ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ СИСТЕМАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ[1]

Я. Л. Геронимус

Харьков

§ 1. Рассмотрим непрерывную дробь

$$K(z) \sim \frac{\lambda_1 |}{| z-\alpha_1} - \frac{\lambda_2 |}{| z-\alpha_2} - \ldots, \tag{1}$$

где $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty \neq 0$ произвольные комплексные числа; если ввести многочлен

$$P_k^{(i)}(z) = \begin{vmatrix} z-\alpha_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_{i+1} & z-\alpha_{i+1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & z-\alpha_{i+k-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{i+k-1} & z-\alpha_{i+k-1} \end{vmatrix}, (i, k = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

то подходящая дробь $K_n(z)$ порядка n такова

$$K_n = \frac{R_{n-1}}{P_n}, \; P_n = P_n^{(1)}, \; R_{n-1} = \lambda_1 P_{n-1}^{(2)}\ [2].$$

Выведем одну простую вспомогательную формулу, необходимую для дальнейшего; мы можем записать $K_n(z)$ следующим образом:

$$K_n(z) = \frac{\lambda_1 |}{| z-\alpha_1} - \ldots - \frac{\lambda_m |}{| z-\alpha_m} - \frac{\lambda_{m+1}}{| z-\alpha_{m+1}} - \ldots - \frac{\lambda_n \; |}{| z-\alpha_n} =$$

$$= \frac{\lambda_1 |}{| z-\alpha_1} - \ldots - \frac{\lambda_m \; |}{| z-\alpha_m - \tau},$$

$$\tau = \frac{\lambda_{m+1} |}{| z-\alpha_{m+1}} - \ldots - \frac{\lambda_n |}{| z-\alpha_n} = \lambda_{m+1} \frac{P_{n-m-1}^{(m+2)}}{P_{n-m}^{(m+1)}};$$

[1] Краткая формулировка результатов настоящей статьи (без доказательств) приведена в [1], в работе [2] рассмотрен более общий случай предельной периодичности; см. также статьи; [3, § 5], [4], где рассмотрены аналогичные вопросы.

[2] Там, где не может быть недоразумений, мы будем иногда опускать для краткости аргумент; многочлены $P_k^{(i)}(z)$ были рассмотрены Т. И. Стильтьесом [5, § 2] см. также О. Перрон [6, § 5].

отсюда по известным свойствам непрерывных дробей имеем

$$K_n = \frac{R_{m-1} - \tau R_{m-2}}{P_m - \tau P_{m-1}},$$

и таким образом находим

$$\frac{R_{m-1} P_{n-m}^{(m+1)} - \lambda_{m+1} R_{m-2} P_{n-m-1}^{(m+2)}}{P_m P_{n-m}^{(m+1)} - \lambda_{m+1} P_{m-1} P_{n-m-1}^{(m+2)}} = \frac{R_{n-1}}{P_n},$$

откуда вытекают основные соотношения

$$P_n = P_m P_{n-m}^{(m+1)} - \lambda_{m+1} P_{m-1} P_{n-m-1}^{(m+2)}, \tag{3}$$

$$R_{n-1} = R_{m-1} P_{n-m}^{(m+1)} - \lambda_{m+1} R_{m-2} P_{n-m-1}^{(m+2)}. \tag{4}$$

Из этих формул легко выводим соотношение

$$\begin{aligned} P_n R_{m-1} - P_m R_{n-1} &= -\lambda_{m+1} P_{n-m-1}^{(m+2)} (P_{m-1} R_{m-1} - P_m R_{m-2}) = \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{m+1} P_{n-m-1}^{(m+2)}, \end{aligned} \tag{5}$$

ибо, как известно,

$$P_m R_{m-2} - P_{m-1} R_{m-1} = -\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m. \tag{6}$$

Рассмотрим тот частный случай, когда имеет место **периодичность**, то есть

$$\begin{gathered} \alpha_n = a_m, \ \lambda_n = l_m, \ n - s \equiv m \,(\mathrm{mod}\, k); \ (m = 1, 2, \ldots, k), \\ n \geqslant s + 1, \ s \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Введем для простоты обозначение

$$p_\nu^{(i)} = \begin{vmatrix} z - a_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_{i+1} & z - a_{i+1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & z - a_{i+\nu-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & l_{i+\nu-1} & z - a_{i+\nu-1} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

причем снова положим

$$p_\nu = p_\nu^{(1)}, \quad r_\nu = l_1 p_\nu^{(2)}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{8'}$$

Так как дробь $K(z)$ является периодической, то ее легко вычислить; мы имеем

$$\begin{gathered} K(z) = \frac{\lambda_1 |}{| z - \alpha_1} - \ldots - \frac{\lambda_s |}{| z - \alpha_s - \Delta}, \\ \Delta = \frac{l_1 |}{| z - a_1} - \ldots - \frac{l_k |}{| z - a_k - \Delta}; \end{gathered} \tag{9}$$

