ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1968

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В. М. Борок, Я. И. Житомирский

Известное определение И. Г. Петровского параболичности систем линейных уравнений в частных производных с коэффициентами, не зависящими от пространственных переменных ([1]), было распространено на системы уравнений с переменными коэффициентами ([2]), и для последних подробно изучен вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши ([2], [3], [4] и др.). В этих работах рассматривались системы

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{2p} \sum_{(i_1 \dots i_k)} A_{i_1 \dots i_k}(x) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)\}$ — искомая вектор-функция, $A_{i_1 \dots i_k}(x)$ — матрица (N строк, N столбцов), элементами которой являются достаточно гладкие функции пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$ * и символ $\sum\limits_{(i_1 \dots i_k)}$ означает суммирование по всевозможным наборам из k чисел $i_1, \dots, i_k$, $1 \leqslant i_r \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant k$. При этом предполагалось, что для характеристических корней $\lambda_1(x, s), \dots$ $\lambda_N(x, s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$ матрицы

$$\sum_{(i_1 \dots i_{2p})} A_{i_1 \dots i_{2p}}(x)(is_{i_1}) \dots (is_{i_{2p}})$$

при всех значениях x, s, $-\infty < x,\ s < \infty$, справедливы оценки

$$Re\,\lambda_j(x, s) \leqslant -\delta |s|^{2p},$$
$$j = 1, \dots, N,\ \delta > 0,\ |s| = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_n^2}. \tag{2}$$

В настоящей работе рассматриваются системы (1), для которых условия «равномерной» параболичности (2) не выполнены и заменены следующими:

$$\begin{gathered} Re\lambda_j(x, s) \leqslant -\delta_1 |s|^{2p} (1 + |x|)^{\alpha}, \\ j = 1, \dots, N,\ \delta_1 > 0,\ \alpha < 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Такие системы естественно назвать параболическими системами, вырождающимися на бесконечности.

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для указанных систем при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{4}$$

Теорема. *Пусть для системы* (1) *справедливы оценки* (3).

* В работах [2], [3] коэффициенты системы (1) могли зависеть также от времени t.

Пусть, кроме того,

1) *элементы матриц* $A_{i_1 \ldots i_{2p}}(x) = \| a^{ij}_{i_1 \ldots i_{2p}}(x) \|$ *и все их частные производные до порядка* $2p+1$ *являются непрерывными функциями* $x\,(-\infty < x_i < \infty,\ i = 1, \ldots, n)$, *причем*

$$|D^{(m)} a^{ij}_{i_1 \ldots i_{rp}}(x)| \leqslant A\,(1 + |x|)^{\alpha},\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2p+1, \tag{5}$$

2) *элементы матриц* $A_{i_1 \ldots i_k}(x) = \| a^{ij}_{i_1 \ldots i_k}(x) \|$ $(k = 0,\ 1, \ldots, 2p-1)$ *непрерывны вместе со своими производными первого порядка по* $x_1, \ldots, x_n$, *причем*

$$|D^{(m)} a^{ij}_{i_1 \ldots i_k}(x)| \leqslant A_k\,(1 + |x|)^{p_k},\ p_k < \frac{2p-k}{2p-1} + \frac{(k-1)\,\alpha}{2p-1} = q_k \tag{6}$$

$m = 0{,}1$.

Тогда в некоторой полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *решение* $u\,(x, t)$ *задачи Коши* (1) — (4) *существует и единственно в классе функций* $f\,(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x)| \leqslant B_1 \exp\{B_2\,|x|^{\frac{2p-\alpha}{2p-1}}\}. \tag{7}$$

Доказательство. Покажем, что систему (1) можно свести к системе того же вида, но являющейся равномерно параболической, то есть удовлетворяющей условиям (2).

Положим

$$x_i(y) = x_i(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} y_i\,|y|^{\frac{\alpha}{2p-\alpha}} & \text{при } |y| \geqslant 1 \\ \psi_i(y_1, \ldots, y_n) & \text{при } |y| < 1 \end{cases} \tag{8}$$

При этом функции $\psi_i(y_1, \ldots, y_n)$ при $|y| < 1$ должны иметь $2p+2$ непрерывные производные, при $|y| = 1$ эти функции и их производные до порядка $2p+2$ должны совпадать с соответствующими производными функций $y_i |y|^{\frac{\alpha}{2p-\alpha}}$ и, наконец, якобиан $\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$ при $|y| < 1$.

