О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Пусть въ безпредѣльной массѣ несжимаемой жидкости, текущей съ потенціаломъ скоростей, движется тяжелое твердое тѣло, масса котораго M. Обозначимъ черезъ M_1 массу вытѣсненной тѣломъ жидкости и черезъ g ускореніе силы тяжести. На тѣло дѣйствуютъ двѣ силы: сила тяжести, приложенная въ центрѣ тяжести тѣла, и сила, опредѣляемая по закону Архимеда, приложенная въ центрѣ тяжести объема и направленная въ сторону, противоположную дѣйствію силы тяжести. Величины этихъ силъ будутъ соотвѣтственно:

$$Mg \quad \text{и} \quad M_1 g.$$

Предполагая M и M_1 неравными и тѣло неоднороднымъ, приммемъ за начало координатныхъ осей, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, точку приложенія равнодѣйствующей этихъ параллельно-противоположныхъ силъ. Введемъ кромѣ того систему неподвижныхъ координатъ, направивъ ось ζ'овъ по направленію вышеупомянутой равнодѣйствующей.

Пусть косинусы угловъ, составляемыхъ осями x, y, z, неизмѣнно связанными съ тѣломъ, съ неподвижными ξ, η, ζ будутъ соотвѣтственно обозначаемы:

$$\begin{array}{llll} \text{для} & x,\ y,\ z \ \text{съ}\ \xi & \text{чрезъ} & \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3; \\ \text{—} & x,\ y,\ z \ \text{съ}\ \eta & \text{—} & \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3; \\ \text{—} & x,\ y,\ z \ \text{съ}\ \zeta & \text{—} & \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3. \end{array}$$

14

При этомъ проекціи вектора дѣйствующей силы на оси x, y, z будутъ соотвѣтственно:

$$(M-M_1)g\gamma_1\,,\quad (M-M_1)g\gamma_2\,,\quad (M-M_1)g\gamma_3\,.$$

Положивъ $(M-M_1)g=m$, представимъ ихъ въ видѣ:

$$m\gamma_1\,,\quad m\gamma_2\,,\quad m\gamma_3\,.$$

Моментъ-же силъ относительно этихъ осей равенъ нулю.

Назвавъ координаты начала осей x, y, z по отношенію къ неподвижнымъ осямъ черезъ α, β, γ и обозначивъ черезъ u, v, w, p, q, r проекціи скорости начала координатъ и угловой скорости твердаго тѣла на оси, неизмѣнно съ нимъ связанныя, получимъ, по Кирхгофу, *) для опредѣленія этихъ шести величинъ слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)=r\frac{\partial T}{\partial v}-q\frac{\partial T}{\partial w}+m\gamma_1\,,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)=p\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial u}+m\gamma_2\,,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)=q\frac{\partial T}{\partial u}-p\frac{\partial T}{\partial v}+m\gamma_3\,,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)=w\frac{\partial T}{\partial v}-v\frac{\partial T}{\partial w}+r\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial r}\,,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)=u\frac{\partial T}{\partial w}-w\frac{\partial T}{\partial u}+p\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial p}\,,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)=v\frac{\partial T}{\partial u}-u\frac{\partial T}{\partial v}+q\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial q}\,,
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (1)$$

гдѣ T однородная квадратичная функція шести перемѣнныхъ u, v, w, p, q, r, всѣ дискриминанты которой положительны.

Вводя, по Клебшу **), новыя перемѣнныя, связанныя съ прежними соотношеніями:

---

*) Kirchhoff. Vorles. ü. Math. Physik. S. 237.

**) Clebsch. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann. Bd. III., S. 241.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial T}{\partial u}, & y_1 &= \frac{\partial T}{\partial p}, \\ x_2 &= \frac{\partial T}{\partial v}, & y_2 &= \frac{\partial T}{\partial q}, \\ x_3 &= \frac{\partial T}{\partial w}, & y_3 &= \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

преобразуемъ систему (1) къ виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2} + m\gamma_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} + m\gamma_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} + m\gamma_3, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3}, \\ \frac{dy_3}{dt} &= x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Что же касается величинъ α, β, γ и косинусовъ угловъ подвижныхъ осей съ неподвижными, то они опредѣлятся при помощи слѣдующей системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) &= m; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

*

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}\left\{\begin{array}{c}(\gamma_1\beta-\beta_1\gamma)x_1+(\gamma_2\beta-\beta_2\gamma)x_2+(\gamma_3\beta-\beta_3\gamma)x_3\\ +\alpha_1y_1+\quad\alpha_2y_2+\quad\alpha_3y_3\end{array}\right\}=m\beta\,,\\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left\{\begin{array}{c}(\alpha_1\gamma-\gamma_1\alpha)x_1+(\alpha_2\gamma-\gamma_2\alpha)x_2+(\alpha_3\gamma-\gamma_3\alpha)x_3\\ +\beta_1y_1+\quad\beta_2y_2+\quad\beta_3y_3\end{array}\right\}=-m\alpha\,,\\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left\{\begin{array}{c}(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta)x_1+(\beta_2\alpha-\alpha_2\beta)x_2+(\beta_3\alpha-\alpha_3\beta)x_3\\ +\gamma_1y_1+\quad\gamma_2y_2+\quad\gamma_3y_3\end{array}\right\}=0\,.
\end{array}\right\}\,.\quad(6)$$

Уравненія (5) даютъ непосредственно:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=A_1\,,\\
\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3=A\,,\\
\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3=m(t+\tau)\,,
\end{array}\right\}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

гдѣ A_1, A, τ произвольныя постоянныя.

Нисколько не уменьшая общности вопроса можемъ положить $A_1=0$, для чего стоитъ только повернуть систему неподвижныхъ координатныхъ осей вокругъ оси ζ'овъ на соотвѣтствующій уголъ, и $\tau=0$, замѣтивъ, что начало счета временъ вполнѣ произвольно. Вслѣдствіе этого уравненія (7) представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0\,,\\
\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3=A\,,\\
\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3=mt\,.
\end{array}\right\}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7_1)$$

Послѣднее же изъ уравненій (6) даетъ

$$\left\{\begin{array}{c}(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta)x_1+(\beta_2\alpha-\alpha_2\beta)x_2+(\beta_3\alpha-\alpha_3\beta)x_3\\ +\gamma_1y_1+\quad\gamma_2y_2+\quad\gamma_3y_3\end{array}\right\}=C\;.\;.\;.\;(8)$$

или, въ силу уравненій (7_1),

$$A\alpha+\gamma_1y_1+\gamma_2y_2+\gamma_3y_3=C\,.\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7_2)$$

Замѣтимъ, что, проинтегрировавъ системы (3) и (4), т. е. найдя x_i и y_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$ въ функціи времени, — можемъ отыскать величины α, β, γ и α_i, β_i, γ_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$ при помощи слѣдующихъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial x_3},\\ \frac{d\beta}{dt}&=\beta_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial x_3},\\ \frac{d\gamma}{dt}&=\gamma_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial x_3},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