отсюда находим

$$\Delta = \frac{r_{k-1} - \Delta r_{k-2}}{p_k - \Delta p_{k-1}}, \quad \Delta^2 p_{k-1} - \Delta (p_k + r_{k-2}) + r_{k-1} = 0.$$

В точках, где $p_{k-1}(z)| \neq 0$ имеем

$$\Delta = \frac{p_k + r_{k-2} \pm \sqrt{(p_k + r_{k-2})^2 - 4p_{k-1} r_{k-1}}}{2p_{k-1}};$$

так как по (6)

$$p_{k-1} r_{k-1} - p_k r_{k-2} = l_1 l_2 \dots l_k,$$

то, вводя обозначение

$$l_1 l_2 \dots l_k = l, \tag{10}$$

получим окончательно

$$\Delta = \frac{p_k + r_{k-2} \pm \sqrt{(p_k - r_{k-2})^2 - 4l}}{2p_{k-1}}. \tag{11}$$

Рассмотрим алгебраическую функцию

$$\Phi(z) = \sqrt{\{p_k(z) - r_{k-2}(z)\}^2 - 4l}, \tag{12}$$

и обозначим через $\{z_\nu\}_1^{2r}$, $(r \leqslant k)$ ее точки разветвления; построим двулистную Риманову поверхность функции $\Phi(z)$ и обозначим через $\Phi_{1,2}(z)$ ее ветви, причем пусть

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_1(z)}{z^k} = 1, \quad \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_2(z)}{z^k} = -1, \;\; \Phi_2(z) = -\Phi_1(z). \tag{13}$$

Так как по (9) мы должны иметь

$$\lim_{z\to\infty} \Delta' = 0,$$

то окончательно находим

$$\Delta = \frac{p_k + r_{k-2} - \Phi_1}{2p_{k-1}}. \tag{14}$$

Теперь нетрудно найти функцию $K(z)$ по (9); мы имеем

$$K = \frac{R_{s-1} - \Delta R_{s-2}}{P_s - \Delta P_{s-1}} = \frac{N + R_{s-2}\Phi_1}{M + P_{s-1}\Phi_1},$$

где мы положили

$$M = 2P_s p_{k-1} - (p_k + r_{k-2}) P_{s-1}, \quad N = 2R_{s-1} p_{k-1} - \\ - (p_k + r_{k-2}) R_{s-2}. \tag{16}$$

Умножая числитель и знаменатель (15) на $M - P_{s-1}\Phi_1$, получим

$$K = \frac{MN - R_{s-2}P_{s-1}\Phi_1^2 + \Phi_1(MR_{s-2} - NP_{s-1})}{M^2 - P_{s-1}^2\Phi_1^2}. \tag{17}$$

Вычисляя знаменатель, найдем

$$M^2 - P_{s-1}^2\Phi_1^2 = 4P_s^2 p_{k-1}^2 - 4P_s P_{s-1} p_{k-1}(p_k + r_{k-2}) + (p_k + \\ + r_{k-2})^2 P_{s-1}^2 - P_{s-1}^2[(p_k + r_{k-2})^2 - 4p_{k-1} r_{k-1}] = \\ = 4p_{k-1}\left\{P_s^2 p_{k-1} - P_s P_{s-1}(p_k + r_{k-2}) + P_{s-1}^2 r_{k-1}\right\}. \tag{18}$$

В числителе имеем по (6)

$$MR_{s-2}-NP_{s-1}=2p_{k-1}(P_sR_{s-2}-P_{s-1}R_{s-1})=$$
$$=-2\lambda p_{k-1},\quad \lambda=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s.$$

Далее находим

$$MN-R_{s-2}P_{s-1}\Phi_1^2=[2P_sp_{k-1}-(p_k+r_{k-2})P_{s-1}][2R_{s-1}p_{k-1}-$$
$$-(p_k+r_{k-2})R_{s-2}]-R_{s-2}P_{s-1}[(p_k+r_{k-2})^2-4p_{k-1}r_{k-1}]=$$
$$=4p_{k-1}\left\{P_sR_{s-1}p_{k-1}-\frac{p_k+r_{k-2}}{2}(P_sR_{s-2}+P_{s-1}R_{s-1})+r_{k-1}P_{s-1}R_{s-2}\right\}.$$

Окончательно получим

$$K=\frac{A-\frac{\lambda}{2}\sqrt{(p_k-r_{k-2})^2-4l}}{C},\tag{19}$$

где многочлены $A(z)$, $C(z)$ таковы

$$A=P_sR_{s-1}p_{k-1}-\frac{p_k+r_{k-2}}{2}(P_sR_{s-2}+P_{s-1}R_{s-1})+$$
$$+P_{s-1}R_{s-2}r_{k-1},\tag{19'}$$
$$C=P_s^2p_{k-1}-P_sP_{s-1}(p_k+r_{k-2})+P_{s-1}^2r_{k-1}.$$

Пользуясь формулой (3), можно записать многочлен $C(z)$ еще и так:

$$C=P_s(P_sp_{k-1}-P_{s-1}r_{k-2})-P_{s-1}(P_sp_k-P_{s-1}r_{k-1})=$$
$$=P_{k+1-s}P_s-P_{k+s}P_{s-1}.\tag{19''}$$