Эти условия обеспечивают существование обратных $2p+2$ раза непрерывно дифференцируемых функций

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Функции $\psi_i(y_1, \ldots, y_n)$ могут быть найдены, например, в виде

$$\psi_i = y_i \cdot \sum_{k=0}^{2p+2} C_k\,|y|^{2k}.$$

Постоянные C_k определяются из условий

$$\left.\frac{\partial^r \psi_i(y_1 \ldots, y_n)}{\partial y_{\alpha_1} \ldots \partial y_{\alpha_r}}\right|_{|y|=1} = \left.\frac{\partial^r \left(y_i\,|y|^{\frac{\alpha}{2p-\alpha}}\right)}{\partial y_{\alpha_1} \ldots \partial y_{\alpha_r}}\right|_{|y|=1}$$

$$1 \leqslant \alpha_k \leqslant n;\ k = 1, \ldots r;\ r = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2p+2,$$

которые сводятся к системе линейных уравнений треугольного вида с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{2p+2} C_k = 1 \\ 2^l \sum_{k=l}^{2p+2} \frac{k!}{(k-l)!} C_k = \frac{\alpha}{2p-\alpha}\left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 2\right) \ldots \left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 2l + 2\right) \\ l = 1, \ldots, 2p+2. \end{gathered} \tag{10}$$

Решение этой системы имеет вид

$$C_k = \frac{(-1)^k \gamma(\alpha)}{2^{2p+2} k!\,(2p+2-k)!\left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 2k\right)}, \tag{11}$$

где

$$\gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{2p-\alpha}\left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 2\right) \ldots \left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 4p - 4\right).$$

Легко показать, что

$$\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \left(\sum_{k=0}^{2p+2} C_k |y|^{2k}\right)^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{2p+2} (1+2k) C_k |y|^{2k}.$$

Функция $\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$ сохраняет знак при $|y| \leqslant 1$.

В самом деле, пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2p+2} C_k z^k.$$

Тогда

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{2p+2} k(k-1) \ldots (k-m+1) C_k z^{k-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2p+2,$$

$$f^{(m)}(0) = m!\, C_m$$

и из (11) вытекает, что

$$\operatorname{sgn}[f^{(m)}(0)] = (-1)^m.$$

Кроме того, из (10) имеем:

$$f^{(m)}(1) = \sum_{k=m}^{2p+2} \frac{k!}{(k-m)!} C_k = \frac{1}{2^m} \frac{\alpha}{2p-\alpha}\left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 2\right) \ldots \left(\frac{\alpha}{2p-\alpha} - 2m + 2\right).$$

Поэтому

$$\operatorname{sgn}[f^{(m)}(1)] = (-1)^m.$$

Поскольку

$$f^{(2p+2)}(z) = (2p+2)!\, C_{2p+2} > 0,$$

то функция $f^{(2p+1)}(z)$ монотонна и, будучи отрицательной на концах отрезка $0 \leqslant z \leqslant 1$, остается отрицательной на всем этом отрезке. Повторяя те же рассуждения, получим, что при $0 \leqslant z \leqslant 1$

$$\operatorname{sgn} f^{(m)}(z) = (-1)^m.$$

Следовательно, $f(z) > 0$ при $0 \leqslant z \leqslant 1$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{2p+2} C_k |y|^{2k} > 0.$$

Аналогично, рассмотрев на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2p+2} C_k z^k + 2z \sum_{k=1}^{2p+2} k C_k z^{k-1}$$

и убедившись, что

$$\operatorname{sgn}[f^{(m)}(z)] = (-1)^m, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{2p+2} (2k+1) C_k |y|^{2k} > 0, \quad |y| \leqslant 1. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} > 0 \text{ при } |y| \leqslant 1.$$

Из (8) ясно, что при $|y| \geqslant 1$, $|x| = |y|^{\frac{2p}{2p-\alpha}} \geqslant 1$ и обратные функции $y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ определяются по формулам

$$y_i = x_i |x|^{-\frac{\alpha}{2p}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

При $|y| < 1$ так же и $|x| < 1$, поскольку

$$|x| = \sum_{k=0}^{2p+2} C_k |y|^{2k+1},$$

а из (12) следует, что функция от $|y|$, стоящая справа, возрастает на $[0,1]$ и достигает максимума, равного 1, при $|y| = 1$.

