УДК 519.21.5

А. М. УЛАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ СВЕРТОК МЕР В R^m, $m \geqslant 2$, СУЖЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВА

1. Изучаются условия однозначной определенности комплекснозначных мер вида μ^{n*} сужением на множества в пространстве $\boldsymbol{R}^m$. Такие условия для мер на прямой $\boldsymbol{R}$ изучались в ряде работ (см., на-

пример, [1—4] и указанную там литературу). Наиболее общие результаты, содержащие [1—3], получены в [4]. К рассматриваемому вопросу относятся следующие две теоремы.

Теорема 1.1 [4]. *Пусть* μ *и* ν — *борелевские меры в* $\boldsymbol{R}$, *удовлетворяющие условиям*

$$|\mu|(\boldsymbol{R}),\ |\nu|(\boldsymbol{R})<\infty; \tag{1.1}$$

$$(\operatorname{Supp}\mu\cup\operatorname{Supp}\nu)\cap(-\infty,\ -r)\neq\varnothing,\ \forall r>0; \tag{1.2}$$

$$|\mu|(-\infty,\ -r),\ |\nu|(-\infty,\ -r)=O(e^{-cr}),\ r\to+\infty,\ \forall c>0. \tag{1.3}$$

Если для некоторых $n\geqslant 3$ *и* r *сужения* μ^{n*} *и* ν^{n*} *на полуось* $(-\infty,\ -r)$ *совпадают, то* $\mu^{n*}\equiv\nu^{n*}$, $\mu\equiv\varepsilon\nu$, *где* ε — *постоянная такая, что* $\varepsilon^n=1$.

Теорема 1.2 [4]. *Пусть* μ *и* ν — *борелевские меры в* $\boldsymbol{R}$, *удовлетворяющие условиям (1.1), (1.2) и*

$$|\mu|(-\infty,\ -r),\ |\nu|(-\infty,\ -r)=O(e^{-cr\ln r}),\ r\to+\infty,\ \forall c>0. \tag{1.4}$$

Если для некоторого r *сужения* μ^{2*} *и* ν^{2*} *на полуось* $(-\infty,\ -r)$ *совпадают, то* $\mu^{2*}\equiv\nu^{2*}$, $\mu\equiv\pm\nu$.

Заметим [4], что условия (1.3) и (1.4) нельзя ослабить, заменив квантор «$\forall$» на «$\exists$», а условие (1.2) нельзя отбросить.

Для мер в $\boldsymbol{R}^m$, $m\geqslant 2$, нам известен лишь один результат, относящийся к рассматриваемому кругу вопросов.

Теорема 1.3. [5]. *Пусть* Φ_m — *стандартный нормальный закон в* $\boldsymbol{R}^m$, μ — *безгранично делимая вероятностная мера в* $\boldsymbol{R}^m$, $K\subset\boldsymbol{R}^m$ — *выпуклый конус. Если сужения* μ *и* Φ_m *на* K *совпадают, то* $\mu\equiv\Phi_m$.

2. Основными результатами заметки являются теоремы 2.1 и 2.2 — многомерные аналоги теорем 1.1 и 1.2.

Обозначим $x=(x_1,\ \ldots,\ x_m)\in\boldsymbol{R}^m$; $K(r,\ m)=\{x\in\boldsymbol{R}^m\colon\ x_1^2+\cdots+x_m^2>r^2,\ x_1<0\}$; $L(r,\ m)=\{x\in R^m\,;x_1<-r\}$.

Теорема 2.1. *Пусть* μ *и* ν — *борелевские меры в* $\boldsymbol{R}^m$, $m\geqslant 2$, *удовлетворяющие условиям*

$$|\mu|(\boldsymbol{R}^m),\ |\nu|(\boldsymbol{R}^m)<\infty; \tag{2.1}$$

$$(\operatorname{Supp}\mu\cup\operatorname{Supp}\nu)\cap L(r,\ m)\neq\varnothing,\ \forall r>0; \tag{2.2}$$

$$|\mu|(K(r,\ m)),\ |\nu|(K(r,\ m))=O(e^{-cr}),\ r\to\infty,\ \forall c>0. \tag{2.3}$$

Если для некоторых $n\geqslant 3$ *и* r *сужения* μ^{n*} *и* ν^{n*} *на полупространство* $L(r,\ m)$ *совпадают*, то $\mu^{n*}\equiv\nu^{n*}$, $\mu\equiv\varepsilon\nu$, где $\varepsilon^n=1$.