Мы могли бы представить функцию $K(z)$ в такой форме

$$K=\frac{\lambda_1|}{|z-\alpha_1}-\ldots-\frac{\lambda_{m-1}|}{|z-\alpha_{m-1}-\Delta'},\quad m=s+rk+\nu,\quad \nu\geqslant 1,\tag{20}$$

$$\Delta'=\frac{\lambda_m|}{|z-\alpha_m}-\ldots-\frac{\lambda_{m+k-1}|}{|z-\alpha_{m+k-1}-\Delta'}=\frac{l_\nu|}{|z-a_\nu}-\frac{l_{\nu+1}|}{|z-a_{\nu+1}}-$$
$$-\ldots-\frac{l_1|}{|z-a_1}-\ldots-\frac{l_{\nu-1}|}{|z-a_{k1}-\Delta'},$$

откуда

$$\Delta'=\frac{P_k^{(m)}+R_{k-2}^{(m)}-\sqrt{\{P_k^{(m)}-R_{k-2}^{(m)}\}^2-4l}}{2P_{k-1}^{(m)}}.\tag{20'}$$

Так как точки разветвления функции $K(z)$ должны получиться теми же самыми, то, очевидно, многочлен p_k-r_{k-2} не изменяется при любой круговой перестановке чисел

$$a_1,\quad a_2,\ \ldots,\ a_k$$
$$l_1,\quad l_2,\ \ldots,\ l_k.$$

Таким образом имеем при любом $m \geqslant s+1$

$$P_k^{(m)} - R_{k-2}^{(m)} = P_k^{(m)} - \lambda_m P_{k-2}^{(m+1)} = p_k - r_{k-2}. \tag{21}$$

§ 2. Мы видели, что, задавая произвольно $2k$ параметров

$$\{ a_i \}_1^k, \qquad \{ l_i \}_1^k \neq 0,$$

мы определили все точки разветвления функции $\Phi(z)$ по формуле

$$\left\{ p_k(z) - r_{k-2}(z) \right\}^2 - 4l = \prod_{i=1}^{2r} (z - z_i), \quad r \leqslant k.$$

Рассмотрим обратную задачу: каким условиям надо подчинить заданные точки $\left\{ z_\nu \right\}_1^{2k}$, чтобы их можно было принять за точки разветвления функции $\Phi(z)$?

Вводя обозначения

$$\prod_{\nu=1}^{2k} (z - z_\nu) = z^{2k} + A_1 z^{2k-1} + \ldots + A_{2k-1} z + A_{2k}, \tag{22}$$

$$p_k(z) - r_{k-2}(z) = z^k + B_1 z^{k-1} + \ldots + B_{k-1} z + B_k, \tag{23}$$

мы имеем

$$\left(z^k + B_1 z^{k-1} + \ldots + B_k \right)^2 = z^{2k} + A_1 z^{2k-1} + \ldots + A_{2k} + 4l,$$

откуда легко находим

$$1 + \frac{B_1}{z} + \ldots + \frac{B_k}{z^k} = \left\{ 1 + \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_{2k} + 4l}{z^{2k}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, мы легко выразим неизвестные коэффициенты $\left\{ B_i \right\}_1^k$ через коэффициенты $\left\{ A_j \right\}_1^k$

$$\begin{gathered} B_1 = \binom{\frac{1}{2}}{1} A_1, \quad B_2 = \binom{\frac{1}{2}}{1} A_2 + \binom{\frac{1}{2}}{2} A_1^2, \\ B_3 = \binom{\frac{1}{2}}{1} A_3 + \binom{\frac{1}{2}}{2} 2A_1 A_2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} A_1^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_k = \binom{\frac{1}{2}}{1} A_k + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot [2A_1 A_{k-1} + 2A_2 A_{k-2} + \ldots] + \ldots \end{gathered} \tag{25}$$

Задавая произвольно коэффициенты $\{ A_\nu \}_1^k$ многочлена (22), мы можем определить по ним коэффициенты $\{ B_i \}_1^k$ многочлена (23), а также все дальнейшие коэффициенты $\{ A_j \}_{k+1}^{2k-1}$; приравнивая нулю коэффициент при z^{-2k}, найдем $A_{2k} + 4l$.

Таким образом, задавая произвольно только $k+1$ точек $\{ z_\nu \}$, или $k+1$ коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{2k}$, мы сможем по ним найти все коэффициенты $B_1, B_2, \ldots, B_k$ и коэффициент l; следовательно, мы полностью определим многочлен

$$\left\{p_k(z) - z_{k-2}(z)\right\}^2 - 4l = \prod_{i=1}^{2k}(z - z_i); \tag{26}$$

так как многочлен в фигурных скобках зависит от $2k$ параметров $\{a_i\}_1^k$, $\{l_i\}_1^k$, то, приравнивая его коэффициенты найденным величинам $B_1, B_2, \ldots, B_k$, найдем k соотношений между параметрами, которые вместе с условием $l_1 l_2 \ldots l_k = l$ показывают, что можно задать произвольно $k-1$ параметров.