Используя теперь формулы (8), положим

$$v(y, t) = u(x(y), t).$$

Тогда вектор-функция $v(y, t)$ также удовлетворяет системе уравнений вида (1)

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{2p} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} B_{i_1 \ldots i_k}(y) \frac{\partial^k v(y, t)}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_k}}. \tag{14}$$

Покажем, что система (14) является равномерно параболической. Рассмотрим матрицу

$$B(y, s) = \sum_{(i_1 \ldots i_{2p})} B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y)(is_{i_1}) \ldots (is_{i_{2p}}) \tag{15}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^{2p} u(x_1 t)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{2p}}} = \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{2p}=1}^{n} \frac{\partial^{2p} v(y, t)}{\partial y_{j_1} \ldots \partial y_{j_{2p}}} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \ldots \frac{\partial y_{j_{2p}}}{\partial x_{i_{2p}}} + \ldots,$$

где точками обозначены слагаемые, которые содержат производные вектор-функции $v(y, t)$ порядков, не превосходящих $2p-1$, матрица $B_{i_1 \ldots i_{2p}}$ имеет вид

$$B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y) = \sum_{(j_1 \ldots j_{2p})} A_{j_1 \ldots j_{2p}}(x(y)) \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \ldots \frac{\partial y_{i_{2p}}}{\partial x_{j_{2p}}}. \tag{16}$$

Поэтому матрицу (15) можно представить в виде

$$B(y, s) = \sum_{(i_1 \ldots i_{2p})} (is_{i_1}) \ldots (is_{i_{2p}}) \cdot \sum_{(j_1 \ldots j_{2p})} A_{j_1 \ldots j_{2p}}(x(y)) \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \ldots \frac{\partial y_{i_{2p}}}{\partial x_{j_{2p}}} =$$

$$= \sum_{(j_r \ldots j_{2p})} A_{j_1 \ldots j_{2p}}(x(y)) \sum_{i_1=1}^{n} is_{i_1} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \ldots \sum_{i_{2p}=1}^{n} is_{i_{2p}} \frac{\partial y_{i_{2p}}}{\partial x_{j_{2p}}}.$$

Обозначив

$$\sigma_{j_2} = \sum_{k=1}^{n} s_k \frac{\partial y_k}{\partial x_{j_r}}, \quad (1 \leqslant j_r \leqslant n, \ 1 \leqslant r \leqslant 2p),$$

получим

$$B(y, s) = \sum_{(j_1 \ldots j_{2p})} A_{j_1 \ldots j_{2p}}(x(y))(i\sigma_{j_1}) \ldots (i\sigma_{j_{2p}}).$$

В силу оценок (3), характеристические корни $\mu_1(y, s), \ldots, \mu_N(y, s)$ матрицы $B(y, s)$ удовлетворяют неравенствам:

$$Re\mu_j(y, s) \leqslant -\delta_1 |\sigma|^{2p}(1 + |x(y)|)^\alpha,$$
$$j = 1, \ldots, N, \quad -\infty < y, \sigma < \infty, \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \tag{17}$$

Оценим теперь $|\sigma|^{2p}$. Пусть сначала $|y| < 1$ (или, что то же, $|x| < 1$). Тогда

$$|\sigma| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(s, \xi_j)^2},$$

где

$$\xi_j = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_j}\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

(s, ξ_j) — скалярное произведение векторов s и ξ_j. Поэтому при $|s| \neq 0$

$$|\sigma| = |s| \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{s}{|s|}, \xi_j\right)^2}. \tag{18}$$

Заметим, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{s}{|s|}, \xi_j\right)^2 \neq 0$ при любом векторе s ($|s| \neq 0$). В противном случае, при некотором s, $\left(\frac{s}{|s|}, \xi_j\right) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, что невозможно, так как это означало бы линейную зависимость в n-мерном пространстве векторов

$$\xi_j = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_j}\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Однако якобиан

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

поскольку при $|y| \leqslant 1$ производные $\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ непрерывны и потому якобиан $\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$ ограничен. Выражение $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{s}{|s|}, \xi_j\right)^2$ представляет собой непрерывную функцию векторных аргументов $\frac{s}{|s|}$ и y при $|y| \leqslant 1$.

