УДК 517.5

В. Э. КАНЦЕЛЬСОН

ЗАДАЧА О ДОСТРОЙКЕ ЧАСТИЧНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ КАК КЛАССИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА

0. В настоящей работе рассматривается задача о достройке голоморфной внутри единичного круга «частичной» матрицы-функции вида $\begin{bmatrix} a_1(z) & ? \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}$ до голоморфной внутри единичного круга «полной» матрицы-функции $\begin{bmatrix} a_1(z) & w(z) \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}$, имеющей там неотрицательную вещественную часть. Эта задача может рассматриваться как некоторое обобщение задачи о весовой аппроксимации в равномерной метрике антианалитической функции посредством аналитических. Она оказывается так называемой классической интерполяционной задачей. Простейшими и наиболее известными представителями классических интерполяционных задач явля-

ются задача Неванлинны—Пика, степенная и тригонометрическая проблемы моментов. Классические интерполяционные задачи рассматриваются обычно в классах сжимающих аналитических функций (оператор-функций), функций с положительной вещественной (или мнимой) частью, или родственных классах. Характерной чертой таких задач является то, что критерием их разрешимости является положительность некоторого ядра (матрицы), а совокупность решений описывается посредством дробно-линейного преобразования. Сам термин «классические интерполяционные задачи» навеян названием известной монографии Н. И. Ахиезера «Классическая проблема моментов» [1], введен в употребление математиками одесской школы около пятнадцати лет назад и в настоящее время стал общепринятым. Одним из наиболее эффективных способов исследования таких задач является метод, базирующийся на теории расширений операторов в гильбертовом пространстве. Уместно отметить, что метод исследования классических интерполяционных задач, базирующийся на теории расширений, был впервые предложен в пионерской работе М. С. Лившица [2], а интерес М. С. Лившица к теории операторов был в значительной степени стимулирован литографированным курсом лекций Н. И. Ахиезера по теории операторов, читавшимся в Харьковском институте математики в конце 30-х годов.

Цель настоящей работы — включить задачу о достройке в общую теорию классических интерполяционных задач — развитую нами ранее абстрактную схему, и, базируясь на этой схеме, дать критерий разрешимости задачи о достройке и описание множества ее решений. Изложение по необходимости не является автономным.

Обозначения. Через $\boldsymbol{T}$ обозначена единичная окружность комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, через $\boldsymbol{D}$ — открытый единичный круг, $m\,(dt)$ — нормированная мера Лебега на $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{E}$ — гильбертовы пространства, $\operatorname{Hom}(\boldsymbol{H})$ — множество всех непрерывных линейных операторов в $\boldsymbol{H}$, $\operatorname{Hom}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ — множество всех непрерывных операторов, действующих из $\boldsymbol{H}_1$ в $\boldsymbol{H}_2$. Через $\langle x, y\rangle_H$ обозначено скалярное произведение векторов x и y гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$. $H^2_+(\boldsymbol{H})$, $(H^2_-(\boldsymbol{H}))$ — это класс Харди H^2 внутри (вне) единичной окружности, состоящий из функций со значениями в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$.

1^0. Весьма плодотворной оказалась следующая задача: *задана последовательность чисел* $\{\gamma\}_{k=1, 2, 3, \ldots}$. *Когда существует функция* $f(t)$, $f: \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{C}$, *удовлетворяющая условиям*

$$c_{-k}(f) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \quad (1) \quad \text{и} \quad \sup|f(t)| \leqslant 1 \quad (t \in T), \quad (2)$$

и как описать совокупность таких f, *если эта совокупность непуста?*

Здесь $c_{-k}(f) = \int\limits_{\mathbf{T}} f(t)\, t^k m\,(dt)$ — *коэффициенты Фурье функции* f.

Эта задача рассматривалась впервые в работе З. Нехари [3], а затем весьма полно и всесторонне — в цикле работ В. М. Адамяна, Д. З. Арова и М. Г. Крейна [4 — 7]. Поэтому эту задачу называют иногда *задача Нехари*, а иногда — *проблема моментов Адамяна — Арова — Крейна (ААК)*.

В дальнейшем эта задача и некоторые ее обобщения привлекли к себе внимание специалистов по теоретической электротехнике (задача широкополосного согласования, см. [8]), теории автоматического регулирования и управления. Возникло даже научное направление, называемое «H^∞ — теория управления» (см., например, обзоры [9], [10]).

2°. Задача Нехари была сформулирована нами как задача гармонического анализа. Однако она может быть сформулирована и как задача теории аппроксимации. Так как γ_k — коэффициенты Фурье ограниченной функции, то естественно с самого начала предполагать, что $\sum\limits_k |\gamma_k|^2 < \infty$, а тогда функция $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{k\geqslant 1} \gamma_k \zeta^{-k}$ принадлежит классу Харди H^2_- во внешности единичного круга, и существуют граничные значения $\varphi(t) = \sum\limits_{k\geqslant 1} \gamma_k t^{-k}$. Все коэффициенты Фурье с отрицательными номерами функции $w(t) \overset{\text{def}}{=} f(t) - \varphi(t)$ равны нулю, поэтому функцию $w(t)$ можно рассматривать как граничные значения некоторой функции $w(z)$ из класса Харди H^2_+.

Теперь задача Нехари (проблема моментов ААК) может быть сформулирована следующим образом: *на единичной окружности задана антианалитическая функция — функция $\varphi(t) \in H^2_-$. Существует ли аналитическая функция — функция $w(t) \in H^2_+$ такая, что m — почти всюду на единичной окружности выполняется неравенство*

$$|w(t) + \varphi(t)| \leqslant 1 \qquad (t \in \boldsymbol{T}) \tag{3}$$

и если такие функции $w(t)$ существуют, то как описать их совокупность?

