавара — Америо [14]. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $B = H$ и $\operatorname{Re}(Ax, x) \geqslant 0$ утверждение теоремы 3.1 относительно компактных решений получено в работе [15] с привлечением специальных теорем теории сжатий гильбертова пространства. В следующем параграфе мы увидим, что утверждение теоремы 3.1 относительно компактных решений справедливо в произвольных банаховых пространствах.

В вопросах, связанных с теорией Флоке для периодических операторных уравнений, важную роль играет лемма, являющаяся дискретным аналогом леммы 3.1. Она относится к степеням оператора, в то время как лемма 3.1 — к полугруппе операторов.

Пусть в рефлексивном банаховом пространстве действует ограниченный оператор T, спектр которого имеет не более конечного числа предельных точек на единичной окружности. Наблюдается следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Если последовательность вида $\{T^n x\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ ограничена, то x принадлежит замкнутой линейной оболочке собственных векторов оператора T, отвечающих лежащим на единичной окружности собственным значениям.*

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 3.1. Вместо гармонического анализа ограниченных функций используется гармонический анализ ограниченных последовательностей (т. е. функций, заданных на группе вещественных чисел).

В заключение этого параграфа дадим одно простое приложение теоремы 3.1.

Обозначим через $K(B, B)$ линейное пространство вполне непрерывных операторов, действующих в равномерно выпуклом пространстве B, и наделенное равномерной операторной топологией. Рассмотрим уравнение

$$u' = A(t)u + f(t), \tag{3.5}$$

где $f(t)$ — п. п. функция в B, а $A(t)$ — периодическая (с периодом ω) непрерывная функция со значениями в $K(B, B)$.

Теорема 3.2. *Всякое ограниченное решение уравнения (3.6) есть п. п. функция.*

Доказательство.

Обозначим через $T(t)$ решение следующего операторного уравнения:

$$T'(t) = A(t)T(t) \tag{3.6}$$
$$T(0) = E.$$

Из соотношения

$$T(\omega) = e^{A(0)\omega} + \int_0^\omega e^{(t-s)A(0)}\{A(s) - A(0)\}T(\omega - s)\,ds$$

легко заметить, что оператор монодромии $T(\omega) = \theta$ отличается от оператора $\theta_1 = e^{A(0)\omega}$ вполне непрерывным слагаемым.

В силу известной теоремы Г. Вейля, спектр оператора имеет единственную предельную точку в единице. Кроме того, так как уравнение (3.5) разрешимо при отрицательных t, оператор $T(\omega)$ имеет непрерывный обратный, поэтому применима теория Флоке.

Положим

$$N = \ln T(\omega = \int_{\gamma} R(\lambda, \theta) \ln \lambda \, d\lambda \quad (\ln 1 = 0), \tag{3.7}$$

где контур γ охватывает весь спектр операторов θ и θ_1 и не охватывает нуля. Так как

$$R(\lambda, \theta) = R(\lambda, \theta_1)\{E + R(\lambda, \theta)(\theta_1 - \theta)\}$$

и $\theta_1 - \theta$ есть вполне непрерывный оператор, то из (3.8) получаем, что $N = A(0) + L$, где L — вполне непрерывный оператор. Итак, мы показали, что уравнение с помощью периодического преобразования приводится к уравнению с постоянным вполне непрерывным оператором, т. е. уравнению

$$y' = Ny + g(t). \tag{3.8}$$

Периодическое преобразование, которое осуществляет это приведение, сохраняет (в обе стороны) компактность, ограниченность и почти-периодичность. Поэтому достаточно доказать, что всякое ограниченное решение уравнения (3.8) есть п. п. функция. Но это есть следствие теоремы 3.1. В самом деле, из теоремы 1.3. следует слабая почти-периодичность, а компактность следует из (3.8) и теоремы Л. Америо об интеграле [16].

Более сложные рассуждения позволяют исследовать уравнение $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k y^{(k)} = f(t)$, где $\{A_k\}_{k=0}^{n-1}$ — непрерывные, периодические (с общим периодом) функции в $K(B, B)$. Оказывается, что всякое ограниченное решение этого уравнения почти-периодично вместе с производными до порядка n (см. [17]). В случае, когда операторы $\{A_k\}_{k=0}^{n-1}$ не зависят от t, это дает естественное обобщение классических результатов Бора и Нейгебауэра [10], относящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

§ 4. О МЕТОДЕ МИНИМАКСА

В сепарабельном банаховом пространстве B рассмотрим уравнение

$$u' = Au + f(t), \tag{4.1}$$

где $f(t)$ — п. п. функция в B.

