ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

ИЗГИБАНИЕ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В. В. Рокитянская

Нам известна только одна работа, посвященная вопросу изгибания на главном основании поверхностей в неевклидовом пространстве, а именно, заметка Демулена [4], в которой доказывается, что сопряженная геодезическия сеть на поверхности эллиптического пространства сохраняется при изгибании.

В евклидовом пространстве все главные основания найдены только на поверхностях второго порядка. Причем, поверхности вращения несут ∞^1 главных оснований, а остальные поверхности второго порядка несут три главных основания. Кроме сферы, ∞^2 главных оснований несет только минимальный геликоид.

В настоящей работе найдены все главные основания на поверхностях Клиффорда, причем доказано, что они несут ∞^2 главных оснований. Среди поверхностей нулевой кривизны эллиптического пространства выделяется класс линейчатых поверхностей с ∞^1 главных оснований и класс нелинейчатых поверхностей, также несущих ∞^1 главных оснований.

§ 1. Главные основания поверхности Клиффорда

1. Рассмотрим поверхность нулевой кривизны в эллиптическом пространстве ($K_0 = 1$). Ее можно параметризовать так, чтобы коэффициенты линейного элемента были постоянны. Будем искать поверхность S с линейным элементом

$$ds^2 = Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2, \tag{1.1}$$

где E, F, G постоянны, такую, чтобы координатная сеть на ней была сопряжена. Задача сводится к определению коэффициентов

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{EG - F^2}} \text{ и } \delta'' = \frac{N}{\sqrt{EG - F^2}},$$

удовлетворяющих уравнениям Петерсона—Кодацци и Гаусса [3]. В нашем случае они имеют вид

$$\delta_v = 0,\ \delta''_u = 0,\ \delta\delta'' = -1,$$

Отсюда найдем $\delta = -\frac{1}{\delta''} = k = \text{const}$. При изменении произвольной постоянной k поверхность изгибается с сохранением сопряженной системы u, v. Ясно, что координатная сеть состоит из геодезических линий, следовательно, поверхность S изгибается на основании Фосса.

В нашем случае деривационные уравнения поверхности эллиптического пространства в координатах Вейерштрасса [3] легко интегрируются. В результате ортогонального преобразования конечные уравнения поверхностей приводятся к виду

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=\cos\theta\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right), \tag{1.2}$$

где $\cos\theta$ зависит от E, F, G и k. Это — поверхность Клиффорда, θ — угол между прямолинейными образующими.

Оснований Фосса на поверхности Клиффорда ∞^1. В асимптотической системе координат они определяются уравнениями

$$u+av=\text{const},\quad u-av=\text{const},\quad a=\text{const}.$$

2. Найдем на поверхности Клиффорда все главные основания. Метод, разработанный С. П. Финиковым для отыскания главных оснований поверхности в евклидовом пространстве полностью применим и в случае неевклидова пространства. Отнесем поверхность Клиффорда к асимптотическим координатам и воспользуемся системой дифференциальных уравнений, данной С. П. Финиковым [1]. В нашем случае она имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\partial v}=0,\\ \frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}\varphi^2+\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}=0,\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\varphi=\frac{du}{dv}$ определяет одно семейство кривых главного основания, а $\frac{\delta u}{\delta v}=-\varphi$ — второе семейство. Из (1.3) находим

$$\varphi=\frac{C_1\operatorname{ch}C_1u}{B_1\operatorname{ch}B_1v}.$$

Интегрируя $\varphi=\frac{du}{dv}$ и $-\varphi=\frac{\delta u}{\delta v}$, находим главные основания

$$\begin{gathered}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}Cu)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}Bv)=\text{const},\\ \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}Cu)-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}Bv)=\text{const}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

B и C — произвольные постоянные, следовательно, поверхность Клиффорда несет ∞^2 главных оснований.