и

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt}&=\alpha_2\frac{\partial T}{\partial y_3}-\alpha_3\frac{\partial T}{\partial y_2},\\ \frac{d\alpha_2}{dt}&=\alpha_3\frac{\partial T}{\partial y_1}-\alpha_1\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{d\alpha_3}{dt}&=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial y_2}-\alpha_2\frac{\partial T}{\partial y_1},\end{aligned}\right|(m)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{d\beta_1}{dt}&=\beta_2\frac{\partial T}{\partial y_3}-\beta_3\frac{\partial T}{\partial y_2},\\ \frac{d\beta_2}{dt}&=\beta_3\frac{\partial T}{\partial y_1}-\beta_1\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{d\beta_3}{dt}&=\beta_1\frac{\partial T}{\partial y_2}-\beta_2\frac{\partial T}{\partial y_1},\end{aligned}\right|(n)\\ \qquad\qquad\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma_1}{dt}&=\gamma_2\frac{\partial T}{\partial y_3}-\gamma_3\frac{\partial T}{\partial y_2},\\ \frac{d\gamma_2}{dt}&=\gamma_3\frac{\partial T}{\partial y_1}-\gamma_1\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{d\gamma_3}{dt}&=\gamma_1\frac{\partial T}{\partial y_2}-\gamma_2\frac{\partial T}{\partial y_1},\end{aligned}\right|(p)\end{array}\right\}.\ (10)$$

которыми мы и воспользуемся впослѣдствіи.

§ 2.

Не трудно замѣтить, что при всякомъ движеніи твердаго тѣла имѣютъ мѣсто два интеграла уравненій (3) и (4), получающія слѣдующимъ образомъ.

Помноживъ уравненія (3) и (4) соотвѣтственно на

$$\begin{array}{ll}\dfrac{\partial T}{\partial x_1}\ \text{или на}\ x_1, & \dfrac{\partial T}{\partial y_1}\ \text{или на}\ 0,\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x_2}\ \ldots\ldots\ x_2, & \dfrac{\partial T}{\partial y_2}\ \ldots\ldots\ 0,\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x_3}\ \ldots\ldots\ x_3, & \dfrac{\partial T}{\partial y_3}\ \ldots\ldots\ 0,\end{array}$$

и сложивъ, находимъ

$$\left.\begin{aligned} &T = m\gamma + H \\ \text{и} \quad & \\ &x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = m^2t^2 + C_1\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

гдѣ H и C_1 произвольныя постоянныя.

Первое уравненіе выражаетъ законъ живой силы, второе измѣненіе со временемъ вектора производящихъ движеніе импульсовъ.

§ 3.

Какъ упомянуто выше, T есть однородная квадратичная функція шести перемѣнныхъ $u\,,\,v\,,\,w\,,\,p\,,\,q\,,\,r$ или $x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\,y_3\,,$ т. е.

$$\left.\begin{aligned} 2T = Sa_{11}x_1{}^2 + 2Sa_{12}x_1x_2 + Sa_{44}y_1{}^2 + 2Sa_{45}y_1y_2 + \\ + 2Sa_{14}x_1y_1 + 2Sa_{15}x_1y_2 + 2Sa_{24}x_2y_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12)$$

гдѣ a_{ik} постоянныя, зависящія отъ формы и распредѣленія массъ въ тѣлѣ, а знакъ S представляетъ сумму трехъ членовъ, получающихся изъ перваго круговою перестановкою двухъ группъ значковъ 1,2,3 и 4,5,6 подъ условіемъ, чтобы въ каждой группѣ меньшій значокъ предшествовалъ большему.

Замѣтимъ, что перемѣной направленія координатныхъ осей всегда можно обратить въ нуль коэффиціенты $a_{13}\,,\,a_{23}$ (и одинъ изъ коэффиціентовъ $a_{34}\,,\,a_{35}\cdot$)

Въ самомъ дѣлѣ,

$$Sa_{11}x_1{}^2 + 2Sa_{12}x_1x_2 = \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

представляетъ нѣкоторую поверхность второго порядка и именно эллипсоидъ, центръ котораго находится въ началѣ координатъ. Стоитъ принять за ось z'овъ одну изъ главныхъ осей этой поверхности, чтобы коэффиціенты a_{13} и a_{23} обратились въ нуль и выраженіе живой силы приняло видъ

$$\left.\begin{aligned} 2T = Sa_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + Sa_{44}y_1{}^2 + 2Sa_{45}y_1y_2 + \\ + 2Sa_{14}x_1y_1 + 2Sa_{15}x_1y_2 + 2Sa_{24}y_2y_1\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (13)$$

гдѣ a_{ik} постоянныя, въ которыя обратятся прежніе коэффиціенты a_{ik} при измѣненіи координатной системы, а $x_i\,,\,y_i$ $(i = 1,2,3)$ проекціи на новыя оси момента и вектора производящихъ движеніе импульсовъ.

Положимъ теперь

$$2T = 2T_x + 2T_{xy} + 2T_y,$$

гдѣ

$$T_x = \frac{1}{2} S a_{11} x_1{}^2 + a_{12} x_1 x_2,$$

$$T_{xy} = S(a_{14} x_1 y_1 + a_{15} x_1 y_2 + a_{24} x_2 y_1),$$

$$T_y = \frac{1}{2} S a_{44} y_1{}^2 + S a_{45} y_1 y_2.$$

Пусть въ уравненіяхъ (7_1) постоянная $A = 0$.
Положимъ далѣе

$$x_1 = \xi_1 t, \quad x_2 = \xi_2 t, \quad x_3 = \xi_3 t. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (14)$$

Подставивъ эти выраженія x_i $(i = 1,2,3)$ въ уравненія (7_1), находимъ слѣдующую систему соотношеній между ξ_i, η_i и α_i, β_i, γ_i $(i = 1,2,3)$:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0, \qquad \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 = 0, \\ \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3 = m. \end{array}\right\} \;.\;. \quad (15)$$

Отсюда, помножая эти уравненія на α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 и складывая каждый разъ, имѣемъ

$$\xi_1 = m\gamma_1, \quad \xi_2 = m\gamma_2, \quad \xi_3 = m\gamma_3. \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (16)$$

Обозначимъ черезъ T' выраженіе живой силы по занесеніи туда вмѣсто x_i новыхъ перемѣнныхъ $\xi_i (i = 1,2,3)$, такъ что

$$2T' = 2t^2 T_\xi + 2t T_{\xi y} + 2T_y, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (17)$$

причемъ

$$\left.\begin{array}{l} T_\xi = \frac{1}{2} S a_{11} \xi_1{}^2 + a_{12} \xi_1 \xi_2, \\ T_{\xi y} = S(a_{14} \xi_1 y_1 + a_{15} \xi_1 y_2 + a_{24} \xi_2 y_1). \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (18)$$

