НѢКОТОРЫЯ ОБОБЩЕНІЯ

ВЪ ВОПРОСѢ О РАЗЛОЖЕНІИ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ПО ФОРМУЛѢ, ПРЕДЛОЖЕННОЙ П. Л. ЧЕБЫШЕВЫМЪ[1].

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ статьѣ подъ заглавіемъ «Нѣсколько словъ и т. д.», помѣщенной нами въ предыдущей статьѣ настоящаго сборника и составляющей, собственно говоря, наскоро набросанную замѣтку по поводу двухъ соотношеній, появившихся передъ тѣмъ въ печати, мы вывели весьма простое тождество, изъ котораго оба эти соотношенія получаются какъ частные случаи[2]. Тождество это, обозначенное въ названной статьѣ нумеромъ (I), можетъ быть представлено въ видѣ:

[1] Краткое извлеченіе содержанія этой статьи было сообщено на VII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Одессѣ 25 августа настоящаго года.

[2] Одно изъ этихъ соотношеній мы назвали теоремой Импенецкаго, полагая что оно было предложено имъ впервые. Оказывается, однако, что та же самая зависимость была доказана В. Я. Буняковскимъ еще въ 1859 году въ мемуарѣ «Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies». (Mém. de l' Ac. de S. Pét. VII sér., T. I, № 9). Объ этомъ послѣднемъ обстоятельствѣ увѣдомляетъ насъ самъ В. Г. Импенецкій, выражая сожалѣніе, что вовлекъ насъ въ невольную ошибку тѣмъ, что, не бывши знакомъ, при составленіи своей статьи, съ мемуаромъ В. Я. Буняковскаго, не цитировалъ этого мемуара. Пользуемся первымъ представившимся случаемъ, чтобы исправить печатно эту ошибку.

Въ концѣ настоящей статьи читатель найдетъ исправленными нѣкоторыя другія погрѣшности, допущенныя нами, къ сожалѣнію, въ предыдущей статьѣ вслѣдствіе поспѣшности ея редактированія.

$$\begin{vmatrix} \int f_1 f_2 dx, & \int f_1\psi_2 dx \\ \int\psi_1 f_2 dx, & \int\psi_1\psi_2 dx\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\iint \begin{vmatrix} f_1(x), & f_1(y) \\ \psi_1(x), & \psi_1(y)\end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_2(x), & f_2(y)\\ \psi_2(x), & \psi_2(y)\end{vmatrix} dx\,dy.$$

Столь же просто и тѣми же въ сущности разсужденіями доказывается справедливость болѣе общаго тождества, включающаго въ себѣ предыдущее какъ частный случай, именно тождества

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix} \int f_0\varphi_0 dx, & \int f_0\varphi_1 dx, & \ldots & \int f_0\varphi_n dx \\ \int f_1\varphi_0 dx, & \int f_1\varphi_1 dx, & \ldots & \int f_1\varphi_n dx \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \int f_n\varphi_0 dx, & \int f_n\varphi_1 dx, & \ldots & \int f_n\varphi_n dx \end{vmatrix} = \\ \dfrac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} \begin{vmatrix} f_0(x), & f_0(y) & \ldots & f_0(v) \\ f_1(x), & f_1(y) & \ldots & f_1(v) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ f_n(x), & f_n(y) & \ldots & f_n(v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_0(x), & \varphi_0(y) & \ldots & \varphi_0(v) \\ \varphi_1(x), & \varphi_1(y) & \ldots & \varphi_1(v) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \varphi_n(x), & \varphi_n(y) & \ldots & \varphi_n(v) \end{vmatrix} dx\,dy \ldots dv \end{array}\right\} \text{(A)}$$

гдѣ всѣ интегралы суть опредѣленные съ одними и тѣми же постоянными предѣлами a и b, а указатель $(n+1)$ при знакѣ интеграла означаетъ степень его кратности.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, можно, очевидно, представить въ видѣ

$$\int^{(n+1)} \varphi_0(x)\varphi_1(y)\ldots\varphi_n(v) \begin{vmatrix} f_0(x), & f_0(y) & \ldots & f_0(v) \\ f_1(x), & f_1(y) & \ldots & f_1(v) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ f_n(x), & f_n(y) & \ldots & f_n(v) \end{vmatrix} dx\,dy \ldots dv.$$

Произведя здѣсь всѣ возможныя перемѣщенія буквъ $x, y, \ldots v$ и взявши сумму полученныхъ такимъ образомъ $(n+1)!$ равныхъ кратныхъ интеграловъ, будемъ имѣть, что при сложеніи интегрируемыхъ функцій опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} f_0(x), f_0(y) \ldots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \ldots f_1(v) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x), f_n(y) \ldots f_n(v) \end{vmatrix}$$

есть общій множитель всѣхъ слагаемыхъ, а многочленъ, на него умножаемый, есть не что иное какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x), \varphi_0(y) \ldots \varphi_0(v) \\ \varphi_1(x), \varphi_1(y) \ldots \varphi_1(v) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x), \varphi_n(y) \ldots \varphi_n(v) \end{vmatrix}$$

Это и убѣждаетъ насъ въ справедливости тождества (A).