Можно рассматривать более общий, чем (3), критерий аппроксимации, заменяя функцию, тождественно равную единице, на общую весовую функцию $R(t)$, т. е. рассматривая вместо условия (3) более общее условие:

$$|w(t) + \varphi(t)| \leqslant R(t) \qquad (t \in \boldsymbol{T}). \tag{4}$$

Здесь $R(t)$, $0 \leqslant R(t) < \infty$ — заданная на $\boldsymbol{T}$ функция — вес. Наконец, можно рассматривать аналогичные задачи не только для скалярных, но и для матричнозначных, и даже для операторнозначных функций. Условие (4) означает, что при почти каждом $t \in \boldsymbol{T}$ значение $w(t)$ лежит в круге с центром в точке $z = -\varphi(t)$ и с радиусом $R(t)$. Матричный круг, однако, имеет два радиуса — правый R_d и левый R_g. Условие, аналогичное (4), примет вид

$$w(t) + \varphi(t) = R_g(t)^{1/2}\, u(t)\, R_d(t)^{1/2} \qquad (t \in T), \tag{5}$$

где $u(t)$ при m — почти каждом $t \in T$ — сжатие: $I - u^*(t)\,u(t) \geqslant 0$. Известно, что оператор u является сжатием тогда и только тогда, когда неотрицательна следующая 2×2 блок-матрица: $\begin{bmatrix} I & u \\ u^* & I \end{bmatrix} \geqslant 0$. Записывая это для*) $u = u(t) = R_g(t)^{-1/2}(w(t) + \varphi(t))\,R_d(t)^{-1/2}$, получим неравенство

$$\begin{bmatrix} I & R_g(t)^{-1/2}(w(t) + \varphi(t))\,R_d(t)^{-1/2} \\ R_d(t)^{-1/2}(w^*(t) + \varphi^*(t))\,R_g(t)^{-1/2} & I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

или равносильно неравенство

$$\begin{bmatrix} R_g(t) & w(t) + \varphi(t) \\ w^*(t) + \varphi^*(t) & R_d(t) \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (t \in \boldsymbol{T}). \tag{6}$$

Задача весовой аппроксимации антианалитической оператор-функции посредством аналитической может быть сформулирована таким образом.

На единичной окружности заданы три оператор-функции: $R_g(t)$, $R_d(t)$, $\varphi(t)$, $R_g: \boldsymbol{T} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1)$, $R_d: \boldsymbol{T} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_2)$, $\varphi: \boldsymbol{T} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_1)$. *При этом оператор-функции* $R_g(t)$, $R_d(t)$ *неотрицательны:* $R_g(t) \geqslant 0$, $R_d(t) \geqslant 0$, $(t \in \boldsymbol{T})$, *а оператор-функция* $\varphi(t)$ *антианалитична. Решением задачи весовой аппроксимации называется любая аналитическая функция* $w(t)$, $w: \boldsymbol{T} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_1)$ *такая, что* m — *почти всюду на единичной окружности выполняется неравенство* (6). *Требуется дать критерий разрешимости задачи весовой аппроксимации и описать совокупность ее решений, если эта совокупность непуста.*

Оператор-функция $\varphi(t)$ антианалитична ($w(t)$) аналитична) в том смысле, что для каждого вектора $x \in \boldsymbol{H}_2$ функция $\varphi(t)\,x$ принадлежит векторному классу Харди $H^2_-(\boldsymbol{H}_1)$ ($w(t)\,x \in H^2_+(\boldsymbol{H}_1)$). Неравенство (6) понимается как неотрицательность оператора в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2$, задаваемого блок-матрицей в левой части (6).

3⁰. Формулировка задачи взвешенной аппроксимации в виде неравенства (6) является для нас тоже промежуточной — этапом на пути к окончательной для нас формулировке задачи о достройке.

Функции $R_g(t)$ и $R_d(t)$ (по крайней мере, если они не очень плохие) допускают гармоническое продолжение внутрь единичного круга, и, значит, существуют голоморфные в $\boldsymbol{D}$ функции $a_1(z)$ и $a_2(z)$, $a_1: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(H_1)$, $a_2: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(H_2)$, такие, что для их граничных значений выполнены равенства**):

$$R_g(t) = a_1(t) + a_1^*(t), \qquad R_d(t) = a_2(t) + a_2^*(t). \tag{7}$$

---

*) Матрицы $R_g(t)$ и $R_d(t)$ могут быть и необратимыми, но следующее рассуждение играет лишь роль наводящего соображения при постановке задачи.

**) Нижеследующие рассуждения носят характер мотивировки постановки задачи поэтому мы не уточняем, к каким классам принадлежит оператор-функции R_g, R_d, a_1, a_2, в каком смысле существуют граничные значения $a_1(t)$, $a_2(t)$ и т. п.

Естественно требовать условий нормировки $a_1(0) = a_1^*(0)$, $a_2(0) = a_2^*(0)$, так как в условиях (7) фигурируют лишь вещественные части голоморфных функций a_1 и a_2, а их мнимые части определяются лишь с точностью до аддитивных констант.

Теперь мы готовы переформулировать задачу весовой аппроксимации антианалитической функции посредством аналитической как задачу о достройке, о которой говорится в заглавии этой статьи. Для удобства мы вместо антианалитической функции $\varphi(t)$ будем рассматривать аналитическую функцию $h(t) = \varphi^*(t)$, $h: \boldsymbol{T} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$. Заданная m — почти всюду на окружности $\boldsymbol{T}$ функция $h(t)$ является граничными значениями голоморфной внутри $\boldsymbol{D}$ функции $h(z)$, $h: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$, удовлетворяющей условию $h(0) = 0$. Неравенство (6) теперь примет вид

$$W(t) + W^*(t) \geqslant 0 \qquad (t \in \boldsymbol{T}), \tag{8}$$

где

$$W(z) = \begin{bmatrix} a_1(z) & w(z) \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix} \tag{9}$$

— оператор-функция, голоморфная внутри $\boldsymbol{D}$, $W: D \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2)$.

Если голоморфная функция $W(z)$ «не слишком плохо» примыкает к своим граничным значениям $W(t)$, то из неравенства (8) на границе $\boldsymbol{T}$ круга $\boldsymbol{D}$ вытекает неравенство внутри круга

$$W(z) + W^*(z) \geqslant 0 \qquad (z \in \boldsymbol{D}). \tag{10}$$

Тем самым мы приходим к следующей формулировке задачи взвешенной аппроксимации антианалитической оператор-функции посредством аналитической.

Задача о достройке. *Задана неполная блок-матрица-функция*

$$\begin{bmatrix} a_1(z) & ? \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

элементы которой $a_1(z)$, $a_2(z)$, $h(z)$ — голоморфные в $\boldsymbol{D}$ оператор-функции, $a_1: D \to \mathrm{Hom}(H_1)$, $a_2: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_2)$, $h: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$.