Принимая въ соображеніе выраженія (16), (17) и (18), приводимъ уравненія (3) и (4) къ виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= t\left[\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}-\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right]+\xi_2\frac{\partial T_y}{\partial y_2}-\xi_3\frac{\partial T_y}{\partial y_2}\,,\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= t\left[\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}-\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right]+\xi_3\frac{\partial T_y}{\partial y_1}-\xi_1\frac{\partial T_y}{\partial y_3}\,,\\
\frac{d\xi_3}{dt} &= t\left[\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}-\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right]+\xi_1\frac{\partial T_y}{\partial y_2}-\xi_2\frac{\partial T_y}{\partial y_1}\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(19)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= t^2\left\{\xi_2\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_3}-\xi_3\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_2}\right\}+t\left\{\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_3}-\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_2}\right\}\\
&\quad+t\left\{y_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}-y_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right\}+y_2\frac{\partial T_y}{\partial y_3}-y_3\frac{\partial T_y}{\partial y_2}\,,\\
\frac{dy_2}{dt} &= t^2\left\{\xi_3\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_1}-\xi_1\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_3}\right\}+t\left\{\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_1}-\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_3}\right\}\\
&\quad+t\left\{y_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right\}+y_3\frac{\partial T_y}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial T_y}{\partial y_3}\,,\\
\frac{dy_3}{dt} &= t^2\left\{\xi_1\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_2}-\xi_2\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_1}\right\}+t\left\{\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_2}-\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_1}\right\}\\
&\quad+t\left\{y_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right\}+y_1\frac{\partial T_y}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial T_y}{\partial y_1}\,.
\end{aligned}\right\}\;.\;(20)$$

Не трудно замѣтить, что можно удовлетворить системамъ (19) и (20), положивъ

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= 0\,, & \xi_2 &= 0\,, & \xi_3 &= C\,,\\
y_1 &= 0\,, & y_2 &= 0\,, & y_3 &= 0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(21)$$

если только $a_{34} = a_{35} = 0$.

Такъ какъ $\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2 = m^2$ (ибо $\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2+\gamma_3{}^2 = 1$), то

$$\xi_3 = \pm m.$$

И такъ, для всякаго тѣла, въ выраженіи живой силы котораго, при системѣ координатъ съ началомъ въ точкѣ приложенія равнодѣйствующей вышеупомянутыхъ силъ и осью z'овъ, направленной по главной оси поверхности (A), коэффиціенты a_{34}, a_{35} (при x_3y_1, x_3y_2) обращаются въ нуль, возможно движеніе, при которомъ

$$\xi_1 = \xi_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0 \quad \text{и} \quad \xi_3 = m.$$

Разсмотримъ его нѣсколько подробнѣе.

Такъ какъ

$$m\gamma_1 = \xi_1 , \qquad m\gamma_2 = \xi_2 ,$$

то $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, а изъ уравненій (15) слѣдуетъ, что

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0 , \quad \text{и} \quad \gamma_3 = 1 ,$$

т. е. при движеніи тѣла ось z'овъ постоянно совпадаетъ съ осью ζ'овъ.

Первыя два изъ уравненій (6), въ силу (15), представятся въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(t\beta m) = m\beta \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(t\alpha m) = m\alpha \ldots\ldots\ldots (22)$$

Отсюда $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$, т. е. начало координатъ движется прямолинейно по оси ζ'овъ. Такъ какъ начало неподвижныхъ координатъ вполнѣ произвольно, то можемъ положить

$$\alpha = \beta = 0 .$$

Въ силу перваго изъ уравненій (11) имѣемъ

$$m\gamma = T - H = \frac{t^2 a_{33} m^2}{2} - H , \ldots\ldots\ldots (23)$$

т. е. начало координатъ движется по оси ζ'овъ равномѣрно ускоренно (какъ и при свободномъ паденіи тѣла).

Остается теперь опредѣлить углы α_1, α_2, β_1, β_2.

Воспользовавшись уравненіями (10) [m], получимъ

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 a_{36} mt , \qquad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\alpha_1 a_{36} mt \ldots\ldots\ldots (24)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій путемъ дифференцированія одну изъ перемѣнныхъ, имѣемъ

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} - \frac{1}{t}\cdot\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_1 a^2{}_{36} m^2 t^2 = 0 .$$

Вводя-же новую независимую перемѣнную t_1, такъ что

$$\frac{dt_1}{dt} = t ,$$

получимъ

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt_1{}^2} + a^2{}_{36}m^2\alpha_1 = 0.$$

Проинтегрировавъ это уравненіе, получаемъ

$$\alpha_1 = A_1\cos kt_1 + A_2\sin kt_1\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

гдѣ $k = a_{36}m$, A_1 и A_2 двѣ произвольныя постоянныя.

Первое же изъ уравненій (24) даетъ

$$\alpha_2 = - A_1\sin kt_1 + A_2\cos kt_1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Но $\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 = 1$, слѣдовательно,

$$A_1{}^2 + A_2{}^2 = 1.$$

Положивъ поэтому

$$A_1 = \cos v_0\,, \qquad A_2 = \sin v_0$$

и обозначивъ kt_1 черезъ v, имѣемъ

$$\alpha_1 = \cos(v - v_0)\,, \qquad \alpha_2 = -\sin(v - v_0) \quad \ldots . \quad (27)$$

Точно такъ-же найдемъ, что

$$\beta_1 = \sin(v - v_0)\,, \qquad \beta_2 = \cos(v - v_0)\,, \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

принявъ въ соображеніе, что

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что тѣло вращается равномѣрно ускоренно вокругъ оси z'овъ, ибо, какъ не трудно убѣдиться,

$$\psi = v - v_0 = \frac{kt^2}{2} - v_0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

И такъ, для тѣла, живая сила котораго, при началѣ координатъ въ точкѣ приложенія равнодѣйствующей силъ, можетъ быть приведена къ такому виду, что коэффиціенты $a_{13} = a_{23} = a_{34} = a_{35} = 0$, *возможно равномѣрно ускоренное винтовое движеніе по оси ζ'овъ.*

Изъ уравненій (24) слѣдуетъ далѣе, что если $a_{36} = 0$, то тѣло движется поступательно равномѣрно ускоренно по оси ζ'овъ безъ вращенія.

Движенія эти соотвѣтствуютъ допущенію, что тѣло приведено въ движеніе однимъ импульсомъ, направленнымъ по оси ζ'овъ. Свободному тѣлу такой импульсъ сообщаетъ только поступательное движеніе; тѣло-же, погруженное въ жидкость, вообще говоря, кромѣ поступательнаго пріобрѣтаетъ и вращательное движеніе, когда коэффиціентъ a_{36} не равенъ нулю. Если же $a_{36}=0$, то получается движеніе аналогичное движенію твердаго тѣла въ пустотѣ. Примѣрами того и другого случая движенія могутъ служить: для перваго—тѣло симметричное относительно двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, тѣло не мѣняющее своего вида отъ поворота на уголъ π (пароходный винтъ съ двумя лопастями),—тѣло, не мѣняющее своего вида отъ поворота на углы π и $\frac{\pi}{2}$ (пароходный винтъ съ четырьмя лопастями); втораго—тѣло симметричное относительно трехъ перпендикулярныхъ плоскостей и тѣло подобное тѣлу вращенія, и т. д.