Функціи $f_0, f_1, \ldots \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ предполагались до сихъ поръ совершенно произвольными. Если положимъ

$$f_0 = f,\ \varphi_0 = \theta\varphi$$

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\theta} = \psi_0,\ f_2 = \frac{\varphi_2}{\theta} = \psi_1, \ldots f_n = \frac{\varphi_n}{\theta} = \psi_{n-1}$$

и допустимъ, что функціи $\psi_0, \psi_1 \ldots$ удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k \psi_l \theta\, dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою k и l, то первая часть равенства (A) можетъ быть представлена въ видѣ произведенія

$$\int\psi_0^2\,\theta\,dx\int\psi_1^2\,\theta\,dx\ldots\ldots\int\psi_{n-1}^2\,\theta\,dx\,.\,R_n,$$

гдѣ

$$R_n=\int f\varphi\,\theta\,dx-\frac{\int f\psi_0\,\theta\,dx\int\varphi\psi_0\,\theta\,dx}{\int\psi_0^2\,\theta\,dx}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{\int f\psi_{n-1}\,\theta\,dx\int\varphi\psi_{n-1}\,\theta\,dx}{\int\psi_{n-1}^2\,\theta\,dx}$$

есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ[1].

Тождествомъ (A) можно, слѣдовательно, воспользоваться для вывода общаго вида и свойствъ этого дополнительнаго члена, подобно тому какъ это въ частности мы уже сдѣлали въ нашей предыдущей статьѣ по отношенію къ дополнительному члену

$$R_1=\int f\varphi\theta dx-\frac{\int f\psi_0\theta\,dx\int\varphi\psi_0\theta\,dx}{\int\psi_0^2\,\theta\,dx},$$

гдѣ $\psi_0=$ пост.

Профессоръ К. А. Поссе посвятилъ этому вопросу свою статью, напечатанную выше, и въ ней вполнѣ его разрѣшаетъ въ предположеніи, что функціи ψ_0, ψ_1..... суть цѣлыя алгебраическія, находящіяся въ извѣстной связи съ интеграломъ

$$\int_a^b\frac{\theta(z)\,dz}{x-z},$$

указанной самимъ П. Л. Чебышевымъ.

---

[1] См. «Сообщенія харьк. матем. общ.» за 1882 г. стр. 94.

Настоящее наше изслѣдованіе преслѣдуетъ главнымъ образомъ ту же цѣль какъ и статья К. А. Поссе, но, будучи основано на началахъ нѣсколько болѣе широкихъ, оно приводитъ и къ результатамъ сравнительно болѣе общимъ. По этому только мы и сочли не лишнимъ публиковать наше изслѣдованіе, послѣ того какъ изслѣдованіе К. А. Поссе уже напечатано. Къ тому же настоящая статья примыкаетъ, такъ сказать, непосредственно къ нашей предыдущей статьѣ («Нѣсколько словъ и т. д.»), составляя и по содержанію, и по методу, ея естественное продолженіе и содержа дальнѣйшее развитіе мыслей, нами тамъ уже заявленныхъ (въ параграф. 1-мъ и 4-мъ)[1].

§ 2.

Полагая, какъ было сказано, въ равенствѣ (А)

$$f_0 = f, \varphi_0 = \theta\varphi$$

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\theta} = \psi_0, f_2 = \frac{\varphi_2}{\theta} = \psi_1, \ldots f_n = \frac{\varphi_n}{\theta} = \psi_{n-1},$$

гдѣ θ какая нибудь функція, дадимъ этому равенству видъ

$$\left.\begin{aligned}&\begin{vmatrix} \int f\varphi\theta dx, & \int f\psi_0\theta dx, & \ldots & \int f\psi_{n-1}\theta dx \\ \int\varphi\psi_0\theta dx, & \int(\psi_0)^2\theta dx, & \ldots & \int\psi_0\psi_{n-1}\theta dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\varphi\psi_{n-1}\theta dx, & \int\psi_0\psi_{n-1}\theta dx, & \ldots & \int\psi_{n-1}{}^2\theta dx \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} P.Q.\theta(x)\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx\,dy\ldots dv\end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

[1] Основная мысль, обусловливающая, можно сказать, успѣхъ рѣшенія занимающаго насъ вопроса, есть мысль представить дополнительный членъ въ видѣ кратнаго интеграла отъ произведенія двухъ функцій, зависящихъ отдѣльно отъ функцій f и φ. Изъ сказаннаго уже видно, что мы руководимся этой мыслью