Поэтому существует постоянная $K > 0$ такая, что при любых значениях s и y, $|y| \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{s}{|s|}, \xi_j\right)^2} \geqslant K.$$

Отсюда и из (18) получаем $|\sigma| \geqslant K|s|$. Из этого неравенства, в силу (17), при $|y| \leqslant 1$ ($|x| \leqslant 1$) и при всех $j = 1, \ldots, N$ имеем
$Re\mu_j(y, s) \leqslant -\delta_1 |s|^{2p} K^{2p}(1 + |x(y)|)^\alpha \leqslant -\delta_2 |s|^{2p}$, где $\delta_2 = \delta_1 K^{2p} 2^\alpha > 0$.

Пусть теперь $|y| > 1$. Тогда $|x| = |y|^{\frac{2p}{2p-\alpha}} > 1$.

В этом случае, в силу формул (13), получаем

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^{n} s_k \left(-\frac{\alpha}{2p}\right) |x|^{-\frac{\alpha}{2p}-2} x_k x_j + s_j |x|^{-\frac{\alpha}{2p}} = |x|^{-\frac{\alpha}{2p}} \left\{\left(-\frac{\alpha}{2p}\right)\left(s, \frac{x}{|x|}\right)\frac{x_j}{|x|} + s_j\right\}$$

и, следовательно,

$$|\sigma| = |x|^{-\frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4p^2}\left(s, \frac{x}{|x|}\right)^2 + |s|^2 - \frac{\alpha}{p}\left(s, \frac{x}{|x|}\right)^2} \geqslant |x|^{-\frac{\alpha}{2p}} \cdot |s|.$$

Отсюда, используя (17), при $|y| > 1$ получаем

$$Re\mu_j(y, s) \leqslant -\delta_1 (1 + |x(y)|)^\alpha |s|^{2p} |x(y)|^{-\alpha}.$$

Но при $|x| > 1$ $\left(\frac{1+|x|}{|x|}\right)^\alpha \geqslant 2^\alpha$, откуда $Re\mu_j(y, s) \leqslant -\delta_1 2^\alpha |s|^{2p}$. Окончательно, при всех значениях $-\infty < y, s < \infty$ имеем

$$Re\mu_j(y, s) \leqslant -\delta_3 |s|^{2p},$$

$j = 1, \ldots, N$; $\delta_3 > 0$, то есть система (14) равномерно параболична.

Выясним теперь поведение коэффициентов системы (14) при $|y| \to \infty$. Покажем, что элементы матриц $B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y)$ и их производные до порядка $2p+1$ ограничены, а элементы матриц $B_{i_1 \ldots i_k}(y) = \| b^{ij}_{i_1 \ldots i_k}(y) \|$ $(k = 0, 1, \ldots, 2p-1)$ непрерывны вместе с производными первого порядка и справедливы оценки:

$$|D^{(m)} b^{ij}_{i_1 \ldots i_k}(y)| \leqslant C (1 + |y|)^{\alpha_k},$$

$$m = 0, 1; \quad k = 0, 1, \ldots, 2p-1; \quad \alpha_k < \frac{2p-k}{2p-1}. \tag{19}$$

Рассмотрим сначала $B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y)$. Поскольку при $|y| \leqslant 1$ функции (8) и (9) имеют $2p+2$ непрерывные производные и элементы матриц $A_{i_1 \ldots i_{2p}}(x)$ $2p+1$ раз непрерывно дифференцируемы, то из (16) следует, что элементы матриц $B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y)$ и их производные до порядка $2p+1$ непрерывны и потому ограничены при $|y| \leqslant 1$. При $|y| > 1$ $(|x| > 1)$, как видно из (8) и (13), функции $y_i(x)$ и $x_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, бесконечно-дифференцируемы и потому элементы матриц $B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y)$ обладают непрерывными производными до $2p+1$ порядка. При этом

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = -\frac{\alpha}{2p} |x|^{-\frac{\alpha}{2p}-2} x_j x_k + |x|^{-\frac{\alpha}{2p}} \delta_{kj} = |x|^{-\frac{\alpha}{2p}} \left(-\frac{\alpha}{2p} \frac{x_j}{|x|} \frac{x_k}{|x|} + \delta_{kj}\right),$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