Предположим, что выполнены следующие условия:

а) оператор A является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы $T(t)$;

б) нетривиальные компактные решения однородного уравнения не могут быть сколь угодно малыми.

Пусть известно, что (4.1) имеет компактное решение. Существует ли почти-периодическое решение? В случае конечномерного пространства положительный ответ на этот вопрос дает метод минимакса, принадлежащий Фавару. Широко развитое Л. Америо [14] обобщение этого метода относится лишь к равномерно-выпуклым пространствам. Мы покажем сейчас, что метод минимакса, в несколько модифицированной форме, остается справедливым в общем случае. Приведенные ниже рассуждения остаются в силе, если оператор A зависит от времени почти-периодически и выполнены условия существования единственности, непрерывной зависимости для уравнения (4.1).

Теорема 1.4. *Если существует компактное решение уравнения (4.1), то существует и почти-периодическое решение.*

Доказательство. Прежде всего вместо данного решения $u(t)$ рассмотрим рекуррентное в смысле Биркгофа решение $v(t)$. Существование такого решения можно доказать весьма просто [18]. Решение $v(t)$ будет компактным и равномерно непрерывным на всей оси. Тогда из каждой последовательности вещественных чисел $\{h_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h'_n\}$, такую, что $v(t+h'_n) \to v_h(t)$ равномерно в каждом конечном отрезке числовой оси. Рекуррентность означает, что замыкания множества значений функций $v(t)$ и $v_h(t)$ совпадают. Замкнутую выпуклую оболочку множества значений $v(t)$ обозначим через Δ. Обозначим через Ω_f совокупность решений уравнения (4.1), траектории которых содержатся в Δ. Реализуем наше пространство в виде подпространства пространства $C(0, 1)$ и пусть

$$\delta(x(t)) = \sup_t \| x(t) \| L_2$$

для $x(t) \in \Omega_f$.

Покажем, что существует единственное решение $\overset{0}{x}(t) = \overset{0}{x}_f(t)$ такое, что $\delta(\overset{0}{x}) = \min\limits_{x \in \Omega_f} \delta(x(t)) = M_f$. Докажем сначала существование такого решения. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность решений, принадлежащих совокупности Ω_f и удовлетворяющих условию $\delta(x_n) \to M_f$. Так как множество компактно, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такая, что $x_{n_k} \to y$ при любом t. Функция $y(t)$ есть, очевидно, решение уравнения (4.1). Если $\delta(y) > M_f$, то существует точка t_0, такая, что $\| y(t_0) \|_{L_2} > M_f$. Но так как $x_{n_k} \to y(t)$, то $\delta(x_{n_k}) > M_f + \varepsilon$ при достаточно большом K, что невозможно.

Единственность минимального решения $\overset{0}{x}(t) = y(t)$ есть следствие равномерной выпуклости пространства $L_2(0, 1)$. В самом деле, пусть существует еще одно минимальное решение $y_1(t)$. Разность $z(t) = y(t) - y_1(t)$ не может быть сколь угодно малой по норме $C(0, 1)$, а ввиду компактности и по норме $L_2(0, 1)$, т. е. $\inf \| z(t) \|_{L_2} = \mu > 0$. Так как

$$\left\| \frac{y(t) + y_1(t)}{2} \right\|_{L_2} + \frac{1}{2} \| z(t) \|_{L_2} = \frac{1}{2} \{ \| y(t) \|_{L_2} + \| y_1(t) \| \},$$

то

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left\| \frac{y_1 + y_2}{2} \right\| \leqslant M_f - \frac{\mu}{2}. \tag{4.2}$$

Но решение $\frac{y(t) + y_1(t)}{2}$ принадлежит Ω_f, поэтому (4.2) противоречит выбору числа M_f.