Решением задачи о достройке называется любая голоморфная в $\boldsymbol{D}$ оператор-функция $w(z)$, $w: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_1)$, такая, что «достроенная» блок-матрица-функция $W(z)$ вида (9) имеет внутри $\boldsymbol{D}$ неотрицательную вещественную часть, т. е. всюду внутри $\boldsymbol{D}$ выполняется неравенство (10). Требуется дать критерий разрешимости задачи о достройке и описать совокупность всех ее решений, если эта совокупность непуста.

В исходной задаче весовой аппроксимации, которая породила задачу о достройке, естественно требовать нормировочных условий:

$$a_1(0) = a_1^*(0), \qquad a_2(0) = a_2^*(0), \qquad h(0) = 0, \tag{12}$$

но можно рассматривать (мы так и делаем) задачу о достройке и без этих условий.

Задача о достройке может быть сформулирована для функций в многосвязных областях, функций на римановых поверхностях с краем, функций многих комплексных переменных. В этих ситуациях задача о достройке представляет собой самостоятельную задачу и не трактуется, вообще говоря, как задача весовой аппроксимации.

Отметим, что оператор-функции $a_j(z)$, $j=1, 2$, обязаны иметь неотрицательную вещественную часть в единичном круге, а значит, допускают интегральное представление Рисса—Херглотца:

$$a_j(z) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{T}} \frac{t+z}{t-z}\Sigma_j(dt) + ic_j, \ (j=1, 2),$$

где $\Sigma_j(dt)$ — некоторые операторнозначные сильно счетно аддитивные меры в $\boldsymbol{H}_j$, $c_j = c_j^*$, $j=1, 2$. Мера Σ_1 играет роль левого радиуса R_g, мера Σ_2 — роль правого радиуса R_d.

Задача о достройке была впервые сформулирована в работе автора [11] как результат продумывания работы Р. Арочены и М. Котляра [12] об интегральном представлении теплицево-ганкелевых ядер, затем эта задача рассматривалась в работе Б. Фрицше и Б. Кирстайна [13].

4°. Обозначим через $K(z)$ следующую операторную блок-матрицу:

$$K(z) = \begin{bmatrix} a_1(z) + a_1^*(z) & h^*(z) \\ h(z) & a_2(z) + a_2^*(z) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Несложно получить в необходимую сторону следующее

Условие разрешимости задачи о достройке.

Для разрешимости задачи о достройке необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие положительности квадратичной формы:

$$\int\limits_{\mathrm{T}} \left\langle K(rt)\begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) \geqslant 0 \ (\forall r \in (0, 1)) \tag{14}$$

для произвольных вектор-столбцов $f = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix}$, *у которых первая компонента* $f_1(z)$ *является антиголоморфной в* $\boldsymbol{D}$ $\mathbf{H}_1$*-значной вектор-функцией, и* $f_1(0) = 0$, *а вторая компонента* $f_2(z)$ *является голоморфной в* $\mathbf{D}$ $\mathbf{H}_2$*-значной вектор-функцией*)*.

Замечание. Очевидно, что ничего не изменится, если рассматривать не все голоморфные f_2 и антиголоморфные f_1, а лишь те, которые разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды, т. е. те, для которых $\sum\limits_k \|f_{j,k}\|_{H_j} < \infty$, $j=1, 2$ (см. подстр. примеч.), или любые другие f_1, f_2 из плотных (в очевидном смысле) множеств.

---

*) Иными словами, функции f_1, f_2 представляются сходящимися внутри $\boldsymbol{D}$ рядами вида $f_1(z) = \sum\limits_{1 \leqslant k < \infty} f_{1,k}\bar{z}^k$, $f_{1,k} \in \boldsymbol{H}_1$, $f_2(z) = \sum\limits_{0 \leqslant k < \infty} f_{2,k}z^k$, $f_{2,k} \in \boldsymbol{H}_2$.

Доказательство необходимости условия разрешимости. Функция $\langle w(z) f_2(z), f_1(z)\rangle_{H_1}$ является голоморфной в D и обращается в ноль в точке $z=0$. Поэтому

$$\int_{\mathrm{T}} \langle w(rt) f_2(rt),\ f_1(rt)\rangle_{H_1} m(dt) = 0,$$

а значит, и

$$\int_{\mathrm{T}} \left\langle \begin{bmatrix} 0 & w(rt) \\ w^*(rt) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix} \right\rangle_{H_1 \oplus H_2} m(dt) = 0.$$

Но ввиду (10) и подавно

$$\int_{\mathrm{T}} \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix} \right\rangle_{H_1 \oplus H_2} m(dt) \geqslant 0,$$

так как $K(z) = W(z) + W^*(z) - \begin{bmatrix} 0 & w(z) \\ w^*(z) & 0 \end{bmatrix}$, то выполнено (14).

5°. Доказательство достаточности условия разрешимости задачи о достройке — дело гораздо более сложное. Наше доказательство опирается на общую теорию классических интерполяционных задач. Мы показываем, как задача о достройке может быть включена в эту теорию.

Общая теория классических интерполяционных задач представляет собой абстрактную схему рассмотрения некоторого класса задач. (К схемам подобного рода относится и так называемый метод направляющих функционалов М. Г. Крейна, но он мало приспособлен для наших целей).

Объекты, фигурирующие в этой абстрактной схеме, таковы.

1. Некоторое комплексное векторное пространство L (не обязательно наделенное топологией) и полуторалинейный функционал $\boldsymbol{K}$ в L. Пространство L называется *внутренним пространством*, а функционал $\boldsymbol{K}$ — *метризующим ядром*.

2. Линейный оператор A, $A\colon L \to L$, называемый *внутренним оператором*.

3. Некоторое гильбертово пространство E, называемое *внешним, или масштабным пространством*, и линейные отображения u, v, $u\colon L \to E$, $v\colon L \to E$, называемые *направляющими отображениями*. Направляющие отображения неравноправны. Одно из них, скажем u, выделено и называется *основным направляющим отображением*, другое, v, называется *сопутствующим направяющим отображением*.