§ 4.

Не входя въ подробное изслѣдованіе, скажемъ, что движенія этого рода, вообще говоря, неустойчивы. Даже для тѣла симметричнаго относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей (для котораго имѣетъ мѣсто поступательное движеніе безъ вращенія) и притомъ для возмущеній, не мѣняющихъ величины произвольной постоянной A, движеніе это будетъ безусловно неустойчиво.

§ 5.

Переходимъ теперь къ другимъ движеніямъ твердаго тѣла, соотвѣтствующимъ болѣе частнымъ случаямъ выраженія живой силы.

Изъ уравненій (3) и (4), очевидно, слѣдуетъ, что всякій интегралъ въ однихъ y'ахъ, имѣющій мѣсто для движенія не тяжелаго тѣла будетъ имѣть мѣсто и въ разсматриваемомъ случаѣ. Разыскивая по пріему Клебша такой интегралъ, предположивъ его цѣлой однородной функціей n'ой степени y'овъ, мы придемъ къ заключенію, что интегралъ этотъ будетъ необходимо второй или первой степени, и имѣетъ мѣсто для тѣла, живая сила котораго

$$2T=a(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+b(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+c_1y_1{}^2+c_2y_2{}^2+c_3y_3{}^2 \quad (30)$$

или

$$2T=a(x_1{}^2+x_2{}^2)+a_1x_3{}^2+b(x_1y_1+x_2y_2)+b_1x_3y_3+c(y_1{}^2+y_2{}^2)+c_1y_3{}^2.$$

Само собою разумѣется, что выраженіе (30) есть частный случай общаго случая Клебша, для котораго вполнѣ рѣшается вопросъ о движеніи не-тяжелаго тѣла *). Мы остановимся только на разсмотрѣніи движенія при существованіи интеграла второй степени, когда живая сила выражается формулой (30). При этомъ, какъ легко видѣть, оказывается, что уравненія (4) не содержатъ x'овъ, и для опредѣленія y'овъ въ функціи времени получаются совершенно такія-же уравненія, какъ и для движенія тѣла по инерціи вокругъ неподвижной точки съ моментами инерціи c_1, c_2, c_3, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (c_3 - c_2)y_2y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} &= (c_1 - c_3)y_1y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= (c_2 - c_1)y_1y_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

---

*) Клебшъ показалъ, что для тѣла, живая сила котораго

$$2T = a_1x_1{}^2 + a_2x_2{}^2 + a_3x^2{}_3 + b(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + c_1y_1{}^2 + c_2y_2{}^2 + c_3y_3{}^2, \quad (\alpha)$$

при условіи

$$\frac{a_2 - a_3}{b_1} + \frac{a_3 - a_1}{b_2} + \frac{a_1 - a_2}{b_3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

существуетъ четвертый (кромѣ трехъ извѣстныхъ) интегралъ второй степени, и что выраженіе живой силы (α) есть единственное, для котораго интегралъ есть однородная функція второй степени. Разыскивая цѣлый интегралъ въ y'кахъ и называя его черезъ f мы должны удовлетворить тождественно, при помощи уравненій (4), выраженію

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} y_2' + \frac{\partial f}{\partial y_3} y'_3 = 0,$$

т. е. должны имѣть тождественно:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T}{\partial x_1}, & x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T}{\partial x_2}, & x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T}{\partial x_3}, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T}{\partial y_1}, & y_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T}{\partial y_2}, & y_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T}{\partial y_3}, & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

интегрирующіяся, какъ извѣстно, въ эллиптическихъ функціяхъ $l\sin am\lambda t$, $m\cos am\lambda t$, $n\Delta am\lambda t$.

Предположивъ далѣе, что $A=0$, т. е. что производящій движеніе импульсъ направленъ по оси z'овъ и введя перемѣнныя ξ_i вмѣсто x_i $(i=1,2,3)$, приведемъ уравненія (3) къ виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= c_3\xi_2 y_3 - c_2\xi_3 y_2, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= c_1\xi_3 y_1 - c_3\xi_1 y_3, \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= c_2\xi_1 y_2 - c_1\xi_2 y_1. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (32)$$

А такъ какъ $2T = 2T_x + 2T_{xy} + 2T_y$, то

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_x}{\partial x_1}, & x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_x}{\partial x_2}, & x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_x}{\partial x_3}, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_1}, & x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_2}, & x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_3}, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y_1}, & y_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y_2}, & y_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y_3}, & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_y}{\partial y_1}, & y_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_y}{\partial y_2}, & y_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_y}{\partial y_3}, & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (\delta)$$

Второй и третій члены линейны относительно x'овъ, первый—второй степени отъ x'овъ, четвертый не зависитъ отъ нихъ. Выраженіе (δ) распадется на три, изъ которыхъ найдемъ, 1) что, если интегралъ не первой степени, онъ необходимо четный и есть однородная функція степени $\frac{n}{2}$ (n-четное) отъ T_y и $U_y = \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$; 2) что необходимо при этомъ $2T = a(x_1^2+x_2^2+x^2) + 2b(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) + c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + c_3y_3^2$, и 3) что (считаю не лишнимъ обратить вниманіе на это обстоятельство) *никакого другого интеграла цѣлаго въ y'ахъ кромѣ интеграла второй степени вида $T_y - kU_y = 0$, гдѣ k постоянная, не можетъ существовать, ибо всякій интегралъ необходимо долженъ удовлетворять уравненію*

$$\frac{\partial f}{\partial T_y} + k\frac{\partial f}{\partial U_y} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

такъ что необходимо $f = \psi(T_y - kU_y)$, т. е. всякій другой интегралъ, цѣлый однородный въ y'ахъ, будетъ функціей интеграла второй степени.

Такъ какъ y_1, y_2, y_3 извѣстны въ функціи времени изъ уравненій (31), а уравненія (32) имѣютъ два интеграла

$$\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = m^2,$$

и

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = C,$$

то третій найдется по принципу послѣдняго множителя.

Уравненія (32), замѣтимъ, тѣ-же самыя, что и уравненія (10), опредѣляющія углы α_i, β_i, γ_i въ функціи времени.

Если

$$2T = a(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) + b(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + c(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2),$$

т. е., если тѣло изотропно относительно начала координатъ *) то всѣ y_i равны постояннымъ, а для опредѣленія ξ_i получается система линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами.

Начало координатъ такого тѣла будетъ двигаться по нѣкоторой спиральной линіи, какъ будетъ показано нѣсколько ниже.