Пусть $\{h_n\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел. Выберем подпоследовательность $\{h'_n\}$ такую, что $f(t + h'_n) \to g(t)$ равномерно на всей оси. Если $x(t) \in \Omega_f$ и $x(t + h'_n) \to x_h(t)$, то, очевидно, $\delta(x_h) \leqslant \delta(x)$. Отсюда легко следует, что $M_f = M_g$ и $\overset{0}{x}_f(t + h'_n) \to \overset{0}{x}_g(t)$

при любом t. Покажем, что $\overset{0}{x}_f(t+h_n') \to \overset{0}{x}_g(t)$ равномерно на всей оси. Это и будет означать почти-периодичность функции $\overset{0}{x}_f(t)$. Предполагая противное, получим последовательность чисел $\{t_n\}$, такую, что $\|\overset{0}{x}_f(t_n+ h_n') - \overset{0}{x}_g(t_n)\|$ и равномерно по t

$$g(t+t_n) \to g_1(t);\ f(t+t_n+h_n') \to g_1(t).$$

Можно считать, что $\overset{0}{x}_f(t_n+h_n') \to \beta$ и $\overset{0}{x}_g(t_n') \to \beta_1$. Ясно, что решения $\overset{0}{x}_f(t+t_n+h_n')$ и $\overset{0}{x}_g(t+t_n)$ сходятся при $n \to \infty$ к различным решениям $V_1(t)$ и $V_2(t)$ одного и того же уравнения

$$u' = Au + g_1(t). \tag{4.3}$$

Решения $V_1(t)$ и $V_2(t)$ обязаны быть минимальными, что противоречит единственности минимального решения (4.3). Теорема доказана.

Применение этой теоремы к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом дано в работе [17].

§ 5. УРАВНЕНИЕ ТИПА ШРЕДИНГЕРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данном параграфе по существу по-новому изложены результаты § 2. Наше рассмотрение не будет связано со спецификой гильбертова пространства (интегралы энергии), теоремой типа Дини (см. лемму 1.2), но будет опираться лишь на фундаментальную теорему Боля — Бора — Америо об интеграле от почти-периодической функции.

Пусть B — сепарабельное, равномерно-выпуклое пространство. Рассмотрим уравнение

$$u' = iA + Bu + f(t), \tag{5.1}$$

где $f(t)$ — п. п. функция.

Предположим выполнены следующие условия:

а) оператор A является инфинитезильным оператором сильно непрерывной группы операторов $T(t) = e^{iAt}$, такой, что

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|T(t)\| \leqslant C;$$

б) спектр оператора A имеет не более конечного числа предельных точек в каждом конечном отрезке вещественной оси;

в) оператор B вполне непрерывен.

Можно с самого начала считать, что группа $T(t)$ является изометрической, ибо этого можно достигнуть, вводя новую норму, эквивалентную исходной, по формуле $\|x\|_1 = \sup\limits_{-\infty<t<\infty} \|T(t)x\|$.

Теорема 5.1. *Всякое ограниченное решение уравнения (5.1) есть п. п. функция.*

Доказательство. Прежде всего, слабая почти-периодичность есть следствие теоремы (3.1), ибо спектр оператора в силу теоремы Г. Вейля имеет не более конечного числа предельных точек в каждом конечном отрезке мнимой оси. Значит осталось доказать компактность траектории $u(t)$. Очевидно, решение $u(t)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$u(t) = e^{iAt}u(0) + \int_0^t e^{-i(t-s)}\{Bu(s) + f(s)\}\,ds =$$
$$= e^{iAt}u(0) + e^{iAt}\int_0^t e^{-iAs}\{Bu(s) + f(s)\}\,ds. \qquad (5.2)$$

Пусть $\varphi(s)$ — п. п. функция. Покажем, что $\varphi_1 = e^{iAs}\varphi(s)$ есть также п. п. функция. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ спектр оператора A, а $\{\mu_k\}$ — спектр функции $\varphi(s)$. Нетрудно показать (см. [19]), что в силу условий а) и в) оператор A имеет полную систему собственных функций $\{e_k\}$. Тогда, если $\|\varphi(s) - \sum_{k=1}^{N} b_k e^{i\mu_k s}\| < \varepsilon$, то $\|e^{iAs}(\varphi(s) - \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\mu_k s})\| < \varepsilon$ (ввиду изометричности группы $T(t) = e^{iAt}$). Но функция $e^{iAs}b_k\{k = 1, \ldots N\}$ почти-периодична, ибо, если $\|b_k - \sum_n c_n^{(k)} e_n\| < \varepsilon_1$, то $\|e^{iAs}b_k - \sum_n c_n^{(k)} e^{i\lambda_n s} e_n\| < \varepsilon_1$. Поэтому $\varphi_1(s)$ есть п. п. функция. После этого нетрудно уже показать, что каждое из двух слагаемых в (5.2) есть п. п. функция. В самом деле, к первому слагаемому непосредственно относятся только что приведенные рассуждения. Так как B — вполне непрерывный оператор, то $g(s) = Bu(s) + f(s)$ есть п. п. функция. Из ограниченности $u(t)$ и изометричности $T(t)$ следует немедленно, что $g_1(t) = \int_0^t g(s)\,ds$ есть ограниченная и, значит, по теореме Америо, п. п. функция. Но тогда и $g_2(t) = e^{iAt}g_1(t)$ есть также п. п. функция. Теорема доказана.