В конце работы будет рассмотрен в качестве иллюстрации случай $k=2$.

§ 3. Произведем теперь некоторое преобразование уравнения в конечных разностях

$$y_n - (z - \alpha_n) y_{n-1} + \lambda_n y_{n-2} = 0, \tag{27}$$

частным решением которого являются многочлены

$$y_n = P_n, \quad y_n = R_{n-1}. \tag{28}$$

Мы имеем по (3)

$$P_{n+2k} = P_{n+1} P_{2k-1}^{(n+2)} - \lambda_{n+2} P_n P_{2k-2}^{(n+3)},$$

$$P_{n+k} = P_{n+1} P_{k-1}^{(n+2)} - \lambda_{n+2} P_n P_{k-2}^{(n+3)}.$$

откуда легко находим

$$P_{n+2k} P_{k-1}^{(n+2)} - P_{n+k} P_{2k-1}^{(n+2)} =$$

$$= P_n\left\{\lambda_{n+2}\left[P_{2k-1}^{(n+2)} P_{k-2}^{(n+3)} - P_{2k-2}^{(n+3)} P_{k-1}^{(n+2)}\right]\right\}.$$

На основании (5) выражение в фигурных скобках равно

$$-\lambda_{n+2}\lambda_{n+3}\ldots\lambda_{n+k+1} P_{k-1}^{(n+k+2)},$$

и, таким образом, мы находим

$$P_{n+2k} P_{k-1}^{(n+2)} - P_{n+k} P_{2k-1}^{(n+2)} + \lambda_{n+2}\lambda_{n+3}\ldots\lambda_{n+k+1} P_n P_{k-1}^{(n+k+2)} = 0. \tag{29}$$

Далее имеем по (3)

$$P_{2k-1}^{(n+2)} = P_k^{(n+2)} P_{k-1}^{(n+k+2)} - \lambda_{n+k+2} P_{k-1}^{(n+2)} P_{k-2}^{(n+k+3)},$$

и, следовательно, получим

$$P_{n+2k} P_{k-1}^{(n+2)} - P_{n+k}\left\{P_k^{(n+2)} P_{k-1}^{(n+k+2)} - \lambda_{n+k+2} P_{k-1}^{(n+2)} P_{k-2}^{(n+k+3)}\right\} +$$

$$+ \lambda_{n+2}\lambda_{n+3}\ldots\lambda_{n+k+1} P_n P_{k-1}^{(n+k+2)} = 0. \tag{30}$$

Это уравнение значительно упрощается в случае периодичности (7); полагая $n \geqslant s-1$, мы имеем

$$P_{k-1}^{(n+2)} \equiv P_{k-1}^{(n+k+2)}, \quad \lambda_{n+2}\lambda_{n+3}\ldots\lambda_{n+k+1} = l.$$

Кроме того, по (20) имеем

$$P_k^{(n+2)}-\lambda_{n+2}P_{k-2}^{(n+3)}\equiv p_k-r_{n-2},\quad n\geqslant s-1;$$

окончательно находим

$$P_{n+2k}-P_{n+k}(p_k-r_{k-2})+lP_n=0,\quad n\geqslant s-1. \tag{31}$$

Теорема 1. Решение уравнения в конечных разностях

$$y_n-(z-\alpha_n)y_{n-1}+\lambda_n y_{n-2}=0 \tag{32}$$

при условии периодичности

$$\alpha_n=a_m,\quad \lambda_n=l_m,\quad n-s\equiv m(\operatorname{mod}\cdot k);\ (m=1,\ 2,\ \dots,\ k),$$
$$n\geqslant s+1,\ s\geqslant 0, \tag{33}$$

удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами

$$y_{n+2k}-(p_k-r_{k-2})y_{n+k}+ly_n=0,\quad n\geqslant s-1, \tag{34}$$

где при обозначении (8) имеем:

$$p_k=p_k^{(1)}\quad r_{k-2}=l_1p_{k-2}^{(2)},\quad l=l_1l_2\dots l_k.$$

Найдем теперь в явной форме решение уравнения (34). Составляя характеристическое уравнение

$$\rho^{2k}-\rho^k(p_k-r_{k-2})+l=0,$$

получим

$$\rho_{1,2}^k=\frac{p_k-r_{k-2}\pm\sqrt{(p_k-r_{k-2})^2-4l}}{2}=\frac{p_k-r_{k-2}+\Phi_{1,2}}{2}. \tag{35}$$

Находим корни характеристического уравнения

$$\rho_1,\ \omega\rho_1,\ \omega^2\rho_1,\dots,\ \omega^{k-1}\rho_1,$$

$$\rho_2,\ \omega\rho_1,\ \omega^2\rho_2,\dots,\ \omega^{k-1}\rho_2,\quad \omega=e^{\frac{2\pi i}{k}};$$