Положивъ

$$c_1 y_1 = d_1, \qquad c_2 y_2 = d_2, \qquad c_3 y_3 = d_3,$$

получимъ характеристическое уравненіе

$$s(s^2 + d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2) = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= Ad_1 + A_1 \cos kt + A_2 \sin kt, \\ \xi_2 &= Ad_2 + B_1 \cos kt + B_2 \sin kt, \\ \xi_3 &= Ad_3 + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

гдѣ $k = \sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}$, причемъ

$$\left.\begin{aligned} A_1 d_1 + B_1 d_2 + C_1 d_3 &= 0, \\ A_2 d_1 + B_2 d_2 + C_2 d_3 &= 0, \\ A_1 A_2 + B_1 B_3 + C_1 C_2 &= 0, \\ A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 &= A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2, \\ A^2 k^2 + A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 &= m^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (34)$$

---

*) W. Thomson. On the Motion of Free Solids through a Liquid. Phil. Mag. XLII. p. 362.

Между семью произвольными постоянными существуетъ, слѣдовательно, пять соотношеній; двѣ остаются произвольными, третью можно ввести какъ добавочную ко времени t.

Для α_i, β_i получатся по формуламъ (10) [m и n] выраженія аналогичныя (33), а затѣмъ α, β и γ опредѣлятся по формуламъ (9).

§ 6.

Указавъ въ общихъ чертахъ движеніе тѣла изотропнаго относительно начала координатъ, разсмотримъ болѣе общій случай, когда c_i не равны между собой.

Не производя интегрированія уравненій (32), разсмотренныхъ Hermite'омъ, покажемъ, что можно составить понятіе о движеніи начала координатъ, пользуясь выраженіями (9) и уравненіями (6).

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3\,, \\ U_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3\,, \\ U_3 &= \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Первыя два изъ уравненій (6), въ силу соотношеній (7_1), дадутъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\beta m t + A\gamma + U_1) &= m\beta\,, \\ \frac{d}{dt}(-\alpha m t + U_2) &= -m\alpha\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

или, при $A = 0$,

$$\left.\begin{aligned} tm\frac{d\beta}{dt} + \frac{dU_1}{dt} &= 0\,, \\ -tm\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dU_2}{dt} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Но по формуламъ (9), принявъ во вниманіе выраженіе $2T$ (30), имѣемъ

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1\frac{dT}{dx_1} + \alpha_2\frac{dT}{dx_2} + \alpha_3\frac{dT}{dx_3} = \alpha_1(ax_1 + by_1) + \alpha_2(ax_2 + by_2) + \alpha_3(ax_3 + by_3),$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1\frac{dT}{dx_1} + \beta_2\frac{dT}{dx_2} + \beta_3\frac{dT}{dx_3} = \beta_1(ax_1 + by_1) + \beta_2(ax_2 + by_2) + \beta_3(ax_3 + by_3),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1\frac{dT}{dx_1} + \gamma_2\frac{dT}{dx_2} + \gamma_3\frac{dT}{dx_3} = \gamma_1(ax_1 + by_1) + \gamma_2(ax_2 + by_2) + \gamma_3(ax_3 + by_3),$$

откуда въ силу равенствъ (7_1), принявъ во вниманіе обозначеніе (35), получаемъ

$$\frac{d\alpha}{dt}=bU_1\,,\qquad \frac{d\beta}{dt}=bU_2\,,\qquad \frac{d\gamma}{dt}=amt+bU_3\cdot\;.\;.\;(38)^{*})$$

Уравненія (38) и (37) даютъ

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=b\frac{dU_1}{dt}=-tbm\frac{d\beta}{dt}=-tb^2mU_2\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(39)$$

Дифференцируя это выраженіе, имѣемъ

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3}=-b^2mU_2-tb^2m\frac{dU_2}{dt}\,,$$

что въ силу второго изъ уравненій (37) и (39) приведется къ

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\frac{1}{t}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+t^2b^2m^2\frac{d\alpha}{dt}=0\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(40)$$

Полагая $\frac{d\alpha}{dt}=\alpha'$ и помножая на t^2, дадимъ уравненію (40) видъ

$$t^2\frac{d^2\alpha'}{dt^2}-t\frac{d\alpha'}{dt}+t^4b^2m^2\alpha'=0\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(41)$$

Сравнивая это уравненіе съ общимъ уравненіемъ, интегрирующимся въ функціяхъ Бесселя

$$t^2\frac{d^2V}{dt^2}+(2\alpha+1)\,t\frac{dV}{dt}+(\alpha^2-\beta^2n^2+\beta^2\gamma t^{2\beta})V=0\,,$$

гдѣ α, β, γ, n какія угодно постоянныя **), интегралъ котораго имѣетъ слѣдующій видъ

$$V=t^{-\alpha}\{A_1J_n(\gamma t^\beta)+A_2\,J_{-n}(\gamma t^\beta)\}\,,$$

---

*) Изъ формулъ (38) слѣдуетъ между прочимъ, что если $b=0$, то начало координатъ движется прямолинейно по оси z'овъ равномѣрно ускоренно. Если, замѣтимъ, A не равно нулю, то движеніе совершается въ плоскости $\alpha=0$; тѣло движется равномѣрно по оси y'овъ и равномѣрно ускоренно по оси z'овъ, описывая параболу, — движеніе тождественно съ движеніемъ тѣла въ пустотѣ, что слѣдуетъ прямо изъ выраженія (30), если $b=0$.

**) См. Jordan. Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, III, p. 240.

находимъ, что въ нашемъ случаѣ

$$\alpha^2 - \beta^2 n^2 = 0\,, \qquad \beta = 2\,, \qquad 2\alpha + 1 = -1\,, \qquad \beta^2\gamma^2 = m^2 b^2\,,$$

откуда

$$\alpha = -1\,, \quad n = \frac{1}{2}\,, \quad \gamma = \frac{mb}{2}\,,$$

слѣдовательно,

$$\alpha' = t\left[A_1 J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{mb}{2}t^2\right) + A_2 J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{mb}{2}t^2\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Но, какъ извѣстно, вообще

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(R^{n,\frac{1}{2}}(z).\sin z - R^{n-1,\frac{3}{2}}(z).\ \cos z\right),$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(R^{n,\frac{1}{2}}(z).\cos z + R^{n-1,\frac{3}{2}}(z).\ \sin z\right),$$

если n цѣлое число, гдѣ $R^{n,\frac{1}{2}}(z)$ и $R^{n-1,\frac{3}{2}}$ ряды, обращающіеся, для $n=0$, первый въ 1, второй въ нуль*), такъ что

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Вслѣдствіе этого выраженіе (42) приметъ видъ

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' = t\left\{A_1\sqrt{\frac{4}{\pi mbt^2}}.\ \sin\frac{mbt^2}{2} + A_2\sqrt{\frac{4}{\pi mbt^2}}.\ \cos\frac{mbt^2}{2}\right\}$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{A}_1\sin\frac{mbt^2}{2} + \mathrm{A}_2\cos\frac{mbt^2}{2}\,, \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

гдѣ $\mathrm{A}_1 = \dfrac{2A_1}{\sqrt{\pi mb}}$ и $\mathrm{A}_2 = \dfrac{2A_2}{\sqrt{\pi mb}}$.