Теорема 2.2. *Пусть* μ *и* ν—*борелевские меры в* $\boldsymbol{R}^m$, $m\geqslant 2$, *удовлетворяющие условиям (2.1), (2.2) и*

$$|\mu|(K(r,\ m)),\ |\nu|(K(r,\ m))=O(e^{-cr\ln r}),\ r\to\infty,\ \forall c>0. \tag{2.4}$$

Если для некоторого r *сужения* μ^{2*} *и* ν^{2*} *на полупространство* $L(r,\ m)$ *совпадают, то* $\mu^{2*}\equiv\nu^{2*}$, $\mu\equiv\pm\nu$.

В связи с теоремами 1.4, 2.1 и 2.2 возникает вопрос, определяются ли свертки мер, удовлетворяющих (2.1), (2.2) и (2.3) (или (2.4)), сужениями на более «узкие», чем полупространство $L(r, m)$ множества в $\boldsymbol{R}^m$? Оказывается, что это, вообще говоря, не так даже для вероятностных мер.

Теорема 2.3. *Пусть множество $M \subset \boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$, таково, что для любого r пересечение $M \cap \{x : x_1 = r\}$ ограничено. Тогда для любого $n \geqslant 2$ найдутся вероятностные меры μ и ν, удовлетворяющие (2.1), (2.2) и (2.4) такие, что $\mu^{n*} \not\equiv \nu^{n*}$ и сужения μ^{n*}, ν^{n*} на множество M совпадают.*

3. Введем обозначения: $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $t' = (t_2, \ldots, t_m)$. Пусть μ — мера в $\boldsymbol{R}^m$. Обозначим $l_m(\mu) = \inf\{x_1: x \in \operatorname{Supp}\mu\}$. При $m = 1$, $l_1(\mu)$ совпадает с левой границей носителя μ. Очевидно, условие $l_m(\mu) \geqslant -r$ равносильно тому, что μ обращается в нуль на $L(r, m)$. Положим $\mu_{L(r, m)}(E) = \mu(E \cap L(r, m))$ — сужение μ на $L(r, m)$; $\mu_{t'}$ — мера в R, определяемая для $E \subset \boldsymbol{R}$ равенством

$$\mu_{t'}(E) = \int\limits_{E \times R^{m-1}} \exp\{i\langle t', x'\rangle\}\, \mu(dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_m),$$

где $\langle t', x'\rangle = t_2 x_2 + \ldots + t_m x_m$; $\varphi_m(t, \mu) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^m} \exp\{i\langle t, x\rangle\}\, \mu \times$ $\times (dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_m)$ — преобразование Фурье — Стильтьеса μ. Нетрудно убедиться, что верны равенства

$$(\mu_{L(r, m)})_{t'} \equiv (\mu_{t'})_{L(r, 1)}; \tag{3.1}$$

$$\varphi_m(t, \mu) = \varphi_1(t_1, \mu_{t'}), \quad t \in \boldsymbol{R}^m, \ m > 1. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть μ — борелевская мера в $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$, удовлетворяющая (2.1), (2.3) и $l_m(\mu) = -\infty$. Найдется всюду плотное в $\boldsymbol{R}^{m-1}$ множество E такое, что $l_m(\mu) = l_1(\mu_{t'})$* при $t' \in E$.