общее решение уравнения (34) таково

$$y_n=\rho_1^n[C_1+C_2\omega^n+\dots+C_\kappa\omega^{(\kappa-1)n}]+\rho_2^n[C_1'+C_2'\omega^n+\dots+$$
$$+C_k'\omega^{(\kappa-1)n}]=A_k(\omega^n)\rho_1^n+B_k(\omega^n)\rho_2^n, \tag{36}$$

где мы положили

$$A_k(x)=\sum_{\nu=1}^{k}C_\nu x^{\nu-1},\qquad B_k(x)=\sum_{\nu=1}^{k}C_\nu' x^{\nu-1};$$

при этом, как легко видеть

$$A_k(\omega^{rk+\nu})=A_k(\omega^\nu),\quad B_k(\omega^{r\kappa+\nu})=B_k(\omega^\nu),\quad (r=1,\ 2,\dots).$$

Пусть $n=rk+\nu$, где $s-1\leqslant\nu\leqslant k+s-2$, $r=0,\ 1,\dots$, в таком случае мы найдем из (36)

$$y_n=A_k(\omega^\nu)\rho_1^n+B_k(\omega^\nu)\rho_2^n,\quad y_\nu=A_k(\omega^\nu)\rho_1^\nu+B_k(\omega^\nu)\rho_2^\nu,$$

$$y_{\nu+k}=A_k(\omega^\nu)\rho_1^{\nu+k}+B_k(\omega^\nu)\rho_2^{\nu+k},$$

откуда, исключая A и B, легко находим решение в явном виде

$$y_{\nu+rk}=\frac{\rho_1^{rk}(y_{\nu+k}-\rho_2^k y_\nu)-\rho_2^{rk}(y_{\nu+k}-\rho_1^k y_\nu)}{\rho_1^k-\rho_2^k},\quad (s-1\leqslant\nu\leqslant k+s-2). \tag{37}$$

Мы имеем из (35) $\rho_1\rho_2=\sqrt[k]{l}$; рассмотрим замкнутую область, характеризуемую неравенством

$$|\rho_1|\geqslant\sqrt[2k]{|l|}(1+\varepsilon),\qquad \varepsilon>0. \tag{38}$$

Как видно из (37), мы имеем

$$y_{\nu+rk}=\rho_1^{rk}\frac{y_{\nu+k}-\rho_2^k y_\nu}{\rho_1^k-\rho_2^k}\left\{1-\frac{y_{\nu+k}-\rho_1^k y_\nu}{y_{\nu+k}-\rho_2^k y_\nu}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{rk}\right\},$$

причем при условии (38)

$$\left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\leqslant\frac{1}{(1+\varepsilon)^2};$$

поэтому при $r\to\infty$ имеем асимптотическую формулу

$$y_{\nu+rk}=\rho_1^{rk}\frac{y_{\nu+k}-\rho_2^k y_\nu}{\rho_1^k-\rho_2^k}\left\{1+0(\eta^{2rk})\right\},\qquad \eta\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}<1, \tag{39}$$

справедливую во всех точках области (38), в которых $y_{\nu+k}-\rho_2^k y_\nu\neq 0$. Преобразуем числитель и знаменатель (15); рассматриваем Δ' из (20)

$$\Delta'=\frac{P_k^{(m)}+\lambda_m P_{k-2}^{(m+1)}-\sqrt{\left\{P_k^{(m)}-\lambda_m P_{k-2}^{(m+1)}\right\}^2-4l}}{2P_{k-1}^{(m)}}.$$

Пользуясь (21), мы имеем

$$\rho_2^k=\frac{P_k^{(m)}-\lambda_m P_{k-2}^{(m+1)}-\sqrt{\left\{P_k^{(m)}-\lambda_m P_{k-2}^{(m+1)}\right\}^2-4l}}{2},$$

откуда

$$\Delta' P_{k-1}^{(m)}=\rho_2^k+\lambda_m P_{k-2}^{(m+1)}. \tag{40}$$

Пользуясь этим, мы имеем по (20)

$$K=\frac{R_{m-2}-\Delta' R_{m-3}}{P_{m-1}-\Delta' P_{m-2}}=\frac{R_{m-2}P_{k-1}^{(m)}-\lambda_m R_{m-3}P_{k-2}^{(m+1)}-R_{m-3}\rho_2^k}{P_{m-1}P_{k-1}^{(m)}-\lambda_m P_{m-2}P_{k-2}^{(m+1)}-P_{m-2}\rho_2^k}.$$

Пользуясь (3), находим окончательно при любом $m\geqslant s+1$

$$K=\frac{R_{m+k-3}-\rho_2^k R_{m-3}}{P_{m+k-2}-\rho_2^k P_{m-2}}. \tag{41}$$

Если воспользоваться формулой (37) полагая сперва

$$y_{\nu+rk}=P_{\nu+rk},$$

а затем

$$y_{\nu+rk}=R_{\nu+rk-1},$$

то мы легко найдем в явном виде подходящую дробь порядка $\nu+rk$

$$K_{\nu+rk}=\frac{R_{\nu+rk-1}}{P_{\nu+rk}}=\frac{\rho_1^{rk}(R_{\nu+k-1}-\rho_2^k R_{\nu-1})-\rho_2^{rk}(R_{\nu+k-1}-\rho_1^k R_{\nu-1})}{\rho_1^{rk}(P_{\nu+k}-\rho_2^k P_\nu)-\rho_2^{rk}(P_{\nu+k}-\rho_1^k P_\nu)}. \tag{42}$$