*) См. Lommel. Zur Theorie d. Bessel'schen Functionen. Math. Ann. Bd. XIV. S. 516.

Такъ какъ въ силу уравненій (37) и (38)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -bmt\frac{d\beta}{dt},$$

то

$$\frac{d\beta}{dt} = \mathrm{A}_2 \sin\frac{mbt}{2} - \mathrm{A}_1 \cos\frac{mbt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

Наконецъ, третье изъ уравненій (38) даетъ

$$\frac{d\gamma}{dt} = amt + bC\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

ибо при $A=0$ имѣемъ на основаніи третьяго изъ уравненій (6) $U_3 = C$, гдѣ C постоянная. И такъ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \mathrm{A}_1 \sin\frac{mbt^2}{2} + \mathrm{A}_2 \cos\frac{mbt^2}{2} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \mathrm{A}_2 \sin\frac{mbt^2}{2} - \mathrm{A}_1 \cos\frac{mbt^2}{2} \\ \frac{d\gamma}{dt} &= amt + bC\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (47)$$

Эти формулы, нѣсколько преобразованныя, и дадутъ возможность составить нѣкоторое понятіе о характерѣ движенія начала координатныхъ осей, связанныхъ съ тѣломъ.

Во первыхъ, положимъ, что всегда возможно,

$$\mathrm{A}_1 = A\cos v_0\,,\ \mathrm{A}_2 = A\sin v_0 \quad \text{и} \quad \frac{mbt^2}{2} = v\,.$$

Тогда формулы (47) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dv} &= \frac{A}{\sqrt{2mb}\,\sqrt{v}} \sin(v+v_0)\,, \\ \frac{d\beta}{dv} &= -\frac{A}{\sqrt{2mb}\,\sqrt{v}} \cos(v+v_0)\,, \\ \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{a}{b} + \frac{bC}{\sqrt{2mb}\,\sqrt{v}}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (48)$$

а положивъ

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{a}{b}v\,,$$

$$M=\frac{A}{\sqrt{2mb}},\ N=\frac{bC}{\sqrt{2mb}}\ \text{ и }\ v+v_0=\varphi\,,$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\varphi}&=\frac{M}{\sqrt{\varphi-v_0}}\sin\varphi\,,\\ \frac{d\beta}{d\varphi}&=\frac{-M}{\sqrt{\varphi-v_0}}\cos\varphi\,,\\ \frac{d\gamma_1}{d\varphi}&=\frac{N}{\sqrt{\varphi-v_0}}\,.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (49)$$

Сравнивая эти уравненія съ дифференціальными уравненіями улиткообразной линіи, замѣчаемъ, что можемъ разсматривать точку, координаты которой α, β, γ_1, какъ принадлежащую нѣкоторой винтовой линіи, начерченной на цилиндрѣ, радіусъ котораго убываетъ пропорціонально корню квадратному изъ $\varphi-v_0$, т. е. пропорціонально времени, и, при возрастаніи t до безконечности, цилиндръ обращается въ нѣкоторую опредѣленную прямую.

Координаты γ и γ_1 точекъ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ и $(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1)$ связаны соотношеніемъ

$$\gamma_1=\gamma-\frac{a}{b}\,v\,,$$

т. е. первая точка движется равномѣрно ускоренно по отношенію ко второй, и обѣ всегда остаются на одной и той-же образующей цилиндра. Точка $(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1)$, такимъ образомъ, вычерчиваетъ нѣкоторую спиральную линію, постепенно съуживающуюся и въ безконечности обращающуюся въ опредѣленную точку плоскости $(\xi O\eta)$. Подобную-же кривую описываетъ и точка $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ и стремится, съ возрастаніемъ времени до безконечности, къ той-же точкѣ плоскости $(\xi O\eta)$. При этомъ слагающая скорости по плоскости $(\xi O\eta)$ остается величиной постоянной. Возведя въ квадратъ первыя два изъ уравненій (47) и сложивъ, имѣемъ

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2=\mathrm{A}_1{}^2+\mathrm{A}_2{}^2\,,$$

и дуга проекціи траэкторіи на плоскость $(\xi O\eta)$ возрастаетъ пропорціонально времени, ибо изъ уравненій (49) имѣемъ

$$s_{\xi\eta}=2M\sqrt{\varphi-v_0}=kt\,,$$

гдѣ k постоянная. Точно также и дуга въ пространствѣ, проходимая точкою $(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1)$, возрастаетъ пропорціонально времени.

Если черезъ c назовемъ уголъ, составляемый касательной къ траекторіи съ осью $O\zeta$, то

$$\left.\cos c = \frac{\frac{a}{b}+\frac{N}{\sqrt{\varphi-v_0}}}{\sqrt{\frac{M^2}{\varphi-v_0}+\left(\frac{a}{b}+\frac{N}{\sqrt{\varphi-v_0}}\right)^2}},\right\}\quad \ldots\ldots (50)$$

какъ не трудно найти изъ выраженій (49). Слѣдовательно, $\cos c$ есть возрастающая функція времени и приближается ассимптотически къ 1, какъ показываетъ равенство (50), т. е. движеніе ассимптотически стремится къ прямолинейному по оси ζ'овъ.

Далѣе формулы (49) даютъ

$$\alpha = M\int_0^t \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi-v_0}}\,d\varphi\,,\quad \beta = -M\int_0^t \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi-v_0}}\,d\varphi\,.\ \ldots (51)$$

При $t=\infty$

$$\alpha = M\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi-v_0}}\,d\varphi\,,\quad \beta = -M\int_0^\infty \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi-v_0}}\,d\varphi\,.\ \ldots (52)$$

Положивъ $\varphi - v_0 = w$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= M\cos v_0\int_0^\infty \frac{\sin w}{\sqrt{w}}\,dw + M\sin v_0\int_0^\infty \frac{\cos w}{\sqrt{w}}\,dw\,,\\ \beta &= -M\cos w_0\int_0^\infty \frac{\cos w}{\sqrt{w}}\,dw + M\sin v_0\int_0^\infty \frac{\sin w}{\sqrt{w}}\,dw\,,\end{aligned}\right\}\quad (53)$$

Но, какъ извѣстно, вообще

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos qx\cdot dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\cdot\cos\frac{p\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\sin qx dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\cdot\sin\frac{p\pi}{2}\,,$$

если только $0<p<1$. Въ нашемъ случаѣ $p=\frac{1}{2}$, $q=1$,

$$\Gamma(p)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,,\ \cos\frac{p\pi}{2}=\sin\frac{p\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

а потому

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\infty &= M\cos v_0\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+M\sin v_0\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{M\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(\cos v_0+\sin v_0)\\ \beta_\infty &= -M\cos v_0\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+M\sin v_0\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{M\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(\cos v_0+\sin v_0)\end{aligned}\right\}(54)$$

α_∞, β_∞, γ_∞ и представляютъ собою ту точку, къ которой ассимптотически приближается начало координатъ или проекція траэкторіи на плоскость $(\xi O\eta)$ (и опредѣляютъ, иначе говоря, положеніе той прямой, въ которую обращается вышеупомянутый цилиндръ при возрастаніи t до безконечности).