3. Отнесем поверхность Клиффорда к главному основанию (1.4). Коэффициенты линейного элемента в этой системе координат имеют вид

$$\begin{gathered}E=\frac{1}{B^2\cos^2 2(u-v)}-\frac{2\cos\theta}{BC\cos2(u-v)\cos2(u+v)}+\frac{1}{C^2\cos^2 2(u+v)};\\ F=\frac{1}{B^2\cos^2 2(u-v)}+\frac{1}{C^2\cos^2 2(u+v)};\\ G=\frac{1}{B^2\cos^2 2(u-v)}+\frac{2\cos\theta}{BC\cos2(u-v)\cos(u+v)}+\frac{1}{C^2\cos^2 2(u+v)}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Будем изгибать поверхность с линейным элементом (1.5) на главном основании (1.4). Задача сводится к определению функций δ и δ'', удовлетворяющих уравнениям Петерсона — Кодацци и Гаусса

$$\begin{gathered}\delta_v+\Gamma_{22}^2\delta+\Gamma_{11}^2\delta''=0,\\ \delta''_u+\Gamma_{22}^1\delta+\Gamma_{11}^1\delta''=0,\\ \delta\delta''=-1.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Интегрируя систему (1.6), находим

$$\delta = \sqrt{\frac{1 + a\cos 4v}{1 - a\cos 4u}}, \quad \delta'' = -\sqrt{\frac{1 - a\cos 4u}{1 + a\cos 4v}}, \quad a = \text{const}.$$

При $a \neq 0$ поверхности, в которые изгибается поверхность Клиффорда на главном основании (1.4), не являются поверхностями Клиффорда. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что они не являются поверхностями второго порядка. Для этого вычисляем дифференциальную форму Фубини, равенство нулю которой характеризует поверхность второго порядка. Она оказывается отличной от нуля при $a \neq 0$.

4. Найдем на поверхности Клиффорда главные основания с одним семейством геодезических линий. Они находятся из уравнений [1]

$$2\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u \partial v} = (\Gamma^2_{11}\varphi^2)_u - \left(\Gamma^1_{22}\frac{1}{\varphi^2}\right)_v$$

$$\varphi\frac{\partial \ln\varphi}{\partial u} + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial v} - \Gamma^2_{11}\varphi^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^1_{12})\varphi - (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}) + \Gamma^1_{22}\frac{1}{\varphi} = 0.$$

Обозначив $\ln\varphi = \sigma$ и учитывая, что $\Gamma^k_{ij} = 0$, перепишем эту систему так

$$e^{\sigma}\sigma_u + \sigma_v = 0$$
$$\sigma_{uv} = 0.$$

Отсюда находим $\sigma = \ln\frac{u}{v} = \ln\varphi$. Интегрируя $\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}$ и $\frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{u}{v}$, найдем главное основание

$$\frac{u}{v} = \text{const}, \quad uv = \text{const}.$$

Итак, поверхность Клиффорда несет на себе ∞^2 главных оснований, не состоящих из геодезических, ∞^1 оснований Фосса и одно главное основание с одним семейством геодезических.

§ 2. Поверхности нулевой кривизны с бесконечным числом главных оснований

1. Если поверхность нулевой кривизны эллиптического пространства отнести к асимптотическим координатам, то ее линейный элемент принимает вид [3]

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(\mathrm{U} + \mathrm{V})\,du\,dv + dv^2. \tag{2.1}$$

Отыскание главных оснований сводится к решению системы дифференциальных уравнений [1]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{uv} &= A \\ \sigma_{uu}e^{2\sigma} + \sigma_{vv} &= B \end{aligned}\right\}, \tag{2.2}$$