Предполагается, что эти объекты: $\boldsymbol{K}$, A, u, v связаны между собой специальным соотношением. Это соотношение называется *Основное Тождество* (ОТ) и имеет вид ($\forall f,\ g \in L$):

$$\boldsymbol{K}(f, g) - \boldsymbol{K}(Af, Ag) = \langle u(f), v(g)\rangle_E + \langle v(f), u(g)\rangle_E \ (\text{ОТ}).$$

Основное тождество называют также *уравнением Ляпунова.*

Определение. *Совокупность введенных объектов: внутреннего пространства L, метризующего ядра $\boldsymbol{K}$, внутреннего оператора $\boldsymbol{A}$, внешнего пространства $\boldsymbol{E}$ и направляющих отображений u и v, связанных между собой Основным Тождеством, образует интерполяционный комплекс (Interpolation colligation).*

Мы будем предполагать, что выполнено

Спектральное условие. Для всех z, $z \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{T}$, оператор $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ обратим в L, и для любого элемента f из внутреннего пространства L E-значные вектор-функции $u((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f)$, $v((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f)$ являются голоморфными в $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{T}$.

Мы намеренно, чтобы упростить формулировки, привели спектральное условие в столь жесткой форме. Для применения к задаче о достройке этого достаточно. В общем же случае можно вообще даже не предполагать обратимости оператора $z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ где-либо.

Фундаментальным объектом, связанным с интерполяционным комплексом, является *Основное Матричное Неравенство* (ОМН) интерполяционного комплекса. Мы записываем это неравенство в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & |u^*(z)\rangle W^*(z) - |v^*(z)\rangle \\ \hline W(z)\langle u(z)| - \langle v(z)| & \dfrac{W(z) + W^*(z)}{1 - z\bar{z}} \end{array}\right] \geqslant 0 \quad \text{(ОМН)}$$

$W(z)$ в ОМН — это голоморфная в $\boldsymbol{D}$ оператор-функция, $W\colon \boldsymbol{D} \to \to \mathrm{Hom}(E)$.

По определению *ОМН выполняется в точке* $z \in \boldsymbol{D}$, если для любого $f \in L$ и для любого $e \in \boldsymbol{E}$ следующая $2 \otimes 2$ матрица неотрицательна:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K}(f, f) & \\ \hline \langle W(z)\, u((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f),\ e\rangle_E - \langle v((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f),\ e\rangle_E & \begin{array}{c} * \\ \hline \dfrac{W(z) + W^*(z)}{1 - |z|^2} \end{array} \end{array}\right] \geqslant 0 \qquad (15)$$

(12-элемент комплексно сопряжен по отношению к элементу 21).

Решением ОМН называется всякая голоморфная в $\boldsymbol{D}$ оператор-функция $W(z)$, $W: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(E)$, такая, что в каждой точке $z \in \boldsymbol{D}$ выполняется ОМН.

Очевидно, необходимым условием разрешимости ОМН является условие неотрицательности метризующего ядра

$$\boldsymbol{K}(f, f) \geqslant 0 \ (\forall f \in L). \qquad (16)$$

При некотором условии невырожденности неотрицательность метризующего ядра достаточна для разрешимости ОМН.

Условие невырожденности:

$$\sup_{e \in u(L),\ \|e\|=1}\ \inf_{f \in L,\ u(f)=e} (\boldsymbol{K}(f, f) + \|v(f)\|_E^2) < \infty. \qquad (17)$$

Теорема. *Пусть ядро* $\boldsymbol{K}$ *и оператор* $\boldsymbol{A}$ *в векторном пространстве* L *и линейные отображения* u, v *из* L *в некоторое гильбертово пространство* $\boldsymbol{E}$ *образуют интерполяционный комплекс, и пусть выполнены спектральное условие и условие невырожденности.*

Тогда неотрицательность метризующего ядра, т. е. условие (16), является необходимым и достаточным условием разрешимости ОМН интерполяционного комплекса. Совокупность решений ОМН, если она непуста, т. е. если условие (16) *выполнено, параметризуется дробно-линейным преобразованием*

$$W(z) = R_{11}(z) - R_{12}(z)\,[\Omega(z) + R_{22}(z)]^{-1} R_{21}(z), \tag{18}$$

где $\Omega(z)$ — *свободный параметр — пробегает класс всех голоморфных позитивных пар в* E, *а*

$$R(z) = \begin{bmatrix} R_{11}(z) & R_{12}(z) \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{bmatrix} \tag{19}$$

— *некоторая голоморфная в* $\boldsymbol{D}$ *операторная блок-матрица, действующая в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E}$ *и удовлетворяющая условию*

$$R(z) + R^*(z) \geqslant 0 \quad (z \in \boldsymbol{D}). \tag{20}$$

Возможно, что $R_{12} \equiv 0$ или $R_{21} \equiv 0$: тогда решение ОМН единственно — $W(z) = R_{11}(z)$.

Отметим, что если и не предполагать условие невырожденности выполненным, то решение ОМН все равно существует, однако это решение является, вообще говоря, не оператор-функцией, а некоторым проективным объектом, так называемой позитивной парой (грубо говоря, функцией, значения которой являются отношениями, а не операторами).

Доказательство сформулированной выше теоремы мы приводить не будем. Это — один из результатов общей теории классических интерполяционных задач. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы включить задачу о достройке в общую теорию классических интерполяционных задач и воспользоваться этой теоремой.

Отметим, что доказательство теоремы базируется в конечном счете на теории расширений операторов в гильбертовом пространстве. Однако это — далеко не только «чистая» теорема существования. Отправляясь от нее, можно строить эффективные алгоритмы вычисления матрицы $R(z)$, а следовательно, и нахождения решений задач о достройке. При этом дело сводится к нахождению решений систем сингулярных интегральных уравнений на единичной окружности.

6°. Включим задачу о достройке в изложенную общую схему. Исходными данными задачи о достройке являются неполная блок-матрица-функция (11) — тройка оператор-функций $a_1(z)$, $a_2(z)$, $h(z)$. При этом сразу предполагается, что

$$a_1(z) + a_1^*(z) \geqslant 0, \quad a_2(z) + a_2^*(z) \geqslant 0, \quad (z \in \boldsymbol{D}) \tag{21}$$

и что функция $h(z)$ такова, что при каждом $x \in \boldsymbol{H}_1$ функция $h(z)x$ принадлежит классу Харди $H^2_+(\boldsymbol{H}_2)$.

Опишем интерполяционный комплекс, адекватный задаче о достройке.