откуда

$$\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right| \leqslant C_1 |x|^{-\frac{\alpha}{2p}}, \quad k, j = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Учитывая эти оценки и оценки (5) при $m = 0$, из (16) получаем, что элементы матриц $B_{i_1 \ldots i_{2p}}(y)$ ограничены при всех значениях y, $-\infty < y < \infty$. Производные этих функций до порядка $2p+1$ также ограничены, что вытекает из оценок (5), из ограниченности при $|y| > 1$ производных любого порядка функций $x_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, и в силу того, что производные любого порядка функций $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}(x)$, имеющих степенной характер при $|x|>1$ [см. (13)], во всяком случае удовлетворяют оценкам вида (20).

Перейдем теперь к оценке элементов матриц $B_{i_1 \ldots i_k}(y)$ при $k \leqslant 2p-1$. Обозначим

$$D_x^{i_1 \ldots i_k} u(x, t)=\frac{d^k u(x,t)}{dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}}, \quad 1 \leqslant i_r \leqslant n, \quad 1 \leqslant r \leqslant k.$$

Очевидно,

$$D_x^{i_1 \ldots i_k} u(x, t)=\sum_{r=1}^{k} \sum_{(j_1 \ldots j_r)} B_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_r}(y) D_y^{j_1 \ldots j_r} v(y, t),$$

где $B_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_r}(y)$ — некоторые функции y.

Покажем, что при некоторых постоянных M_{rk} и любых $j_1, \ldots, j_r$, $i_1, \ldots, i_k$; $1 \leqslant j_q, i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant k$, $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant k$; $-\infty<y<\infty$ справедливы оценки

$$|D^{(q)} B_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_r}(y)| \leqslant M_{rk}(1+|y|)^{r-q-\frac{2pk}{2p-\alpha}} \quad (q=0,1). \tag{21}$$

Действительно, при $k=1$, $q=0$ имеем

$$D_x^{i_1} u(x, t)=\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial v}{\partial y_{j_1}},$$

то есть

$$B_{i_1}^{j_1}(y)=\frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}}[x(y)]$$

и при $|y| \geqslant 1$ имеем

$$B_{i_1}^{j_1}(y)=-\frac{\alpha}{2p} x_{i_1} x_{j_1}|x|^{-\frac{\alpha}{2p}-2}+|x|^{-\frac{\alpha}{2p}} \delta_{i_1 j_1}=|x|^{-\frac{\alpha}{2p}}\left(\delta_{i_1 j_1}-\frac{\alpha}{2p} \frac{x_{i_1}}{|x|} \frac{x_{j_1}}{|x|}\right) \ll$$
$$\ll A_1|x(y)|^{-\frac{\alpha}{2p}}=A_1|y|^{1-\frac{2p}{2p-\alpha}},$$

что подтверждает справедливость (21) в этом случае.

При $|y| \leqslant 1$ справедливость (21) следует из непрерывности $B_{i_1}^{j_1}(y)$. Пусть теперь (21) справедливо при $k \leqslant m$, $q=0$. Рассмотрим $B_{i_1 \ldots i_{m+1}}^{j_1 \ldots j_r}(y)$, $1 \leqslant r \leqslant m+1$. Очевидно,

$$D_x^{i_1 \ldots i_{m+1}} u(x, t)=D_x^{i_{m+1}}\{D_x^{i_1 \ldots i_m} u(x, t)\}=$$
$$=D_x^{i_{m+1}}\left\{\sum_{r=1}^{m} \sum_{(j_1 \ldots j_r)} B_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_r}(y) D_y^{j_1 \ldots j_r} v(y, t)\right\}=$$
$$=\sum_{j_{r+1}=1}^{n} \frac{d y_{j_{r+1}}}{d x_{i_{m+1}}}\left\{\sum_{r=1}^{m} \sum_{(j_1 \ldots j_r)} D_y^{j_{r+1}} B_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_r}(y) D_y^{j_1 \ldots j_r} v(y, t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=1}^{m} \sum_{(j_1 \ldots j_r)} B_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_r}(y) D_y^{j_1 \ldots j_r j_{r+1}} v(y, t)\right\}=$$
$$=\sum_{j_{r+1}=1}^{m} \frac{\partial y_{j_{r+1}}}{\partial x_{i_{m+1}}}\left\{\sum_{j_1=1}^{n} D_y^{j_{r+1}} B_{i_1 \ldots i_m}^{j_1}(y) D_y^{j_1} v(y, t)+\right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{(j_1\ldots j_r)}\left[D_y^{j_{r+1}}B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}(y)+B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_{r-1}}(y)\right]D_y^{j_1\ldots j_r}v(y,t)+$$