где $\sigma = \ln\varphi$, $A = \frac{1}{2}(\beta e^{2\sigma})_u - \frac{1}{2}(\gamma e^{-2\sigma})_v$;

$$B = \sigma_u(\theta_u e^{2\sigma} + 3\gamma) + \sigma_v(3\beta e^{2\sigma} + \theta_v) - \beta^2 e^{4\sigma} + e^{2\sigma}(\theta_u^2 + \beta_v - \theta_{uu} - 2\beta\theta_v) +$$
$$+ \gamma^2 e^{-2\sigma} + \theta_v^2 + \theta_{vv} - \gamma_u + 2\gamma\theta_u$$
$$\beta = \Gamma^2_{11}, \quad \gamma = \Gamma^1_{22}, \quad \theta_u = \Gamma^1_{11}, \quad \theta_v = \Gamma^2_{22}.$$

Условие интегрируемости системы (2.2) имеет вид

$$A\sigma_{uu} + C = 0, \tag{2.3}$$

где C не содержит производных σ выше первого порядка. Решение системы (2.2), если она окажется совместной, может зависеть не больше, чем от четырех произвольных постоянных, т. е. на поверхности может существовать не более ∞^4 главных оснований. Требование, чтобы на поверхности существовало ∞^4 главных оснований, приводит к условиям

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Это характеризует поверхности второго порядка. Но так как поверхности нулевой кривизны второго порядка исчерпываются поверхностями Клиффорда, а они несут ∞^2 главных оснований, то поверхностей с ∞^4 главных оснований не существует.

Докажем, что не существует поверхностей с ∞^3 главных оснований. Если поверхность несет ∞^3 главных оснований, то можно произвольно задать σ, σ_u, σ_v и из (2.3) определить σ_{uu} (A не может равняться нулю в этом случае).

Вычисляя двумя способами σ_{uuv} и приравнивая их, получим

$$R = \left(\frac{C}{A}\right)_v + A_u = 0. \tag{2.4}$$

Положим $R^* = A^3 R$ и отберем старшие относительно σ_u и σ_v члены R_6^*. Чтобы на поверхности существовало ∞^3 главных оснований, необходимо, чтобы в R_6^* все коэффициенты были равны нулю, и мы снова приходим к условиям

$$\beta = 0, \ \gamma = 0.$$

2. В § 1 было доказано, что поверхность Клиффорда несет ∞^2 главных оснований. Докажем, что ими исчерпывается класс поверхностей нулевой кривизны, несущих ∞^2 главных оснований.

Лемма. *Чтобы на поверхности существовало ∞^2 главных оснований, необходимо, чтобы $A = C = 0$.*

Пусть $A \neq 0$. Тогда имеет место (2.4) и уравнение

$$S = 0, \tag{2.5}$$

которое получается из (2.4), если поменять местами u и v, β и γ, σ и $-\sigma$, так как уравнения (2.2) инвариантны относительно такой замены. Полагаем $S^* = -A^3 S$. R^* и S^*, рассматриваемые как многочлены относительно σ_u и σ_v, должны иметь общий делитель, так как в противном случае (2.4) и (2.5) определяют σ_u и σ_v, и число главных оснований не превышает ∞^1. Оказывается, что R^* и S^* не имеют общего делителя, следовательно, предположение, что $A \neq 0$ — неверно.

Один из коэффициентов β, γ не равен нулю. Пусть $\beta \neq 0$. Из $A = 0$ и $C = 0$ получаем

$$\gamma = 0.$$

Отсюда следует, что $V = \text{const}$, которую можно считать равной нулю. Значит, ∞^2 главных оснований могут иметь только линейчатые поверхности и притом лишь те, у которых функция U, содержащаяся в линейном элементе, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{U''}{U'}\right)' - 4 \operatorname{ctg} U U'' + \frac{3(1+\cos^2 U)}{\sin^2 U} U'^2 - \frac{2cU'}{\sin U} = 0, \tag{2.6}$$
$$c = \text{const}.$$

