ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП ПОДСТАНОВКАМИ

Э. М. Жмудь

В настоящей статье дается простое и, по-видимому, новое доказательство следующей, впервые установленной А. Я. Повзнером [1], теоремы:

Минимальная величина степени изоморфного представления заданной конечной абелевой группы подстановками равна сумме инвариантов этой группы.

Пусть G — абелева группа порядка g, Γ — изоморфное представление группы G подстановками n символов. Обозначив через I_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ системы интранзитивности представления Γ и через n_i число символов, входящих в систему I_i, будем иметь

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i. \tag{1}$$

Представление Γ распадается на транзитивные представления Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k, где Γ_i перемещает лишь символы системы I_i. Пусть N_i — ядро гомоморфизма представления Γ_i. Так как представление Γ является, по предположению, изоморфным, то ядра N_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ взаимно просты

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_i = 1. \tag{2}$$

Далее, так как Γ_i есть изоморфное транзитивное представление фактор-группы G/N_i подстановками степени n_i, то n_i равно индексу подгруппы N_i относительно G *

$$n_i = (G : N_i).$$

Соотношение (1) поэтому принимает следующий вид:

$$n = \sum_{i=1}^{k} (G : N_i) \tag{3}$$

Пусть теперь S — множество всех подгрупп группы G, φ — взаимно однозначное отображение множества S на себя, H^{φ} — образ подгруппы H при отображении φ. Отображение φ называется **структурным антиавтоморфизмом** множества S, если из $H_1, H_2 \in S$, $H_1 \subset H_2$ вытекает $H_1^{\varphi} \supset H_2^{\varphi}$.

* Степень транзитивного представления абелевой группы равна, как известно, порядку последней.

Если группа G — абелева, то существуют*, как известно, структурные антиавтоморфизмы φ, обладающие тем свойством, что для каждой подгруппы H

$$H^{\varphi} \cong G/H.$$

В частности, порядок $[H^{\varphi}]$ подгруппы H равен индексу подгруппы H относительно группы G

$$[H^{\varphi}] = (G : H). \tag{4}$$

Положим

$$N_i^{\varphi} = H_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{5}$$

Применяя к обеим частям соотношения (2) антиавтоморфизм φ и замечая, что $(\prod_{i=1}^{k} N_i)^{\varphi} = N_1^{\varphi} N_2^{\varphi} \ldots N_k^{\varphi}$, $1^{\varphi} = G$, в силу (5) получаем

$$G = H_1 H_2 \ldots H_k. \tag{6}$$

Кроме того, в силу (4) и (5)

$$(G : N_i) = [H_i].$$

Отсюда и из (3) вытекает

$$n = \sum_{i=1}^{k} [H_i]. \tag{7}$$

Теорема А. Я. Повзнера будет доказана, если будет установлена справедливость следующего предложения:

Лемма. *Если конечная абелева группа G является наименьшим общим кратным подгрупп $H_1, \ldots, H_k$, то сумма порядков этих подгрупп не может быть меньше суммы инвариантов группы G***.

Доказательство. Пусть T — некоторая система подгрупп (не обязательно различных) группы G и C_T — их общее наименьшее кратное. Обозначим через $\sigma(T)$ и $\pi(T)$ соответственно сумму и произведение порядков подгрупп системы T, а через $\mathrm{I}(H)$ — сумму инвариантов подгруппы H. Лемма утверждает: если $G = C_T$, то

$$\sigma(T) \geqslant \mathrm{I}(G). \tag{8}$$

Заметим теперь, что достаточно доказать неравенство (8) для того случая, когда все подгруппы, входящие в T, различны и отличны от единицы. Действительно, для системы T' всех различных отличных от единицы подгрупп из T имеет место $C_T = C_{T'}$, $\sigma(T) \geqslant \sigma(T')$.

Итак, допустим, что система T удовлетворяет только что отмеченному требованию. Разложим каждую подгруппу H, входящую в T, в прямое произведение примарных циклических подгрупп. Систему прямых множителей указанного разложения обозначим через P_H. Объединяя все полученные таким образом системы P_H, получим систему T^* примарных циклических подгрупп (некоторые из которых могут повторяться), для которой, очевидно, имеет место

$$C_{T^*} = C_T. \tag{9}$$

---

* Существование таких антиавтоморфизмов вытекает из наличия связей Галуа между подгруппами абелевой группы G и подгруппами ее группы характеров [2].