Масштабным, или внешним, пространством $\boldsymbol{E}$ является ортогональная сумма $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2$.

Внутреннее пространство L состоит, по определению, из пар вектор-функций $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, $f_1 : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{H}_1$, $f_2 : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{H}_2$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$f_1(t) = \sum_{-\infty<k<\infty} f_{1,k} t^k, \quad f_2(t) = \sum_{-\infty<k<\infty} f_{2,k} t^k, \tag{22}$$

где

$$\sum_k \|f_{1,k}\|_{H_1} < \infty, \quad \sum_k \|f_{2,k}\|_{H_2} < \infty.$$

При этом

$$f_{j+}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0\leqslant k<\infty} f_{1,k} t^k, \quad f_{j,-}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{-\infty<k\leqslant -1} f_{2,k} t^k, \quad j = 1, 2. \tag{23}$$

При сделанных об a_1 a_2, h предположениях для любых f, g из L существует предел

$$\boldsymbol{K}(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to 1-0} \int_T \left\langle K(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_{1,-}(t) \\ g_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt). \tag{24}$$

Этот предел $\boldsymbol{K}(f, g)$ и объявим метризующим ядром внутреннего пространства L. Условие положительности (14), очевидно, равносильно условию положительности этого метризующего ядра.

Внутренний оператор A — это просто оператор умножения на t, если $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \in L$, то $Af \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ tf_2(t) \end{bmatrix}$.

Самое нетривиальное — указать направляющие отображения.

Основное направляющее отображение u, $u : L \to E$, определяется так.

$$\text{Если } f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \in L, \text{ то } u(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ -tf_2(t) \end{bmatrix} m(dt). \tag{25}$$

Сопутствующее направляющее отображение v, v: $L \to \boldsymbol{E}$, определяется так. Если $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \in L$, то

$$v(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to 1-0} \int_T \begin{bmatrix} a_1(rt) & h^*(rt) \\ h(rt) & a_2^*(rt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ tf_2(t) \end{bmatrix} m(dt). \tag{26}$$

Теорема. *Определенные в этом n°. объекты* $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{A}$, u, v *образуют при сделанных относительно* a_1, a_2, h *предположениях интерполяционный комплекс: для них справедливо Основное Тождество.*

Кроме того, выполняются сформулированное в п°. 5 спектральное условие и Условие невырожденности.

Доказательство. Основное Тождество проверяется непосредственным вычислением. Пусть f, $g \in L$, $f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, $g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$. Тогда $(Af)(t) = \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ tf_2(t) \end{bmatrix}$, $(Ag)(t) = \begin{bmatrix} tg_1(t) \\ tg_2(t) \end{bmatrix}$. Для вычисления величины $K(Af, Ag)$ нам понадобятся выражения $(tf_1)_-(t)$, $(tf_2)_+(t)$, $(tg_1)_-(t)$, $(tg_2)_+(t)$. Имеем $(tf_1)_-(t) = tf_{1,-}(t) - (tf_1)_0$,

$$(tf_1)_0 = \int_T tf_1(t)\, m(dt), \quad (tf_2)_+(t) = tf_{2,+}(t) + (tf_2)_0,$$

$$(tf_2)_0 = \int_T tf_2(t)\, m(dt)$$

и аналогичные равенства для $(tg_1)_-(t)$, $(tg_2)_+(t)$. Далее, используя выражение (24) для ядра $\boldsymbol{K}$, имеем

$$\boldsymbol{K}(f, g) - \boldsymbol{K}(Af, Ag) =$$
$$= \lim_{r\to 1-0} \left\{ \int_T \left\langle K(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_{1,-}(t) \\ g_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) - \right.$$
$$\left. - \int_T \left\langle K(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) - (tf_1)_0 \\ tf_{2,+}(t) + (tf_2)_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} tg_{1,-}(t) - (tg_1)_0 \\ tg_{2,+}(t) + (tg_2)_0 \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) \right\} =$$

(так как $t\bar{t} = 1$ при $t \in \boldsymbol{T}$)

$$= \lim_{r\to 1-0} \left\{ \int_T \left\langle K(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (tg_1)_0 \\ -(tg_2)_0 \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) + \right.$$
$$+ \int_T \left\langle \begin{bmatrix} (tf_1)_0 \\ -(tf_2)_0 \end{bmatrix}, K(rt) \begin{bmatrix} tg_{1,-}(t) \\ tg_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) -$$
$$\left. - \int_T \left\langle K(rt) \begin{bmatrix} (tf_1)_0 \\ -(tf_2)_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (tg_1)_0 \\ -(tg_2)_0 \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) \right\}.$$

Или, используя определение (25) основного направляющего отображения u,

$$\boldsymbol{K}(f, g) - \boldsymbol{K}(Af, Ag) = \tag{27}$$
$$= \left\langle \lim_{r\to 1-0} \int_T K(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt),\ u(g) \right\rangle_E +$$
$$+ \left\langle u(f),\ \lim_{r\to 1-0} \int_T K(rt) \begin{bmatrix} tg_{1,-}(t) \\ tg_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) \right\rangle_E -$$
$$- \left\langle \left(\lim_{r\to 1-0} \int_T K(rt)\, m(dt) \right) u(f),\ u(g) \right\rangle_E.$$

Преобразуем первое слагаемое правой части (27). Обозначим

$$M(z) = \begin{bmatrix} a_1(z) & 0 \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}, \quad M^*(z) = \begin{bmatrix} a_1^*(z) & h^*(z) \\ 0 & a_2^*(z) \end{bmatrix}.$$

Имеем $K(z) = M(z) + M^*(z)$. Далее

$$\int_T K(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) = \tag{28}$$

$$= \int_T (M(rt) + M^*(rt)) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) =$$

(так как $f_{1,-}(t) = f_1(t) - f_{1,+}(t)$, $f_{2,+}(t) = f_2(t) - f_{2,-}(t)$)

$$= \int_T M(rt) \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} m(dt) - \int_T M(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,+}(t) \\ -tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) +$$

$$+ \int_T M^*(rt) \begin{bmatrix} 0 \\ tf_2(t) \end{bmatrix} m(dt) + \int_T M^*(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ -tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt).$$