Не мѣшаетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что полученные результаты будутъ справедливы для какихъ угодно c_1, c_2, c_3, если только y_i не равны нулю или U_1, U_2 не постоянны.

Не трудно замѣтить далѣе, что, если b_i не равны между собою, т. е.

$$2T=a(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+b_1x_1y_1+b_2x_2y_2+b_3x_3y_3+c_1y_1{}^2+c_2y_2{}^2+c_3y_3{}^2\,,$$

то возможно движеніе, при которомъ $y_1=y_2=y_3=0$, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 опредѣлятся въ эллиптическихъ функціяхъ отъ аргумента $\frac{t^2}{2}$. Въ этомъ движеніи промежутки между одинаковыми, такъ сказать, состояніями движенія будутъ зависѣть отъ времени, протекшаго отъ начала движенія, и будутъ безпредѣльно убывать съ возрастаніемъ времени.

Не останавливаясь на этомъ частномъ выраженіи $2T$, я постараюсь показать, что такого характера движеніе возможно для болѣе общаго случая выраженія T.

§ 7.

Предположимъ, что въ выраженіи живой силы, отнесенномъ къ центральной точкѣ, коэффиціенты у $x_i x_k$ $(i=1, 2, 3)$ равны нулю, а коэффиціенты при x_i^2 равны между собой, т. е.

$$a_{12}=a_{23}=a_{13}=0\,,$$
$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=k\,,$$

такъ что

$$2T=kSx_1{}^2+2Sa_{14}x_1y_1+2Sa_{24}(x_1y_2+x_2y_1)+Sa_{44}y_1{}^2+2Sa_{45}y_1y_2\,. \quad (55)$$

Допустимъ затѣмъ, что центральная точка совпадаетъ съ точкой приложенія дѣйствующихъ силъ (или что послѣдняя точка лежитъ на направленіи оси z'овъ).

Не трудно замѣтить, что при живой силѣ, выражающейся формулой (55), правыя части уравненій (4) будутъ функціями отъ y'овъ, обращающимися въ нуль при $y_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Допустивъ теперь, подобно предыдущему, что $A = 0$, и вводя перемѣнныя ξ_i вмѣсто x_i $(i = 1, 2, 3)$, приведемъ уравненія (19) и (20) (стр. 216) къ виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= t\left[\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} - \xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right] + Q_1\,,\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= t\left[\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} - \xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right] + Q_2\,,\\
\frac{d\xi_3}{dt} &= t\left[\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} - \xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right] + Q_3\,,\\
\frac{dy_1}{dt} &= P_1\,,\ \frac{dy_2}{dt} = P_2\,,\ \frac{dy_3}{dt} = P_3\,,
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (56)$$

гдѣ Q_i линейныя функціи y'овъ а P_i обращаются въ нуль при $y_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Очевидно, уравненія (56) будутъ удовлетворены, если положимъ

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0\,,$$

а ξ_1, ξ_2, ξ_3 опредѣлимъ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= t\left[\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} - \xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right],\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= t\left[\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} - \xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right],\\
\frac{d\xi_3}{dt} &= t\left[\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} - \xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right]
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots (57)$$

Замѣтивъ, что въ силу выраженія (55)

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} = a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2 + a_{16}\xi_3\,,$$

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} = a_{24}\xi_1 + a_{25}\xi_2 + a_{35}\xi_3\,,$$

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} = a_{16}\xi_1 + a_{35}\xi_2 + a_{36}\xi_3\,,$$

заключаемъ, что, если положимъ

$$2T_1 = a_{14}\xi_1{}^2 + a_{25}\xi_2{}^2 + a_{36}\xi_3{}^2 + 2a_{24}\xi_1\xi_2 + 2a_{35}\xi_2\xi_3 + 2a_{16}\xi_1\xi_3\,, \quad (58)$$

то

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\,, \qquad \frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} \qquad \frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} \, . \quad . \quad . \quad (59)$$

При этомъ уравненія (57), по введеніи новой перемѣнной t_1, связанной съ t соотношеніемъ $\frac{dt_1}{dt} = t$, преобразуются въ такія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= \xi_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} - \xi_3 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}\,, \\ \frac{d\xi_2}{dt_1} &= \xi_3 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}\,, \\ \frac{d\xi_3}{dt_1} &= \xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Уравненія эти вполнѣ сходны съ уравненіями вращательнаго движенія тѣла по инерціи вокругъ неподвижной точки, или уравненіями движенія не тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости подъ дѣйствіемъ одной импульсивной пары *); только роль y_i здѣсь играютъ ξ_i, а живой силы функція T_1, опредѣляемая выраженіемъ (58).

Уравненія (60) имѣютъ два интеграла

$$\text{и} \qquad \left.\begin{aligned} \xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 &= m^2\,, \\ T_1 &= H\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

гдѣ H произвольная постоянная; и, такъ какъ для нихъ имѣетъ мѣсто принципъ послѣдняго множителя, t опредѣлится квадратурой.

Движеніе это соотвѣтствуетъ допущенію, что тѣло приводится въ движеніе только однимъ импульсомъ, направленнымъ по оси ζ'овъ (по направленію дѣйствія силы тяжести).

Величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 можемъ разсматривать, какъ проекціи на оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, нѣкотораго вектора Ξ.

Первое изъ уравненій (61) показываетъ, что этотъ векторъ во все время движенія сохраняетъ постоянную величину, а изъ соотношеній (15) (стр. 215) слѣдуетъ, что онъ сохраняетъ неизмѣнно и направле-

*) См. Lamb. A Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids. § 115, p. 129.

ніе въ пространствѣ, совпадая постоянно съ осью ζ'овъ. При этомъ, какъ видно изъ уравненія второго (61), конецъ его во все время движенія находится на нѣкоторой поверхности второго порядка, уравненіе которой и есть второй изъ интеграловъ:

$$T_1 = H. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Поверхность эта можетъ быть эллипсоидомъ или гиперболоидомъ.

И такъ, конецъ вектора этого долженъ во все время движенія лежать на поверхности шара (первое изъ уравненій (61)) и на вышеупомянутой поверхности второго порядка, т. е. на линіи ихъ пересѣченія.

Отыскавъ линію пересѣченія упомянутой сферы и поверхности второго порядка, проводимъ изъ начала координатъ (центра поверхности) рядъ векторовъ къ точкамъ этой кривой. Получимъ нѣкоторую коническую поверхность.

Движеніе тѣла (вращательная часть) можетъ быть, въ силу вышесказаннаго, воспроизведено (до нѣкоторой степени) перемѣщеніемъ этой поверхности такимъ образомъ, чтобы образующая ея совпадала постоянно съ осью ζ'овъ.