Доказательство. Будем считать, что $\mu \not\equiv 0$. Обозначим $F_N = \{t' \in \boldsymbol{R}^{m-1} : l_1(\mu_{t'}) \geqslant -N\}$. Тогда $E = \boldsymbol{R}^{m-1} \setminus \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} F_N$. Согласно (3.1) имеем $(\mu_{L(N, m)})_{t'} \equiv 0$, $t' \in F_N$, поэтому, согласно (3.2), $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)}) = 0$ при $t' \in F_N$ и всех $t_1 \in \boldsymbol{R}$. Из условий (2.1) и (2.3) ([6], с. 36, с. 228) следует, что $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)})$ продолжается до целой функции в $\boldsymbol{C}^m$, причем из $l_m(\mu) < l_1(\mu_{t'})$ следует, что $\mu_{L(N, m)} \not\equiv 0$, $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)}) \not\equiv 0$. Если бы множество F_N содержало некоторый открытый шар B, то получилось бы, что $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)})$ обращается в нуль на $B \times \boldsymbol{R}$ и, следовательно, $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)}) \equiv 0$. Значит, поскольку F_N замкнуто, то F_N нигде не плотно в $\boldsymbol{R}^{m-1}$ и из теоремы Бэра следует, что $E = \boldsymbol{R}^{m-1} \setminus \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} F_N$ всюду плотно в $\boldsymbol{R}^{m-1}$.

Лемма 3.2. *Пусть мера μ удовлетворяет условиям леммы 3.1 и пусть множество $F \subset \boldsymbol{R}^m$ всех вещественных нулей $\varphi_m(t, \mu)$ содержит некоторый шар. Тогда $\mu \equiv 0$.*

Доказательство. Из условий (2.1) и (2.3) следует, что при любом фиксированном $t' \in \boldsymbol{R}^{m-1}$, $\varphi_m(t, \mu) = \varphi_1(t_1, \mu_{t'})$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} t_1 > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Im} t_1 \geqslant 0$. Найдется такой шар $B \subset \boldsymbol{R}^{m-1}$, что $\varphi_1(t_1, \mu_{t'})$ при $t' \in B$ обращается в нуль на некотором интервале вещественной оси. Поэтому в силу граничной теоремы единственности $\varphi_1(t_1, \mu_{t'}) = 0$, $t_1 \in \boldsymbol{R}$, $t' \in B$, значит, $\mu_{t'} = 0$, $t' \in B$. Поскольку множество $\boldsymbol{R}^{m-1}/B$ не является всюду плотным в $\boldsymbol{R}^{m-1}$, то согласно лемме 3.1 имеем $\mu \equiv 0$.

4. Доказательство теоремы 2.2. Пусть меры μ и ν удовлетворяют (2.1), (2.2), (2.4) и пусть $l_m(\mu^{2*} - \nu^{2*}) \geqslant -r > -\infty$. Тогда, очевидно, меры $\mu_{t'}$ и $\nu_{t'}$ при любом $t' \in \boldsymbol{R}^{m-1}$ удовлетворяют (1.1), (1.4) и $l_1((\mu_{t'})^{2*} - (\nu_{t'})^{2*}) = l_1((\mu^{2*})_{t'} - (\nu^{2*})_{t'}) \geqslant l_m(\mu^{2*} - \nu^{2*}) \geqslant -r$. Ввиду (2.2) и леммы 3.1 найдется всюду плотное в $\boldsymbol{R}^{m-1}$ множество E такое, что $\mu_{t'}$ и $\nu_{t'}$ удовлетворяют (1.2) при $t' \in E$. Применяя теорему 1.2, получаем $(\mu_{t'})^{2*} = (\nu_{t'})^{2*}$, $t' \in E$. Отсюда, согласно (3.2), имеем $\varphi_m^2 \times \times (t, \mu) = \varphi_m^2(t, \nu)$, $t' \in E$, $t_1 \in \boldsymbol{R}$. Поскольку функции $\varphi_m(t, \mu)$, $\varphi_m \times \times (t, \nu)$ непрерывны, а множество $\boldsymbol{R} \times E \subset \boldsymbol{R}^m$ всюду плотно, то $\varphi_m^2(t, \mu) \equiv \varphi_m^2(t, \nu)$, $t \in \boldsymbol{R}^m$, и, значит, $\mu^{2*} \equiv \nu^{2*}$.