В области, где выполняется условие

$$|\rho_1|>|\rho_2|,$$

существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{R_{\nu+rk-1}}{P_{\nu+rk}}=K=\frac{R_{\nu+k-1}-\rho_2^k R_{\nu-1}}{P_{\nu+k}-\rho_2^k P_\nu},\quad \nu\geqslant s-1. \tag{43}$$

Таким образом, непрерывная дробь (1) сходится при условии периодичности во всех точках области $|\rho_1|>|\rho_2|$, равномерно в замкнутой области (38) за исключением тех точек, где знаменатель (43) обращается в нуль.

§ 4. Рассмотрим теперь случай, наиболее интересный с точки зрения приложений, когда все параметры $\{\alpha_\nu\}_1^\infty$, $\{\lambda_\nu\}_1^\infty>0$ вещественны; в этом случае, как известно, многочлены $\{P_m(x)\}$ ортогональны относительно некоторого обложения $d\psi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_m(x)P_n(x)\,d\psi(x)=0,\quad m\neq n, \tag{44}$$

причем непрерывная дробь $K(z)$ имеет следующее значение:

$$K(z)=\frac{A(z)-\frac{\lambda}{2}\Phi_1(z)}{C(z)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{z-x},\quad J_m z>0. \tag{45}$$

Пользуясь известной формулой обращения Стильтьеса—Перрона

$$\frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2}-\frac{\psi(x_0+0)+\psi(x_0-0)}{2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{y\to+0}\int_{x_0}^{x}J_m[K(x+iy)]\,dx, \tag{46}$$

мы легко сможем найти обложение $d\psi(x)$ по функции $K(z)$. Обозначим через E множество отрезков вещественной оси

$$E=[z_1,\ z_2]+[z_3,\ z_4]+\ldots+[z_{2r-1},\ z_{2r}],\qquad r\leqslant k. \tag{47}$$

Теорема 2. Если в уравнении в конечных разностях

$$y_n-(x-\alpha_n)y_{n-1}+\lambda_n y_{n-2}=0,$$

частным решением которого являются ортогональные многочлены $y_n=P_n(x)$, имеет место периодичность

$$\lambda_n=l_m,\ \alpha_n=a_m,\ \ n-s\equiv m(\mathrm{mod}\,k);\ \ m=1,\ 2,\ldots,\ k,\ \ n\geqslant s+1,\ \ s\geqslant 0,$$

то $\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$. Функция $\psi_1(x)$ является абсолютно непрерывной компонентой, причем для $x\in E$ имеем

$$d\psi_1(x) = p(x)\,dx, \quad p(x) = \left| \frac{\sqrt{4l - \{p_\kappa(x) - r_{\kappa-2}(x)\}^2}}{C(x)} \right|, \tag{48}$$

где многочлен $C(x)$ дается формулой (19′) или (19″); функция $\psi_2(x)$, являющаяся функцией скачков, имеет разрывы непрерывности в тех корнях $\{x_\nu\}$ многочлена $C(x)$, для которых выполняется неравенство

$$|P_{m+\kappa}(x_\nu)| < \sqrt{l}\, |P_m(x_\nu)|,$$

где $m \geqslant s-1$[1]; скачки функции $\psi_2(x)$, то есть концентрированные массы обложения $d\psi(x)$, таковы:

$$\mu_\nu = \psi(x_\nu + 0) - \psi(x_\nu - 0) = 2 \lim_{x \to x_\nu} |p(x)(x - x_\nu)|. \tag{50}$$

Для доказательства заметим прежде всего, что функция, выражаемая интегралом (45), регулярна при $J_m z \neq 0$; поэтому все точки разветвления и все полюсы функции $K(z)$ должны лежать на вещественной оси.

Вспоминая (15), (16), (18) имеем

$$(M + P_{s-1}\Phi_1)(M - P_{s-1}\Phi_1) = 4p_{\kappa-1}C;$$

полюсы $\{x_\nu\}$ функции $K(z)$ являются нулями функции $M + P_{s-1}\Phi_1$, т. е. мы имеем

$$M(x_\nu) + P_{s-1}(x_\nu)\Phi_1(x_\nu) = 0; \tag{51}$$

массы $\{\mu_\nu\}$, очевидно, таковы

$$\mu_\nu = \frac{A(x_\nu) - \frac{\lambda}{2}\Phi_1(x_\nu)}{C'(x_\nu)}. \tag{52}$$

Вспоминая (15), (18′) имеем:

$$(N + R_{s-2}\Phi_1)(M - P_{s-1}\Phi_1) = 4p_{\kappa-1}\left(A - \frac{\lambda}{2}\Phi_1\right)$$