$$+\sum_{(j_1\ldots j_m)}B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_m}(y)\,D_y^{j_1\ldots j_m\,j_{m+1}}v(y,t)\Big\}.$$

Следовательно,

$$B_{i_1\ldots i_{m+1}}^{j_1}(y)=\sum_{j_{r+1}=1}^{n}D_y^{j_{r+1}}B_{i_1\ldots i_{m+1}}^{j_1}(y)\frac{\partial y_{j_{r+1}}}{\partial x_{i_{m+1}}},$$

$$B_{i_1\ldots i_{m+1}}^{j_1\ldots j_r}(y)=\sum_{j_{r+1}=1}^{n}\frac{\partial y_{j_{r+1}}}{\partial x_{i_{m+1}}}\left[D_y^{j_{r+1}}B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}(y)+B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_{r-1}}(y)\right],\qquad(22)$$

$$2\leqslant r\leqslant m$$

$$B_{i_1\ldots i_{m+1}}^{j_1\ldots j_{m+1}}(y)=\sum_{j_{r+1}=1}^{n}\frac{\partial y_{j_{r+1}}}{\partial x_{i_{m+1}}}B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_m}(y).$$

При $|y|\leqslant 1$ функции $B_{i_1\ldots i_{m+1}}^{j_1\ldots j_r}(y),\quad 1\leqslant r\leqslant m+1$ ограничены и потому оценки (21) для них справедливы.

При $|y|>1$ каждая из рассматриваемых функций $B_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_r}(y)$, $1\leqslant r\leqslant k\leqslant m$ имеет вид

$$B_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_r}(y)=\sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_n,\beta)}C_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_r}y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}|y|^{\beta},$$

где $C_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_r}$ — некоторые постоянные, а $\beta+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\leqslant r-\frac{2pk}{2p-\alpha}$, так как, по предположению, при $k\leqslant m$ оценки (21) справедливы. Поэтому $D^{(p)}B_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_r}(y)=\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta)}K_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_r}y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}|y|^{\beta}$, где $K_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}$ — постоянные и $\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta\leqslant r-1-\frac{2pk}{2p-\alpha}$. Следовательно, при $|y|<1,\quad 1\leqslant r\leqslant m$, справедливы оценки:

$$\left|D_y^{j_{r+1}}B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}(y)\right|\leqslant A_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_{r+1}}\cdot|y|^{r-1-\frac{2pm}{2p-\alpha}}$$
$$\left|B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}(y)\right|\leqslant B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}\cdot|y|^{r-\frac{2pm}{2p-\alpha}}\qquad(23)$$

с постоянными $A_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}$, $B_{i_1\ldots i_m}^{j_1\ldots j_r}$.

Кроме того, при $|y|>1$, в силу (20), имеем

$$\left|\frac{\partial y_{j_{r+1}}}{\partial x_{i_{m+1}}}\right|\leqslant C_1|x|^{-\frac{\alpha}{2p}}=C_1|y|^{-\frac{\alpha}{2p-\alpha}}.$$

Отсюда и из (23), в силу (22), вытекает справедливость (21) и при $k=m+1\quad(q=0)$.

Справедливость (21) при $q=1$ может быть установлена аналогично первой из оценок (23). Тем самым оценки (21) полностью доказаны.