Это уравнение получаем из (2.2) при условиях $A=0$, $\gamma=0$. Оттуда же получаем

$$\sigma = U_0 + V_0,$$

$U_0 = -\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{U'}{\sin U}\right)$, а V_0 находится из уравнения

$$V_0'' - 3V_0' e^{2V_0} + e^{4V_0} = -ce^{2V_0}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) находим

$$U' = \sin^2 U\,[(\alpha - 2cU)\cos U + (2c\ln|\sin U| + \delta)\sin U],$$

α, δ — произвольные постоянные. Из (2.7) получаем

$$2k\ln(V_1+1) + (k+1)\ln(V_1+k) + (k-1)\ln(V_1-k) = v$$
$$\text{и } 2k\ln(V_1+1) + (k+1)\ln(V_1-k) + (k-1)\ln(V_1+k) = v,$$

где $V_1 = \sqrt{Ae^{2V_0} + k^2}$, $k = \sqrt{1+Ac}$.
V_0 содержит только одну произвольную постоянную A (c входит в U), следовательно, поверхность несет ∞^1 главных оснований.

Итак: *a*) кроме поверхностей Клиффорда, не существует поверхностей нулевой кривизны эллиптического пространства с ∞^2 главных оснований; б) линейчатые поверхности нулевой кривизны, для которых выполняется (2.6), несут на себе ∞^1 главных оснований.

3. Будем искать поверхности нулевой кривизны с ∞^1 главных оснований среди нелинейчатых поверхностей. Возьмем поверхности, для которых

$$A = p_v = q_u = 0 \quad (p = \sigma_u,\ q = \sigma_v) \tag{2.8}$$

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\lambda_k \sigma} \qquad q = \sum_{i=0}^{m} b_i e^{\mu_i \sigma} \tag{2.9}$$

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n,\ a_0 a_n \neq 0 \quad \mu_0 > \mu_1 > \ldots > \mu_m,\ b_0 b_m \neq 0.$$

Чтобы на поверхности существовало ∞^1 главных оснований, необходимо, чтобы разложения p и q удовлетворяли уравнениям (2.2) тождественно относительно σ. Подставляя (2.9) в (2.8) и во второе уравнение (2.2) и отбирая сначала старшие, а потом низшие члены относительно σ, находим a_k, b_i, λ_k, μ_i и получаем следующие разложения для p и q

$$p_1 = -\frac{\beta_u}{2\beta} - \gamma e^{-2\sigma} \qquad p_2 = -\frac{\beta_u}{2\beta} - \frac{\gamma}{2}e^{-2\sigma}$$

$$q_1 = \beta e^{2\sigma} + \frac{\gamma_v}{2\gamma} \qquad q_2 = \frac{\beta}{2}e^{2\sigma} + \frac{\gamma_v}{2\gamma}.$$

Выразив Γ_{ij}^k через U и V и подставив p и q в (2.2) и (2.8), убеждаемся, что условию $\beta\gamma \neq 0$ удовлетворяют только p_2 и q_2, а функции U и V должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{U''}{U'}\right)' - 2U''\operatorname{ctg}(U+V) + \frac{3[1+\cos^2(U+V)]}{2\sin^2(U+V)}U'^2 + \\ &+ \frac{3U'V'\cos(U+V)}{\sin^3(U+V)} - \frac{U'V''}{V'\sin(U+V)} = 0; \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{V''}{V'}\right)' - 2V''\operatorname{ctg}(U+V) + \frac{3[1+\cos^2(U+V)]}{2\sin^2(U+V)}V'^2 + \\ &+ \frac{3U'V'\cos(U+V)}{\sin^3(U+V)} - \frac{U''V'}{U'\sin(U+V)} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из этих уравнений находим

$$U' = A\sin 3U + B\cos 3U + C\sin U + D\cos U,$$
$$V' = A\sin 3V - B\cos 3V + C\sin V - D\cos V. \tag{2.11}$$

Чтобы убедиться в том, что поверхности, для которых функции U, V, содержащиеся в линейном элементе, удовлетворяют условиям (2.11), действительно несут ∞^1 главных оснований, рассмотрим частный случай $A = B = 0$.