Так как функции $M(z)$, $zf_{1,+}(z)$, $zf_{2,+}(z)$ голоморфны в $\boldsymbol{D}$ и последние две из них обращаются в ноль в точке $z = 0$, то

$$\int_T M(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,+}(t) \\ -tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) = 0 \quad (0 \leqslant r < 1). \tag{29}$$

По аналогичным причинам

$$\int_T M^*(t) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ -tf_{2,-}(t) \end{bmatrix} m(dt) = M^*(0) \begin{bmatrix} (tf_1)_0 \\ -(tf_2)_0 \end{bmatrix} =$$

$$= M^*(0)\, u(f). \tag{30}$$

Из (26), (28), (29) и (30) получаем, что

$$\lim_{r \to 1-0} \int_T K(rt) \begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) = v(f) + M^*(0)\, u(f). \tag{31}$$

Далее, очевидно, что

$$\int_T K(rt)\, m(dt) = K(0) = M(0) + M^*(0). \tag{32}$$

Из (27), (31) и (32) получаем, что $\boldsymbol{K}(f, g) - \boldsymbol{K}(Af, Ag) = \langle v(f) + M^*(0)u(f), u(g)\rangle_E + \langle u(f), v(g) + M^*(0)\, u(g)\rangle_E - \langle (M(0) + M^*(0))u(f), u(g)\rangle_E = \langle u(g), v(g)\rangle_E + \langle v(f), u(g)\rangle_E$.
Основное тождество доказано.

Спектральное условие очевидно:

$$u\left((A-zI)^{-1}f\right)=\int_T\begin{bmatrix}f_1(t)\\-f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt),\tag{33}$$

$$v\left((A-zI)^{-1}f\right)=\tag{34}$$

$$=\lim_{r\to 1-0}\int_T\begin{bmatrix}a_1(rt) & h^*(rt)\\ h(rt) & a_2^*(rt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt).$$

Проверим, наконец, условие невырожденности. Пусть $e=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\in E$, $h_1\in H_1$, $h_2\in H_2$, $\|e\|_E^2=1$, т. е. $\|h_1\|_{H_1}^2+\|h_2\|_{H_2}^2=1$. Положим $\hat f_1(t)=h_1t^{-1}$, $\hat f_2(t)=h_2t^{-1}$, $\hat f=\begin{bmatrix}\hat f_1(t)\\ \hat f_2(t)\end{bmatrix}$, $\hat f\in L$. Для этого $\hat f$ имеем $u(\hat f)=e$, $\hat f_{1,-}(t)=\hat f_1(t)$, $\hat f_{2,+}(t)=0$. Поэтому $K(\hat f,\ \hat f)=\lim\limits_{r\to 1-0}\int_T\langle k_{11}(rt)\,h_1,\ h_1\rangle_{H_1}=\langle k_{11}(0)\,h_1,\ h_1\rangle\leqslant\|k_{11}(0)\|\,\|h_1\|^2\leqslant\|k_{11}(0)\|$.

Далее имеем

$$v(\hat f)=\lim_{r\to 1-0}\int_T\begin{bmatrix}a_1(rt) & h^*(rt)\\ h(rt) & a_2^*(rt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\-h_2\end{bmatrix}m(dt)=$$

$$=\begin{bmatrix}a_1(0) & h^*(0)\\ h(0) & a_2^*(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\-h_2\end{bmatrix},\ \text{откуда}\ \|(\hat f)\|^2\leqslant\left\|\begin{bmatrix}a_1(0) & h^*(0)\\ h(0) & a_2^*(0)\end{bmatrix}\right\|.$$

Тем самым условие невырожденности (17) выполнено.

Теорема доказана.

Определение. *Интерполяционный комплекс, введенный в этом п. °, называется интерполяционным комплексом, ассоциированным с задачей о достройке.*

7°. В этом разделе декларируем, что Основное Матричное Неравенство интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке, является адекватным этой задаче.

Теорема. 1) *Пусть оператор-функция $w(z)$ является решением задачи о достройке частичной матрицы-функции* (11). *Тогда достроенная блок-матрица-функция $W(z)$ вида* (9) *является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке.*

2) *Пусть блок-матрица-функция $W(z)=\begin{bmatrix}w_{11}(z) & w_{12}(z)\\ w_{21}(z) & w_{22}(z)\end{bmatrix}$ является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке частичной матрицы-функции* (11). *Тогда для этой $W(z)$ обязаны выполняться равенства $w_{11}(z)=a_1(z)$, $w_{22}(z)=a_2(z)$, $w_{21}(z)=h(z)$ и, следовательно, оператор-функция $w(z)$, $w(z)\overset{\text{def}}{=}w_{12}(z)$, является решением задачи о достройке.*

Доказательство утверждения 1. Пусть $W(z)$ — какая-нибудь «достроенная» блок-матрица-функция вида (9), удовлетворяющая условию (10). Пусть $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$ — произвольный элемент из L и $e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ — произвольный элемент из $\boldsymbol{E}$. Из (10) и подавно следует, что

$$\int_T \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \left(\begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} + \frac{\bar{t}}{\bar{t} - \bar{z}} e \right), \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} + \frac{\bar{t}}{\bar{t} - \bar{z}} e \right\rangle_E m(dt) \geqslant 0.$$

Так как вместо f здесь можно взять αf, а вместо e — βe, где α, β — произвольные комплексные числа, то из условия неотрицательности скалярной величины — левой части последнего неравенства — вытекает неотрицательность $2 \otimes 2$ матрицы Γ:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{35}$$

где

$$\Gamma_{11} = \lim_{r \to 1-0} \int_T \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt),$$

$$\Gamma_{22} = \lim_{r \to 1-0} \int_T (W(rt) + W^*(rt)) \frac{1}{|t - z|^2} m(dt),$$

$$\Gamma_{21} = \lim_{r \to 1-0} \int_T \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, e \right\rangle_E \frac{t}{t - z} m(dt), \tag{36}$$

$\Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*$. Так как $W(z) + W^*(z) = K(z) + \begin{bmatrix} 0 & w(z) \\ w^*(z) & 0 \end{bmatrix}$ и так как

$$\int_T \left\langle \begin{bmatrix} 0 & w(rt) \\ w^*(rt) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) = 0 \ \text{(см. п°. 4)},$$

то

$$\Gamma_{11} = \boldsymbol{K}(f, f), \tag{37}$$

где $\boldsymbol{K}(f, g)$ — ядро, определенное в (24) — метризирующее ядро интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке.