Пользуясь выражениями для $D_x^{i_1 \cdots i_k} u(x, t)$, запишем систему (14) в виде

$$\frac{dv(y,t)}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2p} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} A_{i_1 \ldots i_k}(x(y)) \left\{ \sum_{r=1}^{k} \sum_{(j_1 \ldots j_r)} B_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_r}(y) D_y^{j_1 \ldots j_r} v(y,t) \right\} +$$
$$+ A(x(y)) v(y,t)$$

или

$$\frac{dv(y,t)}{dt} =$$

$$= \sum_{r=1}^{2p} \sum_{(j_1 \ldots j_r)} \left\{ \sum_{k=r}^{2p} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} A_{i_1 \ldots i_k}(x(y)) B_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_r}(y) \right\} D_y^{j_1 \ldots j_r} v(y,t) +$$
$$+ A(x(y)) v(y,t).$$

Сравнивая с (14), получаем

$$B_{j_1 \ldots j_r}(y) = \sum_{k=r}^{2p} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} A_{i_1 \ldots i_k}(x(y)) B_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_r}(y).$$

Теперь из (5), (6) и (13) имеем:

$$|B_{j_1 \ldots j_2}(y)| \leqslant C_r \sum_{k=r}^{2p} (1 + |y|)^{r - \frac{2pk}{2p-\alpha}} [1 + |x(y)|]^{p_k},$$

где C_r — постоянные, $r = 1, \ldots, 2p$.

Поскольку $|x(y)| = |y|^{\frac{2p}{2p-\alpha}}$ при $|y| > 1$, то

$$|B_{j_1 \ldots j_r}(y)| \leqslant C \sum_{k=r}^{2p} (1 + |y|)^{r - \frac{2pk}{2p-\alpha} + \frac{2p}{2p-\alpha} \cdot p_k} =$$

$$= C(1 + |y|)^{r - \frac{2pr}{2p-\alpha}} \cdot \sum_{k=r}^{2p} (1 + |y|)^{\frac{2p}{2p-\alpha} q_k + \frac{2p}{2p-\alpha}(p_k - q_k)} \leqslant$$

$$\leqslant C(1 + |y|)^{r + \frac{2pq_r}{2p-\alpha} - \frac{2pr}{2p-\alpha}} \cdot \sum_{k-r}^{2p} (1 + |y|)^{\frac{2p}{2p-\alpha}(p_k - q_k)}.$$

Так как $r - \frac{2pr}{2p-\alpha} + \frac{2p}{2p-\alpha} q_r = \frac{2p-r}{2p-1}$, а $p_k - q_k < 0$, $r \leqslant k \leqslant 2p$, то $|B_{j_1 \ldots j_r}(y)| \leqslant C_1 |y|^{\alpha_r}$, где $\alpha_r < \frac{2p-r}{2p-1}$, $r = 1, \ldots, 2p$, C_1 — постоянная.

Аналогично получаем, что и производные $D^{(1)} B_{j_1 \ldots j_r}(y)$, $r = 1, \ldots, 2p - 1$, удовлетворяют такой же оценке. Итак, оценки (19) установлены.

Таким образом, система (14) является равномерно параболической, ее коэффициенты при производных старшего порядка $2p$ непрерывны и ограничены во всем пространстве со своими производными до порядка $2p + 1$, а коэффициенты при производных порядка k, $0 \leqslant k \leqslant 2p - 1$, и их производные первого порядка удовлетворяют оценкам (19).

В работе [4] показано, что для систем (14), удовлетворяющих этим условиям, решение $v(y, t)$ задачи Коши при начальном условии $v(y, 0) =$

$= v_0(y)$ существует и единственно в полосе $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$ в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$|f(y)| \leqslant H \exp\{h \cdot |y|^{\frac{2p}{2p-1}}\}, \ H, \ h > 0.$$

Тогда исходная задача Коши (1) — (4) имеет решение и притом единственное в классе функций, удовлетворяющих оценке (7), что и заканчивает доказательство теоремы.

Замечание 1. Как известно [5], существенное увеличение (на степенной порядок) роста коэффициентов системы (14) может привести к неединственности решения задачи Коши даже в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Отсюда вытекает, что увеличение степенного порядка роста коэффициентов исходной системы (1) может привести к неединственности решения задачи Коши для этой системы в классе функций $f(x)$, интегрируемых в квадрате с весом, равным якобиану перехода от переменных $y_1, \ldots, y_n$ к переменным $x_1, \ldots, x_n$, $\left[\text{который при } |x| > 1 \text{ имеет вид } \left(1 - \frac{\alpha}{2p}\right) |x|^{-\frac{\alpha n}{2p}}\right]$ и потому, грубо говоря, даже в классе убывающих функций.