Из (2.11) находим

$$U = 2\operatorname{arc\,tg} e^{au}, \quad V = 2\operatorname{arc\,tg} e^{av},$$

a — произвольная постоянная.

Из уравнений

$$\sigma_u = -(\ln\beta)_u - \gamma e^{-2\sigma}$$
$$\sigma_v = (\ln\gamma)_v + \beta e^{2\sigma}$$

находим

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{b + \operatorname{sh} au}{b - \operatorname{sh} av} = \ln\varphi,$$

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{b + \operatorname{sh} au}{b - \operatorname{sh} av}}.$$

φ содержит одну произвольную постоянную b (a входит в линейный элемент). Следовательно, поверхность несет ∞^1 главных оснований.

4. Основания Фосса находятся из системы

$$\sigma_u + \theta_u + \gamma e^{-2\sigma} = 0$$
$$\sigma_v - \beta e^{2\sigma} - \theta_v = 0. \tag{2.12}$$

Условие интегрируемости имеет вид

$$2\theta_{uv} - 4\beta\gamma + (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)e^{-2\sigma} + (\beta_u - 2\beta\theta_u)e^{2\sigma} = 0. \tag{2.13}$$

Чтобы оснований Фосса было бесконечное множество, необходимо, чтобы (2.13) выполнялось тождественно относительно σ, в этом случае имеем

$$\theta_{uv} - 2\beta\gamma = 0, \quad \gamma_v - 2\gamma\theta_v = 0, \quad \beta_u - 2\beta\theta_u = 0. \tag{2.14}$$

Выражая коэффициенты через U, V, получим

$$\frac{3U'V'}{\sin^2(U+V)} = 0,$$
$$\frac{V''}{\sin(U+V)} - \frac{3V'^2\cos(U+V)}{\sin^2(U+V)} = 0, \tag{2.15}$$
$$\frac{U''}{\sin(U+V)} - \frac{3U'^2\cos(U+V)}{\sin^2(U+V)} = 0.$$

Если исключить поверхности Клиффорда ($U' = 0$, $V' = 0$), то, согласно (2.15), $V' = 0$, $U' \neq 0$, т. е. основания Фосса могут иметь только линейчатые поверхности и притом те, для которых

$$U' = \sin^3 U, \quad A = \text{const}. \tag{2.16}$$

Из (2.12) находим

$$\sigma = -\ln\sqrt{2Av + b}\,\sin U; \tag{2.17}$$

b, как аддитивную постоянную можно включить в v, значит σ не содержит произвольной постоянной (A входит в U). Следовательно, линейчатые поверхности нулевой кривизны, для которых выполняется (2.16), несут одно основание Фосса (2.17).

5. Поверхностей нулевой кривизны с бесконечным числом главных оснований с одним семейством геодезических не существует. Действительно, главные основания с одним семейством геодезических находятся из уравнений:

$$e^{\sigma}\sigma_u + \sigma_v = \beta e^{2\sigma} - \theta_u e^{\sigma} + \theta_v - \gamma e^{-\sigma}$$

$$\sigma_{uv} = \frac{1}{2}(\beta e^{2\sigma})_u - \frac{1}{2}(\gamma e^{-2\sigma})_v.$$

Эти уравнения ничем не отличаются от соответствующих уравнений в евклидовом пространстве [1]. Как показал С. П. Фиников, из этой системы следует, что и второе семейство главного основания должно состоять из геодезических.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. С. П. Фиников. Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.—Л., 1937.

[2]. Я. П. Бланк. Конические сети. «Записки математ. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. об-ва», т. XXIII, 114—141, 1952.

[3]. L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale, *v*. II, *p*. II.

[4]. A. Demoulin. Sur les surfaces de Voss de la géometrie non euclidienne, C. R., **140**, 1226, 1572, 1905.