Функция $W(z) + W^*(z)$ — гармоническая в $\boldsymbol{D}$. Поэтому

$$\int_T (W(rt) + W^*(rt)) \frac{1}{|t - z|^2} m(dt) = \frac{W(rz) + W^*(rz)}{1 - |z|^2}$$

и

$$\Gamma_{22} = \left\langle \frac{W(z) + W^*(z)}{1 - |z|^2} e, e \right\rangle. \tag{38}$$

Самое хлопотное — вычислить Γ_{21}. Преобразуем выражение

$$\int_T (W(rt)+W^*(rt))\begin{bmatrix} f_{1,-}(t)\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) = \tag{39}$$

$$= \int_T W(rt)\begin{bmatrix} f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) + \int_T W(rt)\begin{bmatrix} 0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) +$$

$$+ \int_T W^*(rt)\begin{bmatrix} f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) + \int_T W^*(rt)\begin{bmatrix} 0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt).$$

Имеем

$$\int_T W(rt)\begin{bmatrix} f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) = \int_T W(rt)\begin{bmatrix} f_1(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) -$$

$$- \int_T \frac{(W(rt)-W(rz))}{t-z}\,t\begin{bmatrix} f_{1,+}(t)\\ 0\end{bmatrix} m(dt) - W(rz)\int_T \begin{bmatrix} f_1(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) +$$

$$+ W(rz)\int_T \begin{bmatrix} f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt).$$

орое слагаемое в правой части последнего равенства равно лю, так как подынтегральная функция есть граничное значе-е функции, голоморфной внутри D, непрерывной вплоть до гра-цы и обращающейся в нуль в точке $z=0$. Четвертое слагаемое кже равно нулю, так как подынтегральная функция есть granич-е значение функции, голоморфной во внешности окружности T, епрерывной вплоть до границы и обращающейся в нуль в точке $=\infty$. Таким образом,

$$\int_T W(rt)\begin{bmatrix} f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) = \tag{40}$$

$$= \int_T W(rt)\begin{bmatrix} f_1(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) - W(rz)\int_T \begin{bmatrix} f_1(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt).$$

Далее, аналогично

$$\int_T W(rt)\begin{bmatrix} 0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) =$$

$$= \int_T \frac{W(rt)-W(rt)}{t-z}\,t\begin{bmatrix} 0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix} m(dt) + W(rz)\int_T \begin{bmatrix} 0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt).$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как $\int_T f_{2,-}(t)\,\frac{t}{t-z}\,m(dt) = 0$, то второе слагаемое есть

$$\int_T \begin{bmatrix} 0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt) = \int_T \begin{bmatrix} 0\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}\,m(dt).$$

Таким образом,

$$\int_T W(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt)=W(rz)\int_T\begin{bmatrix}0\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt). \qquad (41)$$

Третье слагаемое в правой части равенства (39) исчезает

$$\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt)=0, \qquad (42)$$

так как подынтегральная функция есть граничное значение функции, голоморфной вне окружности T и обращающейся в нуль в точке $z=\infty$. Наконец, так как по тем же причинам

$$\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_{2,-}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt)=0, \text{ то}$$

$$\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt)=\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt). \qquad (43)$$

Объединяя (39), (40), (41), (42) и (43), получим

$$\int_T (W(rt)+W^*(rt))\begin{bmatrix}f_{1,-}(t)\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt)= \qquad (44)$$

$$=\int_T\begin{bmatrix}w_{11}(rt) & w_{21}^*(rt)\\ w_{21}(rt) & w_{22}^*(rt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt)-$$

$$-W(rz)\int_T\begin{bmatrix}f_1(t)\\ -f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt). \qquad (45)$$

Вспомним, что $w_{11}(z)=a_1(z)$, $w_{22}(z)=a_2(z)$, $w_{21}(z)=h(z)$. Наконец, вспоминая (36), (34) и (35), получим, что

$$\Gamma_{21}=\langle v((A-zI)^{-1}f),\ e\rangle_E-\langle w(z)\,u((A-zI)^{-1}f),\ e\rangle_E. \qquad (46)$$

Из (35), (37), (38) и (46) вытекает, что «достроенная» матрица-функция $W(z)$ вида (9) является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке. Утверждение 1 теоремы этого п^0. доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть некоторая блок-матрица-функция $W(z)$ является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке. Фиксируем произвольно точку $z\in D$ и выберем в ОМН (15) элемент f специальным способом. Именно, положим $f=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$, где

$$f_1(t)=\frac{\bar t}{\bar t-\bar z}h_1\left(=\frac{h_1}{1-t\bar z},\ t\in T\right),\ \ f_2(t)\equiv 0,\ \ h_1\in H_1.$$

Имеем $f_{1,-}(t)\equiv 0$, $f_{2,+}\equiv 0$, и, значит, согласно определению (24) ...ризующего ядра $\boldsymbol{K}$, для этого f имеем $\boldsymbol{K}(f, f)=0$. Из ОМН ...) теперь следует, что для этого f выполнено

$$\langle W(z)\, u\,((\boldsymbol{A}-z\boldsymbol{I})^{-1} f,\ e\rangle_E-\langle v\,((\boldsymbol{A}-z\boldsymbol{I})^{-1} f,\ e\rangle_E=0. \tag{47}$$

Подставляя явное выражение для f в (33) и (34), получим

$$u\,((\boldsymbol{A}-z\boldsymbol{I})^{-1} f)=\frac{1}{1-|z|^2}\begin{bmatrix}h_1\\ 0\end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$v\,((\boldsymbol{A}-z\boldsymbol{I})^{-1} f)=\frac{1}{1-|z|^2}\begin{bmatrix}a_1(z)\,h_1\\ h(z)\,h_1\end{bmatrix}. \tag{49}$$