гдѣ для краткости чрезъ P и Q обозначены опредѣлители

$$\begin{vmatrix} f(x)\ , f(y) \dots f(v) \\ \psi_0(x)\ , \psi_0(y) \dots \psi_0(v) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(x), \psi_{n-1}(y) \dots \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \varphi(x)\ , \varphi(y) \dots \varphi(v) \\ \psi_0(x)\ , \psi_0(y) \dots \psi_0(v) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(x), \psi_{n-1}(y) \dots \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix}.$$

Возьмемъ еще опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x)\ , \lambda_0(y) \dots \lambda_0(v) \\ \lambda_1(x)\ , \lambda_1(y) \dots \lambda_1(v) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_n(x)\ , \lambda_n(y) \dots \lambda_n(v) \end{vmatrix} = L$$

и будемъ предполагать во всемъ слѣдующемъ, что функціи

$$f, \varphi,$$

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_{n-1}$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$$

суть конечныя и непрерывныя въ предѣлахъ интеграціи a и b, а функція θ не мѣняетъ своего знака въ этихъ предѣлахъ.

Если во второй части равенство (B) умножимъ и раздѣлимъ интегрируемую функцію на L^2 и обозначимъ для краткости черезъ Δ опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, то будемъ имѣть

также какъ и К. А. Поссе. Но мы проводили уже эту мысль, и притомъ по тому же, такъ сказать, плану, какъ и теперь, еще въ предыдущей нашей статьѣ хотя и въ примѣненіи только къ частному рѣшенію.

Замѣтимъ кстати, что, цитируя эту статью, К. А. Поссе не совсѣмъ вѣрно замѣчаетъ, что въ ней дано выраженіе дополнительнаго члена для частнаго случая: $n=1$, $\theta=1$. О функціи θ у насъ никакого предположенія кромѣ неизмѣняемости знака сдѣлано не было.

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} \frac{P}{L}\cdot\frac{Q}{L}\cdot L^2.\,\theta(x)\,\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx\,dy\ldots dv.$$

Но извѣстно[1], что, всякій разъ какъ u и v суть двѣ функціи одного перемѣннаго, изъ которыхъ вторая не мѣняетъ своего знака при измѣненіи перемѣннаго отъ a до b,

$$\int_a^b uv\,dx = u_0\int_a^b v\,dx$$

гдѣ u_0 есть значеніе функціи u при нѣкоторомъ значеніи перемѣннаго, заключающемся между a и b.

Такъ какъ это свойство простаго опредѣленнаго интеграла имѣетъ, очевидно, мѣсто и для кратнаго интеграла отъ произведенія функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ, то мы можемъ равенство (B) представить еще въ такомъ видѣ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{P_0}{L_0}\cdot\frac{Q_0}{L_0}\cdot\int^{(n+1)} L^2\theta(x)\,\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx\,dy\ldots dv, \quad \text{(C)}$$

гдѣ P_0, Q_0, L_0 суть значенія функцій P, Q, L при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ $x, y \ldots\ldots v$, заключающихся въ предѣлахъ интеграціи, напр. при $x = x_0, y = y_0, \ldots\ldots v = v_0$.

§ 3.

Функціи $\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots \lambda_n$, входящія въ составъ опредѣлителя L, суть совершенно произвольныя. Въ видахъ воспользоваться выборомъ этихъ функцій для упрощенія послѣдняго равенства подвергнемъ въ немъ преобразованію отношенія $\frac{P_0}{L_0}$ и $\frac{Q_0}{L_0}$.

[1] См. *Serret (J. A.)* — «Cours de calcul diff. et int.» T. II, 1868, p. 94, nº 469 (Théorème IV).

Обозначивъ чрезъ m величину перваго изъ этихъ отношеній, будемъ имѣть

$$P_0 - mL_0 = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} f(x_0), & f(y_0) & \ldots & f(v_0) \\ \psi_0(x_0), & \psi_0(y_0) & \ldots & \psi_0(v_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}(y_0) & \ldots & \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), & \lambda_0(y_0), & \ldots & \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), & \lambda_1(y_0), & \ldots & \lambda_1(v_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(x_0), & \lambda_n(y_0), & \ldots & \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Если въ обоихъ опредѣлителяхъ, входящихъ въ это тождество, замѣнимъ постоянное y_0 перемѣнною величиной y, то вся его первая часть будетъ представлять такую функцію, которая обращается въ нуль при $y = x_0$ и при $y = y_0$. Такъ какъ сверхъ того эта функція есть конечная и непрерывная, то ея производная должна обращаться въ нуль при нѣкоторомъ значеніи перемѣннаго $y = y_1$, заключающемся между x_0 и y_0, а, слѣдовательно, и подавно между a и b. Такимъ образомъ получается тождество