Если изменить знак у Φ_1, то получим

$$(N - R_{s-2}\Phi_1)(M + P_{s-1}\Phi_1) = 4p_{\kappa-1}\left(A + \frac{\lambda}{2}\Phi_1\right).$$

Подставляя значение x_ν и пользуясь (51), найдем

$$A(x_\nu) + \frac{\lambda}{2}\Phi_1(x_\nu) = 0,$$

откуда вытекает более простая формула для концентрированных масс

$$\mu_\nu = -\frac{\lambda\Phi_1(x_\nu)}{C'(x_\nu)}. \tag{53}$$

Ясно, что точки концентрации масс лежат вне множества E, ибо на этом множестве $\Phi_1(z)$ принимает чисто мнимые значения, или равна нулю. Вычитая из $K(z)$ функцию

[1] Выполнение неравенства (49) для какого-то одного значения m, где $m \geqslant s-1$, влечет за собою, как легко видеть, выполнение того же неравенства для всех значений $m \geqslant s-1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi_2(x)}{z-x} = \sum \frac{\mu_\nu}{z-x_\nu},$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi_1(x)}{z-x} = K(z) - \sum \frac{\mu_\nu}{z-x_\nu} = \frac{A(z) - \frac{\lambda}{2}\Phi_1(z)}{C(z)} - \sum \frac{\mu_\nu}{z-x_\nu},$$

или, после приведения к общему знаменателю,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi_1(x)}{z-x} = \frac{A(z) - \frac{\lambda}{2}\Phi_1(z) - C_1(z)}{C(z)} = K_1(z),$$

где $C_1\{z\}$ некоторый многочлен. Функция $K_1\{z\}$ имеет только точки разветвления $\{z_i\}_1^{2r}$ и является ограниченной функцией; для $x \in E$ ее мнимая часть такова:

$$J_m K_1(x) = J_m K(x) = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\sqrt{4l - [p_k(x) - r_{k-2}(x)]^2}}{C(x)} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2} p(x); \tag{54}$$

поэтому для любого отрезка $[\alpha, \xi] \in E$ имеем

$$\lim_{y \to +0} \int_{\alpha}^{\xi} J_m K_1(x+iy)\,dx = -\frac{\lambda}{2} \int_{\alpha}^{\xi} p(x)\,dx,$$

откуда вытекает на основании (46) справедливость (48), если отбросить множитель $\frac{\lambda}{2}$.

Из (53) имеем более простую формулу для масс

$$\mu_\nu = 2\left\{-\frac{\frac{\lambda}{2}\Phi_1(x_\nu)}{C'(x_\nu)}\right\} = \frac{\lambda}{2} \cdot 2 \lim_{x \to x_\nu} |p(x)(x-x_\nu)|,$$

откуда вытекает (50).

Из формулы (41) вытекает, что при любом $m \geqslant s-1$ имеем

$$\left|\frac{P_{m+\kappa}(x_\nu)}{P_m(x_\nu)}\right| = |\rho_2^\kappa(x_\nu)|;$$

так как точки $\{x_\nu\}$ лежат вне множества E, на котором $|\rho_1| = |\rho_2|$ то $|\rho_2(x_\nu)| < |\rho_1(x_\nu)|$, то есть $|\rho_2^k(x_\nu)| < \sqrt{l}$; отсюда вытекает (49).

§ 5. Рассмотрим в заключение несколько примеров.

Пусть сначала $k=1$. Полагая для простоты

$$l_1 = \lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \ldots = \frac{1}{4}, \quad a_1 = \alpha_{s+1} = \alpha_{s+2} = \ldots = 0, \tag{55}$$

получим следующий результат: на отрезке $[-1, +1]$ имеем непрерывное распределение масс с плотностью

$$p(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_s^2(x) - xP_s(x)P_{s-1}(x) + \frac{1}{4}P_{s-1}^2(x)}; \tag{56}$$

кроме того, в тех корнях знаменателя, для которых

$$|P_s(x_\nu)| < \frac{1}{2} |P_{s-1}(x_\nu)|, \tag{57}$$

имеются концентрированные массы (50).

Если задать параметры

$$\{\alpha_\nu\}_1^s, \quad \{\lambda_\nu\}_1^s > 0, \tag{58}$$

то этим определяется оба многочлена $P_{s-1}(x)$, $P_s(x)$, причем все их корни вещественны, различны и перемежаются; покажем обратное — если задать два произвольных многочлена $P_{s-1}(x)$, $P_s(x)$, все корни которых вещественны, различны и перемежаются, то этим однозначно определяются все параметры (58). Действительно, из (27) имеем

$$\frac{P_s}{P_{s-1}} = x - \alpha_s - \lambda_s : \frac{P_{s-2}}{P_{s-1}},$$

откуда легко находим разложение в непрерывную дробь

$$\frac{P_{s-1}}{P_s} = \frac{1\,|}{|\,x-\alpha_s} - \frac{\lambda_s\,|}{|\,x-\alpha_{s-1}} - \ldots - \frac{\lambda_2\,|}{|\,x-\alpha_1}. \tag{59}$$