Если поверхность (α) есть эллипсоидъ, то вышеупомянутая кривая состоитъ изъ двухъ замкнутыхъ контуровъ, охватывающихъ или меньшую, или большую изъ осей. Въ частности они могутъ обращаться въ точки пересѣченія этихъ осей съ поверхностью $T_1 = H$ и въ такомъ случаѣ будетъ происходить вращательное движеніе вокругъ этихъ осей. Если вышеупомянутая коническая поверхность проходитъ черезъ среднюю ось, то она обращается въ двѣ плоскости и кривая пересѣченія ея съ поверхностью (α) будетъ состоять изъ круговыхъ сѣченій этой поверхности. Возможно вращательное движеніе и вокругъ этой оси, но оно будетъ неустойчиво, ибо небольшое измѣненіе въ пересѣкающей поверхность (α) сферѣ даетъ коническую поверхность, охватывающую или малую, или большую ось.

Величины $\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}$, соотвѣтственно равныя $\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}$, $\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}$, $\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}$, можемъ разсматривать какъ проекціи на координатныя оси угловой скорости движенія, соотвѣтствующаго перемѣннымъ ξ_i. Положивъ, такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \Omega_1 \cos(\Omega_1 x) = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}, \\ q_1 &= \Omega_1 \cos(\Omega_1 y) = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}, \\ r_1 &= \Omega_1 \cos(\Omega_1 z) = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

заключаемъ, что эта скорость направлена по нормали поверхности (α) въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ Ξ.

Если поэтому въ различныхъ точкахъ кривой пересѣченія поверхностей (61) проведемъ касательныя плоскости и опустимъ на нихъ изъ начала координатъ непрерывный рядъ перпендикуляровъ, то получимъ аксоидъ мгновенныхъ осей.

Очевидно далѣе, что уравненію (α) можно дать видъ

$$\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} = \text{Const}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{63}$$

которое, въ силу выраженій (62), даетъ

$$\Xi \Omega_1 \cos(\Omega_1 \Xi) = \text{Const}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{64}$$

Послѣднее равенство выражаетъ, что проекція угловой скорости Ω_1 на векторъ Ξ есть величина постоянная.

Все предыдущее будетъ относиться къ движенію нетяжелаго тѣла, если вездѣ подъ векторомъ Ξ будемъ разумѣть векторъ импульсовъ, подъ p_1, q_1, r_1, проекціи угловой скорости на оси x, y, z, подъ Ω_1 — угловую скорость и т. д.

Для разсматриваемаго случая, принявъ во вниманіе, что

$$\xi_1 = \frac{x_1}{t}, \qquad \xi_2 = \frac{x_2}{t}, \qquad \xi_3 = \frac{x_3}{t},$$

заключаемъ, что векторъ импульсовъ возрастаетъ пропорціонально времени, ибо уравненіе (61) даетъ

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = m^2 t^2;$$

поверхность $T_1 = H$ преобразуется въ поверхность

$$a_{14} x_1{}^2 + a_{25} x_2{}^2 + a_{36} x_3{}^2 + 2a_{24} x_1 x_2 + 2a_{35} x_2 x_3 + 2a_{16} x_1 x_3 = Ht^2,$$

а проекціи угловой скорости выразятся черезъ p_1, q_1, r_1 слѣдующимъ образомъ:

$$p = tp_1, \qquad q = tq_1, \qquad r = tr_1.$$

Но предыдущія сужденія останутся справедливыми, если будемъ разсуждать не надъ неизмѣняемыми поверхностями (61), а надъ поверхностями, измѣняющимися въ теченіе времени такъ, что радіусъ сферы и оси поверхности второго порядка возрастаютъ пропорціонально времени, такъ что послѣдняя остается подобною самой себѣ.

Такимъ образомъ, движеніе, напримѣръ въ случаѣ эллипсоида, будетъ воспроизводиться такъ, что направленіе оси ζ'овъ будетъ постоянно проходить черезъ точки пересѣченія нѣкоторой линіи на эллипсоидѣ, непрерывно и подобно возрастающемъ, съ такимъ-же образомъ увеличивающейся сферой. Линія эта будетъ все болѣе и болѣе расширяться, а угловая скорость будутъ безпредѣльно возрастать. Въ частности это будетъ равномѣрно ускоренное вращательное движеніе, разсмотрѣнное въ предыдущихъ параграфахъ.

Что-же касается начала координатъ, то изъ уравненій (6) получимъ

$$\alpha = \beta = \mathrm{const} = 0\,,$$

а изъ уравненія живой силы опредѣлимъ γ

$$\gamma = km^2t^2 + H.$$

Движеніе будетъ прямолинейное по оси ζ'овъ и равномѣрно ускоренное. Соотвѣтствуетъ оно, какъ видимъ изъ выраженія живой силы, допущенію, что поверхность измѣненныхъ массъ твердаго тѣла есть шаръ, и что импульсъ направленъ по оси ζ'овъ ($A = 0$ по положенію).

Въ примѣненіи къ упомянутому въ предыдущемъ параграфѣ случаю, когда

$$2T = a_1(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) + b_1x_1y_1 + b_2x_2y_2 + b_3x_3y_3 + c_1y_1{}^2 + c_2y_2{}^2 + c_3y_3{}^2$$

уравненія (60) принимаютъ весьма простой видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= (b_3 - b_2)\xi_2\xi_3\,, \\ \frac{d\xi_2}{dt_1} &= (b_1 - b_3)\xi_1\xi_3\,, \\ \frac{d\xi_3}{dt_1} &= (b_2 - b_1)\xi_1\xi_2\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

причемъ, какъ и прежде

$$\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = m^2\,;$$

а

$$T_1 = b_1\xi_1{}^2 + b_2\xi_2{}^2 + b_3\xi_3{}^2 = H$$

представляетъ поверхность второго порядка, оси которой совпадаютъ съ осями координатъ. Всѣ предыдущія разсужденія съ значительными упрощеніями примѣнимы, конечно, и въ данномъ случаѣ.

При этомъ ξ_1, ξ_2 и ξ_3 выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ:

$$l\sin\mathrm{am}\lambda t_1,\quad m\cos\mathrm{am}\lambda t_1,\quad \text{и}\quad p\Delta\mathrm{am}\lambda t_1.$$

Движеніе будетъ періодическое по отношенію къ t_1.

Если назовемъ черезъ w періодъ, то промежутокъ времени между двумя повтореніями движенія опредѣлится изъ равенства

$$\frac{\lambda(t+x)^2}{2}=\frac{\lambda t^2}{2}+w,$$

откуда

$$x=-t\pm\sqrt{t^2+\frac{2w}{\lambda}}.$$

Промежутокъ этотъ зависитъ отъ t и съ возрастаніемъ времени безпредѣльно убываетъ (и обратно).

Въ слѣдующей замѣткѣ я покажу, что это движеніе, вообще говоря, можетъ быть воспроизведено катаніемъ нѣкоторой деформирующейся поверхности втораго порядка по нѣкоторой извѣстнымъ образомъ перемѣщающейся въ пространствѣ плоскости.