$$\begin{vmatrix} f(x_0), & f'(y_1), & \ldots & f(v_0) \\ \psi_0(x_0), & \psi_0'(y_1), & \ldots & \psi_0(v_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}'(y_1), & \ldots & \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), & \lambda_0'(y_1), & \ldots & \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), & \lambda_1'(y_1), & \ldots & \lambda_1(v_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n(x_0), & \lambda_n'(y_1), & \ldots & \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Прилагая къ этому послѣднему равенству тѣ же самыя разсужденія два раза относительно перемѣннаго, входящаго въ третьи столбцы опредѣлителей P и L, за-тѣмъ три раза относительно перемѣннаго, входящаго въ четвертые столбцы, и т. д., мы безъ труда придемъ къ заключенію, что слѣдствіемъ тождества

$$P_0 - mL_0 = 0$$

должно быть тождество

$$P_1 - mL_1 = 0$$

и потому

$$\frac{P_0}{L_0} = \frac{P_1}{L_1}$$

гдѣ P_1 и L_1 суть сокращенныя обозначенія опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} f(x_0), & f'(y_1), & f''(z_2), & \dots & f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0), & \psi_0'(y_1), & \psi_0''(z_2), & \dots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}'(y_1), & \psi_{n-1}''(z_2), & \dots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), & \lambda_0'(y_1), & \lambda_0''(z_2), & \dots & \lambda_0^{(n)}(v_n) \\ \lambda_1(x_0), & \lambda_1'(y_1), & \lambda_1''(z_2), & \dots & \lambda_1^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(x_0), & \lambda_n'(y_1), & \lambda_n''(z_2), & \dots & \lambda_n^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

въ которыхъ $x_0,\ y_1,\ z_2 \dots v_n$ означаютъ нѣкоторыя частныя величины перемѣнныхъ $x,\ y,\ z \dots v$, заключающіяся между a и b.

Подобнымъ же образомъ слѣдуетъ преобразовать и отношеніе $\frac{Q_0}{L_0}$.

Вслѣдствіе такого преобразованія равенство (C) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{P_1}{L_1} \cdot \frac{Q_1}{L_1} \cdot \int^{(n+1)} L^2 \theta(x) \cdot \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv \quad \text{(D)}$$

гдѣ P_1 и L_1 имѣютъ указанныя сейчасъ значенія и гдѣ Q_1 означаетъ также опредѣлителя

Нужно замѣтить, что постоянныя $y_1, z_2, \ldots v_n$ имѣютъ въ выраженіи для Q_1, вообще говоря, другія величины, чѣмъ въ выраженіи для P_1, но заключаются также между a и b.

§ 4.

Положимъ теперь, что

$$\lambda_0(x)=1,\ \lambda_1(x)=x,\ \lambda_2(x)=x^2,\ \ldots\ldots\ \lambda_n(x)=x^n.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$L=\begin{vmatrix} 1 & ,1 & ,1 & ,\ldots 1 \\ x & ,y & ,z & ,\ldots v \\ x^2 & ,y^2 & ,z^2 & ,\ldots v^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n & ,y^n & ,z^n & ,\ldots v^n \end{vmatrix},$$

$$L_1=\begin{vmatrix} 1 & ,0 & ,\ 0 & ,\ldots\ldots 0 \\ x_0 & ,1 & ,\ 0 & ,\ldots\ldots 0 \\ x_0^{\,2} & ,2y_1 & ,\ 2! & ,\ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{\,n} & ,ny_1^{\,n-1} & ,n(n-1)z_2^{\,n-2} & ,\ldots n! \end{vmatrix}$$

или

$$L_1=2!\,3!\ldots\ldots(n-1)!\,n!=(n!)!$$

Кромѣ того, если положимъ

$$\begin{vmatrix} \int\theta\,dx\;, & \int x\theta\,dx\;, & \ldots\ldots & \int x^n\theta\,dx \\ \int x\theta\,dx\,, & \int x^2\theta\,dx\,, & \ldots\ldots & \int x^{n+1}\theta\,dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int x^n\theta\,dx\,, & \int x^{n+1}\theta\,dx\,, & \ldots\ldots & \int x^{2n}\theta\,dx \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

то на основаніи общаго предложенія, доказаннаго въ первомъ параграфѣ (равенства A), будемъ имѣть

$$\Delta_n = \frac{1}{(n+1)!}\int^{(n+1)} L^2\theta(x)\theta(y)\ldots\theta(v)\,dx\,dy\ldots dv.$$

Вслѣдствіе этого равенство (D) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{[(n!)!]^2}\cdot P_1\cdot Q_1\cdot\Delta_n \qquad \text{(E)}$$

и въ этомъ видѣ оно представляетъ любопытное соотношеніе, замѣчательное своею общностью, а вмѣстѣ съ тѣмъ и общностью получаемыхъ изъ него слѣдствій.

Было уже сказано, что если предположить, что функціи ψ_0, $\psi_1\ldots$ удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k\psi_l\theta\,dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою k и l, то

$$\Delta = \int\psi_0^{\,2}\theta\,dx\int\psi_1^{\,2}\theta\,dx\ldots\int\psi_{n-1}^{\,2}\theta\,dx\,.\,R_n$$

гдѣ R_n есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ.