Рассмотрим меры $\mu + \nu$ и $\mu - \nu$. Согласно (2.2) имеем $\min\{l_m \times (\mu + \nu), l_m(\mu - \nu)\} = -\infty$. Пусть $l_m(\mu + \nu) = -\infty$. Обозначим E_1, $E_2 \subset \boldsymbol{R}^m$ — нулевые множества $\varphi_m(t, \mu + \nu)$ и $\varphi_m(t, \mu - \nu)$. Множества E_1 и E_2 замкнуты и из $0 \equiv \varphi_m^2(t, \mu) - \varphi_m^2(t, \nu) = \varphi_m(t, \mu + \nu) \times \times \varphi_m(t, \mu - \nu)$ следует, что $E_1 \cup E_2 = \boldsymbol{R}^m$. Далее, из $l_m(\mu + \nu) = = -\infty$ и леммы 3.2 вытекает, что E_1 не содержит никакого шара, поэтому $E_2 = \boldsymbol{R}^m$. Отсюда заключаем, что $\varphi_m(t, \mu - \nu) \equiv 0$, $\mu \equiv \nu$. Если $l_m(\mu - \nu) = -\infty$, то аналогично получаем, что $\mu \equiv -\nu$. Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.1 проводится аналогично.

5. Доказательство теоремы 2.3. Доказательство состоит в построении примера. Для простоты будем считать $m = 2$, $M = \{x \in \boldsymbol{R}^2 : x_1 < < 0,\ x_1^2 > |x_2|\}$. В общем случае пример строится аналогично.

Пример 5.1. *Пусть $\delta_{(u, v)}$ — единичная мера, сосредоточенная в точке (u, v). Положим*

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{(-k,\, n^2k^2)};\quad \nu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{(-k,\, -n^2k^2)},$$

где $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$, c_k убывают при $k \to \infty$ настолько быстро, что μ и ν удовлетворяют (2.4). Ясно, что μ и ν являются вероятностными мерами и удовлетворяют (2.2), Поскольку $n^2(k_1^2 + + \cdots + k_n^2) > (k_1 + \cdots + k_n)^2$, то легко видеть, что сужения μ^{n*} и ν^{n*} на M совпадают и равны нулю, но $\mu^{n*} \not\equiv \nu^{n*}$.

С помощью сходных рассуждений можно построить меры μ и ν, удовлетворяющие (2.2) и (2.4), для которых сужения μ^{n*} и ν^{n*} на M совпадают и не равны нулю, но $\mu^{n*} \not\equiv \nu^{n*}$. Приведем такой пример для $n = 2$.

Пример 5.2. *Положим*

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{j=-k^2}^{k^2+1} \delta_{(-k,\, j)},$$

где $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}(2k^2+1)c_k = 1/2$, c_k убывают при $k \to \infty$ настолько быстро, что χ удовлетворяет (2.4). Пусть $\mu = \chi + \delta_{(0,0)}/2$, $\nu = \chi + \delta_{(0,-1)}/2$. Меры μ и ν являются вероятностными, удовлетворяют (2.2) и (2.4),

$$\mu^{2*} - \nu^{2*} = \chi - \chi * \delta_{(0,-1)} + (\delta_{(0,0)} - \delta_{(0,-2)})/4 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\delta_{(-k,k^2+1)} - \delta_{(-k,-k^2-1)}) + (\delta_{(0,0)} - \delta_{(0,-2)})/4.$$

Отсюда видно, что сужения μ^{2*} и ν^{2*} на M совпадают, но $\mu^{2*} \not\equiv \nu^{2*}$.

Список литературы: 1. *Ибрагимов И. А.* Об определении безгранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой // Теория вероятности и ее применения.— 1977.— **22**, вып. 2. — С. 393—399. 2. *Титов А. Н.* Об определении свертки одинаковых функций распределения по значениям на полупрямой // Теория вероятности и ее применения.— 1981.— **26**, вып. 3.— С. 610—611. 3. *Бланк Н. М.* О распределениях, свертки которых совпадают на полуоси // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1984.— Вып. 41. — С. 17—25. 4. *Ostrovskii J. V.* Generalisation of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures unipuely determined by their restriction to a half-line // Lect. Notes in Math. — 1985. — **1155**. — P. 256 — 284. 5. *Il'inskii A. J.* The normality of a multidimentional infinitely divisible distribution which coinsides with a normal distribution in a cone // Lect. Notes in Math. — 1985. — **1155**.— P. 47—59. 6. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.—480 с.

Поступила в редколлегию 05.01.87