** Из этой леммы вытекает лишь, что степень изоморфного представления абелевой группы подстановками не может быть меньше суммы её инвариантов. Однако, легко построить пример изоморфного представления, степень которого равна сумме инвариантов.

Заметим теперь, что так как произведение нескольких целых чисел больших единицы не может быть меньше их суммы, то для $H \in T$ имеет место

$$[H] = \pi(P_H) \geqslant \sigma(P_H).$$

Поэтому

$$\sigma(T) = \sum_{H \in T} [H] \geqslant \sum_{H \in T} \sigma(P_H) = \sigma(T^*).$$

Таким образом,

$$\sigma(T) \geqslant \sigma(T^*). \tag{10}$$

Пусть p — простой делитель порядка g группы $G = C_T$, G_p — силовская p-подгруппа группы G, T_p^* — множество всех p-подгрупп, входящих в систему T^* (некоторые из них могут повторяться). Очевидно

$$G_p = C_{T_p^*}. \tag{11}$$

Кроме того,

$$T^* = \bigcup_{p \mid g} T_p^*,$$

откуда

$$\sigma(T^*) = \sum_{p \mid g} \sigma(T_p^*).$$

Так как, с другой стороны,

$$\mathrm{I}(G) = \sum_{p \mid g} \mathrm{I}(G_p),$$

то в силу (10) для доказательства леммы достаточно показать, что из (11) вытекает

$$\sigma(T_p^*) \geqslant \mathrm{I}(G_p).$$

Таким образом, остается установить справедливость леммы для того случая, когда $G = C_T$ является абелевой p-группой, а все подгруппы системы T—циклические. Если $g = p$, утверждение леммы тривиально. Допустим, что ее справедливость установлена для всех абелевых p-групп порядков меньших $g = p^{\nu}$. Если p^{λ}—наибольший инвариант группы G, то по крайней мере одна из подгрупп системы T имеет порядок p^{λ}, так как, в противном случае, в силу соотношения $G = C_T$ порядки всех элементов группы G были бы меньше p^{λ}. Пусть, например, $[H] = p^{\lambda}$, $H \in T$. Обозначим через T' систему, получающуюся из T путем выбрасывания подгруппы H (так, что число повторений подгруппы H в T' на единицу меньше числа ее повторений в T). В силу $G = C_T$ имеем:

$$G = HG', \tag{12}$$

где

$$G' = C_{T'}. \tag{13}$$

С другой стороны, так как H является максимальной циклической подгруппой группы G, то существует, как известно, такая подгруппа G'', что

$$G = H \times G''. \tag{14}$$

Из (12) и (14) вытекает

$$G/H \cong G'', \quad G/H \cong G'/D,$$

где

$$D = H \cap G'.$$

Следовательно,

$$G'/D \cong G''.$$

Поэтому существует гомоморфное отображение θ подгруппы G' на подгруппу G''. Система T' переводится гомоморфизмом θ в некоторую систему T'' подгрупп группы G''. Пусть $H' \in T'$ и H'' — образ подгруппы H' при гомоморфизме θ. Так как

$$[H''] \leqslant [H'],$$

то

$$\sigma(T'') \leqslant \sigma(T'). \tag{15}$$

Далее, замечая, что подгруппа $C_{T'}$ отображается гомоморфизмом θ на $C_{T''}$, из (13) получаем

$$C_{T''} = G''. \tag{16}$$

Так как $[G''] = \frac{g}{p^\lambda} < g$, то в силу (16) и индуктивного предположения

$$\sigma(T'') \geqslant \mathrm{I}(G''). \tag{17}$$

С другой стороны, из (14) следует

$$\mathrm{I}(G'') = \mathrm{I}(G) - p^\lambda. \tag{18}$$

Наконец, замечая, что

$$\sigma(T) = [H] + \sigma(T') = p^\lambda + \sigma(T'),$$

с помощью (15), (17) и (18) окончательно получаем

$$\sigma(T) \geqslant \mathrm{I}(G).$$

Тем самым доказательство леммы завершено. Вместе с тем доказана и теорема, сформулированная в начале статьи.

Отметим, в заключение, что приведенное выше доказательство позволяет также найти все изоморфные представления абелевой группы G, степень которых равна сумме инвариантов этой группы.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. О. Повзнер. Про знаходження групи підставлень найменшого степеня ізоморфної даній абелевій групі. «Записки Науково-дослідного інституту математики й механіки і Харківського математичного товариства», сер. 4, т. XIV, 1937, 151—159.

[2]. Г. Хассе. Лекции по теории чисел, Гл. III, § 13, М., 1953.