Изъ равенства (E) находимъ поэтому

$$R_n = \frac{P_1 \cdot Q_1 \cdot \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2 \theta\, dx \int \psi_1^2 \theta\, dx \ldots \int \psi_{n-1}^2 \theta\, dx} \qquad \text{(I)}$$

выраженіе, въ которомъ функціи ψ_0, ψ_1 ... не подчинены никакимъ другимъ условіямъ кромѣ сейчасъ указаннаго и могутъ быть даже не алгебраическія.

Изъ этого выраженія мы убѣждаемся, напр., въ томъ, что въ случаѣ, когда функція θ остается положительною въ предѣлахъ интеграціи a и $b > a$, дополнительный членъ R_n имѣетъ такой же знакъ какъ произведеніе трехъ опредѣлителей, P_1, Q_1 и Δ_n, изъ которыхъ два первые зависятъ послѣдовательно отъ функцій f и φ, а послѣдній вовсе отъ этихъ функцій не зависитъ. Если же θ остается въ предѣлахъ интеграціи отрицательною, то R_n будетъ имѣть такой-же знакъ какъ это произведеніе лишь тогда, когда n четное, и противоположный знакъ при n нечетномъ.

§ 5.

Обратимъ особенное вниманіе на случай, когда ψ_0, ψ_1 ... ψ_n суть цѣлыя функціи, степени которыхъ обозначаются указателями, такъ что вообще ψ_k есть многочленъ k-ой степени. Въ этомъ случаѣ кромѣ условій

$$\int \psi_k \psi_l \theta\, dx = 0 \qquad (\alpha)$$

имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$\frac{d^{k+1}\psi}{dx^{k+1}} = 0 \qquad (\beta)$$

и

$$\frac{d^k \psi_k}{dx^k} \gtrless 0 \qquad (\gamma)$$

каково бы ни было k.

Изъ условій (β) получаемъ

$$\psi_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n, \tag{1}$$

гдѣ $c_0, c_1 \ldots c_n$ суть постоянныя, и потому на основаніи условій (α) будемъ имѣть

$$\begin{aligned}
&c_0\int\psi_0\,\theta dx + c_1\int\psi_0\,x\theta dx + \ldots\ldots + c_n\int\psi_0\,x^n\,\theta\,dx = 0\\
&c_0\int\psi_1\,\theta dx + c_1\int\psi_1\,x\theta dx + \ldots\ldots + c_n\int\psi_1\,x^n\,\theta\,dx = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_0\int\psi_{n-1}\,\theta dx + c_1\int\psi_{n-1}\,x\theta dx + \ldots\ldots + c_n\int\psi_{n-1}\,x^n\theta dx = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда же, принимая во вниманіе условія (γ), получаемъ слѣдующія n равенствъ:

$$\left.\begin{aligned}
&c_0\int\theta\,dx + c_1\int x\theta\,dx + \ldots + c_n\int x^n\,\theta\,dx = 0\\
&c_0\int x\theta\,dx + c_1\int x^2\theta\,dx + \ldots + c_n\int x^{n+1}\,\theta\,dx = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_0\int x^{n-1}\theta\,dx + c_1\int x^n\theta\,dx + \ldots + c_n\int x^{2n-1}\,\theta\,dx = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

изъ которыхъ, какъ изъ линейныхъ и однородныхъ уравненій относительно $c_0, c_1, \ldots c_n$, находимъ величины пропорціональныя этимъ постояннымъ. Внеся затѣмъ эти величины въ предыдущее выраженіе для ψ_n или, другими словами, исключая $c_0, c_1, \ldots c_n$ изъ уравненій (1) и (2), находимъ

$$\psi_n = M_n \begin{vmatrix}
\int\theta\,dx, & \int x\theta\,dx, & \ldots & \int x^n\,\theta\,dx\\
\int x\theta\,dx, & \int x^2\,\theta\,dx, & \ldots & \int x^{n+1}\,\theta\,dx\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\int x^{n-1}\theta\,dx, & \int x^n\theta\,dx, & \ldots & \int x^{2n-1}\,\theta\,dx\\
1, & x, & \ldots & x^n
\end{vmatrix} \tag{3}$$

гдѣ M_n есть неопредѣленный постоянный множитель.

Такимъ образомъ видимъ, что условіями (α), (β) и (γ) каждая изъ функцій $\psi_0, \psi_1 \ldots$ опредѣляется съ точностью до постояннаго множителя.

Изъ выраженія (3) получаются непосредственно слѣдующія соотношенія, которыми намъ придется воспользоваться

$$\int \psi_n x^n \theta\, dx = M_n \Delta_n \tag{4}$$

и . . . . $\int \psi_n x^k \theta\, dx = 0,$

гдѣ k есть цѣлое положительно число меньшее n.