Отметим, что при достаточно больших значениях $|\alpha|$, $(|\alpha| > 2p - 2)$ показатели p_k в оценках (6) отрицательны при $2 \leqslant k \leqslant 2p - 1$ $\left(p_1 < 1,\right.$ $\left. p_0 < \frac{2p-\alpha}{2p-1}\right)$. Это означает, что если при $|x| \to \infty$ параболическая система (1) вырождается достаточно быстро (то есть коэффициенты при старших производных достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$), то, желая сохранить единственность решения задачи Коши в классах растущих функций, следует потребовать, чтобы коэффициенты при всех производных, кроме первых, также стремились к нулю, то есть, чтобы система «вырождалась на бесконечности» в систему первого порядка. При этом класс единственности (и существования) с ростом $|\alpha|$, как видно из (7), расширяется.

Замечание 2. В недавней работе [6] для систем (14) при тех же предположениях на коэффициенты, что и в работе [4] установлена единственность решения задачи Коши в классе функций $f(y)$, удовлетворяющих оценке

$$|f(y)| \leqslant M \cdot \exp\{|y| h(|y|)\},$$

где $h(y) > 0$, монотонно возрастает и $\displaystyle\int^{\infty} \frac{dy}{[h(y)]^{\frac{1}{2p-1}}} = \infty.$

Используя этот результат, получаем единственность решения задачи Коши (1) — (4) в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leqslant M \cdot \exp\{|x|^{1-\frac{\alpha}{2p}} h(|x|^{1-\frac{\alpha}{2p}})\},$$

в тех же предположениях относительно $h(y)$.

Замечание 3. Аналогично доказанной теореме можно было бы получить и более общий результат, когда коэффициенты при производных старшего порядка могут убывать (или расти) и не степенным образом. Для лучшей обозримости результата рассмотрим случай уравнения второго порядка при $n = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x) u. \tag{24}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (24) дифференцируемы, $a(x) > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} = \infty, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} = \infty$$

и, кроме того, при достаточно больших значениях $|x|$, $|x| > x_0$ выполнены оценки

$$|a'(x)| \leqslant C_0 \sqrt{a(x)} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_1,$$

$$|D^{(m)} b(x)| \leqslant C_2 \sqrt{a(x)} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_3,$$

$$|D^{(m)} c(x)| \leqslant C_4 \left(\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} \right)^2 + C_5,$$

$$m = 0,1; \; C_i > 0, \; 0 \leqslant i \leqslant 5.$$

Тогда решение задачи Коши для уравнения (24) при начальном условии $u(x, 0) = u_0(x)$ существует и единственно в классе функций $f(x)$

$$|f(x)| \leqslant K_1 \exp \left\{ K_2 \left(\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} \right)^2 \right\}.$$

Так, например, если при достаточно больших значениях $|x|$

$$a(x) = (x \ln |x|)^{-2}, \quad |D^{(m)} b(x)| \leqslant C_2 |x| + C_3,$$
$$|D^{(m)} c(x)| \leqslant C_4 x^4 \ln^2 |x| + C_5, \quad m = 0,1,$$

то существование и единственность решения задачи Коши имеет место в классе функций $f(x)$,

$$|f(x)| \leqslant K_1 \exp \{K_2 x^4 \ln^2 |x|\}.$$

Как и в замечании 2, единственность решения задачи Коши для уравнения (24) имеет место в классе функций $f(x)$, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leqslant M_1 \exp \left\{ M_2 \left| \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} \right| \cdot h\left(\left| \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} \right| \right) \right\},$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет условиям замечания 2 при $p = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. «Бюлл. МГУ, сек. А», 1, вып. 7, 1938.

2. С. З. Брук. О задаче Коши для систем дифференциальных уравнений параболического типа. «Изв. АН СССР, серия матем.», 10, № 2 (1946).

3. С. Д. Эйдельман. О фундаментальных решениях параболических систем. «Матем. сб.», 38 (80) : 1, 1956.

4. Я. И. Житомирский. Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами. «Изв. высш. учебн. завед.». Математика, № 1 (8), 1959.

5. Я. И. Житомирский. Диссертация, МГУ, 1959.

6. В. С. Рыжий. О классах единственности решения задачи Коши для параболических систем с растущими коэффициентами. «Зап. мех.-матем. ф-та и Харьковского матем. об-ва, серия 4», 29 (1963).