Пользуясь (37), мы можем представить многочлен $P_n(x)$ в явном виде

$$P_n = \frac{\rho_1^{n-s+1}(P_s - \rho_2 P_{s-1}) - \rho_2^{n-s+1}(P_s - \rho_1 P_{s-1})}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\rho_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2-1}}{2}, \tag{60}$$

и получить асимптотическую формулу; по (39) имеем

$$P_n = \frac{\rho_1^{n-s+1}(P_s - \rho_2 P_{s-1})}{\sqrt{x^2-1}} \left\{1 + O\left[\eta^{2(n-s+1)}\right]\right\}, \quad \eta < 1; \tag{60'}$$

она справедлива в области $|x + \sqrt{x^2-1}| > 1 + \varepsilon$, за исключением точек концентрации масс.

Пусть, в частности, $s = 2$, причем зададим многочлены

$$P_1 = x, \quad P_2 = x^2 - \alpha^2, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \tag{61}$$

По формуле (56) мы имеем для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ плотность распределения масс

$$p(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_1^2 - x^2}, \qquad x_1 = -x_2 = \frac{2\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2-1}}. \tag{62}$$

Для выяснения, будут ли в точках x_1, x_2 концентрированные массы, пользуемся (57); мы имеем

$$\left|\frac{P_2(x_1)}{P_1(x_1)}\right|=\left|\frac{x_1^2-\alpha^2}{x_1}\right|=\frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2-1}};$$

поэтому мы будем иметь концентрированные массы лишь при условии

$$\frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2-1}}<\frac{1}{2},\qquad \alpha>\frac{\sqrt{2}}{2};$$

величины масс находим по формуле (50)

$$\mu_1=\mu_2=2\lim_{x\to x_1}|\,p(x)(x-x_1)\,|=\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{x_1}=1-\frac{1}{2\alpha^2},\quad \alpha>\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{62'}$$

В качестве второго примера положим $s=0$, $k=2$; так как

$$p_k(z)-r_{k-2}(z)=(z-a_1)(z-a_2)-l_1-l_2, \tag{63}$$

то, вводя новое обозначение

$$z-\frac{a_1+a_2}{2}=y,\qquad \frac{a_1-a_2}{2}=c,$$
$$a^2=c^2+(\sqrt{l_1}-\sqrt{l_2})^2,\quad b^2=c^2+(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2})^2, \tag{64}$$

мы получим

$$p_k-r_{k-2}=y^2-\frac{a^2+b^2}{2},\qquad \Phi_1=\sqrt{(y^2-a^2)(y^2-b^2)}. \tag{65}$$

На множестве

$$E=[-b,\ -a]+[a,\ b]$$

мы имеем

$$p(y)=\frac{\sqrt{(b^2-y^2)(y^2-a^2)}}{|\,y-c\,|},\quad -a<c<a. \tag{66}$$

В точке $y=c$ может быть сконцентрирована масса

$$\mu=2\lim_{y\to c}|\,p(y)(y-c)\,|=2\sqrt{(b^2-c)^2(c^2-a^2)}=2\,|\,l_1-l_2\,|\,. \tag{67}$$

Пользуемся критерием (49), где положим $m=0$

$$\left|\frac{P_2(c)}{P_0(c)}\right|=\left|c^2-\frac{b^2+a^2}{2}+l_1\right|=l_2<\sqrt{l_1l_2},$$

то есть концентрированная масса будет лишь при условии $l_1>l_2$.

В данном случае имеем:

$$z_1=\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2+(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2})^2},$$
$$z_2=\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2+(\sqrt{l_1}-\sqrt{l_2})^2}, \tag{68}$$
$$z_3=\frac{a_1+a_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2+(\sqrt{l_1}-\sqrt{l_2})^2},$$

$$z_4 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + (\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})^2};$$

в соответствии с общей теорией величины z_1, z_2, z_3, z_4 связаны одним соотношением $z_4 - z_3 = z_2 - z_1$; задавая произвольно три из них и найдя четвертую, мы найдем величины

$$B_1 = -(a_1 + a_2), \quad B_2 = a_1 a_2 - l_1 - l_2, \quad l = l_1 l_2. \tag{69}$$

Следовательно, один из параметров a_1, a_2, l_1, l_2 может быть выбран произвольно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус. О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных полиномов. ДАН, т. XXIX, 1940, 536—8.

2. Я. Л. Геронимус. О характере решения проблемы моментов в случае предельно-периодической ассоциированной дроби. Изв. АН СССР, т. V, 1941, 203—10.

3. Я. Л. Геронимус. О полиномах, ортогональных на круге, о тригонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с нею функциях типа Каратеодори-Шура. Математический сб., т. 15 (57), 1944, 99—130.

4. Я. Л. Геронимус. Про деякі перетворення неперервних дробів та відповідні системи ортогональних поліномів. Збірник праць ін-ту математики АН УРСР, № 8, 1946, 121—33.

5. Т. И. Стильтьес. Исследования о непрерывных дробях. Харьков—Киев, ДНТВУ, 1936.

6. O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner, 1913.