Слѣдовательно

$$\int \psi_n^2 \theta\, dx = M_n \Delta_{n-1} \int \psi_n x^n \theta\, dx. \tag{5}$$

Исключая же M_n изъ (4) и (5), находимъ

$$\frac{\left(\int \psi_n x^n \theta\, dx\right)^2}{\int \psi_n^2 \theta\, dx} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \tag{6}$$

Далѣе, продифференцировавъ n разъ выраженіе (3), получимъ

$$\frac{d^n \psi_n}{dx^n} = n!\, M_n \Delta_{n-1}$$

и исключивъ M_n при помощи равенства (4), будемъ имѣть

$$\frac{\int \psi_n x^n \theta\, dx}{\frac{d^n \psi_n}{dx^n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \tag{7}$$

Наконецъ, возведя въ квадратъ обѣ части этого послѣдняго равенства и раздѣливъ полученное равенство почленно на равенство (6), получимъ соотношеніе

$$\frac{\int \psi_n^{\,2}\,\theta\,dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2} = \frac{1}{(n!)^2}\cdot\frac{\Delta^n}{\Delta_{n-1}} \qquad (8)$$

§ 6.

При условіяхъ (β) опредѣлители P_1 и Q_1, входящіе въ формулу (I), принимаютъ также весьма простое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли (см. 3 парагр.),

$$P_1 = \begin{vmatrix} f(x_0)\ , & f'(y_1)\ , & f''(z_2)\ldots\ldots & f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0), & \psi_0'(y_1)\ , & \psi_0''(z_2),\ldots\ldots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x_0)\ , & \psi_{n-1}'(y_1), & \psi_{n-1}''(z_2)\ldots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

Перемѣстивши строки этого опредѣлителя такъ, чтобы порядокъ ихъ не нарушался и первая строка сдѣлалась послѣднею, получимъ, принимая во вниманіе условія (β),

$$P_1 = (-1)^n \begin{vmatrix} \psi_0(x_0)\ , & 0 & , & 0\ ,\ldots\ldots & 0 \\ \psi_1(x_0)\ , & \psi_1'(y_1) & , & 0\ ,\ldots\ldots & 0 \\ \psi_2(x_0)\ , & \psi_2'(y_1) & , & \psi_2''(z_2)\ ,\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-1}(x_0), & \psi_{n-1}'(y_1), & & \psi_{n-1}''(z_2)\ ,\ldots & 0 \\ f(x_0)\ , & f'(y_1)\ , & & f''(z_2)\ ,\ldots & f^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

или

$$P_1 = (-1)^n \psi_0(x_0)\,\psi_1'(y_1)\,\psi_2''(z_2)\ \ldots\ldots\ f^{(n)}(v_n)$$

или

$$P_1=(-1)^n\psi_0\frac{d\psi_1}{dx}\,\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\cdots\cdots\frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}}\,f^{(n)}(\xi),$$

гдѣ ψ_0, $\frac{d\psi_1}{dx}$, $\frac{d^2\psi_2}{dx^2}$.... суть постоянныя, т. е. независящія отъ аргументовъ $x_0, y_1, z_2 \ldots$, а ξ поставлено вмѣсто v_n и означаетъ нѣкоторую величину, заключающуюся между a и b.

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$Q_1=(-1)^n\psi_0\,\frac{d\psi_1}{dx}\,\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\cdots\cdots\frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}}\,\varphi^{(n)}(\eta),$$

гдѣ η означаетъ также величину, заключающуюся между a и b.

Если теперь найденныя выраженія для P_1 и Q_1 внесемъ въ равенство (I) [пар. 4], то будемъ имѣть

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\psi_0^2\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\right)^2\cdots\cdots\left(\frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}}\right)^2\Delta_n}{[(n!)!]^2\int\psi_0^2\,\theta\,dx\int\psi_1^2\,\theta\,dx\cdots\cdots\int\psi_{n-1}^2\,\theta\,dx},$$

что на основаніи соотношенія (8) приводится къ

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\psi_0^2\Delta_0\Delta_n}{(n!)^2\Delta_{n-1}\int\psi_0^2\,\theta\,dx}$$

Но изъ общаго выраженія для Δ_n (см. § 4) имѣемъ

$$\Delta_0=\int\theta\,dx$$

и такъ-какъ ψ_0 есть постоянное, то

$$\psi_0^2\Delta_0=\int\psi_0^2\,\theta\,dx,$$

вслѣдствіе чего послѣднее равенство обращается въ

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)}{(n!)^2} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \qquad \text{(II)}$$

Это и есть простѣйшій видъ дополнительнаго члена строки П. Л. Чебышева для случая, когда въ ней $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \ldots$ суть функціи цѣлыя. Отношеніе $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ можетъ быть здѣсь замѣнено какимъ-либо изъ равныхъ ему выраженій, получаемыхъ изъ равенствъ (6), (7) и (8). Такимъ образомъ получаемъ еще слѣдующіе три вида этого дополнительнаго члена:

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\frac{\left(\int \psi_n x^n \theta\, dx\right)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta\, dx} \qquad \text{(III)}$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\frac{\int \psi_n x^n \theta\, dx}{n!\,\frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \qquad \text{(IV)}$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\,\frac{\int \psi_n^2 \theta\, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \qquad \text{(V)}$$

Изъ этихъ выраженій и видно, въ какой зависимости находится знакъ и величина разсматриваемаго дополнительнаго члена отъ свойствъ функцій f, φ и θ. Такъ, предполагая, что θ остается положительною величиною при измѣненіи перемѣннаго отъ a до $b > a$, будемъ имѣть, что интегралъ

$$\int_a^b \psi_n^2 \theta\, dx$$

есть величина также положительная, а потому изъ выраженій (III) и (V) заключаемъ, что въ случаѣ, когда n-ыя производныя отъ функцій f и φ сохраняютъ свои знаки въ предѣлахъ a и b, знакъ дополнительнаго члена R_n такой-же какъ знакъ произведенія этихъ производныхъ. Это составляетъ второе его свойство, указанное П. Л. Чебышевымъ.

Имѣя въ виду это свойство, мы заключаемъ изъ равенства (V), что

$$[R_n] = [f^{(n)}(\xi)]\,[\varphi^{(n)}(\eta)]\,\frac{\int \psi_n^2\,\theta\,dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2},$$

гдѣ скобками [ ] мы означаемъ числовую величину выраженія, въ нихъ заключеннаго. Отсюда слѣдуетъ, что если A и B суть наибольшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \text{ и } \frac{d\varphi^n}{dx^n},$$

то числовая величина дополнительнаго члена R_n не можетъ быть болѣе произведенія

$$A\;B\,\frac{\int \psi_n^2\,\theta\,dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2}.$$

Это есть первое свойство дополнительнаго члена, указанное Чебышевымъ.

Къ этому можно прибавить на томъ же основаніи, что если α и β суть наименьшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \text{ и } \frac{d^n\varphi}{dx^n},$$

то $[R_n]$ не можетъ быть менѣе

$$\alpha\;\beta\,\frac{\int \psi_n^2\,\theta\,dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2}.$$

Вообще же равенства (III), (IV) и (V) показываютъ, что дополнительный членъ R_n заключается въ предѣлахъ

$$G\,H\,\frac{\left(\int_0^1 \psi_n x^n \theta\, dx\right)^2}{(n!)^2 \int_0^1 \psi_n{}^2 \theta\, dx} \quad \text{и} \quad g\,h\,\frac{\left(\int_0^1 \psi_n x^n \theta\, dx\right)^2}{(n!)^2 \int_0^1 \psi_n{}^2 \theta\, dx}$$

или

$$G\,H\,\frac{\int_0^1 \psi_n x^n \theta\, dx}{n!\,\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}} \quad \text{и} \quad g\,h\,\frac{\int_0^1 \psi_n x^n \theta\, dx}{n!\,\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}}$$

или

$$G\,H\,\frac{\int_0^1 \psi_n{}^2 \theta\, dx}{\left(\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad \text{и} \quad g\,h\,\frac{\int_0^1 \psi_n{}^2 \theta\, dx}{\left(\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^3}$$

гдѣ G и g означаютъ самую большую и самую малую изъ величинъ, получаемыхъ n-ою производною функціи $f(x)$ при измѣненіи x отъ a до b; а H и h имѣютъ такое же значеніе для функціи $\varphi(x)$.

N. B.

Поправка. — Обратимся, въ заключеніе, еще разъ къ нашей предыдущей статьѣ «Нѣсколько словъ и т. д.» съ цѣлью исправить нѣкоторыя вкравшіяся въ нее погрѣшности. Статья эта вызвана была теоремой П. Л. Чебышева, состоящей въ слѣдующемъ: *Если каждая изъ двухъ функцій $f(x)$ и $\psi(x)$ постоянно возрастаетъ или постоянно уменьшается при измѣненіи перемѣннаго x отъ 0 до 1, то разность*

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 \psi(x)\,dx$$

имѣетъ всегда такой же знакъ, какъ произведеніе производныхъ $f'(x)$ и $\psi'(x)$, *этихъ функцій.*

Обобщенію этой теоремы на случай, когда интегрируемая функція въ первомъ членѣ разности есть произведеніе не двухъ только, а нѣсколькихъ функцій, мы посвятили одинъ изъ параграфовъ (третій), но допущенная нами неправильность въ подстановкѣ, сдѣланной на первыхъ же порахъ, повела къ искаженію и дальнѣйшихъ преобразованій. Вотъ въ чемъ должны состоять приводящія къ этому обобщенію разсужденія уже въ строго правильномъ видѣ.