Применим теорему 4.1 к гиперболическому уравнению

$$u_{tt} + A^2u + Bu = f(t), \qquad (5.3)$$

где A — положительно определенный оператор с вполне непрерывным обратным, а B — вполне непрерывен относительно A. Теперь мы не предполагаем, что $A^2 + B$ имеет полную систему конечномерных инвариантных подпространств. Если обозначить $x = u'$ и $y = u$, то уравнение (5.3) в пространстве W_A (см. § 2) запишется в виде

$$V' = \{x', y'\} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}\{x, y\} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\{x, y\} + \{f(t), 0\} = \bar{A}V + BV + F(t).$$

Оператор $\bar{A}$ в пространстве W_A порождает группу унитарных операторов, а спектр его имеет единственную предельную точку на бесконечности. Следовательно, условия а) и в) выполнены. Проверим, что $\bar{B}$ есть вполне непрерывный оператор. Пусть $\|V_n\|^2 < C$, т. е. $\|x_n\|^2 + \|Ay_n\|^2 < C$. Но тогда последовательность $BV_n = \{By_n, 0\}$ компактна, потому что B вполне непрерывен относительно A. Получаем утверждение теоремы 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bochner, J. von Neumann. On compact solutions of operational differential equations. Ann. of Math., 36 (1935).

2. С. Л. Соболев. О почти-периодичности решений волнового уравнения. ДАН СССР, т. XVIII, 8 (1945), 570; Т. XVIII, 9 (1945), 646; т. XIX, 1 (1945), 12.

3. В. В. Жиков. Об абстрактных уравнениях с почти-периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 163, № 3 (1965), 555—558.

4. В. В. Жиков. Почти-периодические решения дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. ДАН СССР, 165, № 6, (1965), 1227—1230.

5. В. В. Жиков. К вопросу о гармоническом анализе ограниченных решений операторных уравнений. ДАН СССР 169, № 6 (1966).

6. S. Bochner. Uniform convergence of monotone seguences of functions. Proc. Nat. Acad. Sci., U S. A., 47 (1961).

7. В. В. Жиков. Теорема Дини для монотонной последовательности почти-периодических, почти-автоморфных и рекуррентных функций и связанные с ней вопросы. «Вестн. МГУ» (находится в печати).

8. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. Гостехиздат, М., 1953.

9. О. А. Ладыженская. О решении нестационарных операторных уравнений. «Матем. сб., нов. сер.,» т. 39, вып. 4 (1956), 491—524.

10. H. Bohr und O. Neugebauer. Über lineare Differenntialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodicher rechter Seite, Gött, Nachr,. 8—22, 1926.

11. L. Amerio. Quasi-peridicita degli integrali ad energia limitata dell' equazione dell ond con termine noto quasiperiodico, I, II, III, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 28 (1960).

12. С. Лефшец. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит., М., 1961.

13. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

14. L. Amerio. Su un teorema di minimax per le equazioni differenzialy astratte, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 61 (1963).

15. C. Foias and S Zaidman. Almost-periodic solution of parabolic systems. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. 3, V. 15, № 3, 247—262, 1963.

16. L. Amerio. Sull'integrazione dell funzioni quasi-periodiche astratte. Ann. di Mat., 53 (1951).

17. В. В. Жиков. Почти-периодичность решений некоторых классов уравнений. «Дифф. уравнения» (находится в печати).

18. В. М. Миллионщиков. Рекуррентные и почти-периодические траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 161, № 1, 43—44, 1965.

19. Ю. И. Любич. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. «Усп. матем. наук», т. 18, вып. 1 (109), 165—171, 1963.

Поступила 12 апреля 1966 г.