Так как $e\in\boldsymbol{E}$ и $h_1\in\boldsymbol{H}_1$ произвольны, то из (47), (48), (49) вытекает, что $w_{11}(z)=a_1(z)$, $w_{21}(z)=h(z)$. Для установления равенства $w_{22}(z)=a_2(z)$ перейдем к «двойственному» ОМН. Из общей теории интерполяционных задач известно, что если ОМН некоторого интерполяционного комплекса выполняется в точке $z\in\boldsymbol{D}$, то это ОМН выполняется и в точке $z^*\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\bar z}$, если понимать $W(z^*)\overset{\mathrm{def}}{=}-W^*(z)$. Иными словами, двойственное ОМН имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{K}(f,f) & \\ \hline \langle W^*(z)\,u\,((\boldsymbol{A}-z^*\boldsymbol{I})^{-1} f),\ e\rangle_E+\langle v\,((\boldsymbol{A}-z^*\boldsymbol{I})^{-1} f),\ e\rangle_E & * \\ \hline & \left\langle\dfrac{W(z)+W^*(z)}{1-|z|^2}\,e,\ e\right\rangle_E\end{array}\right]\geqslant 0. \tag{50}$$

Фиксируем теперь точку $z\in\boldsymbol{D}$ и положим в двойственном ОМН (50) $f=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$, где $f_2(t)\equiv 0$, $f_2(t)=\dfrac{\bar t}{\bar t-\bar z^*}\left(=\dfrac{z}{z-t}h_2 \text{ при } t\in\boldsymbol{T}\right)$, $h_2\in\boldsymbol{H}_2$. Имеем $f_{1,-}(t)\equiv 0$, $f_{2,+}(t)\equiv 0$, и, значит, (24), $\boldsymbol{K}(f, f)=0$. Из ОМН (50) теперь следует, что для этого f

$$W^*(z)\,u\,((\boldsymbol{A}-z^*\boldsymbol{I})^{-1} f)+v\,((\boldsymbol{A}-z\boldsymbol{I})^{-1} f)=0. \tag{51}$$

Подставляя явное выражение для f в (33) и (34), получим

$$u\,((\boldsymbol{A}-z^*\boldsymbol{I})^{-1} f)=\frac{1}{1-|z^*|^2}\begin{bmatrix}0\\ h_2\end{bmatrix}, \tag{52}$$

$$v\,((\boldsymbol{A}-z^*\boldsymbol{I})^{-1} f)=\frac{1}{|z^*|^2-1}\begin{bmatrix}h^*(z)\,h_2\\ a_2^*(z)\,h_2\end{bmatrix}. \tag{53}$$

Из (51), (52) и (53) вытекает, что $w_{21}(z)=h(z)$ (это мы уже получили ранее) и $w_{22}(z)=a_2(z)$. Утверждение 2 теоремы доказано.

Отметим, что из этой теоремы и теоремы п^0. 5 вытекает в достаточную сторону условие разрешимости задачи о достройке п^0. 4.

Этой теоремой описание множества решений задачи о достройке сводится к описанию множества решений ОМН, ассоциированного с этой задачей интерполяционного комплекса. Для ОМН этого комплекса вполне неопределенная ситуация заведомо не может иметь места: у всех решений ОМН этого комплекса элементы $w_{11}(z)$, $w_{22}(z)$, $w_{21}(z)$ одинаковы, а различаться эти решения могут только элементами $w_{12}(z)$.

Это обеспечивается специальной структурой матрицы $R(z)$, (19), фигурирующей в описании множества решений ОМН. Исследованию структуры этой матрицы $R(z)$ мы посвятим отдельную работу.

8°. Обсудим теперь некоторые другие возможные постановки задач о достройке. Во-первых, можно достраивать матрицы-функции (неполные) до матриц-функций (полных) из классов, отличных от классов матриц с положительной вещественной частью, например, до сжимающих. Еще один пример: неполная, или частичная, матрица-функция вида (11) задана в комплексной плоскости, разрезанной по положительной полуоси. Требуется достроить ее до матрицы-функции класса Стилтьеса. Далее, можно налагать еще дополнительные интерполяционные условия, например, требовать, чтобы в заданных точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ достраивающая функция $w(z)$ удовлетворяла еще и условиям вида $w(z_j)=w_j$, $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Наконец, можно рассматривать частичные, или неполные, матрицы-функции, у которых множество незаданных элементов имеет более общую структуру, чем у матрицы вида (11). Речь идет, конечно, о блок-матрицах размера не 2×2, а $n\times n$. Отметим, что для постоянных (не зависящих от z) матриц (а не матриц-функций) в этом направлении получен в последние годы ряд результатов. Работы в этом направлении выполнили, в частности, Ch. Davis, Ch. R. Johnson, L. Rodman, I. Gohberg и ряд других математиков.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 2. *Лившиц М. С.* Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов // ДАН СССР. 1944. **44**, № 1. С. 3—7. 3. *Nehari Z.* On bounded bilinear forms // Ann. of Math. 1957. **65**, No. 1. P. 153—162. 4. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных проблемах Каратеодори—Фейера и Ф. Рисса // Функцион. анализ и его прил. 1968. **2**, вып. 1. С. 1—19. 5. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и И. Шура // Функцион. анализ и его прил. 1968. **2**, вып. **4**. С. 1—17. 6. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелевого оператора и обобщенная задача Шура — Такаги // Мат. сб. 1971. **86**, № 1. С. 34—75. 7. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения // Изв. АН Арм. ССР. 1971. **6**, № 2—3 С. 87—112. 8. *Helton J. W.* Operator Theory, Analytic Functions, Matrices, and Electrical Engineering. Providence // Amer. Math. Soc. 134 p. (Reg. Conf. Ser. Math., No. 68). 9. *Francis B. A., Doyle J. C.* Linear control theory with H^∞ optimality criterion // SIAM Journ. Contr. Optim. 1987. **25**, №. 4. P. 815—844. 10. *Francis B. A.* A guide to H^∞-control theory // Modell., Robustness and Sensitivity Reduc. Contr. Syst. (Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Groningen, Dec. 1—5, 1986). Berlin, 1987. P. 1—30. 11. *Кацнельсон В. Э.* Интегральные представления эрмитово-положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари. **1** // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1985. Вып. 43. С. 54—70. 12. *Arocena R., Cotlar M.* Generalized Toeplitz kernels and Adamjan-Arov-Krein moment problems // Toeplitz Centennial. Operator Theory, Advances and Applications. 1982. **4**. P. 37—55. Birkhäuser. 1982. 13. *Fritzsche B., Kirstein B.* On generalized Nehary Problem // Math. Nachr. 1988. **138**. P. 217—237.

Поступила в редколлегию 06.03.90