Замѣняя въ неравенствѣ

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 \psi(x)\,dx \gtrless 0$$

функцію $f(x)$ послѣдовательно чрез

$$f_1(x)\ ,\ f_1(x)f_2(x)\ ;\ f_1(x)f_2(x)f_3(x) \text{ и т. д.,}$$

и соотвѣтственно съ этимъ функцію $\psi(x)$ послѣдовательно чрезъ $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ и т. д., получимъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \gtrless 0 \\
\int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx \int_0^1 f_3(x)\,dx \gtrless 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\,dx - \\
\quad - \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\ldots f_{n-1}(x)\,dx \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0
\end{array}\right\}\text{(A)}$$

Въ силу теоремы П. Л. Чебышева условія существованія этихъ неравенствъ будутъ послѣдовательно:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{df_1}{dx}\cdot\dfrac{df_2}{dx} \gtrless 0 \\[2ex]
\dfrac{d}{dx}\left(f_1 f_2\right)\dfrac{df_3}{dx} \gtrless 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[1ex]
\dfrac{d}{dx}\left(f_1 f_2 \ldots\ldots f_{n-1}\right)\dfrac{df_n}{dx} \gtrless 0
\end{array}\right\}(\alpha)$$

. . . .

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ, а нижніе—нижнимъ.

Если назовемъ первыя части неравенствъ (A) послѣдовательно чрезъ $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ и положимъ:

$$\int_0^1 f_3(x)\,dx \int_0^1 f_4(x)\,dx \ldots\ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_1$$

$$\int_0^1 f_4(x)\,dx \int_0^1 f_5(x)\,dx \ldots\ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = B_{n-2}$$

$$1 = B_{n-1}$$

то будемъ, очевидно, имѣть

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} B_{n-1} = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\,dx -$$

$$- \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \ldots\ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Но въ силу условій (α) и принимая во вниманіе видъ выраженій B_1, B_2...., должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$A_1B_1 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx}\int_0^1 f_3(x)dx\int_0^1 f_4(x)dx\ldots\int_0^1 f_n(x)dx \gtrless 0$$

$$A_2B_2 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1f_2\right)\frac{df_3}{dx}\int_0^1 f_4(x)dx\ldots\int_0^1 f_n(x)dx \gtrless 0$$

$$A_3B_3 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1f_2f_3\right)\frac{df_4}{dx}\int_0^1 f_5(x)dx\ldots\int_0^1 f_n(x)dx \gtrless 0$$

. . . .

$$A_{n-1}B_{n-1} \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1f_2\ldots f_{n-1}\right)\frac{df_n}{dx} \gtrless 0$$

которыя, въ случаѣ когда каждая изъ функцій $f_3(x)$, $f_4(x)$,... $f_n(x)$ сохраняетъ свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи, равнозначущи съ слѣдующими

$$\left.\begin{aligned}
&A_1B_1 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx}f_3f_4\ldots f_n \gtrless 0\\
&A_2B_2 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1f_2\right)\frac{df_3}{dx}f_4f_5\ldots f_n \gtrless 0\\
&A_3B_3 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1f_2f_3\right)\frac{df_4}{dx}f_5\ldots f_n \gtrless 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{n-1}B_{n-1} \gtrless 0, \text{ когда } \frac{d}{dx}\left(f_1f_2\ldots f_{n-1}\right)\frac{df_n}{dx} \gtrless 0
\end{aligned}\right\}\ (\beta)$$

гдѣ также верхнимъ знакамъ соотвѣтствуютъ верхніе, а нижнимъ — нижніе.

Если положимъ, что въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только верхніе знаки, то будемъ имѣть, что разность

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x) dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

имѣетъ величину положительную. Когда же въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только нижніе знаки, то эта разность будетъ отрицательною.

Произведя же въ условіяхъ (β) дифференцированіе произведеній, не трудно видѣть, что первыя ихъ части суть суммы такихъ произведеній, которыя получаются изъ произведенія n функцій $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ чрезъ замѣну послѣдовательно каждыхъ двухъ изъ перемножающихся функцій ихъ производными. Вслѣдствіе этого убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если каждая изъ функцій $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$ не мѣняетъ своего знака при измѣненіи перемѣннаго отъ 0 *до* 1 *и при томъ всѣ отношенія* $\dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}, \dfrac{f_2'(x)}{f_2(x)}, \ldots \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ *имѣютъ одинаковые знаки, то разность*

$$\int_0^1 f_1(x) f\ (x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

имѣетъ величину положительную, когда число отрицательныхъ функцій въ рядѣ f_1, $f\ $, ... f_n есть четное, и отрицательную, когда это число есть нечетное.

Кромѣ сказаннаго, въ той же нашей статьѣ подлежитъ исправленію слѣдующая опечатка.

На второй страницѣ 1-го параграфа напечатано

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx\right]^2;$$

должно быть

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx\right]^2.$$

Эта же опечатка встрѣчается и на четвертой страницѣ въ равенствѣ, обозначенномъ нумеромъ (III).

К. А.